



برداشت انرژی ارتعاشی با استفاده از تیر یک سردرگیر با دولایه پیزوالکتریک

روح‌اله حسینی^{۱*}، محمد حسن لطافتی^۲ و سید سجاد حسینی مقدم^۳^۱ باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران^۲ کارشناس ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران^۳ کارشناس ارشد، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، دانشکده فنی و مهندسی، تهران، ایران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۷/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۹/۰۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۲/۰۹

چکیده

هم‌اکنون برداشت انرژی ارتعاشی با ماده پیزوالکتریک، می‌تواند بیش از ۳۰۰ میکرووات بر سانتیمتر مربع توان تولید کند و این امر موجب شده تا این روش، به یکی از روش‌های مناسب برداشت انرژی برای تأمین توان وسایل الکترونیکی با توان کم مطرح شود. یکی از مشکلات مهم در تیرهای برداشت‌کننده انرژی با دو لایه پیزوالکتریک، تولید حداکثر توان با کمترین وزن است. در این مقاله، اثر شکل و هندسه تیر یک‌سردرگیر با دو لایه پیزوالکتریک بر کارایی الکترومکانیکی سیستم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مدل تحلیلی با استفاده از تقریب‌های تیر رایلی-ریتز برای برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک، دارای دو لایه پیزوالکتریک با هندسه مخروطی ارائه شده است. برای مطالعه اثر تغییرات طول و هندسه تیر یک‌سردرگیر بر ولتاژ تولیدی، شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزارهای MATLAB و ABAQUS انجام شده است. بهینه‌سازی طراحی برای رسیدن به حداکثر خروجی انجام شده، مشاهده می‌شود که تیرهای مخروطی مثلثی، منجر به توزیع یکنواخت‌تر کرنش در لایه پیزوالکتریک شده، لذا موجب افزایش کارایی می‌شوند.

کلمات کلیدی: برداشت انرژی ارتعاشی؛ پیزوالکتریک؛ توان تولیدی؛ فرکانس طبیعی؛ بهینه‌سازی هندسی.

Vibration Energy Harvesting Using Bimorph Piezoelectric Cantilever

R. Hosseini^{1*}, H. Letafati², S. S. Hosseini Moghaddam³¹ Young Researchers and Elite Club, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.² MS, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.³ MS, Scholl of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran.

Abstract

Vibration energy harvesting with piezoelectric material can currently generate up to 300 microwatts per cubic centimeter, making it a viable method of powering low-power electronics. A problem in piezoelectric unimorph energy harvesting is to generate the most power with limits in system mass. This paper studies the effect of a piezoelectric bimorph cantilever beam harvester shape on its electromechanical performance. A semi-analytical mechanical model was developed using Rayleigh-Ritz approximations for piezoelectric energy harvester with tapered bimorph cantilever beam. A coupled field simulation model for the harvester is constructed using MATLAB and ABAQUS software to study the effect of varying the length and shape of the cantilever beam to the generated voltage and verification study is performed. Design optimization on the shape of the harvester is done to maximize output power. It is shown that tapered beams lead to a more uniform strain distribution across the piezoelectric material and increase the harvesting performance.

Keywords: Vibration Energy Harvesting; Piezoelectric; Generated Power; Natural Frequency; Shape Optimization.

۱- مقدمه

برداشت یا مهار انرژی، عبارت از: بدست آوردن انرژی با استفاده از محیط اطراف و تبدیل آن به انرژی الکتریکی مورد نیاز است. دهها سال است که سیستم‌های مهار و برداشت انرژی در ابعاد ماکرو و میکرو، برای استفاده در تجهیزات مختلف مطرح شده‌اند. جهت تأمین درخواست‌های جهانی برای انرژی، سیستم‌های استحصال در مقیاس بزرگ با موفقیت ساخته شده‌اند. از طرفی برای تجهیزات با توان پایین، برداشت انرژی از محیط، روشی مناسب است، زیرا هزینه‌های تعویض باتری‌های قدیمی، نسبتاً بالا است. بخصوص در بسیاری از موارد، ممکن است دسترسی به سنسورها و عملگرهای مختلف برای تعویض باتری، به سادگی میسر نباشد. مکانیزم‌های متفاوتی برای برداشت انرژی ارتعاشی وجود دارند که شامل، روش‌های الکترواستاتیک، الکترومغناطیس و استفاده از مواد پیزوالکتریسته می‌باشند [۱، ۲].

عملکرد تجهیزات برداشت انرژی، به نوع مواد به کار رفته در آن‌ها وابسته است. از بین روش‌های مختلف برداشت انرژی، استفاده از مواد پیزوالکتریک کاربرد بیشتری دارد و به صورت گسترده‌تر رواج دارد؛ زیرا از چگالی توان بالاتری برخوردار هستند [۲]. از میان مواد پیزوالکتریک نیز، نوع PZT به علت فراوانی دستیابی به آن و ثوابت پیزوی بالا ترجیح داده می‌شود. مواد دیگری نیز استفاده می‌شوند که شامل، PMN-PT، PZN-PT و PVDF می‌باشند.

با افزایش پهنا و ضخامت تیر می‌توان به توان خروجی بالاتری دست یافت [۳]. پاتل و همکاران، این مطلب را افزوده‌اند که برای یک ماده پیزوالکتریک، اثر طول تیر پیزوالکتریک به شدت وابسته به ضخامت لایه پیزوالکتریک است [۴]؛ در حالی که برای حالت جرم ثابت، طول کم و عرض زیاد، کاهش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت کل، ترجیح دارد [۵].

تیرهای تغییر شکل یافته به علت تجربه تنش‌های بالاتر، ولتاژ خروجی بیشتری تولید می‌کنند [۶]. تیرهای یکسر درگیر نسبت به انواع دیگر تیر، مزیت بیشتری دارند، زیرا به ازای نیروی ثابت، دارای فرکانس‌های طبیعی کمتری بوده، کرنش‌های بیشتری در آن‌ها ایجاد می‌شود [۷]. تیرهای یکسردرگیر به تناسب کاربرد و نیاز، در شکل‌های مختلف

مستطیلی، ذوزنقه‌ای، مثلثی و V شکل، طراحی و ساخته می‌شوند [۸]. در [۸] روابط لازم برای محاسبه فرکانس‌های تشدید، انواع برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک با شکل‌های رایج به منظور تسهیل در روند طراحی آن‌ها ارائه شده است. البته در مقیاس میکرو، شکل‌های جدیدی از تیرها نیز، مورد بررسی قرار گرفته که شامل ساختمان پوسته‌ای [۹]، پیکره-بندی مارپیچ [۱۰] و زیگ‌زاگی [۱۱] می‌باشند. بر این اساس مشاهده می‌شود که اشکال مختلفی برای بهینه‌سازی تیر، از جنبه تولید توان وجود دارند [۱۲، ۱۳].

این مقاله، به بررسی پارامترهای طراحی، تخمین فرکانس تشدید و میزان برداشت انرژی در یک تیر برداشت‌کننده انرژی با دو لایه پیزوالکتریک پرداخته است. معادلات حرکت بر اساس تئوری اویلر-برنولی به دست آمده‌اند و شبیه‌سازی نیز، به وسیله نرم‌افزار ABAQUS و MATLAB انجام گردیده است.

۲- تحلیل ارتعاشات آزاد تیر یک سردرگیر

در این قسمت، تخمینی از فرکانس‌های طبیعی تیر مستطیلی شکل، ذوزنقه‌ای و مثلثی آورده شده است. برای یک تیر یکنواخت و تحت ارتعاشات آزاد بدون میرایی، معادله حرکت مطابق رابطه (۱) است [۱۴، ۱۵]:

$$EI \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = f_0(x,t) \quad (1)$$

ضریب EI ، بیانگر سختی تیر و m جرم واحد طول تیر است. z نیز نمایانگر جابجایی عرضی تیر در محل تار خنثی در مقطع دلخواه از طول تیر است که بر حسب زمان و مکان تیر بوده، ناشی از حرکت خمشی آن است. مقدار جابجایی عرضی z نیز، مطابق رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$z(x,t) = z_b(x,t) + z_{re}(x,t) \quad (2)$$

$z_b(x,t)$ جابجایی پایه تیر و $z_{re}(x,t)$ ، جابجایی تیر نسبت به پایه آن است.

۲-۱- تخمین فرکانس‌های طبیعی برای تیر مستطیلی

تیر پیزوالکتریک مدنظر مطابق با شکل ۱ است. با استفاده از آنالیز مودال، پاسخ ارتعاشات آزاد طبق رابطه (۳) به دست خواهد آمد.

B عرض تیر، ρ چگالی تیر و h نمایانگر ضخامت تیر در مقاطع مختلف است. حرف b مربوط به سازه تیر و حرف p نیز، مربوط به ماده پیزوالکتریک است. با اعمال شرایط مرزی برای حل $w_n(x)$ معادله فرکانس به دست می‌آید (رابطه (۱۱)) [۱۵]:

$$1 + \cos \lambda_n \cosh \lambda_n = 0 \quad (11)$$

مقادیر λ_n برای یک تیر یک‌سر درگیر در جدول ۱ ذکر شده‌اند.

همچنین معادله (۷) به صورت رابطه (۱۲) درمی‌آید:

$$w_n(x) = \cos\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \cos h\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \beta_n \left[\sin\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \sin h\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) \right] \quad (12)$$

که در آن داریم:

$$\beta_n = \frac{\cos(\lambda_n) + \cos h(\lambda_n)}{\sin(\lambda_n) + \sin h(\lambda_n)} \quad (13)$$

رابطه (۱۲) شکل مود n ام تیر را نشان می‌دهد.

۲-۲- تخمین فرکانس‌های طبیعی برای تیر غیر مستطیلی

با فرض شکل مود ثابت که مطابق معادله (۱۲) در قسمت قبل به دست آمد و به کمک روش ریلی-ریتز [۱۶] می‌توان معادلات مربوط به فرکانس‌های طبیعی را در قسمت قبل برای این حالت توسعه داد. در این حالت، پهنای تیر تابع طول آن شده، مطابق معادله (۱۴) تعریف می‌شود.

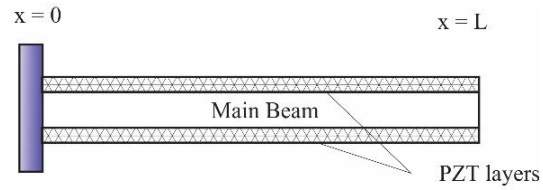
$$B(x) = rB(0) + \frac{B(0)(1-r)}{L}(L-x) \quad (14)$$

$B(0)$ پهنای تیر در بخش متصل شده به دیوار بوده، r برابر نسبت پهنای دو انتهای تیر است (شکل ۲). مطابق رابطه (۱۲) داریم:

$$w_n(x,t) = \left[\cos\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \cos h\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \beta_n \left(\sin\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) - \sin h\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) \right) \right] \sin(\omega t + \alpha) \quad (15)$$

α عددی ثابت بوده، ω و t به ترتیب، بیانگر فرکانس زاویه‌ای و زمان سپری شده می‌باشند. در حالت کلی انرژی جنبشی تیر، مطابق رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} (\rho_b h_b + 2\rho_p h_p) B(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (16)$$



شکل ۱- تیر برداشت‌کننده انرژی ارتعاشی با دو لایه پیزوالکتریک

$$z_{rel}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) q_n(t) \quad (3)$$

$w_n(x)$ و $q_n(t)$ به ترتیب، جرم متعامد شده بردار حالت و مختصات مودال در مود n ام می‌باشند [۱۵]. با جایگذاری معادله (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{EI}{m} \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} = -\frac{1}{q_n(t)} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \omega_n^2 \quad (4)$$

ω_n^2 یک مقدار مثبت ثابت بوده، نشان دهنده پاسخ هارمونیک در تیر است. جمله سمت چپ معادله (۴)، مطابق رابطه (۵) ساده می‌شود.

$$\frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - \lambda_n^4 w_n(x) = 0 \quad (5)$$

که:

$$\lambda_n^4 = \frac{m}{EI} \omega_n^2 \quad (6)$$

با فرض $w_n(x) = C e^{sx}$ که C و s ثابت هستند، جواب معادله (۵) مطابق رابطه (۷) خواهد شد:

$$w_n(x) = C_1 \sin\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\lambda_n}{L}x\right) \quad (7)$$

C_1 تا C_4 ثوابتی هستند که بر اساس شرایط مرزی به دست می‌آیند. فرکانس‌های طبیعی تیر در مود n ام نیز، از معادله (۶) و طبق رابطه (۸) به دست می‌آیند:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (8)$$

از آنجایی که تیر مورد نظر این تحقیق از دو ماده مختلف تشکیل شده است، جملات m و EI مطابق فرمول (۹) و (۱۰) قابل محاسبه خواهند بود [۲]:

$$m = B(\rho_b h_b + \rho_p h_p) \quad (9)$$

$$EI = \frac{E_b B h_b^3 + E_p B (8h_p^3 + 6h_b^2 h_p + 12h_b h_p^2)}{12} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (19)$$

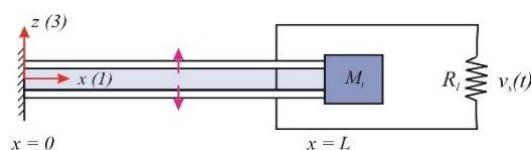
رابطه تنش و کرنش برای تیر و لایه پیزوالکتریک به ترتیب عبارتند از:

$$\sigma_1^p = E_b \varepsilon_1^p \quad (20)$$

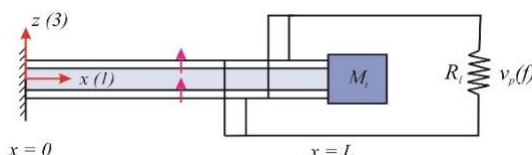
$$\sigma_1^p = E_p (\varepsilon_1^p - d_{31} E_3) \quad (21)$$

در این رابطه، ε نمایانگر کرنش تیر و σ تنش به وجود آمده در تیر است. d_{31} مدول پیزوالکتریسته بوده، E_3 نیز میدان الکتریکی ایجاد شده در ماده پیزوالکتریک است. بر اساس نحوه اتصال لایه‌های پیزوالکتریک و مداربندی، دو نوع اتصال سری و موازی در مدار وجود خواهد داشت که در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.

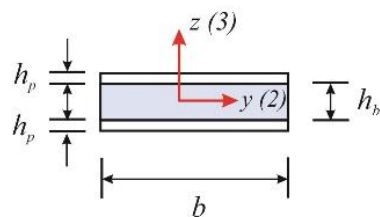
در اتصال سری پیزوالکتریک‌ها، علامت d_{31} در لایه‌های پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی مخالف است (به دلیل قطب‌های مخالف)؛ لذا میدان‌های الکتریکی آنی در جهت یکدیگر می‌باشند و مقدار آن در هر دو لایه از رابطه (۲۲) قابل محاسبه است [۲]:



(الف)



(ب)



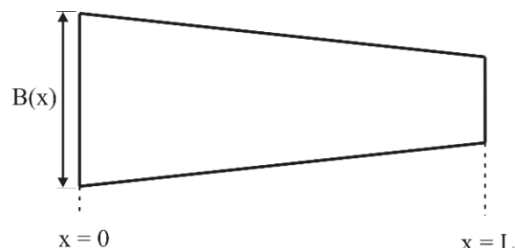
(ج)

□ Piezoelectric □ Base — Electrodes ↑ Poling direction

شکل ۳- الف) اتصال سری لایه‌های پیزوالکتریک، ب) اتصال موازی لایه‌های پیزوالکتریک و ج) سطح مقطع سازه با دو لایه پیزوالکتریک

جدول ۱- مقادیر ویژه تیر یک سردرگیر در مودهای مختلف

شماره مود	λ_n
۱	۱/۸۷۵۱
۲	۴/۶۹۴۱
۳	۷/۸۵۴۷
۴	۱۰/۹۹۵۶



شکل ۲- مشخصات هندسی تیر دوزنقه‌ای مد نظر

از طرفی میزان انرژی پتانسیل نیز، بر اساس فرمول (۱۷) محاسبه می‌شود:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (17)$$

لذا بر اساس قانون بقای انرژی معادله فرکانس طبیعی برابر رابطه (۱۸) خواهد شد:

$$\omega_n = \frac{\int_0^L B(x) \left[-\cos\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) - \cos h\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) \right]^2 dx}{(\rho_b h_b + 2\rho_p h_p)} \quad (18)$$

$$\sqrt{\frac{\int_0^L B(x) \left[\cos\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) - \cos h\left(\frac{\lambda_n x}{L}\right) \right]^2 dx}{(\rho_b h_b + 2\rho_p h_p)}}$$

لازم به ذکر است که در طراحی برداشت‌کننده‌های انرژی، معمولاً تنها مود اول مد نظر قرار گرفته، محاسبات بر مبنای آن انجام می‌گیرد. در مورد محاسبه فرکانس تشدید به منظور طراحی برداشت‌کننده‌های انرژی، روابط ساده‌تر به منظور تخمین اولیه فرکانس تشدید سازه، در مرجع [۸] ارائه شده است.

۳- آنالیز ارتعاشات اجباری تیر یک سردرگیر

در این بخش ولتاژ ایجاد شده در اثر ارتعاشات اجباری تیر به دست آمده است. بر این اساس، تحت تأثیر تحریک پایه تیر، معادله حرکت مطابق رابطه (۱۹) خواهد شد:

L طول کل تیر را نشان می‌دهد. در حالت اتصال موازی، با قرار دادن معادله (۲۷) در (۱۹)، معادله مکانیکی حرکت تیر با کوپلینگ الکتریکی به دست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 z_{rel}(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial t^2} + \eta v(t) \times \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = -m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (30)$$

$\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است که معادله (۳۱) را ارضا

می‌کند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(k)} \delta(x-x_0)}{dx^{(k)}} f(x) dx = (-1)^k \frac{d^{(k)} f(x_0)}{dx^{(k)}} \quad (31)$$

از طرفی برای به دست آوردن معادلات الکتریکی از رابطه

(۳۲) استفاده شده است که برای مواد پیزوالکتریک است:

$$D_3 = d_{31} \sigma_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \quad (32)$$

D_3 جابجایی الکتریکی، σ_1 تنش و ε_{33}^T ثابت دی‌الکتریک در تنش ثابت است. E_3 نیز، میدان الکتریکی یکنواخت است. با تغییر معادله (۳۲)، تنش بر حسب کرنش و مدول یانگ ماده پیزوالکتریک نوشته می‌شود. از آنجایی که $\varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{33}^S + d_{31} E_p$ با بکارگیری روابط (۳۱) و (۳۲) داریم:

$$D_3 = d_{31} E_p \varepsilon_1(x,t) - \varepsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \quad (33)$$

پتانسیل الکتریکی $q(t)$ در لایه پیزوالکتریک با انتگرال‌گیری از جابجایی الکتریکی در روی سطح لایه پیزوالکتریک مطابق رابطه (۳۴) به دست می‌آید:

$$q(t) = \int_{D_3} \vec{n} \cdot d\vec{A} = - \int_{x=0}^{x=L} \left[d_{31} \left(\frac{h_b}{2} + h_p \right) E_p B \frac{\partial^2 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_{33}^S B \frac{v(t)}{h_p} \right] dx \quad (34)$$

\vec{D} بردار جابجایی الکتریکی بوده، n بردار واحدی که عمود بر سطح است. با مشتق‌گیری از $q(t)$ نسبت به زمان، جریان الکتریکی به دست می‌آید. لذا:

$$i(t) = \int_{x=0}^{x=L} \left[d_{31} \left(\frac{h_b}{2} + h_p \right) E_p B \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\varepsilon_{33}^S B L}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \right] dx \quad (35)$$

جمله دوم معادله (۳۵)، جهت خاصیت خازنی ماده پیزوالکتریک است. برای راحتی کار می‌توان ماده پیزو را به بار مقاومتی متصل کرد که به عنوان منبع جریان بدون العمان خازن خارجی عمل خواهد کرد [۲]؛ بنابراین ولتاژ خروجی مطابق رابطه (۳۶) به دست خواهد آمد:

$$E_3(t) = - \frac{v(t)}{2h_p} \quad (22)$$

در اتصال موازی پیزوالکتریک‌ها، به دلیل اینکه علامت در لایه‌های پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی یکسان است، میدان‌های الکتریکی آنی در جهات غیریکسان بوده، مقدار آن برای لایه فوقانی و تحتانی به ترتیب مطابق روابط (۲۳) و (۲۴) محاسبه می‌شود [۲]:

$$E_3(t) = - \frac{v(t)}{h_p} \quad (23)$$

$$E_3(t) = \frac{v(t)}{h_p} \quad (24)$$

ممان داخلی تیر نیز برابر است با:

$$M(x,t) = - \int_{-\frac{h_b}{2}}^{-\frac{h_b}{2}-h_p} \sigma_1^p By dy - \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \sigma_1^b By dy - \int_{\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}+h_p} \sigma_1^p By dy \quad (25)$$

در این جا فرض می‌شود که عرض ماده تیر و پیزوالکتریک یکسان است و با B نمایش داده می‌شود؛ همچنین ضخامت تیر و لایه پیزوالکتریک به ترتیب برابر، h_p و h_b هستند. با توجه به ولتاژ خروجی متفاوت در اتصالات سری و موازی، انتظار می‌رود اثر کوپلینگ پیزوالکتریک متفاوت بوده، لذا پاسخ جابجایی $w_{rel}(x,t)$ در دو حالت متفاوت باشد. اگر این مقدار را در حالات سری و موازی به ترتیب با $z_{rel}^S(x,t)$ و $z_{rel}^P(x,t)$ نشان دهیم، ممان خمشی درونی را می‌توان از روابط زیر یافت که در آن‌ها اندیس‌های S و P به ترتیب، اشاره به اتصالات سری و موازی لایه‌های پیزوالکتریک دارند:

$$M^S(x,t) = -EI \frac{\partial^2 z_{rel}^S(x,t)}{\partial x^2} + \eta_b v_b(t) [H(x) - H(x-L)] \quad (26)$$

$$M^P(x,t) = -EI \frac{\partial^2 z_{rel}^P(x,t)}{\partial x^2} + \eta_p v_p(t) [H(x) - H(x-L)] \quad (27)$$

که در آن‌ها؛

$$\eta_b = \frac{E_2 B d_{31}}{2h_p} \left[\left(h_p + \frac{h_b}{2} \right)^2 - \frac{h_b^2}{4} \right] = E_2 B d_{31} \left(\frac{h_p + h_b}{2} \right) \quad (28)$$

$$\eta_p = 2\eta_b = E_2 B d_{31} (h_p + h_b) \quad (29)$$

$$\int_0^L \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dq_n(t)}{dt} \int_0^L \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2} dx = \frac{dq_n(t)}{dt} \frac{dw_n(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (42)$$

در نهایت معادله (۴۱) به صورت رابطه (۴۳) می‌شود:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{h_p}{\varepsilon_{33}^s BLR_L} v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{dq_n(t)}{dt} \quad (43)$$

که:

$$\varphi_n(x) = \frac{d_{31} E_p (h_b/2 + h_p) h_p}{\varepsilon_{33}^s L} \frac{dw_n(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (44)$$

معادله (۴۱) با استفاده از تابع موجود در معادله (۴۵)

برای $v(t)$ حل خواهد شد.

$$\psi(t) = e^{t/\tau_c} \quad (45)$$

در معادله بالا، τ_c ثابت زمانی مدار بوده، مطابق فرمول (۴۶) تعریف می‌شود:

$$\tau_c = \frac{\varepsilon_{33}^s BLR_L}{h_p} \quad (46)$$

فرض شده حرکت تیر هارمونیک باشد؛ لذا با فرض $v(t) = V_0 e^{i\omega t}$ و $z_b = Y_0 e^{i\omega t}$ در معادله (۴۰)، مطابق معادله (۴۷) به دست خواهد آمد:

$$q_n(t) = \frac{[m\omega^2 Y_0 \int_0^L w_n(x) dx - \chi_n V_0] e^{i\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega} \quad (47)$$

ω فرکانس تحریک و i عدد موهومی واحد است. از طرفی بر اساس معادله (۴۳) داریم:

$$\left(\frac{1+i\omega\tau_c}{\tau_c}\right) V_0 e^{i\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{dq_n(t)}{dt} \quad (48)$$

با جایگذاری معادله (۴۷) در (۴۸)، مقدار V_0 که نمایانگر دامنه ارتعاشات ولتاژ است، بر اساس رابطه (۴۹) به دست خواهد آمد:

$$\left(\frac{1+i\omega\tau_c}{\tau_c}\right) V_0 e^{i\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{i\omega [m\omega^2 Y_0 \int_0^L w_n(x) dx - \chi_n V_0] e^{i\omega t}}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega} \quad (49)$$

$$v(t) = R_L i(t) = -R_L \left[\int_{x=0}^{x=L} \left[d_{31} \left(\frac{h_b}{2} + h_p \right) E_p B \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] dx + \frac{\varepsilon_{33}^s BL}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} \right] \quad (36)$$

معرف مقاومت ناشی از بار است.

۳-۱- تخمین ولتاژ تولیدی در تیر مستطیل شکل

برای این کار از معادله (۱۹) استفاده می‌شود. مطابق آنالیز مودال داریم:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) q_n(t) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) q_n(t) \right] + \chi_n v(t) = -m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (37)$$

که در آن:

$$\chi_n = \eta \frac{dw_n(x)}{dx} \Big|_{x=L} \quad (38)$$

با ضرب دو طرف رابطه (۳۷) با تابع نرمالایز شده جرمی $w_p(x)$ و انتگرال گیری در طول تیر و استفاده از قضیه تعامد نتیجه (۳۹) به دست خواهد آمد:

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) + \chi_n v(t) = - \int_0^L w_n(x) m \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (39)$$

جهت نزدیکی به واقعیت اثر استهلاک نیز به معادلات افزوده می‌شود [۱۷] و نتیجه (۴۰) به دست می‌آید (رابطه ۴۰):

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + 2\xi_n \omega_n \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t) + \chi_n v(t) = - \int_0^L w_n(x) \frac{\partial^2 z_b(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (40)$$

با کمی تغییر در معادله (۳۶) داریم:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{h_p}{\varepsilon_{33}^s BLR_L} v(t) = - \frac{d_{31} E_p (h_b/2 + h_p) h_p}{\varepsilon_{33}^s L} \int_0^L \frac{\partial^3 z_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx \quad (41)$$

با استفاده از معادله (۳) در معادله (۴۱)، عبارت انتگرالی برابر خواهد شد با:

معادلات مستطیلی را می‌توان برای تیر غیر مستطیلی نیز به کار برد، ولی باید تغییراتی در آن صورت گیرد که شامل $I(x)$ (ممان سطح) و m است؛ زیرا در آن صورت برخلاف تیر ساده مستطیلی، پهنای تیر در طول آن تغییر می‌کند.

۴- شبیه‌سازی اجزاء محدود و مقایسه نتایج مختلف

برای بررسی صحت نتایج بدست آمده، نتایج تحلیل اجزای محدود و کار تجربی انجام شده در مرجع [۱۸] در مورد یک تیر مستطیلی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. خواص مکانیکی و پارامترهای هندسی این مطالعه موردی به ترتیب در جدول ۲ و جدول ۳ ذکر شده‌اند. نتایج تجربی، تحلیلی و عددی در جدول ۴ ذکر شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود، همخوانی خوبی بین نتایج وجود دارد. البته لازم به ذکر است، در محاسبات انجام شده از اثر میرایی صرف‌نظر شده است و انتظار می‌رود با در نظر گرفتن این پارامتر، دقت بیشتری در نتایج حاصل شود. در شکل ۴، شبیه‌سازی اجزاء محدود انجام گرفته برای تیر مستطیلی یکسردرگیر به نمایش درآمده است.

بنابراین نسبت ولتاژ خروجی به شتاب پایه تیر (FRF) در هر لایه پیزوالکتریک برابر می‌شود با:

$$\frac{v(t)}{\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n i \omega m \left(\int_0^L w_n(x) dx \right)}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \omega \phi_n \chi_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega} \right) + \frac{1+i\omega\tau_c}{\tau_c}} \quad (50)$$

۳-۲- تخمین ولتاژ تولیدی در تیر مستطیل شکل دندانهای

برای تیر مستطیل شکل شانه‌ای که در واقع سازه‌ای متشکل از تعدادی تیر مستطیلی است، پاسخ ولتاژی برابر جمع ولتاژ تک تک تیرها می‌شود و لذا:

$$\frac{v(t)}{\omega^2 Y_0 e^{i\omega t}} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n i \omega m \left(\int_0^L w_n(x) dx \right)}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega}}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \omega \phi_n \chi_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega} \right) + \frac{1+i\omega\tau_c}{\tau_c}} \quad (51)$$

n_0 تعداد تیرهای استفاده شده در سازه مورد نظر است.

۳-۳- تخمین ولتاژ تولیدی در تیر غیرمستطیل شکل دندانهای

جدول ۲- خواص مکانیکی ماده پیزوالکتریک مورد استفاده جهت شبیه‌سازی

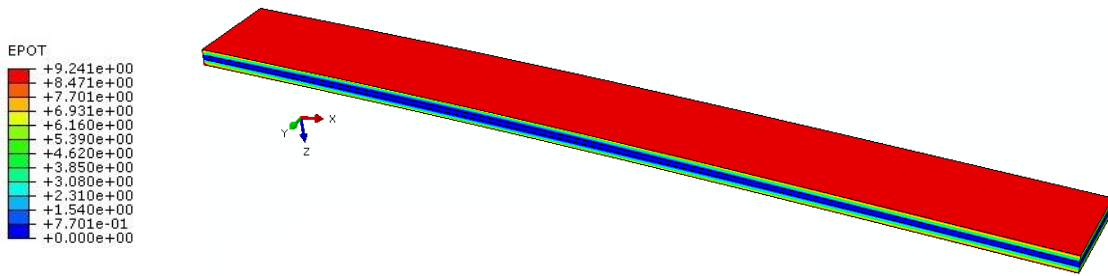
مقدار	پیزوالکتریک (PZT-5A)	مقدار	زیرلایه (Brass)
$5/1 \times 10^{10}$	مدول یانگ، $[N/m^2] E_p$	$9/7 \times 10^{10}$	مدول یانگ، $[N/m^2] E_b$
۷۷۵۰	چگالی، $[kg/m^3] \rho_p$	۸۴۹۰	چگالی، $[kg/m^3] \rho_b$

جدول ۳- پارامترهای هندسی مورد استفاده در سازه تیر مورد استفاده برای شبیه‌سازی و کار تجربی

طول (mm)	عرض (mm)	ضخامت ماده پیزوالکتریک (mm)	ضخامت زیرلایه فلزی (mm)
۲۸/۶	۳/۱۷۵	۰/۱۸۸	۰/۱۳۲

جدول ۴- نتایج تجربی، تحلیلی و عددی تیر مستطیلی یکسردرگیر با دولایه پیزوالکتریک

سازه تیر	فرکانس (Hz)	ولتاژ خروجی (V)	نتایج تجربی
	۲۴۶	۱۰/۲۴	نتایج تجربی
	۲۵۸/۴۴	۹/۲۴	شبیه‌سازی اجزاء محدود
	۲۵۸/۰۵	۹/۷۳	نتایج تحلیلی



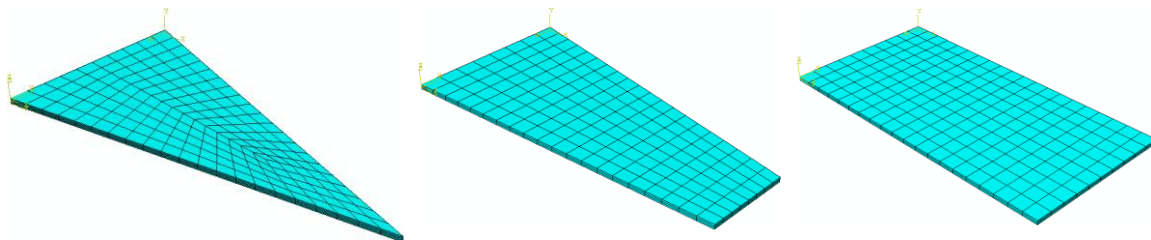
شکل ۴- شبیه‌سازی اجزاء محدود تیر مستطیلی یک سردرگیر با دو لایه پیزوالکتریک

کرنش، تیر مثلثی ولتاژ و توان بیشتری نسبت به تیرهای دوزنقه‌ای و مستطیلی ایجاد می‌کند. به ازای توابع مختلف $B(x)$ مورد استفاده در رابطه تحلیلی برای فرکانس طبیعی و ولتاژ خروجی، می‌توان این روابط را برای سایر شکل‌های هندسی نظیر دوزنقه‌ای و مثلثی نیز تعمیم داد.

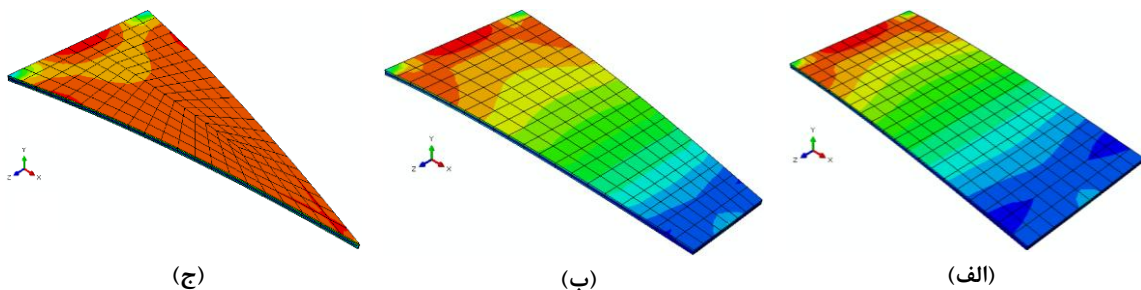


شکل ۵- پهنای دو انتهای تیر

برای مطالعه اثر شکل تیر، نسبت پهنای دو انتهای تیر در مطالعات لحاظ شده است (شکل ۵). نسبت یک به معنی تیر مستطیلی و صفر به معنی تیر مثلثی است. شکل ۶ مدل‌های اجزاء محدود را برای سه حالت تیر مستطیلی، دوزنقه‌ای و مثلثی نمایش داده است. مدلسازی در نرم‌افزار ABAQUS 6.14 انجام شده، نتایج برای یک بارگذاری یکسان نقطه‌ای در شکل ۷ به نمایش درآمده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که تحت شرایط یکسان، تیر یک سردرگیر مثلثی، توزیع کرنش را بهبود داده، یکنواخت‌تر نموده است. با توجه به محاسبات، میانگین کرنش در تیر مثلثی دو برابر تیر مستطیلی خواهد بود؛ در نتیجه این توزیع



شکل ۶- مدل‌های اجزاء محدود برداشت‌کننده‌های یک سردرگیر پیزوالکتریک مستطیلی، دوزنقه‌ای و مثلثی



شکل ۷- توزیع کرنش در سه برداشت‌کننده پیزوالکتریک مختلف

- [6] Ben Ayed S, Najar F, Abdelkefi A (2009) Shape improvement for piezoelectric energy harvesting applications. in *Signals, Circuits and Systems (SCS)* 1-6.
- [7] Roundy S, Leland ES, Baker J, Carleton E, Reilly E, Lai E (2005) Improving power output for vibration-based energy scavengers. *IEEE Pervasive Comput* 4(1): 28-36.
- [8] Hosseini R, Hamed M (2015) An investigation into resonant frequency of trapezoidal V-shaped cantilever piezoelectric energy harvester. *Microsyst Technol* 1-8.
- [9] Yang B, KS Yun (2011) Efficient energy harvesting from human motion using wearable piezoelectric shell structures. in *Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference (TRANSDUCERS)* 2646-2649.
- [10] Hu H, Xue H, Hu Y (2007) A spiral-shaped harvester with an improved harvesting element and an adaptive storage circuit. *IEEE Trans Ultrason Ferroelect Freq Control* 54: 1177-1187.
- [11] Amin Karami M, Inman DJ (2012) Parametric study of zigzag microstructure for vibrational energy harvesting. *J Microelectromech S* 21(1): 145-160.
- [12] Hosseini R, Hamed M (2016) An investigation into resonant frequency of triangular V-shaped cantilever piezoelectric vibration energy harvester. *J Solid Mech* 8(3): 560-567.
- [13] Hosseini R, Nouri M (2016) Shape design optimization of unimorph piezoelectric cantilever energy harvester. *J Appl Comput Mech* 47(2): 247-259.
- [14] Thomson W (1996) *Theory of vibration with applications*. CRC Press.
- [15] Rao SS (2007) *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons.
- [16] Yang K, Li Z, Jing Y, Chen D, T Ye (2009) Research on the resonant frequency formula of V-shaped cantilevers. in *2009 4th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems* 59-62.
- [17] Fakhzan AGAMMN (2013) Harvesting vibration energy using piezoelectric material: Modeling, simulation and experimental verification. *Mechatron* 23: 61-66.
- [18] Ambrosio R, Gonzalez H, Moreno M, Torres A, Martinez R, Robles E (2014) Study of cantilever structures based on piezoelectric materials for energy harvesting at low frequency of vibration. in *Advanced Materials Research* 159-163.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، محاسبات تحلیلی بر اساس روش پارامترهای توزیع شده برای استخراج مقدار فرکانس تشدید و ولتاژ خروجی تیر یک سردرگیر با دو لایه پیزوالکتریک انجام شد که یکی از بهترین و ساده‌ترین سازه‌های موجود جهت استفاده در سیستم‌های برداشت‌کننده انرژی است. معادلات بر اساس تیر اویلر-برنولی به دست آمدند و بر این اساس فرکانس‌های طبیعی سیستم محاسبه گردیدند. ارتعاشات نیز بر اساس تحریک پایه تیر می‌باشند. نتایج حاصل از این معادلات و نتایج شبیه‌سازی و تجربی تا حد زیادی بر هم منطبق بودند و می‌توان از این روابط برای طراحی اینگونه برداشت‌کننده‌ها استفاده کرد.

از دیدگاه میدان کرنشی نیز مطابق شبیه‌سازی اجزاء محدود انجام شده، مشاهده گردید که تحت تأثیر بار یکسان برای انواع تیرها، با تغییر شکل تیر به حالت مخروطی (دوزنقه‌ای و سپس مثلثی)، کرنش ایجاد شده در سطح تیر رو به یکساختی می‌رود و در حالت مثلثی میانگین کرنش دو برابر حالت مستطیل شکل به دست آمده، بر این اساس ولتاژ تولیدی نیز بیشتر خواهد شد.

۶- مراجع

- [1] Beeby SP, Tudor MJ, White N (2006) Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Meas Sci Technol* 17: R175.
- [2] Erturk A, Inman DJ (2011) *Piezoelectric energy harvesting*. John Wiley & Sons.
- [3] Jagtap SN, Paily R (2011) Geometry optimization of a MEMS-based energy harvesting device. in *Students' Technology Symposium (TechSym)* 265-269.
- [4] Patel R, McWilliam S, Popov A (2011) A geometric parameter study of piezoelectric coverage on a rectangular cantilever energy harvester. *Smart Mater Struct* 20(8): 085004.
- [5] Zhu M, Tiwari A (2010) Design Study of piezoelectric energy-harvesting devices for generation of higher electrical power using a coupled piezoelectric-circuit finite element method. *IEEE Trans Ultrason Ferroelect Freq Control* 57(2): 427-437.