مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۲/ صفحه ۱-۱۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

تأثیر سختی یاتاقان مغناطیسی فعال بر ارتعاشات آشوبناک روتور انعطاف‌پذیر

سعید قائدی[۱]، مصطفی غیور[۲] و حشمت اله محمد خانلو[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

[۲] استاد، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

[۳] استادیار، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۸/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۳/۱۶

چکیده

در ماشین آلات دوار، انتخاب تکیه‌گاه‌های مناسب همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. رایج‌ترین تکیه‌گاه‌ها، یاتاقان‌های غلتشی و لغزشی می‌باشند که تماس بین روتور و یاتاقان، می‌تواند منجر به نیروهای غیرخطی و تغییر رفتار دینامیکی سیستم شود. از طرفی با جایگزینی یاتاقان‌های مغناطیسی، امکان حذف تماس وجود دارد؛ ولی عوامل غیرخطی جدیدی در اثر نیروهای مغناطیسی ظاهر می‌شوند که نیازمند تجزیه و تحلیل هستند. در این مقاله، رفتار غیرخطی سیستم در حضور یاتاقان‌های مغناطیسی فعال (AMB) بررسی شده است. سیستم دارای یک دیسک صلب نابالانس بوده، به‌صورت انعطاف‌پذیر و با هشت درجه آزادی (چهار درجه برای دیسک و دو درجه برای هر یاتاقان) مدل و نیروهای ژیروسکوپی ناشی از انعطاف‌پذیری روتور نیز در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم به صورت غیرخطی و کوپله استخراج و با روش رانگ _ کوتای مرتبه چهار حل شده‌اند. تحلیل با سه نوع یاتاقان مغناطیسی و سه سختی متفاوت انجام شده است. برای شناسایی رفتارهای غیرخطی سیستم از تکنیک‌های شناسایی، مانند تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخه‌ای شدن (انشعاب) و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده می‌شود. نتایج، بیانگر وقوع حرکت‌های پریودیک، زیر هارمونیک، شبه پریودیک و آشوبناک در پاسخ سیستم بوده، با افزایش سختی یاتاقان مغناطیسی، محدوده‌های وقوع آشوب دچار تغییر می‌شود.

کلمات کلیدی: روتور انعطاف‌پذیر؛ یاتاقان مغناطیسی؛ آشوب؛ ماکزیمم نمای لیاپانوف.

Influence of Active Magnetic Bearing Stiffness on Chaotic Vibration of Flexible Rotor

S. Ghaedi[1], M. Ghayour[2,*], H. Mohammad Khanlo[3]

[1] M.S. Student, Mech. Eng., Isfahan University of Tech., Isfahan, Iran.

[2] Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Tech., Isfahan, Iran.

[3] Assist. Prof., Department of Aerospace Eng., Aeronautical Univ. of Sci. and Tech., Tehran, Iran.

Abstract

Choosing the appropriate end supports has been great importance in rotating machinery. The mechanical bearings (ball and journal) are more popular types of supports that used in rotating systems. However, the rub-impact between the rotor and bearing is main disadvantage of these types of bearings. Whereby, the active magnetic bearings have been developed recently that removes the rub-impact, but induces new nonlinear factors that affect the dynamical behavior of system. An unbalanced disk is mounted on the shaft. The rotor is modeled as three masses and 8 D.O.F. The governing equations are extracted in form of nonlinear coupled ordinary differential equations. The influence of magnetic bearing stiffness on the chaotic behavior of a flexible rotor supported by active magnetic bearings is investigated. The bifurcation diagrams, phase planes, power spectra, Poincare map and maximum lyapanov exponents are used to analyze the response under different operational conditions. The numerical results shows a rich variety of nonlinear behavior including periodic, sub-periodic, quasi-periodic and chaotic vibration due to active magnetic bearing stiffness. Also the results reveals the significant changes in the chaotic regions in 8 D.O.F model.

Keywords: Flexible Rotor; Magnetic Bearing; Chaos; Maximum Lyapanov Exponents.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱۳۳۹۱۵۲۴۷

آدرس پست الکترونیک: ghayour@cc.iut.ac.ir

۱- مقدمه

وجود نابالانسی غیرقابل اجتناب در ماشین‌آلات دوار، همواره ارتعاشاتی ناخواسته به پاسخ دینامیکی سیستم تحمیل می‌کند. به‌طوری‌که با افزایش دور روتور، این اثر تقویت شده و در سرعت‌های بالا اثراتی مخرب در پی دارد. هم‌چنین وجود تماس در یاتاقان‌های مکانیکی (غلتشی و لغزشی) نیز، از مشکلات همیشگی در زمینه طراحی روتور است؛ زیرا این نیروی تماسی ماهیتی غیرخطی داشته، با حضور آن در معادلات حرکت، رفتارهای متفاوتی در سیستم پدید می‌آید. این عیب، طراحان را به سوی طراحی و ساخت یاتاقان‌های بدون تماس سوق داد که یاتاقان‌های آیرودینامیکی از تلاش-های انجام شده در راستای نیل به همین هدف است. آنچه که به‌عنوان عیب این یاتاقان‌ها شناخته شده است، ایجاد سختی و استهلاک نسبتاً کم آن‌هاست.

یاتاقان‌های مغناطیسی فعال[1] (AMB)، این قابلیت را دارند که با قرار دادن کنترلری مناسب، ارتعاشات روتور را کنترل نموده، زمینه لازم جهت عملکرد صحیح سیستم را فراهم نمایند. نیرویی که این یاتاقان‌ها جهت شناور کردن روتور ایجاد می‌کنند، غیرخطی و تابعی از سرعت و موقعیت محور است. یکی از بزرگ‌ترین مزایای این یاتاقان‌ها، امکان کنترل فعال حرکت روتور است، به‌طوری‌که با کنترل جریان ورودی به قطب‌های یاتاقان، می‌توان ارتعاشات روتور را کنترل کرد.

۱-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده

مرور مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات روتور _ AMB در دو قسمت مجزا شامل، تحقیقات با فرض صلب بودن محور و روتور انعطاف‌پذیر انجام گرفته که در ادامه به مهمترین آن‌ها اشاره می‌شود. تأثیر عوامل غیرخطی ناشی از کوپلینگ هندسی یاتاقان، روی پاسخ روتور صلب با یاتاقان مغناطیسی فعال توسط ام و همکارش، بررسی و وجود دوشاخه‌ای شدن هاپف[2] در محدوده معینی از سرعت روتور آشکار شده است [۱]. مطالعات ویرجین و همکاران، وجود حل چندگانه[3] در پاسخ به تشدید اولیه روتور صلب _ AMB و تأثیر کوپلینگ نیروهای مغناطیسی اهمیت این اثر را نمایان می‌سازد [۲]. در تحقیق ژانگ و همکاران، تأثیر سختی یاتاقان با ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و سه روی پاسخ روتور نیز بررسی شده، حرکت شبه پریودیک، زیر هارمونیک دوم و همچنین پرش در رفتار سیستم مشاهده شده است [۳]. بررسی پایداری و دوشاخگی پاسخ روتور صلب _ AMB با تأخیر زمانی توسط وانگ و همکارش انجام و مشخص شده است که با افزایش تأخیر سنسور و گذشتن آن از مقدار بحرانی آن، دوشاخگی هاپف در پاسخ سیستم ظاهر می‌شود [۴]. فعالیت این مقاله با بررسی نواحی ناپایداری پاسخ، توسط وانگ و همکارش روی یک سیستم مشابه ادامه یافت [۵]. در برخی از مطالعات سختی یاتاقان مغناطیسی به‌صورت متغیر با زمان (هارمونیک) در نظر گرفته شده است. تحقیق ژانگ و همکارانش در این زمینه، محدوده‌های آشوبناک در پاسخ روتور را بررسی می‌کند. در این مطالعات، همواره پدیده آشوب نوع شلنیکف[4] در پاسخ سیستم قابل مشاهده است [۶]. در مطالعه عنایت حسین [۷] مدل سیستم روتور-AMB با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی، همانند جریان قطب‌های مغناطیسی، فاصله هوایی بین روتور و استاتور و تأثیرات هندسه یاتاقان ارائه شده است. روتور دو درجه آزادی و محور بدون جرم بوده، اثر نابالانسی به‌عنوان پارامتر کنترلی، روی پاسخ روتور را مورد بررسی قرار می‌دهد. مطالعه آمر و همکارش که روی روتور صلب _ AMB و با سختی متغیر با زمان انجام شده نشان می‌دهد که در پاسخ سیستم همواره پدیده‌های پرش، فنر نرم و فنر سخت اتفاق می‌افتد [۸]. رفتار غیرخطی روتور صلب با یاتاقان مغناطیسی هشت قطبی، توسط ژانگ و همکاران، مورد بررسی قرار گرفته است [۹]. مدل به‌صورت دو درجه آزادی و دارای ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و سه است. سیستم تحت رزونانس اولیه و نصف رزونانس، هارمونیک قرار گرفته است. در سال‌های اخیر، مطالعاتی در زمینه دینامیک روتورهای انعطاف‌پذیر انجام شده است. مطالعات جانگ و همکارش روی روتور _ AMB انعطاف‌پذیر و یاتاقان‌های کمکی نشان داد که حرکات زیر

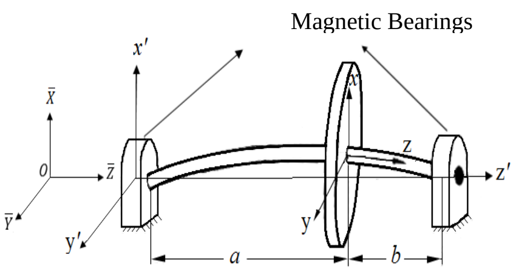
[1] Active Magnetic Bearings
[2] Hopf Bifurcation
[3] Multiple Solution
[4] Shilnikov Type Multi-pulse Chaotic Phenomenon

هارمونیک دوم، چهارم، هشتم و آشوب، همواره در رفتار روتور وجود دارد [۱۰]. ژانگ و همکارش [۱۱]، پاسخ غیرخطی روتور _AMB با دیسک صلب نابالانس را مطالعه کردند. در این تحقیق، از نمودار دوشاخه‌ای شدن مرکز ژورنال، طیف توان و نگاشت پوانکاره برای تحلیل نتایج عددی به‌دست آمده از روش رانگ_کوتای مرتبه چهار استفاده شده است. در مطالعه عنایت حسین روی تأثیر کوپلینگ مغناطیسی بر رفتار روتور _ AMB انعطاف‌پذیر می‌دهد که با افزایش کوپلینگ نیروهای مغناطیسی یاتاقان، طیف وسیعی از ارتعاشات زیر هارمونیک در پاسخ سیستم مشاهده شده، آشوب در سرعت‌های پایین‌تری اتفاق می‌افتد [۱۲]. ناهم‌راستایی یاتاقان‌ها نیز، یکی از مشکلات عمده در ماشین‌های دوار است که تحقیق عنایت حسین نشان می‌دهد که با افزایش ناهم‌راستایی، بسته به مقدار کوپلینگ نیروهای مغناطیسی، حرکت در سرعت کمتری به حرکت آشوب می‌انجامد [۱۳]. هالمینن و همکاران [۱۴]، دینامیک سیستم روتور با یاتاقان‌های مغناطیسی و کمکی را هنگام تماس محور با یاتاقان‌های کمکی، مورد بررسی قرار دادند. یاتاقان‌های کمکی با روش اجزاء محدود مدل شده‌اند. یک مدل پیشنهادی از روتور _ AMB، توسط الستی و همکارش ارائه شده است تا با استفاده از آن و با به کارگیری روش فیلتر کالمن بهبود یافته[1] برای یافتن پارامترهای غیرخطی سیستم، بتوان رفتار غیرخطی سیستم را توصیف کرد [۱۵]. در زمینه بررسی پارامترهای موثر در یاتاقان‌های مغناطیسی فعال، حجت و همکاران با ساخت یک یاتاقان مغناطیسی فعال، پارامترهای بهینه سیستم را با کنترلر ID استخراج کردند [۱۶]. شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسور موقعیت، یکی از مشکلات کنترل یاتاقان‌های مغناطیسی فعال است که دربندی و همکاران با طراحی کنترلر ID، این خطا را به خوبی شناسایی و اثر آن را روی پاسخ حذف کردند[۱۷]. در این مطالعه، حل به صورت تحلیلی و عددی انجام شده است. در بیشتر مطالعاتی که در زمینه بررسی دینامیک غیرخطی روتور _ AMB انجام گرفته است، روتور به صورت صلب مدل شده است؛ اما در ماشین‌های دوار، انعطاف‌پذیری روتور روی رفتار دینامیکی سیستم تأثیرگذار بوده، فرکانس طبیعی سیستم را دچار تغییر می‌نماید. همچنین در مقالاتی که روتور به‌صورت انعطاف‌پذیر مدل شده، دیسک در مرکز قرار دارد و دارای دو درجه آزادی انتقالی است. با این فرض، ترم‌های ژیروسکوپی در معادلات ظاهر نشده، این خاصیت مهم ماشین‌های دوار نادیده گرفته می‌شود. یکی دیگر از مواردی که در اکثر مقالات انجام شده در زمینه آشوب روتور _ AMB، از آن صرف‌نظر می‌شود، تأثیر اثر وزن روتور بر رفتار غیرخطی سیستم است که در تحقیق حاضر، این نیرو در معادلات حرکت سیستم لحاظ شده است.

هدف از این مطالعه، ارائه مدل مناسب‌تری از سیستم روتور _ AMB است، به گونه‌ای که با وجود اثرات ژیروسکوپی در معادلات، دیسک نیز می‌تواند در نقطه‌ای به جز مرکز محور قرار گیرد. به همین منظور، مدل ۸ درجه آزادی از سیستم روتور _ AMB ارائه گردیده و از ابزارهای شناسایی رفتارهای غیرخطی از جمله، تاریخچه زمانی، طیف توان، منحنی‌های صفحه فاز، نگاشت پوانکاره، نمودار دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده شده است.

۲- مدل روتور انعطاف‌پذیر _ AMB

شماتیک سیستم مورد مطالعه، در شکل ۱ نشان داده شده است. روتور با سرعت ثابت ω دوران می‌کند و در دو انتها توسط دو یاتاقان مغناطیسی چهار قطبی مهار شده است. روتور انعطاف‌پذیر بوده، یک دیسک صلب روی آن قرار گرفته است. یک نابالانسی استاتیکی روی دیسک قرار دارد که موجب تحریک هارمونیک سیستم است.



شکل ۱- روتور انعطاف‌پذیر با یاتاقان‌های مغناطیسی

[1] Enhanced Kalman-Filter

۲-۱- مدل ارائه‌شده

در اغلب مدل‌های ارتعاشی، سیستم پیوسته واقعی به‌صورت گسسته در نظر گرفته می‌شود و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر سیستم اصلی، به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در روش اجزاء محدود، سیستم اصلی به تعدادی المان مجزا تقسیم می‌شود؛ به طوری‌که افزایش تعداد المان‌ها، تعداد معادلات بیشتر و متعاقب آن، افزایش دقت حل تقریبی را در پی خواهد داشت. با این روش، حل عمومی برای معادلات معمولی حاکم برای هندسه‌های ساده، به راحتی قابل دستیابی است. موضوع مهم در این روش، تقسیم کل سیستم به تعداد مناسبی از درجات آزادی است تا علاوه بر ارائه مدل مناسبی از سیستم واقعی، حجم محاسبات در حد قابل قبولی باشد؛ زیرا دقت فرکانس‌های طبیعی سیستم، بستگی مستقیم به مدل اجزاء محدود دارد.

شکل ۲، مدل پیشنهادی روتور را نشان می‌دهد. در این مقاله، روتور به‌صورت هشت درجه آزادی در نظر گرفته شده است. به‌صورتی‌که سیستم اصلی به سه جرم گسسته تقسیم شده است. دو جرم انتهایی (m_1 و m_3)، امکان جابه‌جایی در جهت $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را دارند، درحالی‌که دیسک (m_2)، علاوه بر تغییر مکان در جهت $\bar{x}$ و $\bar{y}$ امکان دوران حول دو راستای مذکور را نیز دارد. در مدل ارائه شده، جرم هر محور در دو نقطه ۱ و ۳ به‌صورت نقطه‌ای قرار می‌گیرد؛ درنتیجه محور انعطاف‌پذیر به‌صورت بدون جرم و عاملی برای اتصال جرم‌های متمرکز ایفای نقش می‌کند.

جدول ۱، مشخصات فیزیکی سیستم مورد نظر را نشان می‌دهد. به این ترتیب، تمام پارامترها و ضرایب بدون بعد سیستم با استفاده از همین مقادیر عددی به دست می‌آیند.

۲-۲- معادلات حاکم بر سیستم

معادلات با فرض عمود ماندن دیسک بر تار خنثای تیر و استفاده از روش معادلات لاگرانژ به‌دست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial \mathrm{D.E}}{\partial \dot{q}_i}\right)=Q_i \qquad i=1,2,\dots,\mathrm{n\ dof} \quad (۱)$$

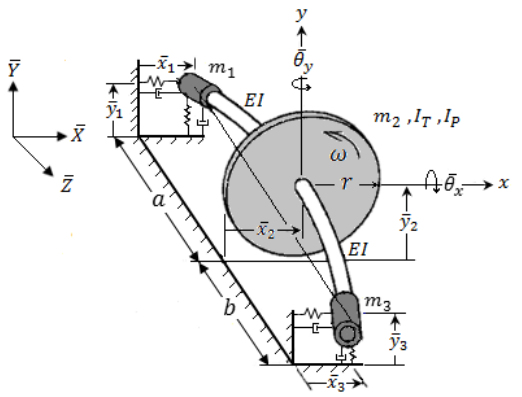
T و V به ترتیب، انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و q_i ، Q_i و D. E به ترتیب، مختصات تعمیم یافته، نیروهای تعمیم یافته و نیروی اتلافی سیستم است.

۲-۲-۱- انرژی جنبشی سیستم

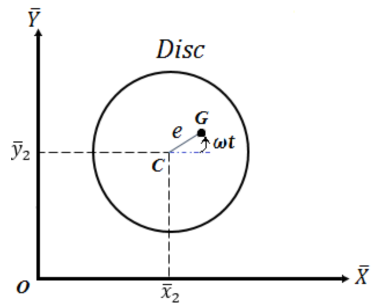
با توجه به کم بودن نسبت شعاع محور به دیسک، از انرژی جنبشی دورانی جرم در ژورنال‌ها صرف نظر شده، تنها دارای انرژی جنبشی انتقالی می‌باشند؛ در صورتی‌که دیسک انرژی جنبشی دورانی را نیز دارا است. با داشتن مختصات مرکز دیسک (نقطه C) در شکل ۳، می‌توان سرعت مرکز جرم دیسک (نقطه G) را مطابق رابطه (۲) محاسبه کرد.

جدول ۱- پارامترهای فیزیکی مدل

پارامتر	نام	مقدار	واحد
ρ	چگالی	۷۸۰۰	Kg/m^3
l	طول محور	۰/۵	m
r	شعاع محور	۰/۰۱	m
R	شعاع دیسک	۰/۱	m
EI	صلبیت خمشی	۱۶۵۰	$N.m^2$
ζ_e	ضریب میرایی هوا	۰/۰۰۱	_



شکل ۲- مدل ارائه‌شده سیستم روتور _ AMB [۱۸]



شکل ۳- موقعیت مرکز جرم دیسک

$$\overline{OG}=\begin{bmatrix}\bar{x}_2+e\ \cos\omega t\\ \bar{y}_2+e\sin\omega t\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \overline{V_G}=\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_2-e\omega\ \sin\omega t\\ \dot{\bar{y}}_2+e\omega\cos\omega t\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

درنتیجه انرژی جنبشی انتقالی کل سیستم برابر است با:

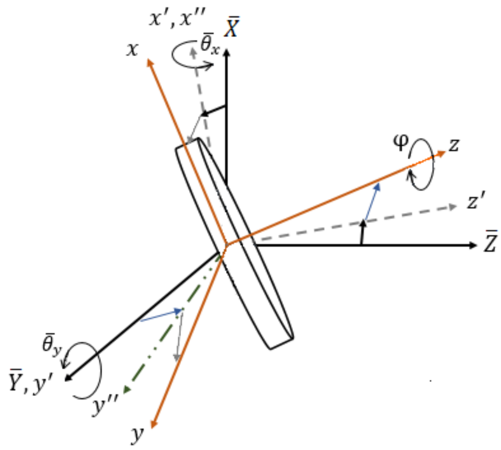
$$T_{Transfer}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} m_1\left(\dot{\bar{x}}_1{}^2+\dot{\bar{y}}_1{}^2\right)\\ +m_3\left(\dot{\bar{x}}_3{}^2+\dot{\bar{y}}_3{}^2\right)\\ +m_2\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_2{}^2+\dot{\bar{y}}_2{}^2+e\ \omega^2\\ +2e\omega\dot{\bar{y}}_2\ cos\ \omega t\\ -2e\omega\dot{\bar{x}}_2\ sin\ \omega t\end{pmatrix}\end{pmatrix} \qquad (۳)$$

یافتن انرژی جنبشی دورانی دیسک، مستلزم داشتن زوایای اویلر است. با توجه به شکل ۴ و در نظر گرفتن چرخش‌ها به‌ترتیب حول محورهای $\bar{Y},x',z$، انرژی جنبشی دورانی دیسک به‌صورت رابطه (۴) به دست می‌آید.

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_T\left(\dot{\bar{\theta}}_y\sin\varphi\cos\bar{\theta}_x+\dot{\bar{\theta}}_x\cos\varphi\right)^2\\ +I_T\left(\dot{\bar{\theta}}_y\cos\varphi\cos\bar{\theta}_x-\dot{\bar{\theta}}_x\sin\varphi\right)^2\\ +I_P\left(-\dot{\bar{\theta}}_y\sin\bar{\theta}_x+\omega\right)^2\end{pmatrix} \qquad (۴)$$

با توجه به کوچک بودن زوایای θ_x و θ_y، انرژی دورانی دیسک برابر رابطه (۵) است با:

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\left[I_T\left(\dot{\bar{\theta}}_x{}^2+\dot{\bar{\theta}}_y{}^2\right)+I_P\left(\omega^2-2\omega\dot{\bar{\theta}}_y\bar{\theta}_x\right)\right] \qquad (۵)$$



شکل ۴- زوایای اویلر دیسک

۲-۲-۲- انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل محورتحت خمش، وابسته به انحنای تیر است. به همین منظور، برای به دست آوردن تغییر شکل روتور، باید تابع حدسی انتخاب شود که شرایط مرزی را ارضا کند [۱۸]. تابع حدس انتخاب شده، چند جمله‌ای مرتبه سه است. با توجه به عدم وجود ممان خمشی در ابتدای محور، ضریب جمله مرتبه دوم تابع حدس بایستی صفر باشد. انرژی پتانسیل تیر تحت خمش از انتگرال‌گیری انرژی کرنشی در طول تیر به دست می‌آید. انرژی پتانسیل از اصل برهم‌نهی انرژی کرنشی در دو جهت عمود بر هم محاسبه می‌شود. با یافتن ضرایب تابع حدس در دو راستا، گشتاور خمشی تیر از رابطه $M_x=EIx''$ و $M_y=EIy''$ قابل دستیابی است. با توجه به این‌که نیروی یاتاقان‌های مغناطیسی تابعی از تغییر مکان روتور نسبت به دستگاه ساکن است، مناسب است این خیزها، در دستگاه ثابت تصویر شوند.

با بیان خیزها در دستگاه ساکن، انرژی پتانسیل به‌صورت رابطه (۶) است.

$$V=\frac{E}{2}\int_0^l\begin{pmatrix} I_x\left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{z}^2}\cos\omega t+\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{z}^2}\sin\omega t\right)^2+\\ I_y\left(-\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{z}^2}\sin\omega t+\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{z}^2}\cos\omega t\right)^2\end{pmatrix}d\bar{z} \qquad (۶)$$

با توجه به دایره‌ای بودن مقطع روتور $I_x=I_y=I$، انرژی پتانسیل سیستم به‌صورت رابطه (۷) ساده می‌شود.

$$V=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{z}^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{z}^2}\right)^2\right)d\bar{z} \qquad (۷)$$

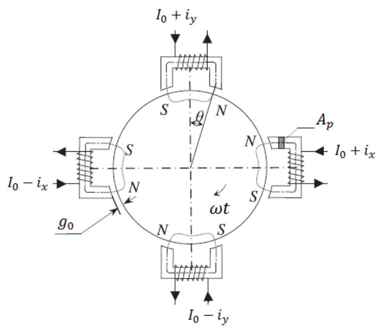
۲-۲-۳- نیروهای اتلافی سیستم

نیروهای مستهلک‌کننده انرژی در سیستم، نیروی ویسکوز ناشی از وجود هوا در اطراف دیسک است. نیروی اتلافی هوا به‌صورت میرایی ویسکوز روی دیسک مدل شده است. انرژی اتلافی میرایی ویسکوز به‌صورت رابطه (۸) بیان می‌شود [۱۲].

$$D.E=\frac{1}{2}\ C\left(\dot{\bar{x}}_2{}^2+\dot{\bar{y}}_2{}^2\right) \qquad (۸)$$

۲-۲-۴- نیروهای خارجی وارد بر سیستم

نیروهای خارجی وارد بر سیستم، شامل نیروی وزن و نیروی تولید شده توسط یاتاقان‌های مغناطیسی است. همان‌طور که در شکل ۵ نشان داده شده است، یاتاقان‌های مغناطیسی در این مدل‌سازی شعاعی بوده، دارای چهار قطب الکترومغناطیسی می‌باشند که در راستای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ قرار گرفته‌اند. نیروهای مغناطیسی تولیدی توسط این قطب‌ها، تابعی غیرخطی از جریان‌های عبوری از سیم‌پیچ و فاصله هوایی موجود در بین قطب‌ها و محور است.



شکل ۵- شماتیک یاتاقان مغناطیسی فعال چهار قطبی

با صرف‌نظر کردن از اثرات جریان گردابی[1]، نشتی مغناطیسی[2] و تلفات هیسترزیس در هسته سیم‌پیچ‌ها، نیروهای مغناطیسی اعمال شده به روتور در راستای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در موقعیت دلخواه به‌صورت روابط (۹) بیان می‌شوند [۷].

$$\bar{F}_{Mx} = \frac{\mu_0 N^2 A_p}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\left(\frac{I_0+i_x}{g_0-x}\right)^2 - \left(\frac{I_0-i_x}{g_0+x}\right)^2\right) + \\ \alpha x\left(\left(\frac{I_0+i_y}{g_0-\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{I_0-i_y}{g_0+\bar{y}}\right)^2\right)\end{array}\right)$$

$$\bar{F}_{My} = \frac{\mu_0 N^2 A_p}{4}\left(\begin{array}{c}\left(\left(\frac{I_0+i_y}{g_0-y}\right)^2 - \left(\frac{I_0-i_y}{g_0+y}\right)^2\right) + \\ \alpha x\left(\left(\frac{I_0+i_x}{g_0-x}\right)^2 + \left(\frac{I_0-i_x}{g_0+x}\right)^2\right)\end{array}\right) \quad (۹)$$

N تعداد حلقه‌های سیم‌پیچ‌ها، $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ضریب نفوذپذیری میدان مغناطیسی[3] در خلاء، A_p سطح مقطع موثر قطب‌ها، g_0 حداقل فاصله هوایی بین قطب‌ها و روتور، I_0 جریان بایاس، x جابه‌جایی محور در راستای $\bar{x}$، y جابهجایی در راستای $\bar{y}$ در موقعیت دلخواه، i_x و i_y نیز، جریان کنترلی اعمال شده به کویل‌ها، در راستای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ است. مقادیر عددی پارامترهای رابطه (۹)، در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲- مقادیر عددی پارامترهای یاتاقان مغناطیسی

واحد	مقدار	
H/m	۴π×۱۰^-۷	μ_0
_	۲۰۰-۱۵۰-۱۰۰	N
m^2	۰/۰۰۱	A_p
A	۳/۸۲	I_0
m	۰/۰۰۰۵	g_0

در بیشتر یاتاقان‌های مغناطیسی فعال جریان‌های i_x و i_y توسط کنترلر PD کنترل می‌شود؛ بنابراین جریان کنترلی در راستای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به‌صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شوند:

$$i_x = \bar{P}\bar{x} + \bar{D}\dot{\bar{x}} \quad \& \quad i_x = i_0 + \bar{P}\bar{y} + \bar{D}\dot{\bar{y}} \qquad (۱۰)$$

$\bar{P}$ و $\bar{D}$ به ترتیب، ضرایب تناسبی و مشتق‌گیر کنترلر هستند. جریان کنترلی در راستای $\bar{y}$ به علت وزن روتور، دارای مقدار ثابت i_0 برای معلق نگه‌داشتن روتور در حالت استاتیکی است. با استفاده از روابط لاگرانژ و ضرایب بدون بعد و روابط (۱۱) که شرح آن‌ها در فهرست علائم آمده است، معادلات حرکت سیستم به‌صورت روابط (۱۲) استخراج می‌شود.

$$I_P = \tfrac{1}{2}m_2 r^2, I_T = \tfrac{1}{4}m_2 r^2 , \gamma = \frac{m_1+m_3}{m_2}$$
$$\beta = \frac{m_1}{m_1+m_3}, f = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0 N^2 A_p I_0^2 (P-1)}{g_0^3}}{\frac{3EI}{l^3}}}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$
$$u = \frac{e}{g_0} , \tau = \omega_n t , x_i = \frac{\bar{x}_i}{g_0} , y_i = \frac{\bar{y}_i}{g_0}$$
$$w = \frac{g}{g_0 f}, P = \frac{g_0 \bar{P}}{I_0} , D = \frac{g_0 \omega_n \bar{D}}{I_0} ,\ i = \frac{i_0}{I_0} \qquad (۱۱)$$

$$\ddot{x}_1 = F_{Mx_1} - \tfrac{1}{\gamma f^2 \beta^4}(x_1 - x_2 + \beta\theta_y)$$
$$\ddot{y}_1 = F_{My_1} - \tfrac{1}{\gamma f^2 \beta^4}(y_1 - y_2 + \beta\theta_x) - \tfrac{w}{f^2}$$
$$\ddot{x}_2 = \tfrac{-1}{f^2\beta^3}(-x_1 + x_2 - \beta\theta_y) - \tfrac{1}{f^2(1-\beta)^3}(x_2 - x_3 + (1-\beta)\theta_y) + u\Omega^2 \cos\Omega\tau - \tfrac{2\zeta_e}{f}\dot{x}_2$$
$$\ddot{y}_2 = \tfrac{-1}{f^2\beta^3}(-y_1 + y_2 + \beta\theta_x) - \tfrac{1}{f^2(1-\beta)^3}(y_2 - y_3 - (1-\beta)\theta_x) + u\Omega^2 \sin\Omega\tau - \tfrac{2\zeta_e}{f}\dot{y}_2 - \tfrac{w}{f^2}$$
$$\ddot{\theta}_x = -\Omega\dot{\bar{\theta}}_y - \tfrac{4n^2}{f^2\beta^2}(-y_1 + y_2 + \beta\theta_x) - \tfrac{4n^2}{f^2(1-\beta)^2}(-y_2 + y_3 + (1-\beta)\theta_x)$$
$$\ddot{\theta}_y = \Omega\dot{\bar{\theta}}_x - \tfrac{4n^2}{f^2\beta^2}(x_1 - x_2 + \beta\theta_y) - \tfrac{4n^2}{f^2(1-\beta)^2}(x_2 - x_3 + (1-\beta)\theta_y)$$
$$\ddot{x}_3 = F_{Mx_3} - \tfrac{1}{\gamma f^2(1-\beta)^4}(-x_2 + x_3 - (1-\beta)\theta_y)$$
$$\ddot{y}_3 = F_{My_3} - \tfrac{1}{\gamma f^2(1-\beta)^4}(-y_2 + y_3 + (1-\beta)\theta_x) - \tfrac{w}{f^2} \qquad (۱۲)$$

در این معادلات، w پارامتر وزن بوده، F_{Mx} و F_{My} نیروهای بدون بعد یاتاقان مغناطیسی و به فرم رابطه (۱۳) می‌باشند.

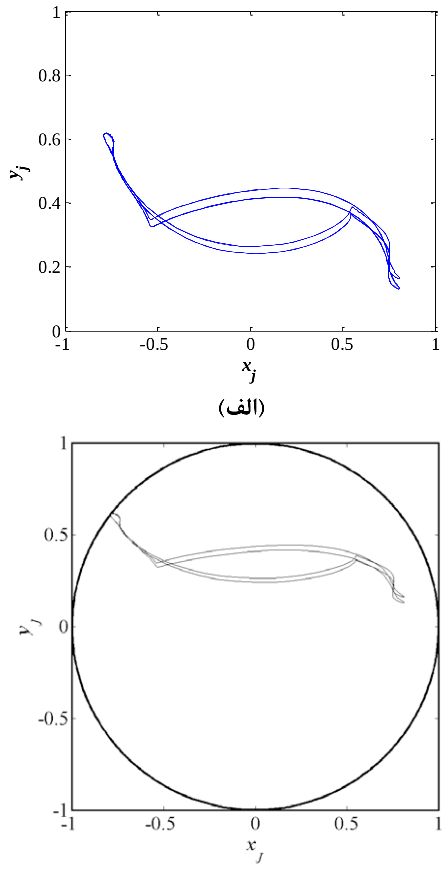
$$F_{Mx} = \tfrac{1}{4(P-1)}\left[\left(\tfrac{1-Px-D\dot{x}}{1-x}\right)^2 - \left(\tfrac{1+Px+D\dot{x}}{1+x}\right)^2 + \alpha x\left(\left(\tfrac{1+i-Py-D\dot{y}}{1-y}\right)^2 + \left(\tfrac{1-i+Py+D\dot{y}}{1+y}\right)^2\right)\right]$$
$$F_{My} = \tfrac{1}{4(P-1)}\left[\left(\tfrac{1+i-Py-D\dot{y}}{1-y}\right)^2 - \left(\tfrac{1-i+Py+D\dot{y}}{1+y}\right)^2 + \alpha y\left(\left(\tfrac{1-Px-D\dot{x}}{1-x}\right)^2 + \left(\tfrac{1+Px+D\dot{x}}{1+x}\right)^2\right)\right] \qquad (۱۳)$$

---
[1] Eddy Current
[2] Flux Leakage
[3] Magnetic Permeability

۳- شبیه‌سازی عددی و تحلیل نتایج

حل عددی معادلات (۱۲) با استفاده از روش رانگ _ کوتای مرتبه ۴ با گام زمانی متغیر انجام می‌گیرد. نسبت سرعت چرخشی به‌عنوان پارامتر کنترلی انتخاب شده است. برای اطمینان از پایدار بودن اطلاعات عددی به‌دست آمده، مقدار نسبتاً قابل‌توجهی از اطلاعات تاریخچه زمانی کنار گذاشته شده، نتایج پس از این بازه برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. تحلیل عددی در سه بخش و با سه نوع یاتاقان مغناطیسی با سختی‌های متفاوت انجام و تأثیر آن‌ها بر ارتعاشات آشوبناک سیستم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای شناسایی رفتار دینامیکی سیستم از ابزارهای شناسایی این پدیده شامل، تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف استفاده شده است.

در این تحقیق، برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم از مدل انعطاف‌پذیر استفاده شده است. برای صحت سنجی مدل ارائه شده، با ساده‌سازی مدل کنونی به مدل مرجع [۱۲] رسیده، برخی از نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در مرجع [۱۲]، سیستم روتور _ AMB با یک دیسک صلب در وسط محور در نظر گرفته شده است. سیستم به‌صورت چهار درجه آزادی مدل شده است؛ به‌صورتی‌که سیستم به سه جرم گسسته (یک جرم برای دیسک و دو جرم ژورنال) تقسیم شده و هر جرم دارای دو درجه آزادی در دو راستای x و y است. در این مرجع، فرض شده است که با نصب دیسک در مرکز محور، پاسخ ژورنال سمت چپ در دو راستا، دقیقاً همان رفتار ژورنال راست بوده، دلیل آن به مرجع [۱۰] ارجاع داده شده است. مرکز تیر در مودهای مختلف ارتعاشی، گره یا ضد گره بوده، با قرارگیری دیسک در مرکز محور، تغییرات زاویه ای چندانی در دیسک ایجاد نمی‌شود؛ درحالی‌که در تحقیق حاضر، قیدی بر متقارن بودن سیستم نبوده، همین ویژگی زمینه حضور ترم‌های ژیروسکوپی ناشی از تغییرات زاویه‌ای دیسک را در معادلات حرکت سیستم فراهم می‌سازد.



شکل ۶- مدار لنگ زنی روتور $\gamma = 0.2$, $f = 1.5$ (الف نتایج شبیه‌سازی و ب) نتایج مرجع [۹]

شکل ۶، مسیر لنگ زنی[۱] سیستم روتور_AMB چهار درجه آزادی را نشان می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی، با در نظر گرفتن پارامترهای سیستم مطابق با این مرجع به‌دست‌آمده است. درواقع با قرار گرفتن دیسک در مرکز محور و عدم تغییر زاویه آن، دو درجه آزادی دورانی دیسک حذف و با فرض برابر بودن پاسخ ژورنال سمت چپ با ژورنال سمت راست، مدل ارائه شده در این تحقیق، به مدل مرجع [۹] کاهش می‌یابد.

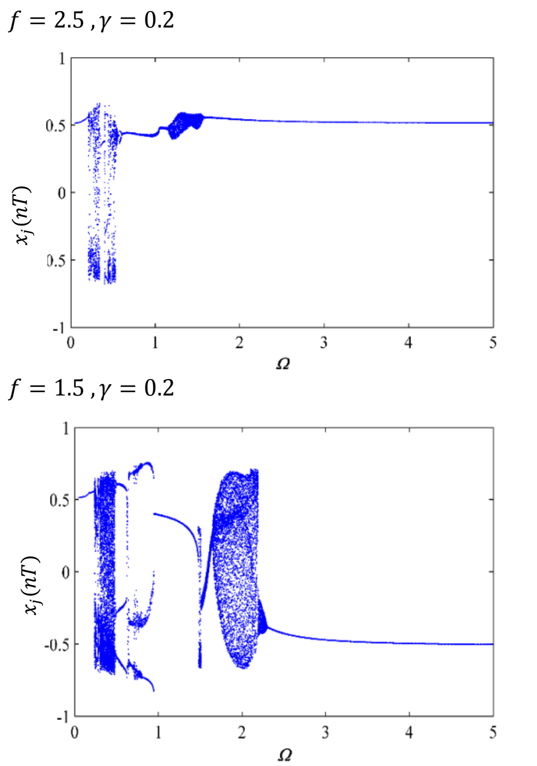
[۱] Whirl Orbit

برای اطمینان بیشتر، دو نمودار دوشاخه‌ای شدن مرجع [۹] به ازای پارامترهای مختلف، شبیه‌سازی شده‌اند (شکل ۷). با توجه به هم‌خوانی بسیار خوب نتایج به‌دست‌آمده و نتایج مرجع مذکور، صحت مدل ارائه شده تأیید می‌شود.

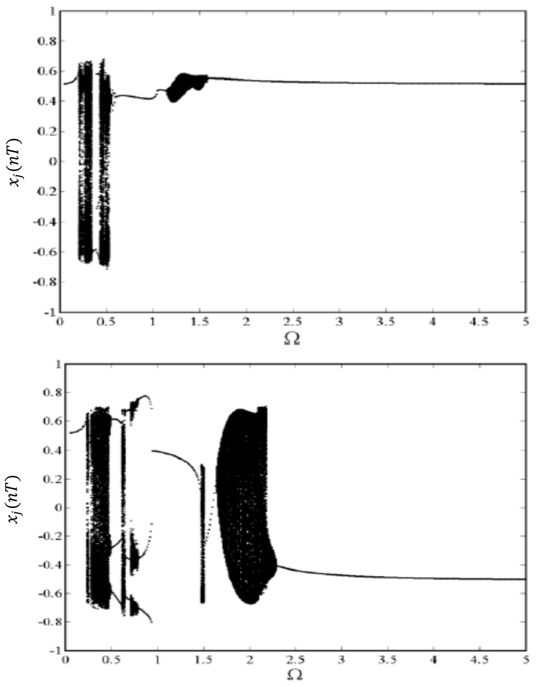
همان‌طور که در فهرست علائم مقاله آمده است، f بیانگر نسبت فرکانس طبیعی یاتاقان مغناطیسی، به فرکانس طبیعی تیر و به بیان دیگر، نسبت سختی یاتاقان مغناطیسی به سختی تیر است [۹]. عوامل مؤثر در سختی مغناطیسی یاتاقان، تعداد دور سیم‌پیچ، جریان بایاس قطب‌ها، سطح مقطع قطب، ضریب تناسبی کنترل‌کننده و فاصله هوایی نامی یاتاقان است؛ بنابراین برای تغییر سختی از سه نوع یاتاقان مغناطیسی استاندارد با تعداد دور سیم‌پیچ ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ استفاده شده است [۱۹]. در ادامه تحلیل در سه بخش مجزا و با قرار دادن هر یک از یاتاقان‌های فوق انجام می‌شود.

۳-۱- تحلیل با یاتاقان مغناطیسی N=100

شکل ۸، نمودار دوشاخه‌ای شدن جابه‌جایی دیسک در راستای x (x_5) را با $N = 100$ نشان می‌دهد. ابتدا، رفتار سیستم به صورت پریودیک (1T) تا $\Omega = 0.117$ است. سپس در پی یک پرش، پاسخ زیر هارمونیک دوم، چهارم، ناحیه بسیار کوچکی از آشوب و بازگشت به حرکت هارمونیک در محدوده کوچک $\Omega = [0.118 \sim 0.137]$ مشاهده می‌شود. سپس پاسخ به زیر هارمونیک دوم رفته و در $\Omega = 0.143$ به‌یک‌باره آشوب اتفاق می‌افتد و تا $\Omega = 0.163$ ادامه می‌یابد. پس‌ازآن، در ناحیه‌ای کوچک پاسخ سیستم به ترتیب به زیر هارمونیک‌های سوم، چهارم و دوم جذب می‌شود. تا این‌که در $\Omega = 0.186$ مجدداً پاسخ وارد ناحیه آشوبناک شده و تا $\Omega = 0.298$ این رفتار تداوم دارد. البته در این بازه و در سرعت‌هایی خاص پاسخ هارمونیک نیز مشاهده می‌شود. با افزایش سرعت دورانی سیستم، پاسخ زیر هارمونیک سوم و دوم مشاهده شده و باز در محدوده $\Omega = [0.311 \sim 0.323]$ پدیده آشوب در پاسخ ظاهر می‌شود. سپس در $\Omega = 0.324$ پاسخ پایدار شده، تا رسیدن به $\Omega = 0.35$ با دوره تناوب 6T و 3T ادامه می‌یابد. و تداوم این رفتار تا $\Omega = 0.24$ قابل مشاهده است. با افزایش نسبت سرعت Ω، در محدوده $\Omega = [0.35 \sim 0.368]$ بار دیگر یک جاذب غریب، پاسخ سیستم را آشوبناک می‌سازد. عبور از سرعت دورانی



(الف)



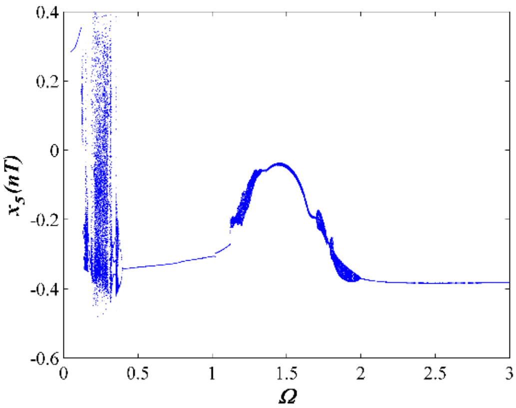
(ب)

شکل ۷- نمودار دوشاخه‌ای شدن با پارامترهای مختلف الف) نتایج به‌دست‌آمده و ب) نتایج مرجع [۹]

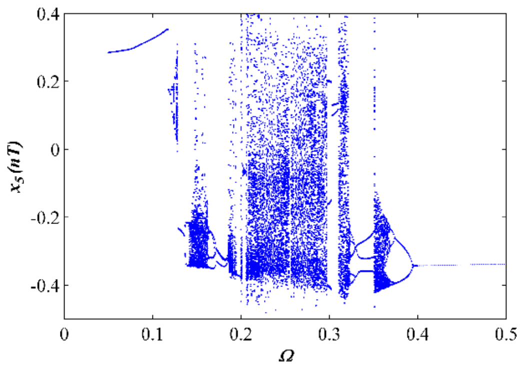
$\Omega = 0.368$ کافی است تا درنهایت رفتار سیستم پس از گذشت از نواحی کوچکی از ارتعاشات زیر هارمونیک چهارم و دوم به حرکت پریودیک بازگردد. در این قسمت از نمودار، به‌جز حضور رفتار آشوبناک در بازه‌های $\Omega = [1.12 \sim 1.34]$ و $\Omega = [1.7 \sim 1.9]$ اتفاق خاصی رخ نداده، رفتار دینامیکی سیستم تا $\Omega = 3$ پریودیک باقی می‌ماند.

لازم به ذکر است، نواحی که در تفسیر نمودار دوشاخه‌ای شدن، از آن‌ها یقیناً به‌عنوان نواحی آشوبناک یادشده، با ابزارهای دیگر بررسی شده‌اند؛ ولی به علت محدودیت در تعداد صفحات مقاله، تنها بررسی چند نسبت سرعت در مقاله آورده شده است. در شکل ۹، بازه $\Omega = [0 \sim 0.4]$ جهت وضوح بیشتر رفتار سیستم نمایش داده شده است.

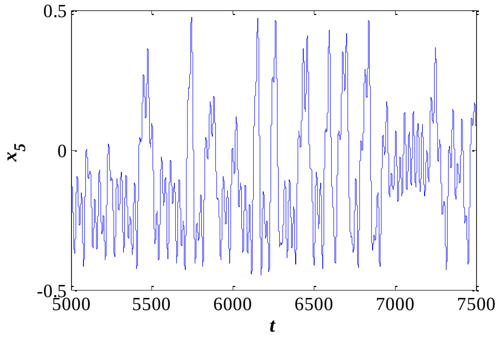
در شکل ۸ گفته شد، در نسبت سرعت‌های $\Omega = 0.23$ آشوب اتفاق افتاده است. با توجه به شکل ۱۰، امکان رخداد آشوب در نمودار تاریخچه زمانی به علت شکل بی‌نظم آن و حضور طیف وسیعی از فرکانس‌ها در نمودار طیف توان، وجود



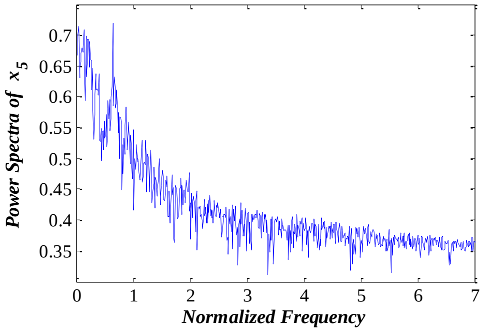
شکل ۸- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 با تعداد پیچه N=100



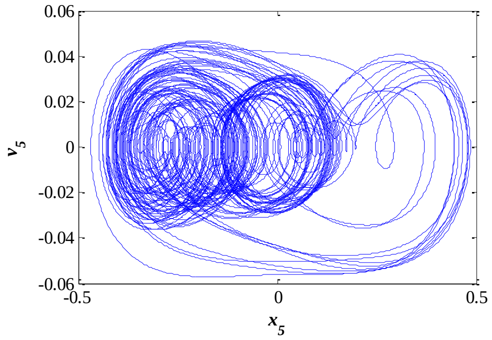
شکل ۹- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 در بازه $\Omega = [0 \sim 0.4]$



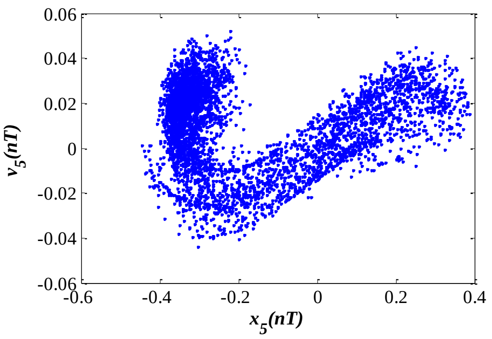
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۰- پاسخ دیسک الف) تاریخچه زمانی، ب) طیف توان، ج) منحنی صفحه فاز و د) نگاشت پوانکاره در $\Omega = 0.23$

دارد. از طرفی در منحنی صفحه فاز احتمال اشتباه در تشخیص حرکت آشوبناک از حرکت شبه پریودیک وجود دارد؛ اما نقاط بی‌نظمی که در مقطع پوانکاره نقش بسته‌اند، نشان از حرکت آشوبناک سیستم در این سرعت دارند.

به‌منظور اطمینان کامل از وقوع آشوب در $\Omega = 0.23$ از ابزار ماکزیمم نمای لیاپانوف در شکل ۱۱ استفاده شده است.

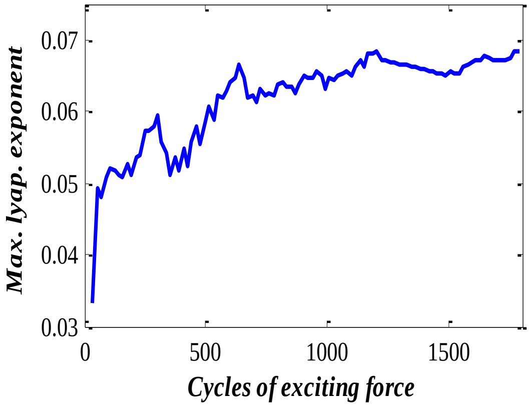
با توجه به شکل ۱۱، مثبت بودن نمای لیاپانوف وجود پدیده آشوب را تأیید می‌کند. لازم به ذکر است، روند تعیین ماکزیمم نماهای لیاپانوف در این تحقیق با استفاده از الگوریتم ارائه شده در مرجع [۲۰ و ۲۱] انجام گرفته است.

۳-۲- تحلیل با یاتاقان مغناطیسی N=150

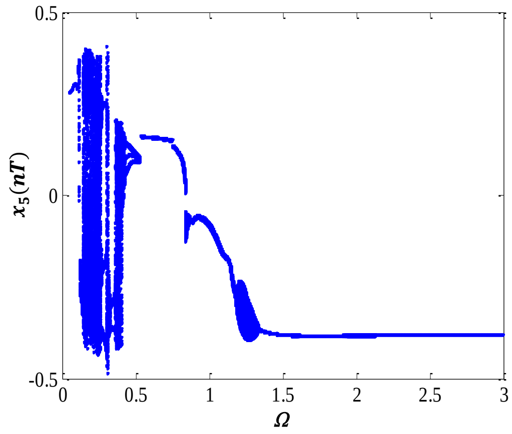
در این قسمت، تحلیل با قرار دادن یاتاقان مغناطیسی با تعداد دور سیم‌پیچ $N = 150$ برای هر قطب انجام می‌شود؛ بنابراین تکیه‌گاه، با سختی بیشتری روتور را مهار می‌نماید.

شکل ۱۲، نمودار دوشاخه‌ای شدن پاسخ دیسک را با یاتاقان مغناطیسی با $N = 150$ نشان می‌دهد. رفتار سیستم تفاوت‌هایی را نسبت به حالت قبل نشان می‌دهد. رفتار متناوب سیستم پس از یک پرش در $\Omega = 0.102$ همچنان مشاهده شده، پس از حرکت زیر هارمونیک چهارم و دوم در ناحیه کوچک $\Omega = [0.12\sim0.128]$، ادامه می‌یابد. در بازه$\Omega = 0.139$ پاسخ وارد حالت آشوبناک شده و پایان آن در $\Omega = 0.26$ و درنتیجه کاهش وسعت ناحیه آشوبناک سیستم، اولین تفاوت رفتار را نسبت به حالت قبل نمایان می‌سازد. پس از این ناحیه، پاسخ پس از گذر بازه کوچکی از حرکت زیر هارمونیک 6T، به زیرهارمونیک سوم وارد شده، تداوم آن تا $\Omega = 0.302$ مشاهده می‌شود. پس از رخداد به‌یکباره آشوب و تداوم آن تا $\Omega = 0.313$ رفتار سیستم به زیر هارمونیک چهارم و سپس زیر هارمونیک دوم می‌رود و این رفتار تا $\Omega = 0.354$ حفظ می‌شود. تنها در محدوده کوچکی، پاسخ سیستم به حرکت با دوره تناوب 3T وارد شده، با افزایش سرعت دورانی، در $\Omega = 0.361$ رفتار سیستم آشوبناک شده، این رفتار تا حدود $\Omega = 0.414$ ادامه می‌یابد. مجدداً در محدوده $\Omega = [0.415\sim0.53]$ پاسخ سیستم پایدار گشته، به زیر هارمونیک ششم و سوم می‌رود. آنچه در ادامه مشاهده می‌شود، حضور رفتار پریودیک (1T) در بازه نسبتاً بزرگ $\Omega = [0.53\sim0.81]$ و وجود دو پرش در این بازه است.

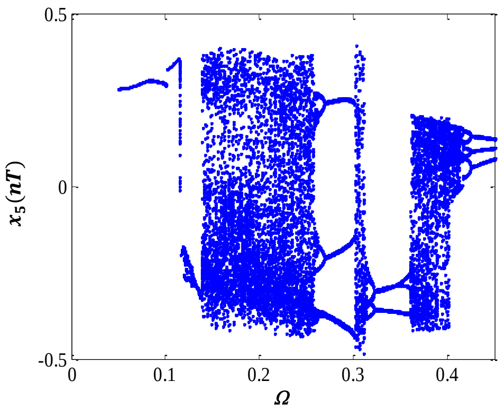
با تشدید تأثیر عوامل غیرخطی، رفتار دینامیکی سیستم باز در دو محدوده $\Omega = [0.837\sim.867]$ و $\Omega = [1.18\sim1.336]$



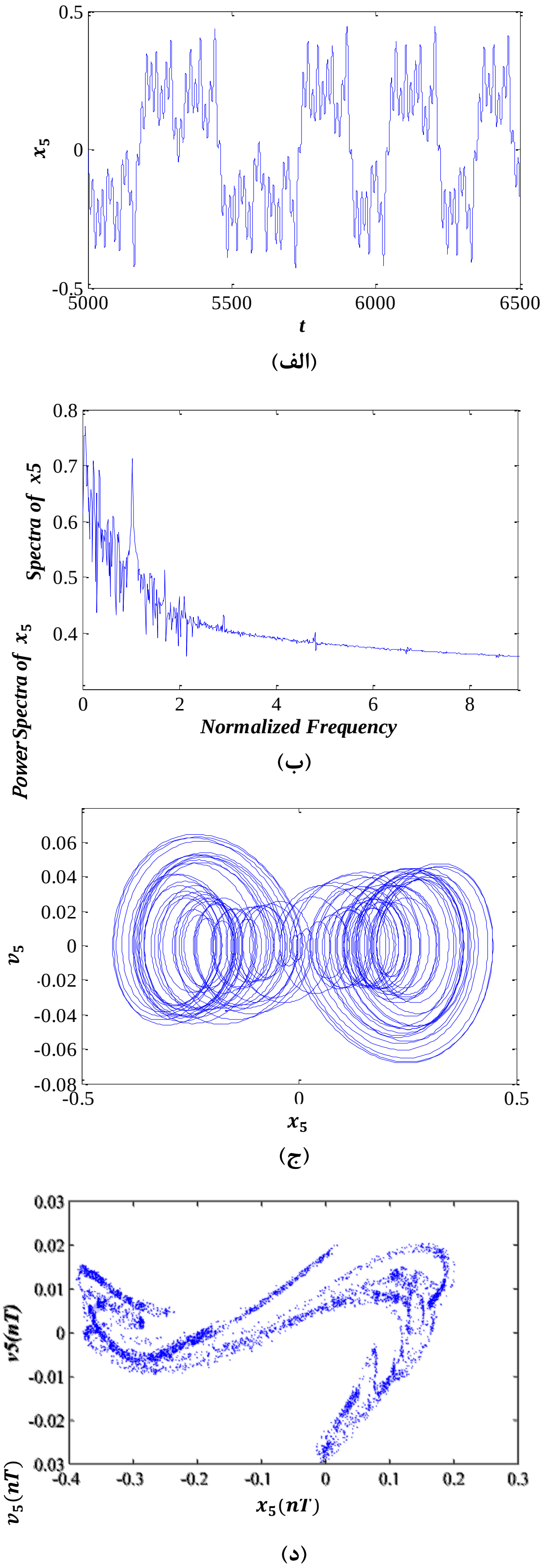
شکل ۱۱- ماکزیمم نمای لیاپانوف پاسخ در $\Omega = 0.23$



شکل ۱۲- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 با N=150



شکل ۱۳- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 در $\Omega = [0\sim0.45]$



شکل ۱۴- پاسخ دیسک الف) تاریخچه زمانی، ب) طیف توان، ج) منحنی صفحه فاز و د) نگاشت پوانکاره در $\Omega = 0.37$

آشوبناک می‌شود؛ اما با گذشت از این مقادیر سرعت، اتفاق قابل‌توجهی رخ نداده، مطابق قبل رفتار دینامیکی سیستم تا $\Omega = 3$ متناوب باقی می‌ماند. تفاوت‌های دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد، وجود نواحی بیشتری از پاسخ پایدار در محدوده $\Omega = [0\sim0.4]$ نسبت به حالت قبل $(N = 100)$ است. همچنین در سرعت‌های بالا $(\Omega > 0.8)$، آشوب در نسبت سرعت پایین‌تری نسبت به حالت قبل رخ داده و نیز سریع‌تر به پاسخ پایدار انتقال می‌یابد. در این قسمت نیز، جهت نمایش بهتر مطالب فوق، نمودار دو-شاخه‌ای شدن (شکل ۱۳) در بازه $\Omega = [0\sim0.45]$ آورده شده است.

شکل ۱۴، دیگر ابزارهای شناسایی آشوب را برای سرعت $\Omega = 0.37$ نشان می‌دهد.

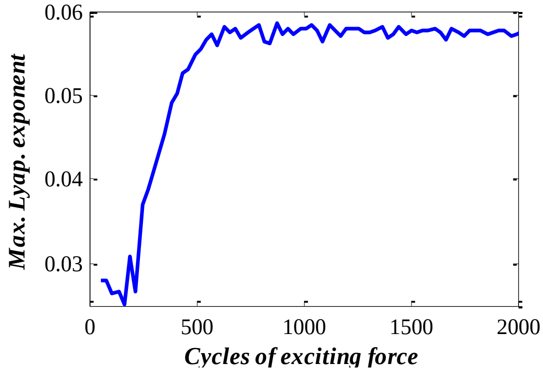
با توجه به شکل ۱۴، نمودار پاسخ زمانی در $\Omega = 0.37$، دارای شکلی بی‌نظمی بوده، تعداد زیادی فرکانس در نمودار طیف توان به چشم می‌خورد. با توجه به این‌که برای اطمینان از نمایش پاسخ ماندگار، میزان قابل‌توجهی از نمودار پاسخ زمانی کنار گذاشته شده است، نمی‌توان این بی‌نظمی را به پاسخ گذرای سیستم نسبت داد؛ درنتیجه، این مشخصات به همراه وجود چندین مسیر در منحنی صفحه فاز و نقاط توده‌ای نگاشت پوانکاره، احتمال آشوب را بسیار بالا می‌برد. با مثبت بودن ماکزیمم نمای لیاپانوف در شکل ۱۵، وجود آشوب در این نسبت سرعت، به‌طور کامل تأیید می‌شود.

۳-۲- تحلیل با یاتاقان مغناطیسی N=200

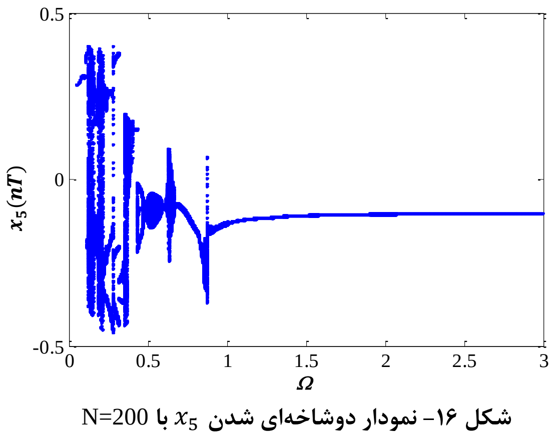
نمودار دوشاخه‌ای شدن پاسخ دیسک برای یاتاقان مغناطیسی با تعداد دور $N = 200$ در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

با نگاهی گذرا به شکل ۱۶ مشاهده می‌شود، نواحی پاسخ آشوبناک سیستم نسبت به دو تحلیل قبل کاهش یافته است. در این نتایج، در $\Omega = 0.12$ پاسخ پریودیک وارد حالت آشوبناک شده، تا $\Omega = 0.155$ ادامه می‌یابد. حضور آشوب در سرعت پایین‌تر نسبت به دو حالت قبل، از نتایج مهم تأثیر سختی مغناطیسی بر رفتار آشوبناک سیستم است. با گذر از آ شوب، سیستم در بازه $\Omega = [0.156\sim0.177]$، رفتار زیر هارمونیک 3T و 6T را از

خود به نمایش گذارده، باز جاذبی غریب، پاسخ سیستم را در $\Omega = [0.178\sim0.215]$ به آشوب می‌کشاند. در بازه $\Omega = [0.216\sim0.348]$، پاسخ زیر هارمونیک پنجم و سوم و همچنین پرش در دو مرحله مشاهده و مجدداً در $\Omega = 0.35$ رفتار دیسک آشوباک می‌شود و تا $\Omega = 0.382$ ادامه می‌یابد. با افزایش سرعت دورانی، ارتعاشات زیر هارمونیک ششم و سوم در $\Omega = [0.383\sim0.466]$ به نوار باریکی از آشوب در $\Omega = [0.467\sim0.588]$ و همچنین $\Omega = [0.61\sim0.66]$ انتقال می‌یابد. پس از این بازه به‌جز وجود آشوب در محدوده $\Omega = [0.85\sim1.012]$ اتفاق قابل‌ملاحظه دیگری رخ نداده، تا $\Omega = 3$ به‌صورت هارمونیک (1T) باقی می‌ماند. شکل ۱۷، توضیحات فوق را بهتر نمایان می‌سازد.



شکل ۱۵- ماکزیمم نمای لیاپانوف پاسخ دیسک در $\Omega = 0.37$

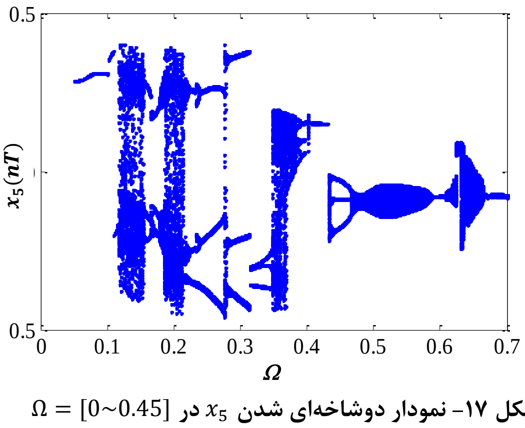


شکل ۱۶- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 با N=200

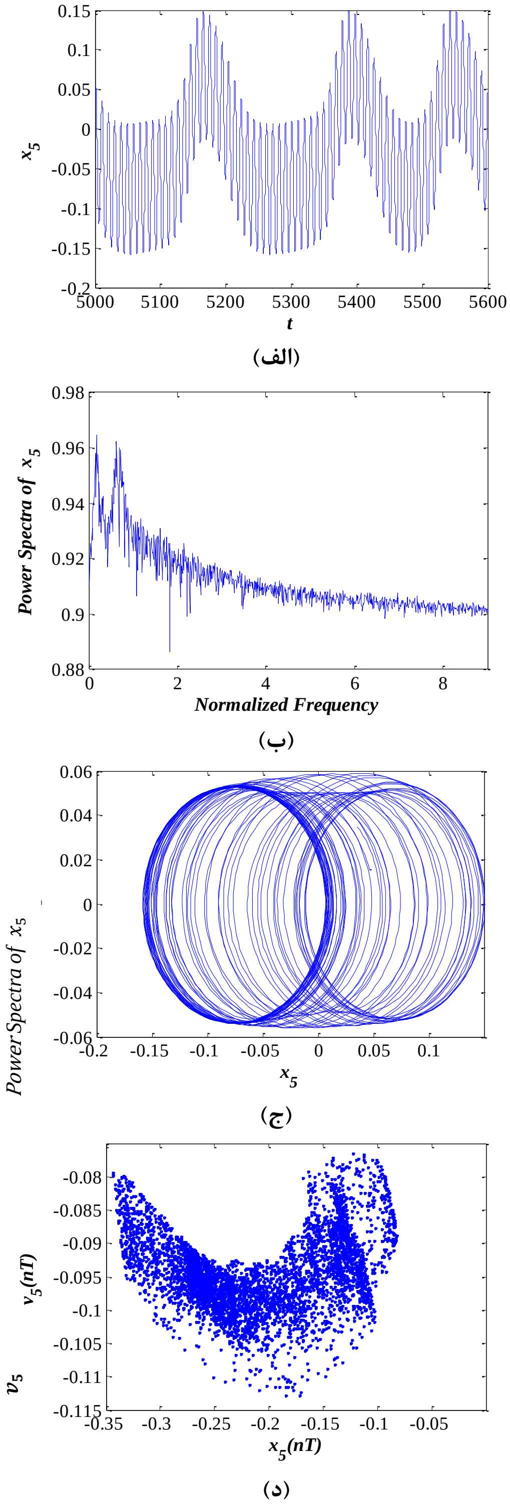
در شکل ۱۸ تاریخچه زمانی دوره تناوب مشخصی را نمایش نمی‌دهد، ولی هنوز نمی‌توان درباره شبه‌پریودیک یا آشوبناک بودن آن نظری داد. با توجه به شباهت نمودار طیف توان در این سرعت با نمودارهای قبلی طیف توان، احتمال آشوبناک بودن پاسخ در این سرعت تقویت می‌شود. با توجه به شکل منحنی صفحه فاز باز نمی‌توان در مورد آشوبناک بودن پاسخ نظر قطعی داد؛ اما با رسم نگاشت پوانکاره در این سرعت، توده‌ای از نقاط بی‌نظم در مقطع پوانکاره ظاهر می‌شود؛ بنابراین با توجه به این‌که نقاط گسسته بسیار زیادی در نگاشت نقش بسته‌اند، قطعاً حرکت فوق شبه پریودیک یا زیر-هارمونیک با دوره تناوب بالا نبوده، پاسخ آشوبناک است؛ اما با توجه به این‌که تنها ابزار برای اظهارنظر قطعی در مورد رخداد آشوب ماکزیمم نمای لیاپانوف است، در این نسبت سرعت نیز از این ابزار استفاده می‌شود، تا هرگونه تردیدی در مورد آشوبناک بودن رفتار سیستم در این سرعت رفع شود.

شکل ۱۹ ابزار ماکزیمم نمای لیاپانوف را برای نسبت سرعت $\Omega = 0.65$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود، ماکزیمم این نما همواره عددی مثبت است؛ بنابراین قطعاً در این نسبت سرعت، سیستم پاسخ آشوبناک از خود به نمایش می‌گذارد.

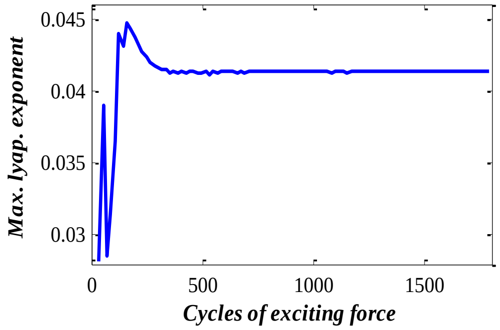
با توجه به نمودارهای دوشاخه‌ای شدن در سه تحلیل فوق، حرکت پایدار سیستم در سرعت‌های پایین ($\Omega > 0.5$) غالباً زیر هارمونیک سوم و ششم بوده، حرکت هارمونیک در این سرعت‌ها کم‌تر به چشم می‌خورد؛ اما با افزایش سرعت دورانی روتور ($\Omega > 0.9$) و افزایش اثرات ژیروسکوپی، تنها حرکت پایدار، حرکت تک پریودیک است. شکل ۲۰ و شکل ۲۱، زیر هارمونیک‌های ششم و سوم را در تحلیل سوم ($N = 200$) نشان می‌دهد.



شکل ۱۷- نمودار دوشاخه‌ای شدن x_5 در $\Omega = [0\sim0.45]$



شکل ۱۸- پاسخ دیسک الف) تاریخچه زمانی، ب) طیف توان، ج) منحنی صفحه فاز و د) نگاشت پوانکاره در $\Omega = 0.37$

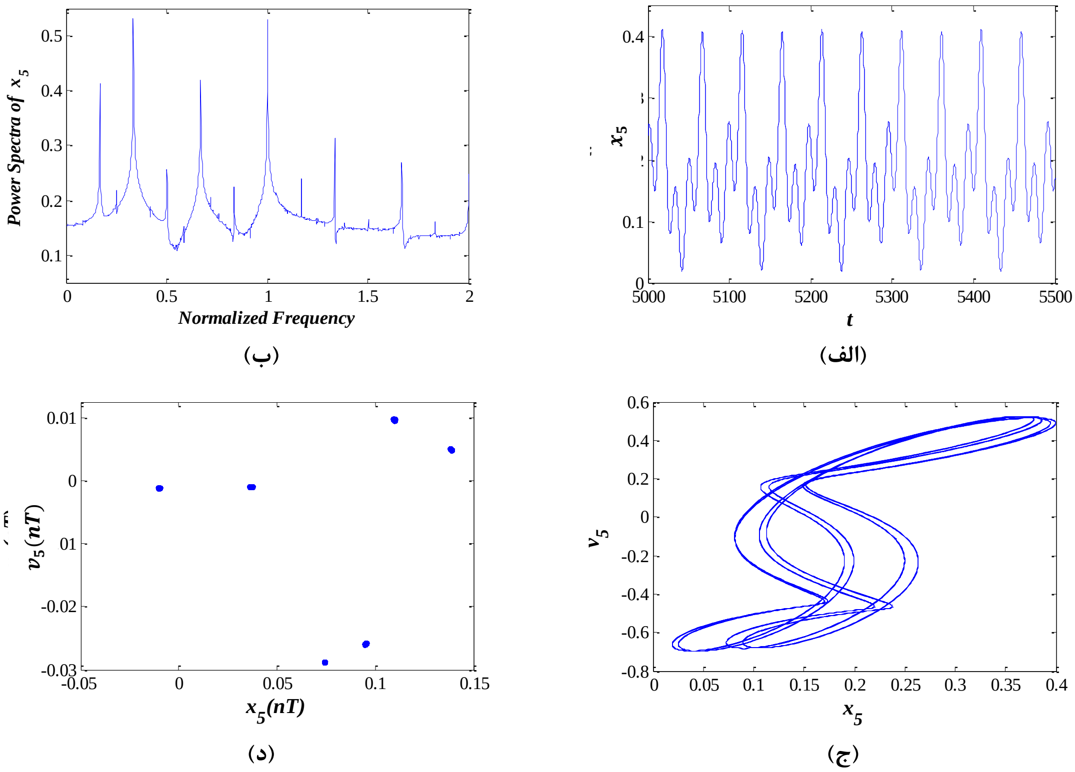


شکل ۱۹- ماکزیمم نمای لیاپانوف پاسخ دیسک در $\Omega = 0.65$

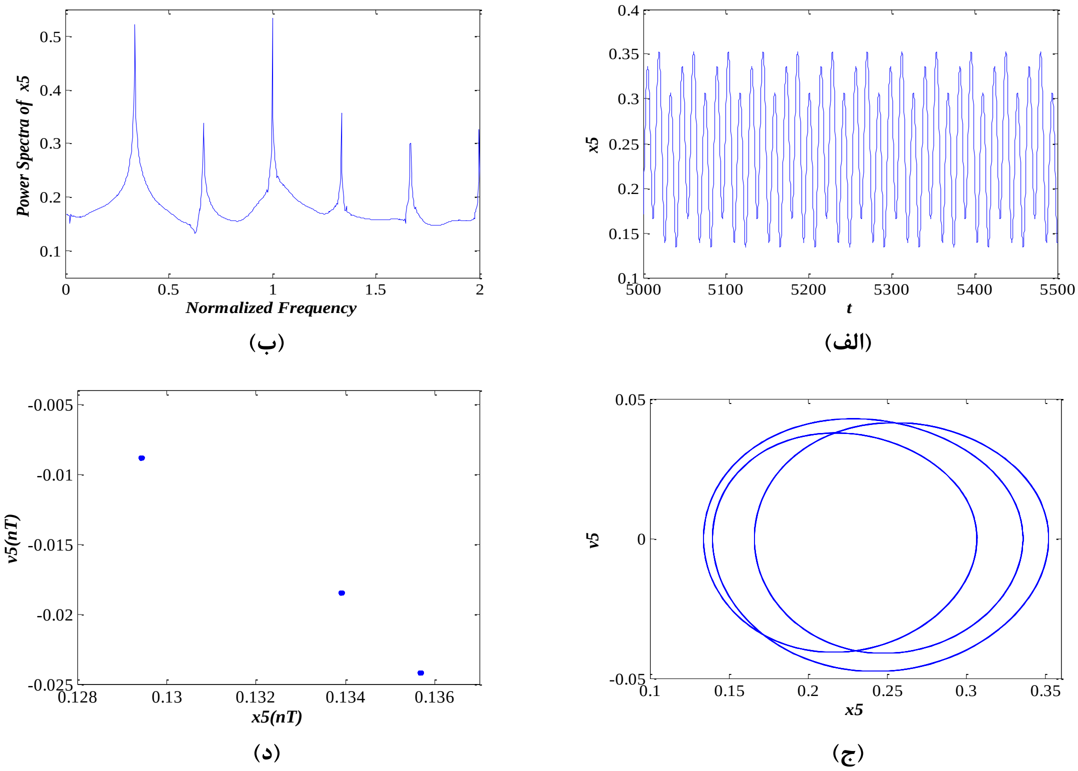
۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتعاشات آشوبناک روتور_AMB با در نظر گرفتن سه نوع یاتاقان مغناطیسی مختلف و درنتیجه سه سختی مغناطیسی متفاوت، مورد بررسی قرار گرفت. سیستم به‌صورت هشت درجه آزادی و به‌صورت انعطاف‌پذیر مدل شد و نتایج به‌دست‌آمده باهم مقایسه گردید.

برای بررسی رفتار غیرخطی سیستم تکنیک‌های مخصوص شناسایی آشوب، ازجمله، تاریخچه زمانی، منحنی‌های صفحه فاز، نمودارهای طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخه‌ای شدن و ماکزیمم نمای لیاپانوف، مورد استفاده قرار گرفت. آن‌طور که نتایج به‌دست آمده نشان داد، با قرار دادن یاتاقان مغناطیسی با تعداد دور سیم‌پیچ بیشتر (سختی مغناطیسی بیشتر)، تفاوت چشم‌گیری در پاسخ سیستم مشاهده گردید؛ به‌طوری‌که با افزایش دور سیم‌پیچ قطب‌های روتور و به تعبیری با سخت‌تر شدن تکیه‌گاه روتور، نواحی آشوبناک کمتری در پاسخ سیستم رخ داد. به‌طوری‌که همان بازه‌هایی که در تحلیل اول، پاسخی آشوبناک از خود به نمایش می‌گذاشت، در تحلیل دوم و سوم به چند بازه شامل، حرکات زیر هارمونیک و آشوبناک تقسیم شد. به بیان بهتر، افزایش سختی مغناطیسی سیستم، گسسته شدن نواحی آشوبناک را به تعداد بازه‌های بیشتر، اما کوچک‌تر در پی داشته است. از نکات مهم دیگر در این مقایسه، وقوع پاسخ آشوبناک در سرعت‌های پایین‌تر و همچنین تداوم آشوب در نسبت سرعت‌های بالاتر در تحلیل دوم و سوم، نسبت به تحلیل اول است؛ بنابراین افزایش سختی مغناطیسی سیستم به قصد کاهش تراکم آشوب، به قیمت گسترش آن به سرعت‌های پایین‌تر و بالاتر خواهد بود؛ درنتیجه، هریک از



شکل ۲۰- پاسخ دیسک الف) تاریخچه زمانی، ب) طیف توان، ج) منحنی صفحه فاز و د) نگاشت پوانکاره در $\Omega = 0.385$



شکل ۲۱- پاسخ دیسک الف) تاریخچه زمانی، ب) طیف توان، ج) منحنی صفحه فاز و د) نگاشت پوانکاره در $\Omega = 0.45$

یاتاقان‌های مغناطیسی نوع اول، دوم و سوم برای عملکرد سیستم در محدوده خاصی مناسب هستند.

۵- فهرست علائم

A_g	مساحت یک قطب مغناطیسی، m^2
D	بهره مشتق‌گیر بدون بعد
$\bar{D}$	ضریب بهره مشتق‌گیر، $\frac{A\,s}{m}$
F_{Mx}	نیروی بی‌بعد مغناطیس درجهت x
$\bar{F}_{Mx}$	نیروی مغناطیسی در جهت x، N
F_{My}	نیروی بی‌بعد مغناطیس درجهت y
$\bar{F}_{My}$	نیروی مغناطیسی در جهت y، N
g_0	فاصله هوایی نامی، m
i_0	جریان استاتیکی کنترل‌کننده، A
I_0	جریان اولیه کویل، A
I_P	ممان اینرسی قطبی دیسک، $\mathrm{kg\,m^2}$
I_T	ممان اینرسی عرضی دیسک، $\mathrm{kg\,m^2}$
i_x	جریان کنترلی در جهتx، A
i_y	جریان کنترلی در جهت y، A
N	تعداد دور سیم‌پیچ کویل
P	بهره تناسبی بدون بعد
$\bar{P}$	ضریب بهره تناسبی، $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
e	خارج از مرکزی دیسک، m
u	پارامتر بدون بعد نابالانسی

علائم یونانی

α	ضریب کوپلینگ نیروهای مغناطیسی
β	نسبت جرم ژورنال سمت چپ به جرم محور
γ	نسبت جرم دیسک به محور
μ_0	نفوذپذیری میدان مغناطیسی در خلأ، $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
τ	زمان بدون‌بعد
Ω	نسبت سرعت
ω	سرعت دورانی روتور، $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
ω_n	فرکانس طبیعی خطی روتور_ AMB، $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

۶- مراجع

[1] AM M, Fawzi E (1993) Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems. IEEE T Automat Contr 38: 1242–1245.

[2] Virgin LN, Walsh TF, Knight JD (1995) Nonlinear behavior of a magnetic bearing system. ASME J Eng Gas Turb Power 17: 582–588.

[3] Zhang W, Zhan XP (2005) Periodic and chaotic motions of a rotor active magnetic bearing with quadratic and cubic terms and time–varying stiffness. Nonlinear Dynam 41: 331-359.

[4] Wang H, Liu J (2005) Stability and bifurcation analysis in a magnetic bearing system with time delays. Chaos Soliton Fract 26: 813-825.

[5] Wang H, Jiang W (2006) Multiple stabilities analysis in a magnetic bearing system with time delays. Chaos Soliton Fract 27: 789-799.

[6] Zhang W, Yao M. H, Zhan X. P (2006) Multi-pulse chaotic motions of a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness. Chaos Soliton Fract 27: 175–186.

[7] Inayat-Hussain, J. I (2007) Chaos via torus breakdown in the vibration response of a rigid rotor supported by active magnetic bearings. Chaos Soliton Fract 31(4): 912-927.

[8] Amer Y, Hegazy U. H (2007) Resonance behavior of a rotor-active magnetic bearing with time-varying stiffness. Chaos Soliton Fract 34: 1328-1345.

[9] Zhang, et al (2008) Global bifurcations and chaos for a rotor-active magnetic bearing system with time-varying stiffness. Chaos Soliton Fract 35(3): 586-608.

[10] Jang M J, Chen C K (2001) Bifurcation analysis in flexible rotor supported by active magnetic bearings. Int J Bifurcat Chaos 11: 2163-2178.

[11] Zhang, Zu J (2008) Transient and steady nonlinear responses for a rotor active magnetic bearings system with time-varying stiffness. Chaos Soliton Fract 38(4): 1152-1167.

[12] Inayat-Hussain (2009) Geometric coupling effects on the bifurcations of a flexible rotor response in active magnetic bearings. Chaos Soliton Fract 41: 2664-2671.

[13] Inayat-Hussain J (2010) Nonlinear dynamics of a statically missaligned flexible rotor in active magnetic bearings. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 15: 764-777.

[14] Halminen, et al (2015) Active magnetic bearing-supported rotor with misaligned cageless backup bearings: A dropdown event simulation model. Mech Syst Signal Pr 50: 692-705.

[15] Alasty A, Shabani R (2006) Nonlinear parametric identification of magnetic bearings. Mechatronics 451-459.

[۱۶] حجت ی (۱۳۸۹) بررسی پارامترهای مؤثر سامانه یاتاقان مغناطیسی فعال به صورت تحلیلی و عددی. مجله فنی و مهندسی مدرس مکانیک ۳۹.

[۱۷] دربندی م (۱۳۹۲) شناسایی خطای اندازه‌گیری سنسور در سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال با استفاده از مشاهده‌گر تناسبی کنترلی. مجله کنترل ۲.

[18] Maurice L, Adams, J. R (2001) Rotary Machinary Vibration. Marcel Dekker, New York.

[19] Gerhard S, Eric H. M (2009) Magnetic bearings. Springer Dordrecht Heidelberg, New York.

[20] Wolf A, Swift J. B, Swinney H. L, Vastano J. A (1985) Determining lyapanov exponents from a time series. Physica D 16: 285-317.

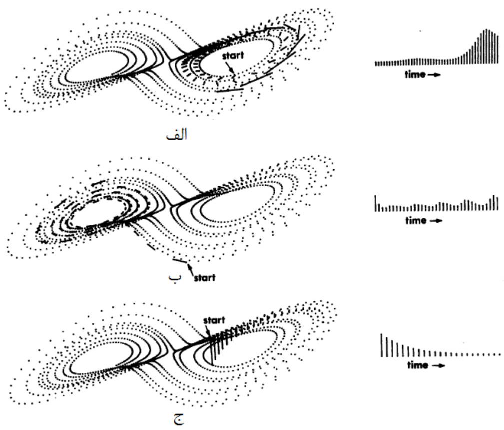
[21] Xu J (2009) Some advance on global analysis of nonlinear systems. Chaos Soliton Fract 39: 1839-1848.

۷- پیوست

یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تشخیص آشوب در یک سیستم دینامیکی، ماکزیمم نماهای لیاپانوف است. در برخی سیستم‌های معین غیرخطی، پاسخ سیستم بسیار به شرایط اولیه حساس می‌باشد. این بدان معناست که دو مسیری که در فضای فاز از نزدیک هم شروع شده باشند، پس از طی زمانی به‌صورت نمایی از هم دور می‌شوند. به‌عنوان مثال، اگر d_0 اندازه فاصله اولیه بین دو نقطه شروع باشد، با گذشت زمان فاصله به‌صورت $d(t)=d_0 2^{\lambda t}$ تغییر می‌کند که λ اشاره به نماهای لیاپانوف دارد. واگرایی مدارهای آشوبناک به‌صورت محلی، نمایی است. زیرا اگر سیستم محدود باشد (چنانچه اکثر سیستم‌های فیزیکی این‌چنین هستند)، $d(t)$ نمی‌تواند به بینهایت میل کند. بنابراین برای تعریف واگرایی مدارها باید در بسیاری از نقاط از مسیر فضای فاز متوسط گیری نمود. بنابراین از یک مسیر مرجع نزدیک به مسیر اصلی شروع کرده و هر بار $\frac{d(t)}{d_0}$ محاسبه می‌شود. با هر بار افزایش $d(t)$، مسیر نزدیک جدیدی به‌عنوان مرجع انتخاب‌شده و d_0 جدیدی تعریف می‌شود. بدین ترتیب نمای لیاپانوف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^{N} \log_2 \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})}$$

اگر $\lambda > 0$ باشد، حرکت آشوبناک، $\lambda < 0$ حرکت منظم و $\lambda=0$ پاسخ در حالت گذرا خواهد بود.



فاصله دو مسیر در فضای فاز در جاذب لورنتز الف) واگرایی مسیرها ب) عدم تغییر فاصله ج) همگرایی مسیرها [۲۰]

انتخاب پایه دو، یک انتخاب مناسب ولی دلخواه می‌باشد. نماد λ را نمای لیاپانوف می‌نامند. جاذب‌های با نمای لیاپانوف مثبت مبین وجود جاذب‌های غریب هستند. در این نوع جاذب‌ها، نمای لیاپانوف مثبت، نشان‌دهنده واگرایی نمایی دو خط سیر در فضای فاز هستند که بزرگی قدر مطلق این نما، سرعت واگرایی یا همگرایی مسیرهای فاز را نشان می‌دهد.