



## بررسی عددی و تحلیلی مجموعه امواج ضربه‌ای لامبدا شکل در مجرای همگرا-واگرا

رضا کمالی<sup>۱\*</sup>، سید محمود موسوی<sup>۲</sup>، پروانه هوشیاری<sup>۳</sup> و اندیشه خانه‌زر<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

<sup>۴</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۲/۰۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۸/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۱/۲۶

### چکیده

در کار حاضر ساختار امواج ضربه‌ای رشته‌ای لامبدا شکل در یک مجرای همگرا-واگرا با به‌کارگیری رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ بر اساس مدل‌های زیرشبکه‌ای مختلف در نرم‌افزار فلونت و در کنار روابط تحلیلی، مطالعه گردیده است. بدین منظور، از روش انطباقی شبکه‌ها به صورت دینامیکی، مقداردهی اولیه به صورت ترکیبی، مطالعه انباشتگی خطاها از رابطه تحلیلی سمیرنوف و به منظور پیش‌بینی ساختار و تعداد امواج لامبدا شکل به عنوان یک هدف مهم در شناسایی ساختار و قدرت امواج، از روش سایه‌نگاری عددی استفاده شده است. نتایج حاصل از به‌کارگیری مدل‌های زیرشبکه‌ای مختلف با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه و مشخص شد که مدل WMLES با وجود استفاده از تعداد شبکه پایین‌تر و زمان کمتر برای انجام محاسبات، از دقت بالاتری در تشخیص رفتار جریان برخوردار است. در ادامه، به بررسی تغییرات در ساختار جریان تراکم‌پذیر موجود هنگام تغییر در طول واگرایی مجرا و نیز اعمال پرش دمایی دیواره در منطقه‌ی تولید امواج رشته‌ای لامبدا پی برداشته شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول واگرایی، حداقل فشار دیواره کاهش، مقدار بیشینه ماخ جریان افزایش یافته و محل وقوع موج ضربه‌ای لامبدا شکل به سمت گلوگاه مجرا حرکت می‌کند. همچنین، با افزایش دمای ناپیوسته دیواره، مقدار کمینه فشار دیوار افزایش و حداکثر ماخ جریان کاهش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** امواج ضربه‌ای رشته‌ای لامبدا شکل؛ شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ؛ مدل‌های زیر شبکه‌ای؛ طول واگرایی؛ پرش دمایی.

## Numerical and Analytical Investigation of Shock Train in a Convergent Divergent Nozzle

R. Kamali<sup>1\*</sup>, S.M. Mousavi<sup>2</sup>, P. Houshyari<sup>3</sup>, A. Khaneh-Zar<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Prof., Mech. Eng., School of Mech. Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran.

<sup>2</sup> Ph.D. Student, School of Mech. Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran.

<sup>3</sup> MS.c Student, School of Mech. Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran.

<sup>4</sup> MS.c Student, School of Aero. Eng., Sharif University, Tehran, Iran.

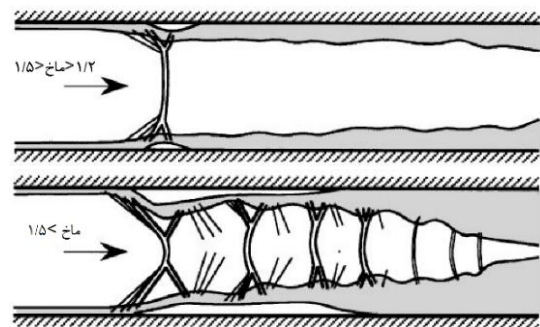
### Abstract

In the present work, the shock train structure in a convergent-divergent nozzle investigated using large eddy simulation (LES) methodology based on different subgrid models, including Smagorinsky-Lilly (SL), Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity (WALE) and Algebraic Wall-Modeled LES (WMLES) as well as various analytical equations. For gaining a distinct illustration of shock-wave structures, shadowgraph contours are applied to analyze structures of fine flow. The simulated results are obtained at the same geometrical and boundary conditions used in the available experimental data to provide a rational validation. The results of different subgrid models are shown that the WMLES produces more accurate results than SL and WALE models. Thereupon, an investigation of the influence of convergency length and discontinuity of nozzle wall temperature on physics of flow for controlling the shock behavior is carried out. The results show that the minimum wall pressure as well as the maximum flow Mach number increase as the convergency length rises. In addition, by growth in discontinuous wall temperature, the minimum wall pressure and the maximum flow Mach number reduce.

**Keywords:** Shock Train; LES; Subgrid Models; Divergency length; Discontinuity in Wall Temperature.

## ۱- مقدمه

امواج ضربه‌ای لامبدا شکل که به نام‌های مختلف از قبیل، قطار امواج ضربه‌ای و مجموعه امواج دوشاخه‌ای شناخته می‌شود، پدیده خاص در جریان‌های داخلی بخصوص در اسکرم جت‌ها و ایزولاتورها بوده که اغلب در اثر تعامل بین لایه‌مرزی و موج ضربه‌ای قوی به وجود می‌آید [۱]. هنگامی که لایه‌مرزی وجود دارد، موج ضربه‌ای احتمالاً نمی‌تواند به سمت دیوار گسترش یابد، زیرا ضخیم‌تر شدن لایه‌مرزی بالادست موج ضربه‌ای، سبب پیدایش یک موج مایل می‌شود. موج منعکس شده در محل تلاقی موج ضربه‌ای عمودی و موج مایل به علت بقای جرم لازم است؛ در نتیجه مجموعه‌ای از امواج ضربه‌ای دوشاخه یا لامبدا شکل حاصل می‌شود و ارتفاع موج (نه طول آن)، با ضخیم‌تر شدن لایه‌مرزی به‌صورت پیوسته‌ای کاهش می‌یابد. سرانجام جریان از خلال ترکیبی از امواج عمودی و مایل به‌سرعت صوت و به دنبال آن به سرعت‌های مادون صوت کاهش خواهد یافت. به‌طور کلی، آرایش موج ضربه‌ای بسته به عدد ماخ ورودی جریان، به چند دسته تقسیم می‌شوند که موج ضربه‌ای دوشاخه‌ای و مجموعه امواج ضربه‌ای دو نمونه از آن‌ها می‌باشند. بازه‌ی ماخ ورودی برای پیکربندی امواج ضربه‌ای ذکر شده در شکل ۱ نمایان است. با در نظر گرفتن شکل، هنگامی که عدد ماخ ورودی جریان بالاتر از ۱/۵ است، چند موج ضربه‌ای دوشاخه‌ای (لامبدا) در امتداد جریان تشکیل می‌شود. این پیکربندی موج ضربه‌ای، به موج ضربه‌ای رشته‌ای لامبداپی معروف است. افزایش پیوسته فشار استاتیک و کاهش پیوسته عدد ماخ، در صورتی که طول کانال به حد کافی بزرگ باشد، از ویژگی‌های مجموعه امواج ضربه‌ای است.



شکل ۱- نحوه‌ی آرایش امواج ضربه‌ای

با توجه به اهمیت پدیده امواج ضربه‌ای رشته‌ای لامبدا شکل در مسائل آئرودینامیک نوین، در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققان چه از دیدگاه عددی و چه دیدگاه آزمایشگاهی واقع شده است. از جمله، لین و تام [۲]، اثرات دما و انتقال حرارت را بر شکل‌گیری قطار امواج ضربه‌ای به‌صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزودن گرما به جریان باعث افزایش ضخامت لایه‌مرزی و کاهش عدد ماخ خواهد شد. هوآنگ و همکارانش [۳]، رفتار موج ضربه‌ای را در ایزولاتور اسکرم جت به‌صورت سه‌بعدی مورد مطالعه عددی قرار دادند و گزارش نمودند که با افزایش فشار خروجی، امواج ضربه‌ای به سمت ورودی حرکت می‌کنند. گاون و همکارانش [۴]، سامانه‌ی امواج ضربه‌ای را برای یک مجرا با دو گلوگاه به‌صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی نمودند. آن‌ها وابستگی عدد رینولدز و عدد ماخ نسبت به ساختار و موقعیت مجموعه امواج ضربه‌ای را به‌صورت آزمایشگاهی نشان دادند. همچنین آن‌ها نتیجه گرفتند که افزایش نسبت مساحت دومین گلوگاه به اولین گلوگاه، منجر به افزایش عدد ماخ و طول امواج مربوطه به دلیل اثر قوی‌تر لایه‌مرزی بر رفتار جریان می‌شود. گاون و همکارانش [۴]، سپس به صورت ۳ بعدی نشان دادند که مدل آشفتگی تنش برشی رینولدز، دارای دقت خوبی برای شبیه‌سازی این‌گونه از جریان‌ها می‌باشند. گرونزا و البویر [۵]، تولید امواج ضربه‌ای در یک مجرا با زاویه‌ی باز کوچک به‌صورت آزمایشگاهی را ارزیابی کردند. ایشان با استفاده از یک سیم داغ، تنش رینولدز نرمال داخل مجموعه امواج ضربه‌ای را اندازه گرفته و تحلیل نمودند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که با افزایش عدد ماخ، دو حالت مختلف تولید آشفتگی و توزیع فضایی مشاهده می‌شود. برای یک موج ضربه‌ای قائم ساده (تنها) و یک رشته امواج قائم، میدان نوسان در طول کانال مقدار کمی افزایش خواهد یافت، اما برای امواج ضربه‌ای لامبدا شکل با افزایش عدد ماخ، نوسانات به‌شدت تشدید می‌شوند. در مدلی که توسط این محققین بررسی گردیده است، لایه‌های برشی با یک تنش رینولدز قائم در پایین‌دست جریان و قبل از اولین موج ضربه‌ای تشکیل می‌شوند. این لایه‌های برشی با پایین‌دست ناحیه‌ی اختلاط، سامانه امواج ضربه‌ای کل کانال را پوشش می‌دهند.

به صورت سه بعدی نیز جریان داخل مجرا را با استفاده از مدل‌های آشفتگی مختلف از قبیل، اسپالارت آماراس، کا-اِپسیلون و شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ بررسی نمودند. مقایسه بین مدل‌های مختلف آشفتگی نشان داد که مدل‌های RANS، دقت بالاتری نسبت به شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ دارند. موسوی گروهش [۱۱-۱۴]، با استفاده از مدل‌های آشفتگی تنش برشی رینولدز و شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، به بررسی عددی رفتار جریان تراکم‌پذیر به همراه قطار امواج ضربه‌ای پرداختند. آن‌ها پس از اطمینان از روش حل، به بررسی پارامترهای مختلف آئرویدینامیکی به منظور کنترل رفتار جریان پرداختند و به این نتیجه رسیدند که تغییر در پارامترهای آئرویدینامیکی، محل موج و شدت موج را تغییر می‌دهد. در کار دیگر، این گروه [۱۵] به بررسی روش‌های کنترلی فعال و غیرفعال بر ساختار امواج ضربه‌ای لامبدایی پرداختند و نشان دادند که استفاده از روش‌های کنترلی فعال شامل، دمش و مکش با نرخ جرمی بالا سبب ناپدید شدن مجموعه امواج ضربه‌ای لامبدایی می‌شوند. همچنین ایشان بیان نمودند که به‌کارگیری روش‌های غیرفعال شامل، برآمدگی و فرورفتگی در دیواره‌ی مجرا، سبب کاهش قدرت اولین موج ضربه‌ای لامبدایی می‌گردند. یادگاری و طالقانی [۱۶]، به مطالعه پارامتری کنترل غیرفعال تداخل شوک و لایه مرزی بر ایرفویل با محفظه و سطح متخلخل در جریان گذر صوتی پرداختند و بیان نمودند که که بهینه‌ترین شکل هندسی محفظه متخلخل، به صورت رمپ است.

با توجه به اهمیت موضوع در مباحث آئرویدینامیک پیشرفته و با در نظر گرفتن مطالعات گذشته، شناخت این پدیده نیاز به بررسی‌های بیشتر جهت شناخت و کنترل رفتار آن دارد، از این رو، هدف از کار حاضر، بررسی ساختار امواج ضربه‌ای رشته‌ای لامبدا شکل در یک مجرای همگرا-واگرا با به‌کارگیری رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ از قبیل، اسماغورینسکی لیلی، ادی-لزجت موضعی دیوار-تطبق<sup>۱</sup> (WALE) [۱۴] و مدل جبری دیوار-مدل (WMLES) [۱۷] بر اساس مدل‌های زیر شبکه‌ای مختلف و همچنین با استفاده از روابط تحلیلی است. در این راستا، از روش انطباقی شبکه‌ها

ویس و الیویر [۶]، اثرات قرار دادن یک سیستم مکش لایه‌ی مرزی در نزدیکی محل وقوع اولین موج ضربه‌ای رشته‌ای بر رفتار جریان را بررسی نمودند. آن‌ها دریافتند که با افزایش فشار بیرونی، اولین موج ضربه‌ای قوی‌تر، اما طول آن کاهش می‌یابد. مرگان و همکارانش [۷]، با استفاده از مدل آشفتگی شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ و روش‌های حل معادلات با دقت بالا، قطار موج ضربه‌ای قائم در یک ایزولاتور سطح ثابت را بررسی کردند. آن‌ها محل اولین موج ضربه‌ای نرمال، ساختار کلی از امواج رشته‌ای و تعامل آن با لایه‌مرزی را در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی، به صورت کاملاً نزدیک به دست آوردند. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی، پدیده‌های فیزیکی مانند فقدان جریان معکوس و توسعه لایه ثانویه برشی را پیش‌بینی کردند.

کاندا و تانی [۸]، طول امواج ضربه‌ای را با استفاده از یک روش جدید به نام مدل توازن تکانه به دست آوردند. در این مدل فرض شده است که هیچ اصطکاکی در منطقه امواج وجود ندارد. نتایج حاصل از این مدل نشان داد که قدرت پیش‌بینی رفتار جریان با استفاده از این روش، بسیار بالا بوده، نتایج بر نتایج آزمایشگاهی با دقت بالا منطبق است.

همچنین از دیدگاه عددی، در سال‌های اخیر نویسندگان زیادی به بررسی عددی رفتار موج ضربه‌ای مجموعه امواج ضربه‌ای پرداخته‌اند. جریان داخلی در یک مجرای پاششی شامل، امواج ضربه‌ای به صورت آزمایشگاهی توسط کاتانودا و همکارانش [۹] بررسی گردید. آن‌ها متوجه شدند که استفاده از رابطه (۱) برای نسبت فشارهای مختلف در موقعیت خاص بسیار مناسب است.

$$\frac{x'(M_1^2 - 1)Re_\theta^{1/4}}{D^{1/2}\theta_1^{1/2}} = \frac{50\left(\frac{p}{p_1} - 1\right) + 170\left(\frac{p}{p_1} - 1\right)^2}{(1)}$$

جفری و همکارانش [۱۰]، جریان تراکم‌پذیر داخل مجرای اسکرم جت را به صورت عددی بررسی کردند. آن‌ها به منظور به دست آوردن محل دقیق اولین موج ضربه‌ای از مدل‌های مختلف آشفتگی استفاده کردند و نتایج را با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه نمودند. نتایج ۲ بعدی آن‌ها نشان داد که پیش‌بینی رفتار جریان در مجرا به شدت به مدل آشفتگی وابسته بوده، در انتخاب آن باید دقت کرد. آن‌ها

<sup>1</sup> Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity

<sup>2</sup> Algebraic Wall-Modeled

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1} = \frac{\left\{ w_1^2(w_1^2-2w^{*2}) + w_1^2 w^{*2} e^{-c(\gamma/\theta_d)} \right\}}{w_1^2(w_1^2-w^{*2})^2 - w_1^2(w_1^2-w^{*2}) e^{-c(\gamma/\theta_d)} \left( 1 - e^{-c(\gamma/\theta_d)} \right)} \quad (4)$$

پس از آن ایشان بر اساس لایه‌مرزی آشفته بالادست و نیز اتلافات اصطکاکی، رابطه‌ی ۵ را به دست آوردند،

$$\frac{L_p}{D_d} = 3700(Ma'_1 - 1)^{3.8} \mu_1 \quad (5)$$

و به دنبال آن رابطه توزیع فشار به صورت زیر تصحیح گردید،

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(1-\mu)}{\xi Ma'_1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma'^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{\xi Ma''} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma''^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

که در آن

$$\xi = \frac{(1-\mu)}{Ma'_1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma'^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{Ma''} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma''^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

والتروپ و بیلینگ [۲۲]، رابطه (۱) را با هدف پیش‌بینی توزیع فشار دیواره برای یک مجرا با مساحت ثابت دایره‌ای معرفی نمودند،

$$\frac{x(Ma_1^2 - 1) Re_\theta^{\frac{1}{4}}}{D_d^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\frac{1}{2}}} = 50 \left( \frac{P}{P_1} - 1 \right) + 170 \left( \frac{P}{P_1} - 1 \right)^2 \quad (1)$$

سپس بیلینگ [۲۳]، این رابطه را برای مجرا با سطح مقطع مربعی به صورت رابطه (۸) توسعه داد،

$$\frac{x(Ma_1^2 - 1) Re_\theta^{\frac{1}{5}}}{H^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\frac{1}{2}}} = 50 \left( \frac{P}{P_1} - 1 \right) + 170 \left( \frac{P}{P_1} - 1 \right)^2 \quad (8)$$

ماتسو و گروهش [۱] نیز، روابط زیر را برای پیش‌بینی توزیع فشار معرفی کردند.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma \left( \frac{\xi_1}{\sigma_1} \right) \bar{Ma}_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \quad (9)$$

که در آن،

$$\bar{Ma}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\bar{a}_1}, \bar{u}_1 \equiv \left( \frac{\int \rho_1 u_1^3 dA}{\int \rho_1 u_1 dA} \right)^{\frac{1}{2}}, \bar{a}_1 \equiv \left( \frac{\int \bar{a}_1^2 \rho_1 u_1 dA}{\int \rho_1 u_1 dA} \right)^{\frac{1}{2}}$$

به صورت دینامیکی و نیز مقداردهی اولیه به صورت ترکیبی و همچنین به منظور بررسی انباشتگی خطاها از رابطه تحلیلی سمیرنف و همکارانش [۱۸] استفاده شده است. نتایج حاصل از به کارگیری مدل‌های زیر شبکه‌ای مختلف با نتایج آزمایشگاهی ویس و همکارانش [۱۹]، مقایسه و پس از اطمینان از روش حل مورد استفاده به بررسی تغییرات در ساختار جریان تراکم‌پذیر موجود هنگام تغییر در طول واگرایی مجرای همگرا-واگرا و نیز اعمال پرش دمایی دیواره مجرا در منطقه‌ی تولید امواج رشته‌ای لامبداپی پرداخته شده است.

## ۲- معادلات تحلیلی حاکم بر مجموعه امواج

### ضربه‌ای

یکی از اهداف پژوهش حاضر، مقایسه نتایج عددی حاصل شده از رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ با داده‌های تجربی ویس و همکارانش [۱۹] و نیز مقایسه این داده‌ها با نتایج به دست آمده از روابط تحلیلی موجود است که توسط محققین مختلف [۱] پیش‌بینی شده است. در این راستا در این بخش، به برخی روابط تجربی پرداخته می‌شود. کروکوو [۲۰]، از اولین کسانی بود که یک رابطه تجربی به منظور محاسبه فشار بی‌بعد شده روی دیواره مجرا به صورت رابطه‌ی ۲ معرفی کرد.

$$\frac{P}{P_1} = \left( \frac{1-w^2}{1-w^{*2}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2)$$

این معادله به وسیله ترکیب با معادلات بقای جرم، انرژی و تکانه می‌تواند خصوصیات مختلف جریان شامل، مجموعه امواج رشته‌ای لامبدا شکل را ارزیابی کند. در ادامه کروکوو [۲۰]، رابطه‌ای مشابه رابطه ۳ به منظور محاسبه طول مجموعه‌ی امواج معرفی کرد.

$$\frac{L_p}{D_d} = \frac{2}{c} \sinh^{-1} \left( \frac{w_1 - w_2}{2w^*} \right) \quad (3)$$

ایکویی و همکارانش [۲۱]، با استفاده از رابطه‌ی ۳ و همچنین چندین آزمایش رابطه  $\frac{L_p}{D_d} = 18.75 \left( 1 - \frac{1}{Ma_1} \right)$  را به منظور محاسبه طول امواج پیشنهاد دادند. به دنبال آن، ایشان یک رابطه با هدف محاسبه توزیع فشار در هسته جریان، به صورت رابطه‌ی ۴ به دست آورد.

در کار حاضر، فشار سکون طبق داده‌های آزمایشگاهی [۱۹] برابر ۴/۸ بار است. فشار خروجی نیز برابر ۳/۲۵ بار بوده که همان‌گونه که در جدول ۱ آمده برای شرط خروجی اعمال شده است. برای دیواره دما برابر ۲۹۸ کلوین است و شرط عدم لغزش در نظر گرفته شده است که در طول محاسبات ثابت است.

جدول ۱- شرایط مرزی بکار رفته مطابق با مرجع [۱۸]

	P <sub>total</sub> (kPa)	P <sub>static</sub> (kPa)	T (K)	V (m.s <sup>-1</sup> )
Inlet	480	-	298	89.27
Outlet	-	325	-	-

#### ۴- بررسی نتایج

##### ۴-۱- مطالعه عدم وابستگی نتایج به شبکه‌بندی

در هر بررسی عددی، با توجه به وابستگی نتایج حل به نوع و تعداد سلول شبکه‌بندی مورد استفاده برای میدان محاسباتی، ابتدا می‌بایست عدم وابستگی نتایج به تعداد اندازه‌ی شبکه‌های مورد استفاده را نتیجه‌گیری کرد. در این راستا در کار حاضر، از ۶ تعداد سلول و شبکه‌بندی برای تحلیل نتایج و مقایسه آن با حالت قبل استفاده شده است. این تحلیل‌ها برای متوسط سه پارامتر ماک، فشار و سرعت مطابق شکل ۳ صورت پذیرفته است. همان‌گونه که نمایان است، محاسبات برای هر سه پارامتر مذکور در شبکه‌بندی با تعداد سلول  $9 \times 10^6$  به بعد تقریباً ثابت است. با توجه به کاهش هزینه محاسبات به عنوان یکی از عوامل مهم در شبیه‌سازی‌های عددی و با توجه به اینکه نتایج حاصل از نظر دقت تقریباً شبیه به یکدیگرند، تحقیقات بر اساس شبکه‌بندی با تعداد سلول  $9 \times 10^6$  مبنای کار محاسبات است.

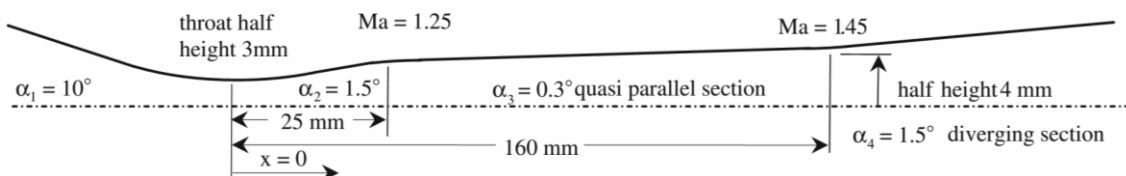
$$\sigma_1 \equiv \frac{\bar{\rho}_1 \bar{u}_1}{\int \rho_1 u_1 dA} \quad \xi_1 \equiv \frac{\rho_1 u_1^2}{\bar{u} \int \rho_1 u_1 dA}$$

معادلات بیان شده در این بخش با استفاده از کد فرترن به پیش‌بینی توزیع فشار در مجرا با توجه به هندسه نشان داده شده در شکل ۲ صورت گرفته است.

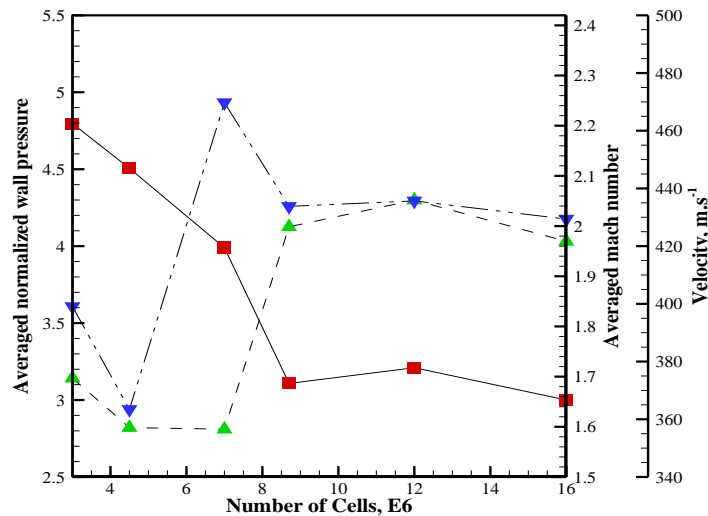
#### ۳- هندسه و شرایط مرزی

شکل ۲ نشان‌دهنده هندسه‌ی مجرای مورد بررسی در کار حاضر است. این مجرا شامل، یک قسمت همگرا به طول ۵۰ میلی‌متر و زاویه ۱۰ درجه، یک قسمت واگرا به طول ۶۰۰ میلی‌متر و یک گلوگاه در مختصات (۰،۰،۰) با ارتفاع ۶ میلی‌متر با زاویه خروجی ۱/۵ درجه است. در قسمت واگرا، دو شکستگی با زوایای ۱/۵ درجه در فواصل ۲۵ و ۱۶۰ میلی‌متر از گلوگاه موجود است. بعلاوه ارتفاع در فاصله‌ی ۱۶۰ میلی‌متری که شکستگی دوم وجود دارد، برابر ۸ میلی‌متر است. این هندسه با توجه به مقاله ویس و همکارانش [۱۹] تعریف شده است که دقیقاً با همین اندازه‌ها و مدل است.

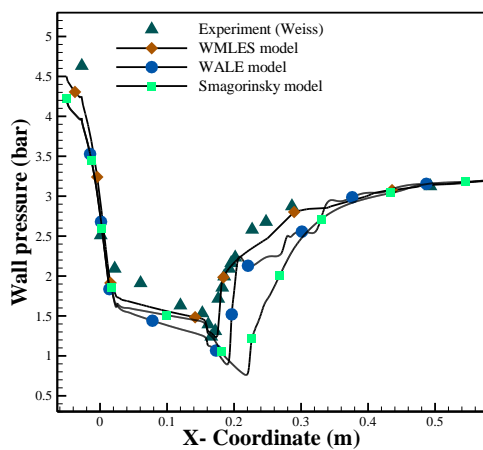
به‌منظور بررسی شروع شبیه‌سازی می‌بایست شرایط مرزی مناسب تعریف گردد. جدول ۱، نشان‌دهنده‌ی مقادیر ورودی و خروجی اولیه برای شبیه‌سازی با توجه به داده‌های آزمایشگاهی است. مشاهده می‌شود که جریان با سرعت  $89.27 \text{ (m/s)}$  وارد مجرا شده، درحالی‌که دمای دیواره ثابت است. برای ارضای سرعت مذکور که با توجه به مقاله ویس و همکارانش [۱۹] است، در کار حاضر برای ورودی شرط "فشار ورودی تعریف شده است که با توجه به اینکه این شرط مرزی فشارهای استاتیک و سکون را به عنوان ورودی می‌گیرد، طبق روابط آیزنروپیک سرعت ارضا می‌شود. باید به این نکته توجه نمود که حداقل یکی از دو فشار استاتیک و سکون باید موجود باشد تا دیگری محاسبه و اعمال گردد که



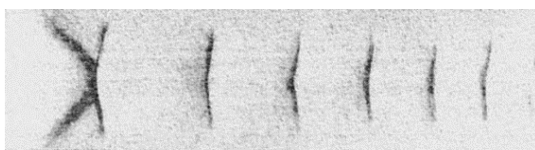
شکل ۲- طرح‌واره‌ای از مجرای همگرا واگرا مورد بررسی



شکل ۳- بررسی نتایج حل از تعداد سلول



شکل ۴- مقایسه نتایج عددی کار حاضر با داده‌های آزمایشگاهی



(الف)



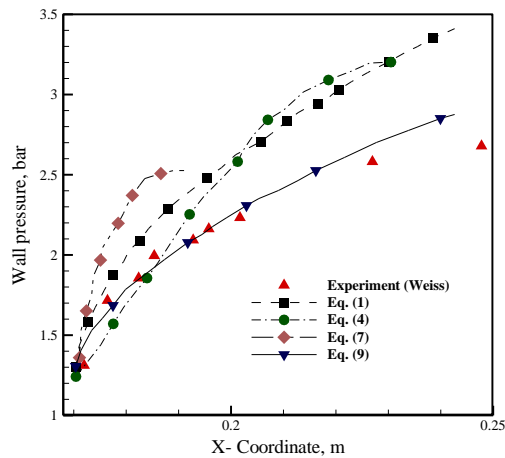
(ب)

شکل ۵- مقایسه ساختار موج ضربه‌ای (الف) آزمایشگاهی و (ب) کار حاضر

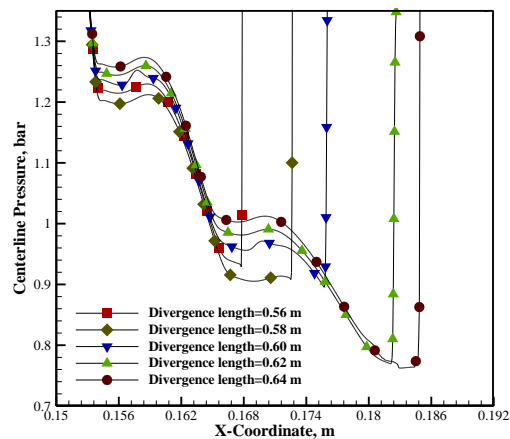
#### ۴-۲- اعتبارسنجی نتایج

به منظور اعتبارسنجی نتایج حاصل در کار حاضر در این بخش، به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی با داده‌های آزمایشگاهی ویس و همکارانش [۱۹] پرداخته می‌شود. شکل ۴، نمایانگر توزیع فشار دیواره در طول مجرا برای سه مدل زیر شبکه‌ای مختلف است. همان‌گونه که نمایان است، نتایج مربوط به مدل‌های زیر شبکه‌ای اسمگورینسکی و WALE در مقایسه با مدل WMLES، دارای خطای نسبتاً محسوسی می‌باشند. دلیل دقت بالاتر مدل زیر شبکه‌ای WMLES در مقایسه با دو مدل دیگر را می‌توان این‌گونه بیان نمود که دو مدل زیر شبکه‌ای دیگر برای دقت بالاتر، نیازمند به شبکه‌بندی با تعداد سلول بیشتر می‌باشند، زیرا حساسیت این دو مدل در لایه‌مرزی بوده، در مقابل مدل WMLES با توجه به اینکه این توانایی را دارا است که از مدل‌ها RANS برای شبیه‌سازی قسمت لایه‌مرزی استفاده نماید، نیاز به تعداد سلول کمتر به‌خصوص در این ناحیه دارد؛ بنابراین با توجه به نتایج مناسب‌تر این مدل زیر شبکه‌ای، مبنای محاسبات بر این مدل استوار است.

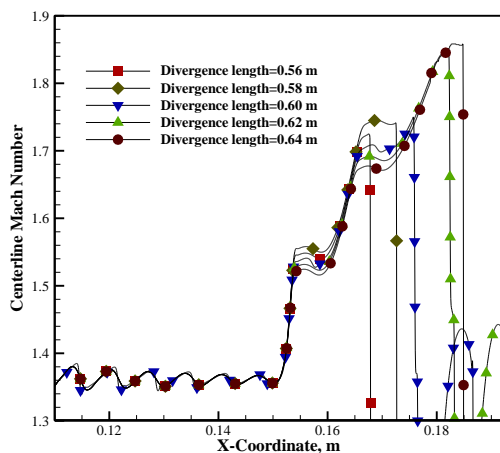
شکل ۵، مقایسه بین نتایج عددی و آزمایشگاهی را برای حالتی که از مدل زیر شبکه‌ای WMLES استفاده شده است را در کانتور هدوگراف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشخص است که مدل زیر شبکه‌ای WMLES، بسیار توانمند در پیش‌بینی رفتار جریان تراکم‌پذیر است.



شکل ۶- مقایسه روابط تحلیلی مختلف در پیش‌بینی داده‌های آزمایشگاهی



شکل ۷- توزیع فشار دیواره در طول‌های واگرایی مختلف



شکل ۸- توزیع عدد ماخ مرکزی در طول‌های واگرایی مختلف

### ۴-۳- بررسی تحلیلی مجموعه امواج ضربه‌ای

در این بخش، به بررسی تحلیلی مجموعه امواج ضربه‌ای بر اساس معادلات ۱، ۴، ۷ و ۹ که با استفاده از کد فرترن محاسبه شده‌اند و مقایسه‌ی آن با داده‌های آزمایشگاهی ویس و همکارانش [۱۹] پرداخته شده، نتایج آن در شکل ۶ قابل مشاهده است. همان‌گونه که از شکل مشخص است، روابط ۱، ۴ و ۷، دارای خطای محسوسی در پیش‌بینی توزیع فشار دیوار دارند، اما با استفاده از رابطه‌ی ۹، با دقت مناسبی توزیع فشار را می‌توان پیش‌بینی کرد.

### ۴-۴- تغییر در طول مجرا

در این بخش، به بررسی تغییرات رفتار و ساختار جریان تراکم‌پذیر شامل، مجموعه امواج ضربه‌ای دوشاخه‌ای در مجرای همگرا واگرایی ذکر شده در بخش ۳ تحت شرایط مرزی موجود در جدول ۱ در اثر تغییر در طول قسمت واگرایی مجرا پرداخته شده است. بدین منظور از ۵ طول واگرایی مختلف از قبیل، ۰/۵۶، ۰/۵۸، ۰/۶۰، ۰/۶۲ و ۰/۶۴ متری درحالی‌که نسبت مساحت خروجی مجرا به مساحت گلوگاه آن ثابت است، استفاده شده، نتایج در شکل‌های ۷ تا ۱۰ آمده است. همان‌گونه که در شکل ۷ مشاهده می‌گردد، حداقل فشار جریان از ۰/۹۴ بار برای طول واگرایی ۰/۵۶ متر تا ۰/۷۸ بار برای طول واگرایی ۰/۶۴ متر کاهش و به دنبال آن حداکثر ماخ جریان از ۱/۷۱ تا ۱/۸۸ افزایش یافته است. که این مهم در شکل ۸ و جدول ۲ نمایش داده شده است. کاهش در حداقل فشار جریان و نیز افزایش در حداکثر ماخ، به دلیل رشد ضخامت جابجایی با افزایش طول مجرا [۲۴]، با آن نشانگر افزایش قدرت امواج ضربه‌ای رشته‌ای به دلیل تغییر در زاویه واگرایی مجرا و در ادامه تغییر در ساختار و طول منطقه جدایش جریان و ضخامت لایه‌مرزی جریان است.

جدول ۲- حداقل فشار و حداکثر ماخ در طول‌های

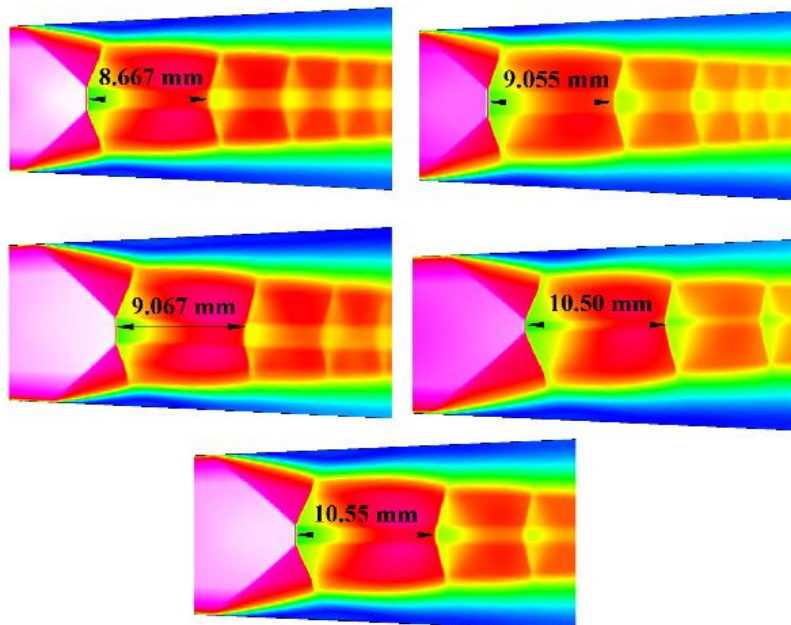
واگرایی مختلف	۰/۶۴	۰/۶۲	۰/۶	۰/۵۸	۰/۵۶	طول واگرایی (متر)
حداقل فشار دیوار (بار)	۰/۷۸	۰/۷۹	۰/۸۹	۰/۹۱	۰/۹۴	حداقل فشار دیوار (بار)
حداکثر ماخ	۱/۸۸	۱/۸۶	۱/۷۲۵	۱/۷۲	۱/۷۱	حداکثر ماخ

طول واگرایی کمتر می‌شود و این تسریع در ناپیوستگی جریان روی پایین دست جریان نیز اثرگذار خواهد بود؛ به طوری که با کاهش طول واگرایی از ۰/۶۴ تا ۰/۵۶ متر، فاصله‌ی بین امواج اول و دوم مجموعه امواج رشته‌ای به ترتیب از ۱۰/۵۵ میلی‌متر امواج با کاهش طول واگرایی کاهش می‌یابد می‌توان بیان نمود که کاهش فاصله بین امواج، سبب کاهش قدرت کلی مجموعه امواج ضربه‌ای می‌شود.

#### ۴-۵- ناپیوستگی در دمای دیوار

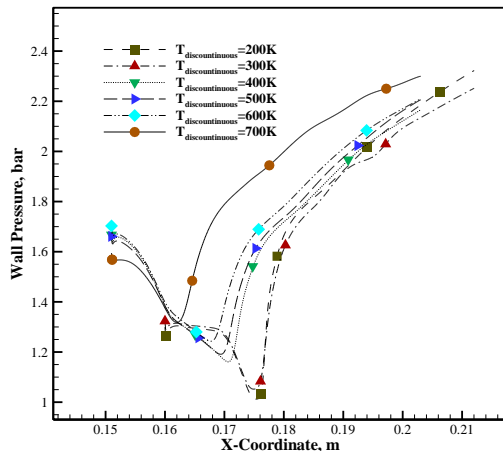
در این بخش، اثرات ناپیوستگی (پرش) در دمای دیواره مجرا بر ساختار جریان با به‌کارگیری رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ بررسی شده است. پرش در دما در محل ایجاد امواج ضربه‌ای و به طول ۱۰ میلی‌متر و برای پیرامون مجرا در بازه‌ی ۲۰۰ تا ۷۰۰ کلوین با نرخ افزایش ۱۰۰ کلوین در هر بررسی اعمال گردیده است. شرایط مرزی مورد استفاده مطابق با جدول ۱ است با این تفاوت که در محل ایجاد پرش دما دیواره بی‌دررو در نظر گرفته نشده است.

شکل ۹ نشان‌دهنده کانتور توزیع گرادیان فشار در طول مجرا است. از آنجاکه در جریان‌های حاوی امواج ضربه‌ای، ناپیوستگی‌های جریان شدید خواهد شد، یک روش مناسب جهت پیش‌بینی ساختار جریان، استفاده از گرادیان‌های فشار است. همان‌گونه که از این شکل مشخص است، با استفاده از این کانتور، ساختار امواج ضربه‌ای رشته‌ای به‌خوبی نمایان شده است. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود که با افزایش طول واگرایی به دلیل کاهش زاویه واگرایی و به دنبال آن تأخیر در ایجاد جدایش جریان، محل وقوع اولین موج ضربه‌ای لامبدا شکل به سمت خروجی مجرا حرکت کرده و با در نظر گرفتن توضیحات بالا مبنی بر افزایش قدرت امواج ضربه‌ای با افزایش طول واگرایی، می‌توان بیان نمود که در یک فشار خروجی ثابت هرچه امواج ضربه‌ای به سمت خروجی حرکت کنند، قدرت آن افزایش خواهد یافت که این مهم با استفاده از نتایج موجود در مرجع [۱۹] اعتبارسنجی شده است. در نهایت شکل ۱۰، نشانگر توزیع عدد ماخ جریان به‌منظور نشان دادن تأثیر تغییر در طول واگرایی مجرا بر فاصله بین اولین و دومین موج ضربه‌ای لامبدا شکل است. با توجه به اینکه با کاهش طول واگرایی ضخامت لایه‌مرزی افزایش یافته، سبب تسریع در ایجاد موج ضربه‌ای در مجرا با

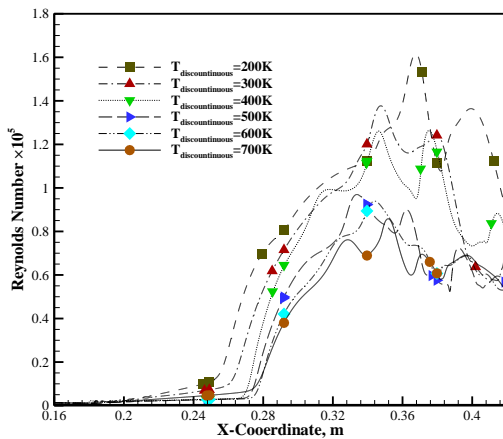


شکل ۱۰- توزیع ماخ جریان و مقایسه‌ی فاصله امواج لامبدا شکل اول و دوم در طول‌های واگرایی مختلف



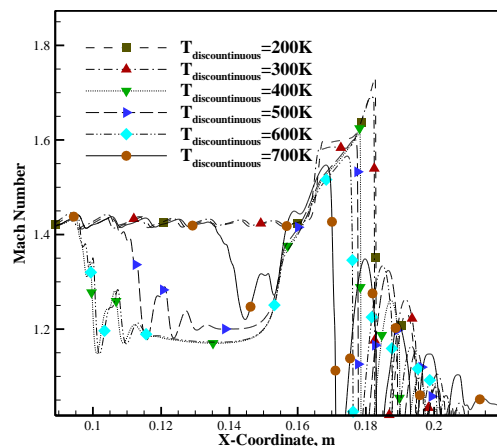


شکل ۱۱- توزیع فشار دیواره در پرش‌های دمایی مختلف



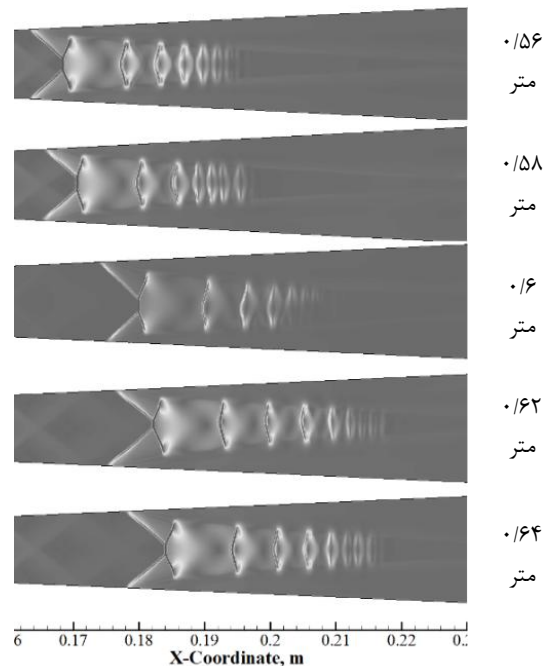
شکل ۱۲- توزیع عدد رینولدز مرکزی در پرش‌های دمایی

مختلف



شکل ۱۳- توزیع عدد ماخ مرکزی در پرش‌های دمایی

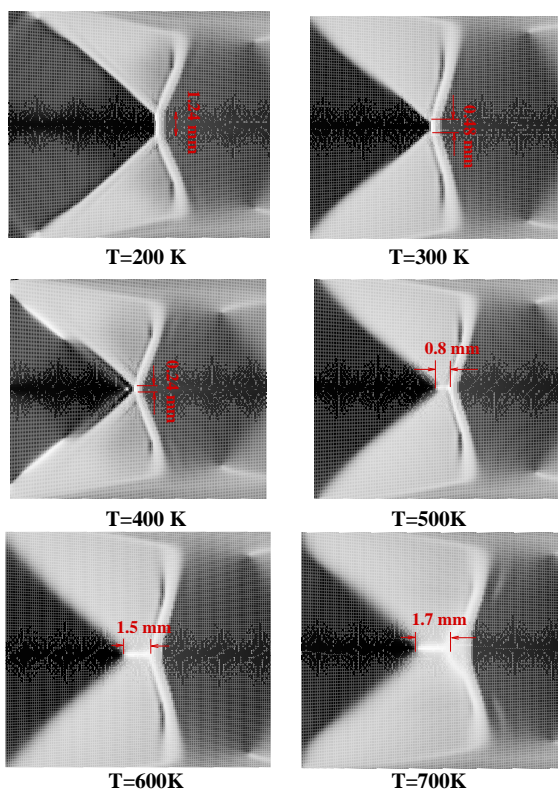
مختلف



شکل ۹- کانورهای گرادیان فشار در طول‌های واگرایی مختلف

شکل ۱۱، نشان‌دهنده توزیع فشار روی دیواره مجرا است که با توجه به آن نمایان است که با افزایش دمای ناپیوسته از ۲۰۰ تا ۷۰۰ کلوین، حداقل فشار جریان به تدریج کاهش می‌یابد. باید توجه داشت که در ناحیه واگرایی مجرا، ساختار جریان وابستگی شدیدی به لزجت سیال و به دنبال آن ضخامت لایه مرزی دارد. از آنجاکه با افزایش دمای ناپیوسته دیوار مطابق با قانون ساترلند لزجت سیال افزایش می‌یابد؛ بنابراین عدد رینولدز جریان با افزایش دما مطابق شکل ۱۲ کاهش می‌یابد. با کاهش عدد رینولدز جریان، ضخامت لایه مرزی افزایش یافته، سبب تسریع در وجود موج ضربه‌ای خواهد شد.

شکل ۱۳، توزیع عدد ماخ جریان هنگام استفاده از پرش‌های دمایی مختلف در دیواره مجرا را نشان می‌دهد. همان‌گونه که نمایان است، با افزایش دمای دیواره در محل وقوع مجموعه امواج ضربه‌ای، حداکثر عدد ماخ جریان کاهش یافته و به دنبال آن قدرت موج ضربه‌ای کاهش خواهد یافت. دلیل این رخداد را می‌توان با توجه به وابستگی سرعت صوت به دما و رابطه‌ی معکوس عدد ماخ و دمای جریان توجیه نمود؛ زیرا افزایش در دمای جریان، سبب افزایش سرعت



شکل ۱۴- کانتورهای امواج ضربه‌ای فیلتر شده و وابستگی ساختار موج ضربه‌ای لامبدا شکل به پرش در دمای دیواره

شبکه‌ای و نیز معادله‌ی پیشنهادی ماتسو و همکارانش [۱] در مقایسه با دیگر روابط تحلیلی موجود، از دقت بالاتری برخوردار است. پس از اعتباربخشی به روش عددی مورد استفاده، به بررسی ایجاد تغییر در طول واگرایی مجرا، درحالی‌که نسبت مساحت خروجی به گلوگاه آن ثابت بوده و همچنین ایجاد پرش در دمای دیواره مجرا بر محل تشکیل امواج ضربه‌ای پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول واگرایی مجرا، حداقل فشار دیواره کاهش و مقدار بیشینه ماخ جریان، به دلیل کاهش در زاویه‌ی واگرایی و نیز کاهش در رشد ضخامت جابجایی، افزایش یافته، و همچنین محل وقوع موج ضربه‌ای لامبدا شکل به سمت گلوگاه مجرا حرکت می‌کند. در نهایت از نتایج حاصل مشخص شد که افزایش در فاصله بین اولین و دومین امواج لامبدایی، قدرت موج ضربه‌ای افزایش خواهد یافت.

نتایج حاصل از ایجاد پرش دمایی در دیواره مجرا نشان می‌دهد که با افزایش دمای ناپیوسته مقدار کمینه فشار دیواره

صوت و در نهایت، کاهش عدد ماخ جریان می‌گردد. بعلاوه، کاهش در مقدار بیشینه عدد ماخ جریان در یک هندسه و فشار خروجی ثابت به معنای کاهش در قدرت موج ضربه‌ای است؛ بنابراین می‌توان بیان نمود که از اعمال روش ناپیوستگی در دمای دیواره، به عنوان یک روش فعال جهت کنترل رفتار جریان‌های شامل امواج ضربه‌ای نام برد.

شکل ۱۴، کانتورهای امواج ضربه‌ای فیلتر شده که از رابطه‌ی  $u \cdot \nabla P / a \sqrt{(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)}$  حاصل شده‌اند را به‌منظور وابستگی ساختار موج ضربه‌ای لامبدا شکل به پرش در دمای دیواره مجرا را نمایش می‌دهد. عبارت فیلتر شده بدین معنی است هنگامی که  $\sqrt{(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)} < 0.14 P_\infty$ ، رابطه‌ی اصلی برابر با صفر می‌شود. با توجه به شکل مشخص است که فاصله برخورد دو موج ضربه‌ای مایل هنگام برخورد با موج خمیده با افزایش دمای ناپیوسته از ۲۰۰ تا ۴۰۰ کلوین به‌تدریج از ۱/۲۴ تا ۰/۲۴ میلی‌متر کاهش یافته، پس از آن با افزایش پرش دمایی به بالاتر از ۴۰۰ کلوین، ساختار امواج ضربه‌ای به‌تدریج از حالت دوشاخه‌ای خارج شده و امواج مایل قبل از موج خمیده به هم می‌رسند. فاصله‌ی بین محل برخورد امواج ضربه‌ای مایل با افزایش دما از ۰/۸ میلی‌متر برای پرش دمایی ۵۰۰ کلوین به ۱/۷ میلی‌متر برای دمای ۷۰۰ کلوین می‌رسد. تغییر در محل برخورد امواج ضربه‌ای مایل با توجه به افزایش ضخامت لایه‌مرزی تغییر می‌کند که با افزایش دما حاصل می‌گردد. از آنجاکه در مباحث قبلی بیان شد، افزایش دما سبب کاهش قدرت امواج ضربه‌ای لامبدا شکل می‌شود؛ بنابراین با توجه به تغییر در ساختار امواج دوشاخه‌ای می‌توان نتیجه گرفت که کاهش در فاصله برخورد امواج ضربه‌ای مایل، بیانگر کاهش در قدرت امواج ضربه‌ای دوشاخه‌ای می‌شود.

## ۵- نتیجه‌گیری

در کار حاضر، به صورت عددی با استفاده از رهیافت شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ و تحلیلی با به‌کارگیری کد فرترن، به بررسی رفتار جریان مافوق صوت همراه با مجموعه امواج ضربه‌ای لامبدا شکل در یک مجرای همگرا و اگرآ پرداخته شده و نتایج با داده‌های آزمایشگاهی ویس و همکارانش [۱۹] مقایسه شده است. نتایج نشان داد که مدل زیر شبکه‌ای WMLES، در مقایسه با دیگر مدل‌های زیر

۷- مراجع

[1] Matsuo K, Miyazato Y, Kim HD (1999) Shock train and pseudo-shock phenomena in internal gas flows. *Prog Aerosp Sci* 35(1): 33-100.

[2] Kuo-Cheng L, Chung-Jen T, Dean E, Kevin J, Thomas J (2006) Effects of Temperature and heat transfer on shock train structures inside constant-area isolators. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.

[3] Huang W, Wang ZG, Pourkashanian M, Ma L, Ingham DB, Luo SB, Derek B, Liu J (2011) Numerical investigation on the shock wave transition in a three-dimensional scramjet isolator. *Acta Astronaut* 68(11-12): 1669-1675

[4] Gawehn T, Gülhan A, Al-Hasan N, Schnerr G (2010) Experimental and numerical analysis of the structure of pseudo-shock systems in laval nozzles with parallel side walls. *Shock Waves* 20(4): 297-306.

[5] Grzona A, Olivier H (2011) Shock train generated turbulence inside a nozzle with a small opening angle. *Exp Fluids* 51(3): 621-639.

[6] Weiss A, Olivier H (2012) Behaviour of a shock train under the influence of boundary-layer suction by a normal slot. *Exp Fluids* 52(2): 273-287.

[7] Morgan B, Duraisamy K, Lele SK (2014) Large-eddy simulations of a normal shock train in a constant-area isolator. *AIAA J* 52(3): 539-558.

[8] Kanda T, Tani K (2007) Momentum balance model of flow field with pseudo-shock. 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.

[9] Katanoda H, Matsuoka T, Matsuo K (2007) Experimental study on shock wave structures in constant-area passage of cold spray nozzle. *J Therm Sci* 16(1): 40-45.

[10] Jeffrey A, Thomas H, Tam C J (2007) Numerical simulations of a scramjet isolator using RANS and LES approaches. 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.

[11] Mousavi SM, Roohi E (2012) Evaluation of different turbulence models for simulation of shock train in a convergent-divergent nozzle. Paper presented at the First National Aerodynamics Hydrodynamics Conference, Institute of Aviation Industries Organization, Tehran, Iran.

[12] Mousavi SM, Roohi E (2013) Large eddy simulation of shock train in a convergent-divergent nozzle. *Int J Mod Phys C* 25(04): 1450003.

[13] Mousavi SM, Roohi E (2014) Three dimensional investigation of the shock train structure in a convergent-divergent nozzle. *Acta Astronaut* 105(1): 117-127.

[14] Kamali R, Mousavi SM, Binesh AR (2015) Three dimensional CFD investigation of shock train

افزایش و حداکثر ماخ جریان کاهش یافته و به دنبال آن قدرت امواج ضربه‌ای با توجه به تأثیر دما در ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد. بعلاوه، مشخص شد که با افزایش دمای ناپیوسته، ساختار موج ضربه‌ای لامبدایی از حالت دوشاخه بودن خارج می‌شود.

۶- علائم

A	مساحت، $m^2$
$\bar{a}$	سرعت صوت متوسط، m/s
C	ثابت تجربی برابر با $0.114$
D	قطر، m
H	ارتفاع مجرا، m
$L_p$	طول مجموعه امواج ضربه‌ای، m
Ma	عدد ماخ
$Ma'$	عدد ماخ متوسط در مرکز جریان
$Ma''$	عدد ماخ متوسط جریان در منطقه خارجی
$\overline{Ma}_1$	مادون صوت
$Re_\theta$	عدد ماخ بالادست متوسط جرمی
$\bar{u}$	عدد رینولدز بر مبنای ضخامت مومنتوم
$p/p_1$	سرعت متوسط، m/s
$w_1$	نسبت فشار دیوار موضعی به فشار استاتیک در محل شروع افزایش فشار
$w_2$	عدد کروکوو در بخش اولیه امواج ضربه‌ای
$w^*$	عدد کروکوو در بخش نهایی امواج ضربه‌ای
x	عدد کروکوو در شرایط صوتی
$x'$	فاصله از محل اولیه امواج ضربه‌ای، m
$\theta$	فاصله پایین دست جریان از ابتدای محل افزایش فشار، m
$\gamma$	ضخامت مومنتوم
$\mu_1$	نسبت گرماهای ویژه
$\sigma, \xi$	نسبت نرخ جرمی در بالادست جریان به مرکز جریان (هسته جریان)
	ضرایب تصحیح

- engines simulation using LOGOS code. *Int J Hydrogen Energ* 39(20): 10748-10756.
- [19] Weiss A, Grzona A, Olivier H (2010) Behavior of shock trains in a diverging duct. *Exp Fluids* 49: 355-365.
- [20] Emmons HW (2015) *Fundamentals of gas dynamics*. Princeton University Pres.
- [21] Ikui T, Matsuo K, Nagai M (1974) The mechanism of pseudo-shock waves. *Bulletin of JSME* 17: 731-739.
- [22] Waltrup PJ and Billig FS. (1973) Structure of shock waves in cylindrical ducts. *AIAA J* 11: 1404-1408.
- [23] Billig FS (1993) Research on supersonic combustion. *J Propul Power* 9: 499-514.
- [24] Schlichting H (1979) *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill, New York.
- structure in a supersonic nozzle. *Acta Astronaut* 116: 56-67
- [15] Kamali R, Mousavi SM, Khojasteh D (2016) Three-dimensional passive and active control methods of shock wave train physics in a duct. *Int J Appl Mech* 08: 1650047.
- [۱۶] یادگاری م، طالقانی س آ (۱۳۹۵) مطالعه پارامتری کنترل غیرفعال تداخل شوک و لایه مرزی بر ایرفویل با محفظه و سطح متخلخل در جریان گذر صوتی. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۲۸۴-۲۷۱: ۲(۲).
- [17] Goshtasbi-Rad E, Mousavi SM (2015) Wall modeled large eddy simulation of supersonic flow physics over compression-expansion ramp. *Acta Astronaut* 117: 197-208
- [18] Smirnov NN, Betelin VB, Shagaliev RM, Nikitin VF, Belyakov IM, Deryuguin YN, Aksenov SV, Korchazhkin DA (2014) Hydrogen fuel rocket