



## حل تحلیلی و عددی معادله ی دیفرانسیل رسانش حالت پایا در صفحه مثلثی قائم الزاویه با شرایط مرزی دما ثابت

شهریار غضنفری هلق<sup>۱\*</sup>، فرامرز طلعتی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۵/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۷/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۹/۲۲

### چکیده

این مقاله در حالت عمومی، روش‌های رسیدن به حل تحلیلی و دقیق معادلات دیفرانسیل رسانش با مشتقات جزئی حالت پایا و در نتیجه حصول دقیق تابع توزیع دما، در هندسه‌های نامنظم که دارای مرز یا مرزهایی غیر موازی با محورهای مختصات در دستگاه دکارتی هستند (با انواع مختلف شرایط مرزی) را معرفی می‌کند. برای رسیدن به این هدف و وضوح بیشتر در بحث، در یک حالت خاص، صفحه‌ای با شکل مثلث قائم الزاویه، دارای راس قائمه واقع در مبدا به همراه شرایط مرزی دما ثابت و در حالت پایا، مد نظر واقع گشته و معادله رسانش حاکم بر آن به صورت تحلیلی حل شده است. در حل تحلیلی به کار برده شده، اهمیت و قدرت متغیرهای مختلط و کاربردهایی از آن، همچون تبدیلات مختلط، به ویژه تبدیل شوارتز - کریستوفل، به وضوح نمایان گشته است. در انتها، جهت اعتبار دهی به حل تحلیلی انجام شده، مسئله با روش المان محدود در نرم افزار COMSOL Multiphysics 5.0 حل شده است و نتایج حاصل از آن، با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده‌اند که وجود همخوانی بین آن‌ها به صحت حل تحلیلی اطمینان بخشیده است.

**کلمات کلیدی:** معادله رسانش؛ دستگاه دکارتی؛ حل تحلیلی؛ هندسه نامنظم؛ مثلث قائم الزاویه؛ تبدیل شوارتز-کریستوفل.

## Analytical and Numerical Solution to Steady-State Differential Conduction Equation in a Right Triangular Plate with Constant-Temperature Boundary Conditions

Sh. Ghazanfari Holagh<sup>1\*</sup>, F. Talati<sup>2</sup>

<sup>1</sup> BSc. Mech. Eng., Tabriz Univ., Tabriz, Iran.

<sup>2</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Tabriz Univ., Tabriz, Iran.

### Abstract

This paper presents, in general, the means to acquire the analytical and exact solutions to the steady-state partial differential conduction equation, and consequently, finds the exact distribution of temperature in irregular geometries with one or more edges unparallelled with the Cartesian axes (with various boundary conditions). In order to get to this goal and for clarify, one specific problem, i.e. a steady-state right triangular plate with the right angle on the origin and with constant-temperature boundary conditions is considered. In the analytical technique used, the importance and strength of complex variables and their applications such as complex transformations, especially the Schwarz-Christoffel transformation, is clearly visible. Finally, to validate the analytical solution acquired, the problem is solved using the finite element method in COMSOL Multi-physics 5.0. The results obtained are compared, and the correspondence confirms the analytical solution.

**Keywords:** Conduction Equation; Cartesian Coordinate System; Analytical Solution; Irregular Geometry; Right Triangle; Schwarz-Christoffel Transformation.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۰۱۳۵۷۱۰۸۸

آدرس پست الکترونیک: eng\_ghazanfari.shahriyar@yahoo.com

## ۱- مقدمه

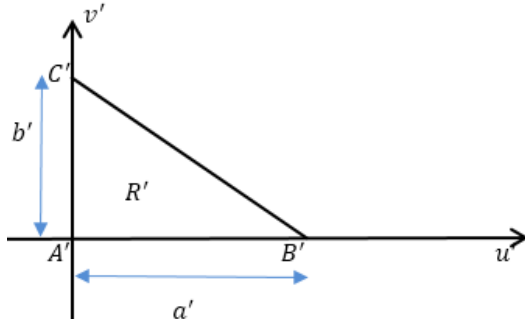
بدون شک حصول پاسخ‌های دقیق و تحلیلی از معادلات انتقال حرارت رسانشی، نقش مهمی در شکل‌گیری یک درک مناسب از ظاهر کیفی پدیده انتقال گرمای رسانشی بازی می‌کند. معادلات دیفرانسیل رسانش برای حالت پایا در قالب دو معادله لاپلاس و پواسون، برای هر نوع هندسه‌ای ظاهر می‌شوند، این دو معادله و به خصوص معادله لاپلاس در ریاضیات، فیزیک و مهندسی از اهمیت بالایی برخوردارند و به عنوان معادله حاکم در بسیاری از پدیده‌های دیگر مانند الکترومغناطیس، نجوم، دینامیک سیالات به شمار می‌روند. از کاربردهای مهم این معادلات، حاکمیت آن‌ها بر مسائل انتقال حرارت رسانشی در حالت پایاست که در این مقاله، به صورت عمومی حل تحلیلی این دو معادله برای مسائل رسانشی در هندسه‌های نامنظم دو بعدی بررسی شده است. روش‌های عددی گوناگونی همچون، تفاضل محدود، المان محدود، حجم محدود و ... برای حل معادلات رسانش در هندسه‌های منظم و نامنظم تا کنون ارائه شده‌اند؛ اما در زمینه حل تحلیلی بررسی‌های صورت پذیرفته نشان می‌دهند، اکثر تحقیقات و مطالعات انجام گرفته از گذشته تا کنون، حل تحلیلی و دقیق را برای مسائلی از رسانش ارائه می‌دهند که در آن‌ها هندسه یا ناحیه حل (محدود و نامحدود)، منظم است. به عبارتی نواحی حل، دارای مرزهای موازی با محورهای مختصات بوده اند. بسیاری از این قبیل مسائل، به کمک روش تفکیک متغیر و با استفاده از سری‌های فوریه، پاسخ دهی شده‌اند و اطلاعات کافی در زمینه حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل رسانش با مشتقات جزئی در هندسه‌های منظم در [۱] موجود است، ولی برای هندسه‌های نامنظم، اکثر این مسائل بی پاسخ مانده اند، به گونه‌ای که حتی، آرپاچی<sup>۱</sup> (۱۹۶۶) در [۲] صراحتاً بیان می‌کند: "این مسائل، مناسب برای روش‌های تحلیلی دقیق نیستند". حل تحلیلی معادله لاپلاس و پواسون در هندسه‌های نامنظم، نیازمند بهره‌گیری از نگاهت مختلط است که بدست آوردن ضابطه تبدیل مناسب برای هندسه مد نظر، روند حل را با پیچیدگی مواجه می‌سازد. مرور بر کارهای صورت پذیرفته در زمینه حل تحلیلی معادلات لاپلاس و

پواسون به کمک نگاهت مختلط نشان می‌دهد ام.جی.بلیث<sup>۲</sup> و همکاران (۲۰۱۲) در [۳] معادله لاپلاس، برای مسئله رسانش حرارتی پایا در یک محیط نیمه محدود دو بعدی که دارای مرز نامنظم و پر شکن از سمت محدود خود است را به کمک تبدیل شوارتز-کریستوفل به صورت عددی حل کرده‌اند و از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای منظم کردن مرز نامنظم مسئله بهره برده‌اند. محمد. ام. الن<sup>۳</sup> (۲۰۱۲) در [۴] معادله لاپلاس برای جریان سیال را در یک کانال مستطیلی منقبض شونده (که هندسه‌ای نامنظم محسوب می‌شود) به کمک تبدیل شوارتز-کریستوفل به صورت تحلیلی حل کرده است. اون<sup>۴</sup> و همکاران (۱۹۹۲)، در [۵] از تبدیل شوارتز-کریستوفل برای مطالعه جریان سیال روی یک دیواره با فرورفتگی‌های مستطیلی و برآمدگی‌های قوس‌دار استفاده کرده‌اند. تحقیق حاضر در دو حالت، یک حالت عمومی، به جهت ایجاد توانایی حل تحلیلی برای هر نوع هندسه‌ای و یک حالت خاص (برای مثلث قائم الزویه) به جهت شفاف شدن مباحث مطرح شده، به بررسی و ارائه راه کارهای کامل حل تحلیلی معادلات لاپلاس و پواسون در هندسه‌های نامنظم پرداخته است که نسبت به کارهای صورت پذیرفته در [۵-۳] از جهت ایجاد توانایی حل تحلیلی برای هر دو معادله پواسون و لاپلاس در هر نوع هندسه نامنظم کامل‌تر است.

به کمک روش عمومی که برای حل معادلات رسانش پایا در هندسه‌های نامنظم، معرفی خواهد شد، حل این معادلات در هر هندسه نامنظم دیگر از قبیل، انواع چندضلعی‌های منتظم و غیرمنتظم، بیضی‌ها، مثلث‌ها و سایر اشکال هندسی، سهل گشته و متعاقباً خطا بسیار کاهش می‌یابد که این به محققان علم انتقال حرارت، در اکثر زمینه‌های مرتبط با پدیده رسانش حرارتی، به ویژه در زمینه طراحی پره‌ها و مبدل‌های گرمایی با انواع هندسه‌های نامنظم، اجازه خواهد داد که در یافتن رابطه تحلیلی توزیع دما با دقت بالا، در سطوح یاد شده مشکلی نداشته، علاوه بر آن به جهت مشخص بودن ارتباط تابع توزیع دما با هندسه سطوح، بتوانند سطوح هندسی را متناسب با تابع توزیع دمای دلخواهشان طراحی نموده، در عین حال با خطای حل مواجه

<sup>2</sup> M.G. Blyth<sup>3</sup> Mohamed M Allan<sup>4</sup> D. Owen<sup>1</sup> V S.Arpaçi

افقی به طول  $a'$  و ضلع قائم به طول  $b'$  مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- هندسه مسئله یا ناحیه حل

که به زبان ریاضی می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$R' = \{(u', v') \mid 0 \leq u' \leq a', 0 \leq v' \leq -\frac{b'}{a'}u' + b'\} \quad (1)$$

در شکل ۱، دمای مرز منطبق بر محور قائم ثابت و برابر با  $T_1$  و دمای مرز منطبق بر محور افقی ثابت و برابر با  $T_2$  و نیز دما در مرز سوم مسئله که وتر مثلث است، مقدار ثابت و برابر  $T_3$  در نظر گرفته شده است. بعد دما در حل تحلیلی و عددی، کلین است. برای این ناحیه، تحت شرایط مرزی دما ثابت و بدون وجود چاه یا چشمه حرارتی، هدف حصول توزیع دمای حالت پایا به کمک یک حل تحلیلی دقیق است.

### ۳- حل تحلیلی

فرضیات در نظر گرفته شده عبارتند از:

- حالت پایا
  - شرایط مرزی از نوع اول
  - بدون تولید و مصرف انرژی در ناحیه حل
  - هیچ گونه انتقال گرمای تابشی و جابه جایی با محیط صورت نمی‌گیرد
  - ناحیه حل همسانگرد و همگن
- با در نظر گرفتن قانون پایداری انرژی و فرضیات قبل، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله عبارت خواهد بود از [۷]:
- $$\frac{\partial^2 T}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v'^2} = 0 \quad \text{or} \quad T_{uu'} + T_{vv'} = 0 \quad (2)$$
- معادله (۲)، معروف به معادله لاپلاس در صفحه دکارتی است که در این هندسه به عنوان معادله رسانش حاکم بر مسئله است و شرایط مرزی برای آن در قالب ریاضی عبارتند از:

نباشند. همچنین این امکان که قادر باشند با در اختیار داشتن تابع دقیق توزیع دما، مقدار شار حرارتی و در پی آن، نرخ انتقال گرما را در هر نقطه مطلوب به صورت دقیق محاسبه نمایند، سهل شده و در یافتن تنش‌های حرارتی و به دنبال آن، انبساط و خمیدگی سطوح و نیز طراحی ضخامت عایق‌ها به مشکل بر نمی‌خورند. علاوه بر این، با در اختیار داشتن تابع توزیع دما و در نظر گرفتن پتانسیل مختلط حرارتی [۶]، می‌توانند تابع جریان حرارت را بدست آورند. که نشانگر خطوط جریان انتقال گرما است. علاوه بر موارد کاربردی مطرح شده، می‌توان ادعا کرد، با توجه به اینکه معادلات دیفرانسیل حاکم بر دو پدیده فیزیکی توزیع پتانسیل الکترواستاتیکی و توزیع پتانسیل سرعت در دینامیک سیالات (برای جریان آرام، غیر قابل تراکم، غیرویسکوز و پایا) از نقطه نظر ریاضی مشابه معادلات دیفرانسیل مسائل رسانش حرارتی‌اند و از یک فرم کلی (معادله لاپلاس) تبعیت می‌کنند [۶]، با مطالعه انجام یافته در طی این مقاله، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر این دو پدیده فیزیکی در هندسه‌های نامنظم مربوط به آن‌ها نیز سهل گشته و راه رسیدن به پاسخ تحلیلی و دقیق بسیاری از مسائل بی پاسخ در این دو زمینه نیز روشن خواهد شد.

روش رسیدن به حل تحلیلی دقیق در هندسه‌های نامنظم برای معادلات رسانش پایا، در یک حالت هندسی خاص (مثلث قائم الزاویه) در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته و حل تحلیلی برای آن ارائه شده، تا بر مفاهیم عمومی که مطرح خواهند شد شفافیت بخشیده و در نتیجه، رسیدن به پاسخ بسیاری از مسائل بی پاسخ مطرح شده در سایر نواحی هندسی را سهل کند. لازم است در اینجا بیان شود که برای مسئله خاص در نظر گرفته شده در این مقاله هیچ حل تحلیلی که مبتنی بر روش فرمولاسیون دیفرانسیلی باشد تا کنون ارائه نشده است.

### ۲- بیان مسئله

در مقاله حاضر یک ناحیه با هندسه ای از نوع صفحه مثلثی قائم الزاویه دارای راس قائمه واقع در مبدأ، تحت شرایط مرزی دما ثابت در صفحه  $(W' = u' + iv')$  با ضلع

نگاشت می‌تواند نقاط روی محور افقی و نیم صفحه بالایی از یک صفحه (مثل صفحه  $Z$ ) را به نقاط رو و داخل مرزهای یک چند ضلعی بسته در صفحه‌ای دیگر (مثل صفحه  $W$ ) بنگارد [۹-۱۰]. به این ترتیب تمام چندضلعی‌های بسته که از نظر هندسی نامنظم و دارای مرز یا مرزهایی غیر موازی با محورهای مختصات‌اند، توانایی ارتباط با محور افقی و نیم صفحه بالا از صفحه‌ای دیگر را، که از نظر هندسی ناحیه‌ای نامنظم به شمار می‌رود، به کمک تبدیل شوارتز - کریستوفل دارند. این نگاشت اولین بار توسط دو ریاضیدان آلمانی به نام های شوارتز<sup>۱</sup> در سال (۱۹۲۱-۱۸۴۳) و کریستوفل<sup>۲</sup> در سال (۱۹۰۰-۱۸۲۹) که مستقلاً آن را پیدا کرده‌اند ارائه شد و اطلاعات کافی در ارتباط با این نگاشت در [۹-۱۰] آمده است. با توجه به اینکه در حالت خاص، ناحیه در نظر گرفته شده برای حل معادله رسانش در این مقاله یک مثلث قائم الزاویه می‌باشد که از نظر هندسی یک سه ضلعی بسته و نامنظم تلقی می‌شود بدیهی است که برای تبدیل آن به ناحیه‌ای نامنظم از نگاشت شوارتز - کریستوفل، باید کمک گرفته شود. بنابراین لازم است اندکی به تشریح این تبدیل در اینجا پرداخته شود:

اگر در حالت عمومی و کلی صفحه  $Z (z=x+iy)$  را در نظر گرفته شود، تبدیل شوارتز - کریستوفل با ضابطه:

$$w = f(z) = A \left\{ \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^n (s - x_j)^{-k_j} ds \right\} + B \quad (۴)$$

قادر است محور افقی و نیم صفحه بالا از آن را به نقاط داخل و روی یک چند ضلعی بسته با رئوس  $w_1, w_2, w_3, w_4 \dots w_n$  در صفحه  $(w=u+iv)$  بنگارد [۹-۱۰].

در رابطه (۴)  $A$  و  $B$ ، اعداد مختلط ثابتی اند که به اندازه و مکان چندضلعی وابسته می‌باشند و باید به درستی و بسته به هر چندضلعی طوری انتخاب شوند که محور افقی و نیم صفحه بالا منطبق بر چندضلعی شود. همچنین نمادهای  $k_1, k_2, k_3 \dots k_n$  از روی زوایای خارجی هر راس چندضلعی و با رابطه (۵) بدست می‌آیند.

$$k_j = 1 - \frac{\theta_j}{\pi} \quad (۵)$$

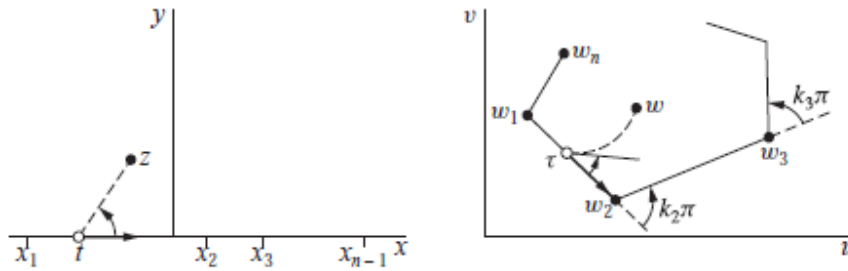
$$B.c(in w') \begin{cases} T(u', 0) = T_2 \\ T(0, v') = T_1 \\ T\left(u', -\frac{b'}{a'}u' + b'\right) = T_3 \end{cases} \quad (۳)$$

ابتکاری که باید برای حل معادلات رسانش پایا در هندسه‌های نامنظم به کار رود، استفاده از تبدیلات مختلط است. به این صورت که می‌بایست ناحیه هندسی نامنظم را به ناحیه‌ای منظم تبدیل کرده، سپس معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله در ناحیه هندسی منظم جدید را یافته و پس از آن معادله رسانش تبدیل یافته در این ناحیه جدید را حل نموده، رابطه تحلیلی پاسخ در آن را یافته و در نهایت پاسخ در ناحیه هندسی نامنظم اولیه را به کمک ضابطه تبدیل بین دو ناحیه بدست آورد [۸]. لازم به ذکر است که پاسخ اکثر معادلات دیفرانسیل رسانش در نواحی هندسی منظم از قبل موجود است. چگونگی تبدیل دو ناحیه نامنظم و منظم به یکدیگر به کمک نگاشت مختلط صورت می‌پذیرد که امری مشکل بوده، نیازمند تسلط و خلاقیت کافی در زمینه متغیرهای مختلط خواهد بود. می‌توان ضابطه تبدیل مختلط بین برخی نواحی هندسی را در [۸-۱۰] یافت؛ همچنین به منظور تبدیل معادله دیفرانسیل رسانش و شرایط مرزی حاکم و حصول روابط آن‌ها در ناحیه هندسی جدید، از مطالب آتی در ارتباط با بحث متغیرهای مختلط استفاده خواهد شد؛ بنابراین در حالت عمومی، جهت حل معادلات دیفرانسیل رسانش در هر نوع هندسه نامنظم همچون بیضی‌ها، مثلث‌ها، چند ضلعی‌های منتظم و غیر منتظم و ... کفایت، این ناحیه، همراه با معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر آن را به کمک نگاشت مختلط و مباحث آتی مطرح شونده از متغیرهای مختلط به ناحیه‌ای منظم برده و پس از حل تحلیلی دقیق مسئله در آنجا و حصول پاسخ، به کمک ضابطه نگاشت مختلط که در حقیقت پل ارتباطی بین دو ناحیه هندسی منظم و نامنظم است به جواب مسئله در ناحیه نامنظم رسید. مشکل اصلی در اینجا یافتن ضابطه نگاشتی است که قادر باشد بسته به نوع ناحیه هندسی نامنظم، آن را به ناحیه‌ای منظم تبدیل کند.

از بین انواع نگاشت‌های مختلط، نگاشتی که قادر باشد نقاط داخل و روی مرزهای یک چند ضلعی بسته (که جزو نواحی هندسی نامنظم به حساب می‌آیند البته به غیر از مربع و مستطیل که هندسه‌ای منظم دارند) را با ناحیه‌ای منظم مرتبط سازد، نگاشت شوارتز-کریستوفل است. این

<sup>۱</sup>Schwarz

<sup>۲</sup>Christoffel



شکل ۲- تبدیل شوارتز - کریستوفل

$$W = u + iv = \exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right) \int_0^z (S+1)^{-\frac{3}{4}} S^{-\frac{1}{2}} (S-1)^{-\frac{3}{4}} ds = \exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right) \frac{2(z^2)(1-z^2)^{\frac{3}{4}}}{(z^2-1)^{\frac{3}{4}}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, Z^2\right) \quad (8)$$

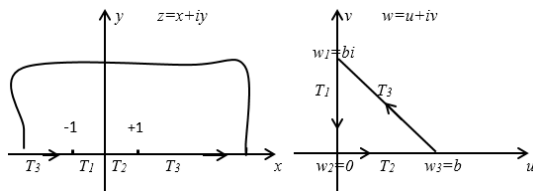
عبارت  $F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, Z^2\right)$  در رابطه (۸) اشاره دارد به تابع فوق هندسی گاوس<sup>۱</sup> که در فرم باز شده عبارت است از:

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, Z^2\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+1) \dots (\frac{1}{4}+n-1) \frac{3}{4}(\frac{3}{4}+1) \dots (\frac{3}{4}+n-1) z^{2n}}{n! (\frac{5}{4})(\frac{5}{4}+1) \dots (\frac{5}{4}+n-1)} = 1 + 0.15z^2 + 0.073z^4 + \dots \quad |z^2| < 1 \quad (9)$$

توضیحات کافی در رابطه با توابع فوق هندسی گاوس در [۱۱] آمده است. در رابطه (۸)، با توجه مطالب بیان شده در ارتباط با تبدیل شوارتز - کریستوفل، جهت انجام تبدیل مد نظر، مقادیر زیر برای پارامترهای رابطه (۴) محاسبه و انتخاب شده اند:

$$A = \exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right), B = 0, z_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = +1, k_1 = -\frac{3}{4}, k_2 = -\frac{1}{2}, k_3 = -\frac{3}{4}$$

اثبات کامل صحت رابطه (۸) در [۱۲] آمده است. شکل این تبدیل در زیر به نمایش گذاشته شده:



شکل ۳- تبدیل شوارتز-کریستوفل بین صفحات z و w

مطابق شکل ۳، نقطه  $x_1 = -1$  به روی  $w_1 = bi$ ،  $x_2 = 0$  به روی  $w_2 = 0$  و  $x_3 = +1$  به روی  $w_3 = b$  انگاشته شده‌اند، در نتیجه از صفحه Z، نقاط  $(-1 < x < 0)$ ،  $(0 < x < +1)$  و  $(x < -1 \cup x > +1)$  به ترتیب بر روی

که در رابطه بالا  $\theta_j$  زاویه داخلی در هر راس چندضلعی می‌باشد. مقادیر  $k_j$  ها باید در شروط زیر نیز صدق کنند:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = 2 \quad (6)$$

$$-1 < k_j < +1$$

شکل این تبدیل در بالا به نمایش گذاشته شده است. نقاط  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  نقاطی بر روی محور افقی در صفحه Z می‌باشند که به ترتیب به روی رؤس  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  انگاشته می‌شوند. در هر چند ضلعی تنها می‌توان سه نقطه از نقاط  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  را به دلخواه انتخاب کرد، بنابراین در صورتی که چندضلعی بیش از سه ضلع داشته باشد باید تعدادی از نقاط  $x_j$  را تعیین کنیم، انتخاب شرایط تعیین این اعداد ثابت، شرایطی که به کار بردن آنها راحت باشد اغلب احتیاج به ابتکار دارد که این یکی از محدودیت‌های این تبدیل به شمار می‌رود [۹]، محدودیت دیگر استفاده از این تبدیل به دلیل انتگرال‌گیری مربوط به آن است، اغلب نمی‌توان انتگرال را بر حسب تعداد متناهی تابع مقدماتی حساب کرد، در چنین حالتی جواب مسائل بوسیله این تبدیل ممکن است پیچیده شود [۹]. در یک حالت خاص، از تبدیل شوارتز-کریستوفل نیز، برای حل مسئله‌ی موردنظر در این مقاله استفاده خواهد شد.

در مسئله‌ی حاضر، چندضلعی بسته، یک مثلث قائم الزاویه است که ناحیه‌ای نامنظم بوده و برای تبدیل آن به ناحیه‌ای منظم باید دو تبدیل به کار بسته شود؛ در تبدیل نخست می‌توان به کمک نگاشت شوارتز-کریستوفل، از صفحه  $Z(z=x+iy)$ ، محور افقی و نیم صفحه بالا  $(Im(z) \geq 0)$  را به رو و داخل مرزهای یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین (دارای راس قائمه واقع در مبدا) با ضلع افقی و قائم برابر با:

$$b = \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 3.7081 \quad (7)$$

(که در آن  $\beta$  معرف تابع بتا است) در صفحه  $W(w=u+iv)$ ، نگاشت.

ضابطه تبدیل مدنظر عبارت می‌باشد از [۹]:

<sup>1</sup>Hypergeometric Function

تحت این تبدیل در صفحه  $W$  باشد، اگر تابع  $h(u, v)$  در امتداد  $\Gamma$  در یکی از شرایط

$$\text{Dirichlet B.C.}(in w) \begin{cases} h = h_0 \\ \text{or} \\ h = r(u, v) \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Neumann B.C.}(in w) \begin{cases} \frac{dh}{dn} = 0 \\ \text{or} \\ \frac{dh}{dn} = q_0 \neq 0 \\ \text{or} \\ \frac{dh}{dn} = r(u, v) \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{Robin B.C.}(in w) \begin{cases} a_0 h + b_0 \frac{dh}{dn} = c_0 \\ \text{or} \\ a_0 h + b_0 \frac{dh}{dn} = r(u, v) \end{cases} \quad (13)$$

صدق کند که در آن  $c_0, b_0, a_0, q_0, h_0$  اعداد حقیقی ثابت و تابع  $r(u, v)$  تابعی از پیش مشخص در صفحه  $W$  باشد و  $\frac{dh}{dn}$  نمایش مشتقات نرمال بر  $\Gamma$ ، آنگاه تابع:

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$$

در امتداد  $C$  به ترتیب در شرایط:

$$\text{Dirichlet B.C.}(in z) \begin{cases} H = h_0 \\ \text{or} \\ H = r[u(x, y), v(x, y)] \end{cases} \quad (14)$$

$\text{Neumann B.C.}(in z)$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dN} = 0 \\ \text{or} \\ \frac{dH}{dN} = \frac{dh}{dn} |f'(z)| = q_0 |f'(z)| \\ \text{or} \\ \frac{dH}{dN} = \frac{dh}{dn} |f'(z)| = r[u(x, y), v(x, y)] |f'(z)| \end{cases} \quad (15)$$

$\text{Robin B.C.}(in z)$

$$\begin{cases} a_0 H + b_0 \frac{dH}{dN} \frac{1}{|f'(z)|} = c_0 \\ \text{or} \\ a_0 H + b_0 \frac{dH}{dN} \frac{1}{|f'(z)|} = r[u(x, y), v(x, y)] \end{cases} \quad (16)$$

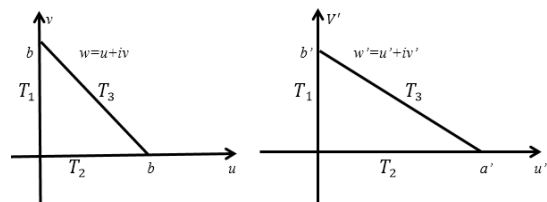
صدق می‌کند که در آن  $\frac{dH}{dN}$  نمایش مشتقات نرمال بر  $C$  بوده و  $|f'(z)|$  اندازه مشتق تابع تبدیل در امتداد محور  $N$  می‌باشد. روابط مطرح شده در بالا، به وضوح چگونگی ارتباط شرایط مرزی در صفحات  $Z$  و  $W$  را تحت نگاشت مختلط همدیس نشان می‌دهد.

اگر تابع دما با علامت  $T$  نشان داده شده و معادل تابع  $H$  در روابط بالا در نظر گرفته شود، مشخص است که برای شرط مرزی دمایی مشخص در مرزها (شرط مرزی دیریکله) و شرط مرزی عایق (از دسته شرایط مرزی نیومان)، در اثر تغییر هندسه بوسیله ضوابط تبدیلی که همدیس اند روی مرزها، دما و گرادیان دما به لحاظ مقداری تغییر نیافته و در

ضلع قائم، ضلع افقی و وتر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین از صفحه  $W$ ، تصویر می‌شوند و نقاط موجود در نیم صفحه بالا از صفحه  $Z$  به نقاط داخل مثلث از صفحه  $W$  تصویر شده‌اند. حال برای رسیدن به ناحیه اصلی در صفحه  $W'$  ( $W' = u' + iv'$ ) در طی دومین تبدیل، می‌توان به کمک نگاشت مختلط از نوع تغییر مقیاس و با رابطه (۱۰)، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین از صفحه  $W$  را به مثلث قائم الزاویه با ضلع افقی به طول  $a'$  و ضلع قائم به طول  $b'$  در صفحه  $W'$  تبدیل کرد:

$$W' = g(w) = u' + iv' = \left(\frac{a'}{b}\right)u + i\left(\frac{b'}{b}\right)v \quad (10)$$

شکل این تبدیل نیز در ذیل قابل مشاهده است:



شکل ۴- تبدیل بین صفحات  $W$  و  $W'$

حال پر واضح است که ناحیه اصلی مسئله در صفحه  $W'$  معادل با محور حقیقی و نیم صفحه بالایی در صفحه  $Z$  است که پل‌های ارتباطی بین این دو ناحیه عبارتند از روابط (۸) و (۱۰). بنابراین می‌توان معادله رسانش مسئله را در ناحیه‌ای که از صفحه  $Z$  در نظر گرفته شده حل کرد. به منظور تحقق این امر می‌بایست تبدیل یافته معادله رسانش و شرایط مرزی به همراه آن را نیز، در ناحیه مد نظر از صفحه  $Z$  یافت. برای تبدیل انواع شرایط مرزی که عبارتند از شرط مرزی دیریکله<sup>۱</sup>، شرط مرزی نیومان<sup>۲</sup>، شرط مرزی رابین<sup>۳</sup> و شرط مرزی کوشی<sup>۴</sup> که در نظرگیری همزمان دو شرط مرزی دیریکله و نیومان است، می‌بایست از روابط موجود در ذیل که حالت کلی و عمومی دارد استفاده کرد [۸-۹]:

فرض کنید تبدیل  $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  روی قوس هموار  $C$  در صفحه  $Z$ ، همدیس و  $\Gamma$  تصویر  $C$

<sup>1</sup> Dirichlet  
<sup>2</sup> Neumann  
<sup>3</sup> Robin  
<sup>4</sup> Cauchy

$$H_{xx} + H_{yy} = (h_{uu} + h_{vv}) \times |f'(z)|^2 \quad (20)$$

همچنین می‌توان نشان داد که اگر تابع  $h(u, v)$  در حوزه  $D_w$  از صفحه  $W$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله پواسون صدق کند

$$h_{uu} + h_{vv} = \varphi(u, v)$$

که در آن  $\varphi(u, v)$  تابعی از پیش تعیین شده است، آنگاه تابع  $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$  تحت تبدیل تحلیلی  $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در معادله پواسون زیر صدق خواهد کرد [۶]:

$$H_{xx} + H_{yy} = \varphi[u(x, y), v(x, y)] |f'(z)|^2 \quad (21)$$

با توجه به فرم رابطه (۲۱)، این رابطه باید مواقعی به کار برد شود که معادله رسانش در صفحه اصلی حل، از جنس معادله پواسون باشد. در مسائل رسانش، معادله پواسون به عنوان معادله دیفرانسیل رسانش پایای حاکم بر مسئله، زمانی مطرح می‌شود که علاوه بر در نظر گیری حالت پایا، در ناحیه حل، چاه یا چشمه حرارتی موجود باشد که اثر وجود آن، با تابعی مثل تابع  $\varphi(u, v)$  در معادلات نشان داده شود. اما رابطه (۲۰) در مواقعی باید به کار گرفته شود که معادله دیفرانسیل در صفحه اصلی از جنس معادله لاپلاس باشد. در مسائل رسانش، معادله لاپلاس به عنوان معادله دیفرانسیل رسانش پایای حاکم بر مسئله، زمانی مطرح می‌شود که علاوه بر در نظر گیری حالت پایا، در ناحیه حل، چاه یا چشمه حرارتی وجود نداشته باشد. با توجه به اینکه برای مسئله خاص در نظر گرفته شده در این مقاله، چشمه یا چاه حرارتی وجود ندارد، بنابراین جهت یافتن فرم تبدیل شده معادله رسانش در صفحات  $W, W'$  و  $Z$  می‌بایست از رابطه (۲۰) استفاده شود. حال اگر از رابطه (۲۰) بین صفحات  $W$  و  $W'$  استفاده گردد، (با توجه به اینکه تبدیل بین دو صفحه نیز تحلیلی است):

$$T_{uu} + T_{vv} = |g'(w)|^2 \cdot (T_{u'u'} + T_{v'v'}) \rightarrow T_{uu} + T_{vv} = |g'(w)|^2 \times 0 = 0 \rightarrow T_{uu} + T_{vv} = 0$$

و برای صفحات  $W$  و  $Z$  (با توجه به اینکه تبدیل بین دو صفحه تحلیلی است):

$$T_{xx} + T_{yy} = |f'(z)|^2 (T_{uu} + T_{vv}) \rightarrow T_{xx} + T_{yy} = |f'(z)|^2 \times 0 = 0 \rightarrow T_{xx} + T_{yy} = 0$$

مطلب گفته شده و نتایج بالا که حاصل از آن هستند، نشان می‌دهند که در حالت کلی فرم معادله رسانش پایا (معادله لاپلاس) در اثر تغییر هندسه ناحیه حل، تحت تبدیل‌های مختلط با ضوابط تحلیلی، تغییر نمی‌یابد. بنابراین

مرزهای متناظر، یکسان و بی تغییر باقی می‌ماند، اما برای شرط مرزی شار ثابت و متغیر (از دسته شرایط مرزی نیومان) اینگونه نبوده و گرادیان دما در صفحه  $Z$  برابر خواهد بود با حاصلضرب اندازه ی مشتق تابع تبدیل در مقدار گرادیان دما از صفحه  $W$ . در ارتباط با شرط مرزی انتقال حرارت جابه جایی در مرز (شرط مرزی رابین) نیز می‌توان گفت، که در صفحه  $Z$  این شرط نیز، مطابق روابط (۱۶)، دچار تغییر می‌گردد. برای تبدیل شرط مرزی کوشی که عبارت است از برقراری همزمان شرایط مرزی دیریکله و نیومان در یک مرز، از همان روابط (۱۴) و (۱۵) می‌بایست استفاده شود. در مسئله خاص در نظر گرفته شده، شرایط مرزی موجود، از نوع شرط مرزی دیریکله می‌باشند، از طرفی تبدیل شوارتز- کریستوفل و تبدیل تغییر مقیاس به کار برده شده نیز، روی مرزها همدیس‌اند (البته تبدیل شوارتز-کریستوفل در نقاط  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = +1$  همدیس نیست اما در بقیه نقاط روی محور افقی همدیس است) بنابراین می‌بایست از رابطه اول روابط (۱۴) جهت بدست آوردن شرایط مرزی در صفحه  $Z$  و  $W$ ، استفاده کرد. با توجه به رابطه اول از روابط (۱۴) و نحوه ارتباط مرزها، در سه ناحیه در نظر گرفته شده از صفحات  $W, W'$  و  $Z$  شرایط مرزی به فرم‌های زیر خواهند بود:

$$B.c(in w') \begin{cases} T(u', 0) = T_2 \\ T(0, v') = T_1 \\ T(u', -\frac{b'}{a'}u' + b') = T_3 \end{cases} \quad (17)$$

$$B.c(in w) \begin{cases} T(u, 0) = T_2 \\ T(0, v) = T_1 \\ T(u, -u + b) = T_3 \end{cases} \quad (18)$$

$$B.c(in z) \begin{cases} T_2 & 0 < x < 1 \\ T_1 & -1 < x < 0 \\ T_3 & |x| > 1 \end{cases} \quad (19)$$

حال در ادامه جهت یافتن فرم معادله رسانش پایا در صفحات  $Z$  و  $W$  می‌بایست از مطلب زیر که در [۶-۵] آمده است استفاده شود:

فرض کنید تابع تحلیلی  $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  حوزه  $D_z$  از صفحه  $Z$  را به روی حوزه  $D_w$  از صفحه  $W$  بنگارد و تابع  $h(u, v)$  با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته، در  $D_w$  تعریف شده باشد، با استفاده از قاعده زنجیری برای مشتقات جزئی می‌توان نشان داد اگر  $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$  آنگاه:

در صفحات  $W$  و  $Z$  فرم معادله رسانش به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{uu} + T_{vv} = 0 \quad (in w) \quad (22)$$

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \quad (in z) \quad (23)$$

ذکر یک نکته نیز در انتهای این بحث لازم بوده و آن اینکه به دلیل محدود و متناهی بودن دما در مرزهای ناحیه اصلی مسئله در صفحه  $W'$ ، مقدار دما در هر سه هندسه مطرح شده تا کنون، در نواحی حل محدود و کراندار است، به عبارت دیگر، در ناحیه مد نظر از صفحه  $Z$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} T(x,y) < \infty \quad (24)$$

تا به اینجا به یک ناحیه منظم از نظر هندسی (نیم صفحه بالا از صفحه  $Z$ )، معادله رسانش و شرایط مرزی همراه آن در این ناحیه دست یافته شده است، که در قالب ریاضی این یافته را می‌توان به فرم زیر نشان داد:

$$\begin{cases} T_{xx} + T_{yy} = 0 \\ T(x,0) = f(x) = \begin{cases} T_2 & 0 < x < 1 \\ T_1 & -1 < x < 0 \\ T_3 & |x| > 1 \end{cases} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} T(x,y) < \infty \end{cases} \quad (25)$$

حال جهت حل شدن مسئله در ناحیه  $Y$  اصلی در صفحه  $Y$  کافیست مسئله  $Y$  بالا در صفحه  $Z$  حل شود. مسئله جدید بوجود آمده معروف به مسئله  $Y$  دیریکله در نیم صفحه بالایی است [۸] که حل تحلیلی آن در [۸] به طور کامل آمده است و در اینجا رابطه حاصل از حل مسئله دیریکله برای توزیع دما در صفحه  $Z$  آورده می‌شود که معروف به فرمول انتگرال پواسون بوده [۹] و عبارت است از:

$$T(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\eta)d\eta}{y^2+(\eta-x)^2} \quad (26)$$

اگر  $f(\eta)$  با توجه به شرایط مرزی در رابطه (۲۶) جایگذاری شود، با محاسبه انتگرال‌های حاصله، تابع توزیع دما در صفحه  $Z$  بدست می‌آید بنابراین:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \frac{y}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{-1} \frac{T_3 d\eta}{y^2+(\eta-x)^2} + \int_{-1}^0 \frac{T_1 d\eta}{y^2+(\eta-x)^2} + \int_0^1 \frac{T_2 d\eta}{y^2+(\eta-x)^2} + \int_1^{\infty} \frac{T_3 d\eta}{y^2+(\eta-x)^2} \right] \rightarrow \\ T(x,y) &= \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{1+x}{y} \right) (T_1 - T_3) + \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right) (T_2 - T_1) + \tan^{-1} \left( \frac{1-x}{y} \right) (T_2 - T_3) + \pi T_3 \right] \quad (27) \end{aligned}$$

رابطه (۲۷)، رابطه تحلیلی توزیع دما در صفحه  $Z$  می‌باشد. در این رابطه و تمام کانتورهای این مقاله بعد دما کلون در نظر گرفته شده است. برای دستیابی به معادله خانواده منحنی‌های دما ثابت نیز کافیست رابطه (۲۷) با یک مقدار ثابت برابر قرار داده شود یعنی:

$$T(x,y) = cte \quad (28)$$

همچنین با استفاده از قانون فوریه<sup>۱</sup> [۷] می‌توان مقدار شار حرارتی را در هر نقطه و در هر دو جهت  $x$  و  $y$  به راحتی محاسبه کرده و با نظر به اینکه شار حرارتی، کمیتی برداری به حساب می‌آید، شار حرارتی برآیند و به دنبال آن نرخ انتقال گرما را نیز در هر نقطه دلخواه یافت. برای بدست آوردن تابع جریان حرارت، تابع مختلط پتانسیل حرارتی را در فرم  $F(z) = T(x,y) + i\psi(x,y)$  تعریف کرده و با توجه به تحلیلی بودن  $F(z)$ ، می‌توان از برقراری معادلات کوشی-ریمان<sup>۲</sup> برای  $F(z)$  استفاده نموده و تابع  $\psi(x,y)$  را به عنوان تابع جریان حرارت بدست آورد. همچنین برای حصول معادله خانواده منحنی‌های جریان حرارت که نشان‌دهنده مسیرهایی عبور گرما می‌باشند کافیست تابع  $\psi(x,y)$  با یک مقدار ثابت مطابق ذیل برابر قرار داده شود:

$$\psi(x,y) = cte$$

با حاصل شدن رابطه (۲۷)، حلی تحلیلی و دقیق برای مسئله، در ناحیه اصلی واقع در صفحه  $W'$  نیز ارائه شده است، چرا که پل ارتباطی بین ناحیه  $Y$  اصلی ( $R'$ ) در صفحه  $W'$  و نیم صفحه بالا از صفحه  $Z$  در قالب روابط (۸) و (۱۰) کاملاً مشخص می‌باشد.

برای سه حالت شرط مرزی، نمودارهای توزیع دما و منحنی‌های دما ثابت حاصل از رابطه  $Y$  (۲۷)، در ناحیه  $\{(x,y) | -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$  از صفحه  $Z$  در قالب شکل‌های (۵)، (۶)، (۷)، (۸)، (۹) و (۱۰) به نمایش گذاشته شده‌اند. سه حالت شرط مرزی در نظر گرفته شده عبارتند از:

$$T_1 = 300 K, T_2 = 200 K, T_3 = 100 K \quad (I)$$

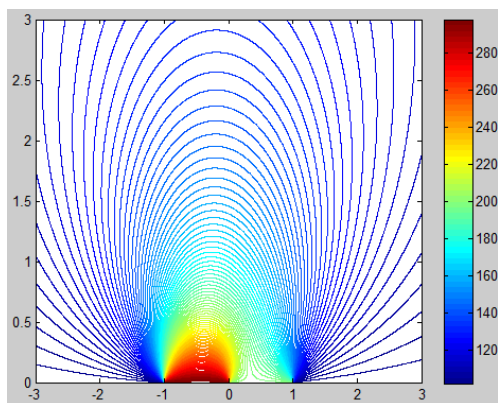
$$T_1 = 100 K, T_2 = 700 K, T_3 = 400 K \quad (II)$$

$$T_1 = 125 K, T_2 = 270 K, T_3 = 315 K \quad (III)$$

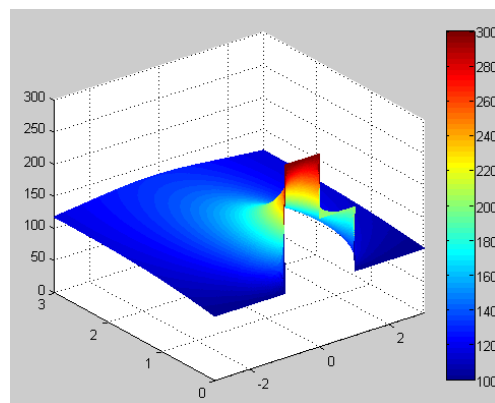
<sup>۱</sup>Fourier

<sup>۲</sup>Cauchy-Riemann

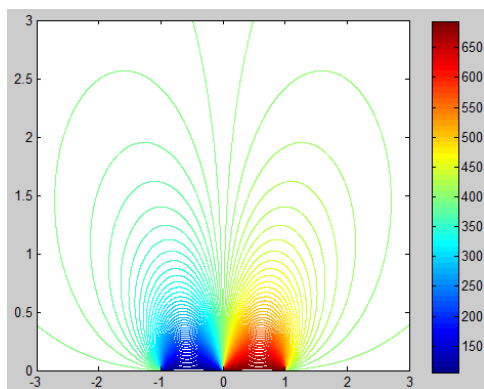




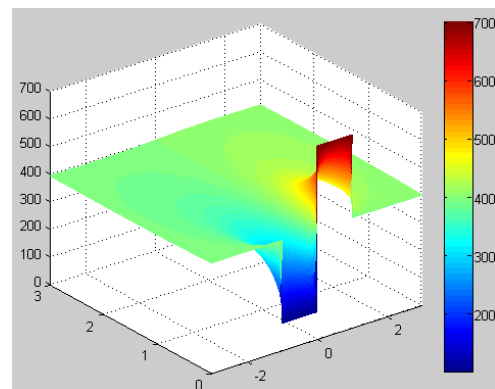
شکل ۸- منحنی‌های دما ثابت در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (I)



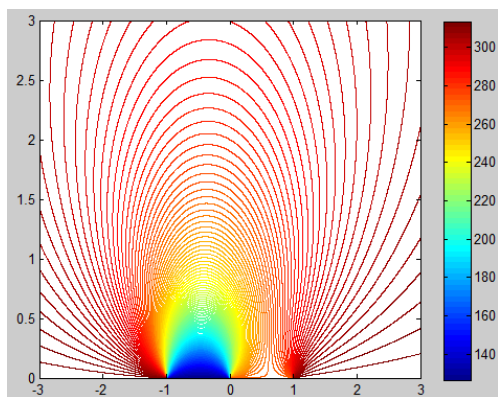
شکل ۵- نمودار دما بر حسب مکان در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (I)



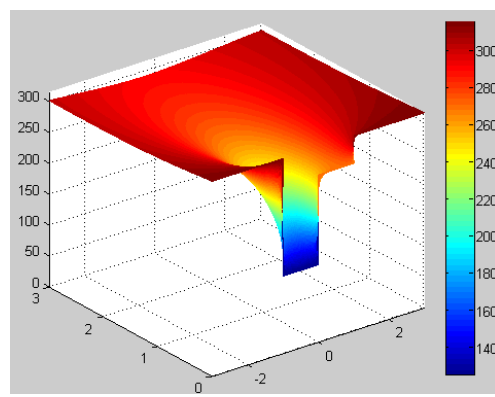
شکل ۹- منحنی‌های دما ثابت در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (II)



شکل ۶- نمودار دما بر حسب مکان در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (II)



شکل ۱۰- منحنی‌های دما ثابت در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (III)



شکل ۷- نمودار دما بر حسب مکان در صفحه Z برای حالت شرط مرزی (III)

## ۴- حل عددی

حل عددی برای سه نوع هندسه مختلف (حالت اول: مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با ساقی به طول ۱۰ cm، حالت دوم: مثلث قائم الزاویه با ضلع افقی به طول ۱۰ cm و ضلع قائم به طول ۵ cm و حالت سوم: مثلث قائم الزاویه با ضلع افقی به طول ۵ cm و ضلع قائم به طول ۱۰ cm) و در هر حالت هندسی، سه حالت شرط مرزی:

$$T_1 = 300 K \text{ و } T_2 = 200 K \text{ و } T_3 = 100 K \quad (I)$$

$$T_1 = 100 K \text{ و } T_2 = 700 K \text{ و } T_3 = 400 K \quad (II)$$

$$T_1 = 125 K \text{ و } T_2 = 270 K \text{ و } T_3 = 315 K \quad (III)$$

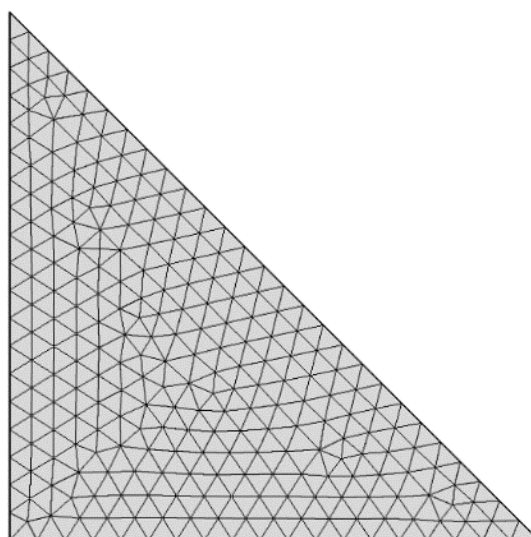
در نظر گرفته شده است. معادله رسانش در صفحه  $W'$  به روش المان محدود و با در نظر گرفتن المان‌های مثلثی شکل به کمک نرم افزار COMSOL Multiphysics 5.0 حل شده است. برای به دست آوردن جواب‌های دقیق می‌بایست از شبکه‌بندی متناسب با شرایط مرزی و هندسه مسئله استفاده نمود زیرا در غیر این صورت جواب‌ها واگرا شده یا غیره دقیق به دست می‌آیند. توضیحات کافی در این مورد در مرجع [۱۳] آمده است. در حل‌های عددی یکی از نکات مهم، عدم وابستگی حل به تعداد نقاط شبکه است. که به منظور بررسی شرط عدم وابستگی حل به شبکه در هر کدام از سه حالت هندسی و حالت شرط مرزی (I) دما در مرکز هندسی سطوح برای تعداد سلول متفاوت از شبکه محاسبه شد و مطابق

جدول ۱ در، برای حالت هندسی اول، شبکه شامل ۴۷۳ سلول، حالت هندسی دوم، شبکه شامل ۵۰۶ سلول و در حالت هندسی سوم، شبکه شامل ۵۰۴ سلول، جهت حل معادله رسانش انتخاب شده‌اند. جواب‌ها در این حالات از شبکه با سرعت بالایی به یکدیگر، همگرا شده و نتایج حل عددی حاصل شده‌اند.

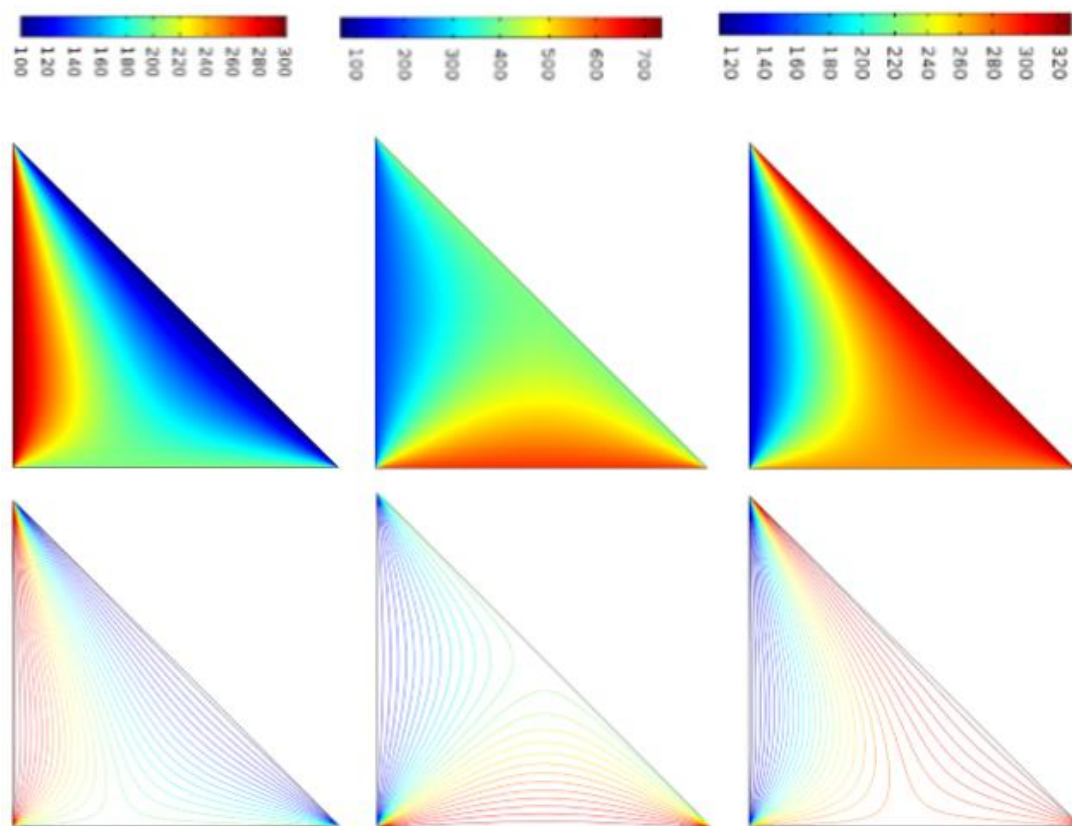
یک نمونه از شبکه استفاده شده در شکل ۱۱ قابل رویت می‌باشد. کانتورهای توزیع دما و منحنی‌های دما ثابت حاصل از حل عددی در قالب اشکال ۱۲، ۱۳ و ۱۴، برای هر سه حالت هندسی با سه حالت شرط مرزی در نظر گرفته شده، نشان داده شده‌اند.

جدول ۱- مقایسه دما برای ۶ نوع مختلف از شبکه‌بندی

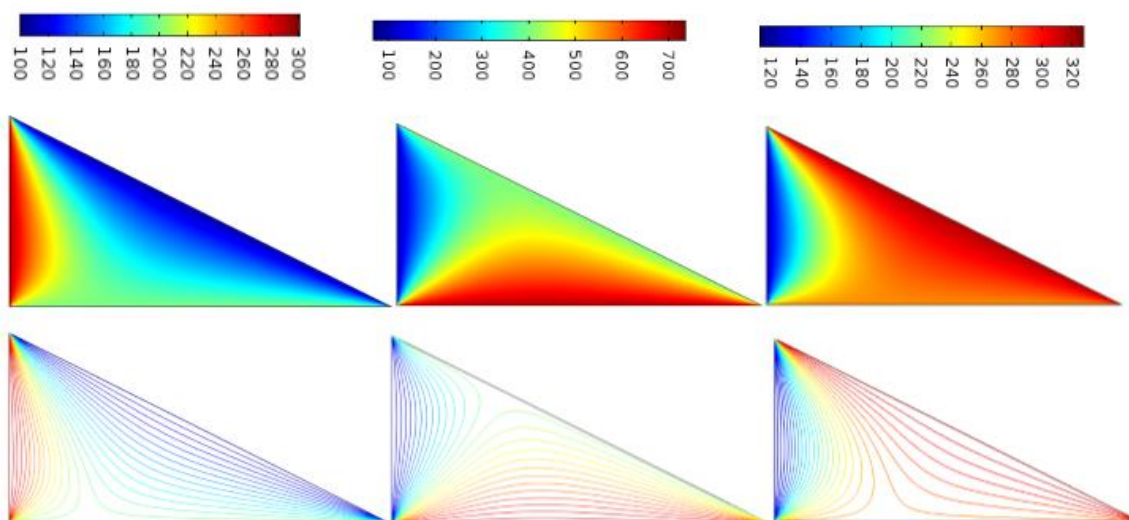
حالت سوم		حالت دوم		حالت اول	
تعداد سلول	دما در نقطه (3.3, 3.3)	تعداد سلول	دما در نقطه (3.3, 1.67)	تعداد سلول	دما در نقطه (1.67, 3.3)
85	178.47	80	158.85	24	193.34
136	178.44	174	158.87	49	193.34
297	178.43	260	158.86	172	193.33
473	178.43	506	158.87	504	193.33
957	178.43	1617	158.87	1617	193.33
3165	178.43	6362	158.87	6352	193.33



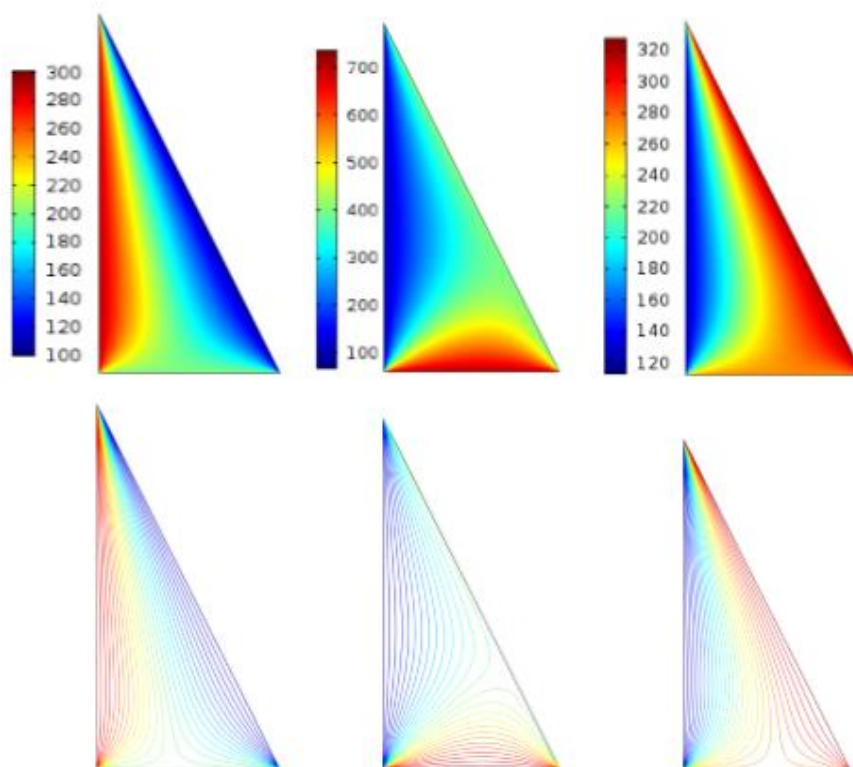
شکل ۱۱- یک نمونه از شبکه حل



شکل ۱۲- کانتورهای توزیع دما و منحنی‌های دما ثابت در حالت هندسی اول



شکل ۱۳- کانتورهای توزیع دما و منحنی‌های دما ثابت در حالت هندسی دوم



شکل ۱۴- کانتور های توزیع دما و منحنی های دما ثابت در حالت هندسی سوم

در نظر گرفته شده برای حل عددی در این مقاله، می‌بایست دارای شکل‌های مشابهی از نظر کانتورهای توزیع دما باشند (در شرایط مرزی یکسان)، چرا که تنها از نظر مقیاس با یکدیگر متفاوت‌اند و این موضوع را به روشنی در کانتورهای توزیع دمای به نمایش گذاشته شده، می‌توان شاهد بود. نکته قابل توجه در نتایج حل تحلیلی و عددی، مشاهده برقراری قضیه اصل ماکزیمم در ارتباط با توابع تحلیلی برای ناحیه حل می‌باشد. طبق این قضیه، هرگاه تابع  $f(z)$ ، در داخل ناحیه‌ای تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه  $|f(z)|$ ، مقادیر ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه انتخاب می‌کند و نیز اگر  $f(z)$  در هیچ نقطه‌ای از این ناحیه صفر نشود، مینیمم مقدار  $|f(z)|$  نیز روی مرز این ناحیه رخ خواهد داد [۹]. رابطه حاصل برای توزیع دما یعنی رابطه (۲۷)، رابطه‌ای تحلیلی و غیر ثابت است و همچنین در داخل ناحیه حل، صفر نمی‌شود، بنابراین شرایط قضیه اصل ماکزیمم را ارضا کرده و در نتیجه مقادیر اکسترمم خود را روی مرزها انتخاب می‌کند که نتایج عددی نیز این را به وضوح نمایش می‌دهند.

جهت اطمینان بیشتر از نتایج حل تحلیلی و عددی، به قیاس مقدار حاصل برای دما، تحت شرایط مرزی ذکر شده در قسمت حل عددی، در قالب جداول ۲، ۳ و ۴ پرداخته شده است. به صورت تصادفی یک نقطه از صفحه  $Z$  و تصویر متناظر با آن در صفحه  $w'$ ، برای اینکار انتخاب شده است.

##### ۵- بحث در نتایج

مطابق جداول ۲، ۳ و ۴ نتایج حل عددی نزدیکی مناسبی به نتایج حل تحلیلی دارند و خطای‌های موجود نیز می‌تواند ناشی از خطای حل عددی باشد همانطور که در جداول قابل مشاهده می‌باشد، میزان خطا در حالت هندسی اول نسبت به حالت‌های دوم و سوم کمتر است، این میزان خطاهای حاصل طبیعی است، حتی در حل مسائل رسانش به روش فرمولاسیون انتگرالی (روش‌های ریتز و کانتروویچ) در برخی هندسه‌های نامنظم گاهی خطای ۲۷٪ (روش انتگرال ریتز) در مقایسه با حل تحلیلی بر مبنای فرمولاسیون دیفرانسیلی نیز گزارش شده است [۲]. بدیهی است که هر سه حالت هندسی

نمی‌کنند اما شرط مرزی شار ثابت و متغیر (از دسته شرایط نیومان) و شرط مرزی رابین دچار تغییر می‌شوند. همچنین پی برده شد که تحت تبدیلات مختلط همدیس، معادله لاپلاس در فرم خود بی تغییر مانده اما معادله پواسون دچار تغییر می‌گردد. بررسی‌های انجام شده، قدرت تبدیلات مختلط را برای حل معادلات رسانش حالت پایا، در هندسه‌های نامنظم به وضوح نشان داد و راه را برای حل معادلات رسانش در هندسه‌های نامنظم دیگر نیز گشود.

#### ۶- فهرست علائم

دما (K)	T
دمای مرز قائم (K)	T <sub>1</sub>
دمای مرز افقی (K)	T <sub>2</sub>
دمای مرز وتر (K)	T <sub>3</sub>
طول ضلع افقی (cm)	a'
طول ضلع قائم (cm)	b'
طول ساق (cm)	b
ناحیه اصلی حل	R'
تابع بتا	$\beta$
عدد مختلط	s

#### ۷- مراجع

- [1] Ozisik MN (1993) Heat conduction. 2ed edn. Wiley, New York.
- [2] Arpaci VS (1966) Conduction heat transfer. Addison-Wesely, Massachusetts
- [3] Blyth MG, Pozrikidis C (2003) Heat conduction across irregular and fractal-like surfaces. Int J Heat Mass Transf 46(8): 1329-1339.
- [4] MM Allan (2012) Conformal mapping technique for studying fluid flow in contraction geometry. Int J Pure Appl Sci 6(1): 1897-1900.
- [5] Owen D, Blatt BS (1992) On flow through porous material using a generalized Schwarz-Christoffel theory. J Appl Phys 71: 3174-3180.
- [6] Kreyszig I (2011) Advanved engineerin mathematics , 10th edn. Wiley, New York.
- [7] Incropera FP, Dewitt DP, Bergman TL , Lavine AS (2011) Fundamental of heat and mass transfer. 7th edn. Wiley, New York.
- [8] Greenberg MD (1998) Advanved engineerin mathematics. 2nd edn. Prentice-Hall, New Jersey.

#### جدول ۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی برای شرط مرزی I

مختصات نقطه در w'			
مختصات نقطه در z	حالت اول هندسی	حالت دوم هندسی	حالت سوم هندسی
(0.5, 0.5)	(3.98, 2.01)	(3.98, 1.005)	(1.99, 2.01)
دما از حل تحلیلی	179.5	179.5	179.5
دما از حل عددی	۱۷۹.۷۵	۱۶۹.۰۸	۱۹۱.۹۲
خطا نسبی	٪۰.۱۳	٪۵.۸	٪۶.۹۱

#### جدول ۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی برای شرط مرزی II

مختصات نقطه در w'			
مختصات نقطه در z	حالت اول هندسی	حالت دوم هندسی	حالت سوم هندسی
(0.5, 0.5)	(3.98, 2.01)	(3.98, 1.005)	(1.99, 2.01)
دما از حل تحلیلی	505.57	505.57	505.57
دما از حل عددی	۵۰۴.۴۸	۵۷۷.۲۹	۳۸۴.۳۶
خطای نسبی	٪۰.۲۱	٪۱۴.۱	٪۲۳.۹

#### جدول ۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی برای شرط مرزی III

مختصات نقطه در w'			
مختصات نقطه در z	حالت اول هندسی	حالت دوم هندسی	حالت سوم هندسی
(0.5, 0.5)	(3.98, 2.01)	(3.98, 1.005)	(1.99, 2.01)
دما از حل تحلیلی	264.36	264.36	264.36
دما از حل عددی	۲۶۴.۱۴	۲۸۰.۵۹	۲۴۱.۲۶
خطای نسبی	٪۰.۰۸	٪۶.۱	٪۸.۷

#### ۶- نتیجه گیری

طی مقاله حاضر، در حالت خاص، معادله رسانش، حالت پایا در صفحه مثلثی قائم الزاویه با شرایط مرزی دما ثابت به کمک تبدیل شوارتز - کریستوفل حل شد، تابع توزیع دما بدست آمد و در نهایت به کمک حل عددی انجام یافته از صحت نتایج حل تحلیلی اطمینان حاصل شده و به محل وقوع اکسترمم‌های تابع توزیع دما نیز پی برده شد. همچنین در حالت کلی راه کار حل معادلات رسانش حالت پایا در هندسه‌های نامنظم ارائه شد، بررسی‌ها در این زمینه نشان داد که بوسیله تبدیلات مختلط همدیس، شرایط مرزی دیریکله و شرط مرزی عایق (از دسته ی شرایط مرزی نیومان) تغییر

- [۱۲] غضنفری هلق ش (۱۳۹۳) "پایان نامه کارشناسی". دانشگاه تبریز، تبریز.
- [13] Hoffmann KA, Chiang ST (2000) Computational fluid dynamics for engineers. 4<sup>th</sup> edn. Engineering Education System, Wichita KS.
- [9] Brown JW, Churchill RV (2009) Complex variables and applications. 8th edn. McGraw-Hill, New York.
- [10] Driscoll TA, Trefethen LN (2003) Schwarz–Christoffel Mapping. Cambridge University Press.
- [11] Simmons GF (1972) Differential equations (with applications and historical notes). McGraw-Hill, New York.