



بررسی عملکرد طرح‌های تفاضل مرکزی اسکالر، کاسپ و طرح بالادست AUSM+، در محدوده جریان با ماخ‌های بسیار کم تا ماوراءصوت

فهیمة ابراهیم‌زاده ازغدی^۱، محمود پسندیده‌فرد^{۲*}، محمد رضا مه‌پیکر^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۲/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۷/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۲/۲۷

چکیده

در سال‌های اخیر، دستیابی به روش عددی دقیق در رژیم‌های جریانی مختلف، برای گرفتن ناپیوستگی‌های جریان و حل دقیق آن به طوری که دارای حداقل نوسان و خطاهای عددی باشد، همواره مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. نکته متمایز کننده این مقاله، مقایسه عملکرد روش‌های تفاضل مرکزی و بالادست، در حل معادلات اویلر برای جریان‌های تراکم پذیر داخلی در محدوده وسیعی از ماخ-های ورودی است. در این تحقیق، به بررسی توانایی سه روش بالادست AUSM+، اتلاف مصنوعی اسکالر و کاسپ در محدوده ماخ‌های کم تا ماوراءصوت و در جریان غیرلزج یک بعدی در نازل همگرا-واگرا پرداخته شده است. همچنین توانایی روش AUSM+ و اسکالر، در جریان گذر صوتی غیرلزج دو بعدی بین پره‌های ثابت توربین در دو حالت خروجی مافوق صوت و مادون صوت، بررسی شده است. در این بررسی‌ها، عملکرد خوب روش AUSM+ با سرعت همگرایی بیشتر و خطای عددی کمتر در تمام رژیم‌های جریانی، در جریان داخل نازل همگرا-واگرا مشاهده شده است. در نمونه دوم در هر دو حالت جریان، روش AUSM+ ضمن ارائه نتایج منطبق بر نتایج آزمایشگاهی، دارای خطاهای عددی کمتر و ارضای بقای جرمی بهتر از روش اسکالر است. لازم به ذکر است که روش AUSM+ برای ماخ‌های بالا نسبت به روش اسکالر به مراتب بهتر است.

کلمات کلیدی: روش‌های بالادست؛ روش‌های اتلاف مصنوعی؛ AUSM+؛ جریان تراکم پذیر داخلی.

Evaluating Performance of Scalar and Cusp Central Difference Schemes and AUSM+ Upwind Method in a Very Low Mach Number up to Supersonic Flow

F. Ebrahimzadeh azghadi¹, M. Pasandidehfard^{2*}, and M. R. Mahpeykar³

¹ MSc Student, Aero. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

³ Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

Abstract

In the recent years, achievement of a more accurate numerical method appropriate for different flow regimes to capture discontinuities with less oscillation and numerical errors has been of interest by many researchers. The specific comment in this paper is the comparison of the performance of artificial dissipation and upwind methods in solving the Euler equations for internal compressible flows in a wide range of inlet Mach numbers. In this work, we examine the ability of the AUSM+ upwind method, and the Scalar and Cusp artificial dissipation methods for flows with very low Mach number up to ultrasound and non-viscous flows in a convergent-divergent nozzle. The ability of the AUSM+ and Scalar methods in a 2D inviscid transonic flow between the turbine stator blades at both the supersonic and subsonic outlets is also studied. An excellent performance was observed for the AUSM+ method with more convergence speed and low numerical error in all flow regimes at a converging-diverging nozzle. Further, for the second case, the AUSM+ method coincides with the experimental results very well with lower numerical errors, and satisfies the mass conservation better than Scalar. It should be mentioned that the AUSM+ method is highly recommended for higher Mach numbers.

Keywords: Upwind Methodes; Artificial Dissipation Schemes; AUSM+; Compressible Internal Flow.

۱- مقدمه

برای درک صحیحی از جریان جهت طراحی دقیق‌تر، دستیابی به یک روش دقیق عددی که دارای حداقل نوسان و خطاهای عددی باشد و در رژیم‌های جریانی مختلف جواب قابل قبول ارائه دهد، همواره مورد توجه محققان علم دینامیک سیالات محاسباتی^۱ بوده است.

به طور کلی، روش‌های عددی را می‌توان به دو گروه روش‌های تفاضل مرکزی (اتلاف‌مصنوعی و روش‌های بالادست تقسیم‌بندی کرد. طرح‌های تفاضل مرکزی بر اساس تخمین متقارنی از اطلاعات موجود در نقاط مجاور سطح سلول عمل می‌کنند، در نتیجه جهتی را که اطلاعات از آن جهت به سلول می‌رسد، در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین با توجه به ناچیز بودن اتلافات موجود در طرح‌های تفاضل مرکزی و جهت از بین بردن نوسانات موجود در حل، می‌بایست تقریب مناسبی از جملات حذف شده هنگام گسسته‌سازی، به عنوان اتلافات مصنوعی^۲، به معادلات اضافه شود که نقش مهمی در دقت حل معادلات ایفا می‌کنند. پایه و اساس طرح‌های اتلاف مصنوعی در دو دهه اخیر توسط جیمسون^۳ [۱] بنا شده است که ترکیب مطلوبی از جملات مرتبه دوم و چهارم را در طرح خود به عنوان ترم اتلاف مصنوعی به معادلات اضافه می‌کند.

نکته مهم در تعیین میزان جملات اتلافی است. افزودن بیش از حد اتلافات، باعث ایجاد گرادیان‌های تند می‌شود، بر این اساس جیمسون [۲]، طرح اتلافی کاسپ^۴ را در سال ۱۹۹۸ معرفی کرده است که در آن از یک تابع سوئیچ برای شناسایی جریان استفاده می‌کند.

روش‌های بالادست بر پایه انتشار اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه استوارند، از این رو با فیزیک جریان در سراسر میدان تطابق خوبی دارند. طرح‌های بالادست به دو دسته روش‌های تجزیه بردار شار^۵ و روش‌های اختلاف بردار شار^۶ طبقه‌بندی می‌شوند. امروزه تلاش در جهت توسعه الگوریتم‌های بالادست، مبتنی بر استفاده از تجزیه شارها است که هدف ترکیب توانایی الگوریتم‌های بالادست از نوع

تجزیه بردار شار در گرفتن ناپیوستگی‌های قوی میدان جریان و دقت الگوریتم‌های بالادست از نوع اختلاف بردار شار است. در سال ۱۹۹۱ روش‌های خانواده AUSM^۷ با توجه به این ایده توسط لیو^۸ [۳] پیشنهاد و توسعه یافته‌اند. پایه اصلی روش‌های این خانواده، بر تقسیم شار به دو قسمت جابه‌جایی و فشاری است، برای محاسبه شار جابه‌جایی، از تقریب بالادست در جریان و برای قسمت فشاری نیز، از تخمین بالادست همراه با ملاحظات آکوستیک^۹ استفاده می‌شود [۴]. پس از ارائه روش AUSM، جهت بهبود کارایی و حذف کمبودهای آن، روش AUSM+ با ایجاد تغییراتی در الگوریتم پایه روش AUSM و با تعریف سرعت صوت در وجه سلول توسط لیو [۵] معرفی گردید.

با توجه به این که در روش بالادست AUSM بر حسب مورد تنها از مشخصات یک نقطه در بالادست جریان استفاده می‌کند؛ بنابراین از مرتبه اول است، این در حالی است که روش‌های تفاضل مرکزی از دقت مرتبه دو برخوردارند. از این نکته می‌توان به عنوان یک مزیت روش AUSM+ یاد کرد. شایان ذکر است که دقت این روش با استفاده از روش ماسل^{۱۰} می‌تواند افزایش یابد [۶].

در سال‌های اخیر، در زمینه دینامیک سیالات محاسباتی در هندسه‌های مختلف و مقایسه روش‌های تفاضل مرکزی و بالادست، مطالعات زیادی انجام شده است. از جمله این کارها، می‌توان به مقایسه انجام شده بین روش‌های AUSM+ و کاسپ در جریان بین پره‌های توربین، توسط چایما^{۱۱} و لیو [۷] در سال ۲۰۰۳ اشاره کرد. در سال ۲۰۰۴ ضحا^{۱۲} و همکاران [۸]، به مقایسه عملکرد روش کاسپ در مقابل روش‌های AUSM+، رو^{۱۳} و ون لیر^{۱۴} در هندسه و نمونه جریان‌های مختلف پرداختند.

لیو [۹] در سال ۲۰۰۶، در مقاله‌ای ضمن معرفی روش جدیدی از خانواده AUSM به نام AUSM+up، به مقایسه زاویه جریان پره توربین با استفاده از دو روش AUSM+up و

⁷ Advection Upstream Splitting Method

⁸ Liou

⁹ Acoustic Considerations

¹⁰ MUSCL

¹¹ Chima

¹² Zha

¹³ Roe

¹⁴ Vanleer

¹ CFD

² Artificial Dissipation

³ Jameson

⁴ Cusp

⁵ Flux Vector Splitting

⁶ Flux Difference Splitting

خروجی مافوق صوت و خروجی مادون صوت است که به منظور مقایسه عملکرد طرح‌های تفاضل مرکزی و بالادست در نمونه ای کاربردی، به بررسی نتایج حاصل از طرح‌های اتلاف مصنوعی اسکالر و بالادست AUSM+ و مقایسه آن با نتایج تجربی در حل معادلات اویلر پرداخته شده است.

۲- طرح اتلاف مصنوعی اسکالر

معادلات حاکم بر جریان، معادلات اویلر هستند که برای سادگی، در مختصات کارتزین یک بعدی در نظر گرفته می-شود، شکل کلی این معادلات به صورت رابطه (۱) است:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) = 0 \quad (1)$$

که پس از گسسته سازی به صورت رابطه (۲) می‌باشند:

$$\Delta x \frac{dw_i}{dt} + F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = 0 \quad (2)$$

که در آن w بردار متغیرهای باقیی و $F_{i+1/2}$ در آن شار عبوری از سطح بین سلول i و $i+1$ است.

$$F(w) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u H \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ρ دانسیته، u سرعت، E انرژی کل، P فشار و H آنتالپی سکون است. در طرح اسکالر شار عبوری از سطح به صورت رابطه (۴) محاسبه می‌شود:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1} + F_i) - d_{i+1/2} \quad (4)$$

F_i بردار شار برای سلول i است و $d_{i+1/2}$ شار اتلافی است که به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود [۱۶]:

$$d_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^2 \Delta w_{i+1/2} - \varepsilon_{i+1/2}^4 (\Delta w_{i+3/2} - 2\Delta w_{i+1/2} + \Delta w_{i-1/2}) \quad (5)$$

همانگونه که در بخش مقدمه بیان شد، در این طرح برای آشکار سازی امواج ضربه‌ای به نحو مطلوب ترکیبی از ترم های اتلافی رسته دو و چهار به جملات شار افزوده می‌شوند. روابط در طرح اسکالر، به گونه‌ای است که در نزدیکی موج ضربه‌ای و نقطه سکون، جملات مرتبه دوم مقدار بیشتری اتلاف به معادلات می‌افزاید و در مابقی میدان جریان، مقدار بسیار کمتری به معادلات افزوده می‌شود. در عوض ε^4 که معرف جملات مرتبه چهار است، در نزدیکی موج ضربه‌ای به سمت صفر میل می‌کند؛ در حالی که در نواحی عاری از موج ضربه‌ای و در نواحی هموار جریان که تغییرات فشار کم است، مقدار قابل ملاحظه‌ای دارد.

روش اتلاف مصنوعی جیمسون اشاره کرد. در سال ۲۰۰۸ پسندیده فرد و همکاران [۱۰]، در مقاله ای تحت عنوان بررسی و مقایسه روش بالادست رو و روش تفاضل مرکزی کاسپ به مقایسه عملکرد روش‌های تفاضل مرکزی و بالادست پرداختند. در سال ۲۰۱۱ نیز یونیس^۱ و همکاران [۱۱]، به بررسی عملکرد روش AUSM+ در محدوده ماخ‌های مختلف روی هندسه‌های مختلف پرداختند و نتایج حاصل را با نتایج روش رو مقایسه کردند. سینگ^۲ و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۲، ضمن معرفی روش جدید از خانواده AUSM به مقایسه عملکرد آن و روش کاسپ پرداختند. یوسفی راد و همکاران [۱۳] نیز، در سال ۲۰۱۳ در با مقاله‌ای تحت عنوان بهینه‌سازی روش کاسپ با استفاده از روش معکوس جهت بهبود روش حجم محدود دو بعدی جیمسون به مقایسه عملکرد این دو روش در بین پره‌های ثابت توربین پرداختند. رابینز^۳ و همکاران [۱۴] در همان سال نیز، به اصلاح روش AUSM+up برای جریان چند فازی پرداختند و نتایج حاصل را با روش تفاضل مرکزی مقایسه کردند. کیویو^۴ و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۴، ضمن معرفی روش جدیدی از خانواده AUSM به مقایسه چند روش از خانواده AUSM و روش رو در یک مخروط پرداختند.

نکته متمایز کننده تحقیق حاضر، مقایسه عملکرد طرح-های تفاضل مرکزی و بالادست در محدوده وسیعی از ماخ است، به این منظور در ابتدا پس از معرفی روش‌های تفاضل مرکزی کاسپ و اسکالر^۵ و طرح بالادست AUSM+، عملکرد طرح‌های تفاضل مرکزی کاسپ و اسکالر و طرح بالادست AUSM+ در جریان یک بعدی غیرلزج داخل نازل همگرا-واگرا در محدوده ماخ‌های مختلف (مادون صوت، گذر صوت و مافوق صوت)، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است و اعتبارسنجی اولیه با مقایسه نتایج حاصل با نتایج تئوری انجام شده است. دومین نمونه بررسی شده جریان دو بعدی غیرلزج بین پره‌های ثابت توربین بخار خشک یا تک فاز با استفاده از شبکه استاندارد یا شبکه ساده نوع H در دو جریان

¹ Younis

² Singh

³ Rabbins

⁴ Qu

⁵ Scalar Dissipation Scheme

$$F_x = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho uv \\ \rho uH \end{Bmatrix} \rightarrow u \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۹)$$

$$F_y = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \end{Bmatrix} \rightarrow v \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

در معادلات بالا، مقادیر اسکالر یعنی $(\rho, \rho u, \rho v, \rho H)$ با استفاده از سرعت جابه‌جایی به دست آمده، منتقل می‌شود و تغییرات فشار در میدان حل توسط سرعت موج آکوستیک است. در واقع ایده مجزا کردن شار جابه‌جایی به آن دلیل بوده که گسسته‌سازی برای هر موقعیت چپ و راست، رفتاری کاملا بر اساس طرح بالادست داشته باشد. جهت همخوانی با روابط مطرح شده، جهت به‌دست آوردن شار روی وجه سلول به جای استفاده از سرعت در روابط بالا، از عدد ماخ روی وجه سلول استفاده گردیده است که در آن صورت شار روی وجه سلول به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود:

$$F_K = M_K \begin{Bmatrix} \rho a \\ \rho au \\ \rho av \\ \rho aH \end{Bmatrix}_{L/R} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Pn_x \\ Pn_y \\ 0 \end{Bmatrix}_K \quad (۱۱)$$

زیر نویس L و R به ترتیب، مربوط به سلول چپ و راست وجه مورد نظر است که با توجه به مقادیر عدد ماخ روی وجه سلول (M_K)، در روابط بالا اندیس‌ها به صورت رابطه (۱۴) معرفی می‌شوند:

$$(\cdot)_{L/R} = \begin{cases} (\cdot)_L & \text{if } M_K \geq 0 \\ (\cdot)_R & \text{else} \end{cases} \quad (۱۲)$$

بنابراین نحوه گسسته‌سازی شار کلی (F_K) در وجه سلول در حالت دو بعدی، مطابق معادله (۱۵) است:

$$F_K = \begin{cases} \rho_L \xi_S \tilde{a} M_K \Phi_L + g P_K & \text{if } M_K \geq 0 \\ \rho_R \xi_S \tilde{a} M_K \Phi_R + g P_K & \text{else} \end{cases} \quad (۱۳)$$

$$g = [0, n_x, n_y, 0]^T, \xi_S = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (۱۴)$$

$$\Phi = \frac{\tilde{m}}{\rho} = [1, u, v, H]^T \quad (۱۵)$$

در رابطه (۱۶) n_x و n_y مولفه‌های بردار نرمال بر سطح سلول می‌باشند و ξ_S معکوس بردار قائم بر سطح سلول است که جهت بی بعدسازی از آن استفاده شده است.

\tilde{a} در معادله (۱۵)، مقدار عددی سرعت صوت را نشان می‌دهد که در اعداد ماخ پایین جایگزین سرعت صوت متوسط می‌شود، که با روابط (۱۸-۱۹) محاسبه می‌شوند [۱۸و۱۹]:

$$\tilde{a} = \frac{a_L + a_R}{2} \quad (۱۶)$$

۴- طرح اتلاف مصنوعی کاسپ

اساس این طرح، جدا کردن جملات فشار در روابط شار جریان است. بردار شار به دو جمله جابه‌جایی و فشار تجزیه می‌شود [۲]:

$$f = u \cdot w + f_P \quad (۶)$$

مقدار بردار f_P به صورت رابطه (۷) است:

$$f_P = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ u \cdot P \end{pmatrix} \quad (۷)$$

جمله اتلافی در این طرح به شکل (۸) تعریف می‌شود:

$$d_{i+1/2} = \frac{1}{2} \alpha_{i+1/2}^* C (w_{i+1} - w_i) + \frac{1}{2} \beta_{i+1/2} (f_{i+1} - f_i) \quad (۸)$$

برای بدست آوردن جواب دقیق‌تر، باید جملات اتلاف مصنوعی در نزدیکی موج ضربه‌ای با مقدار بیشتر و در مابقی نقاط با مقدار کمتر وارد حل شوند. به این منظور، از یک تابع سوئیچ $L(u, v)$ که قابلیت تشخیص جریان را دارد، استفاده می‌شود.

$$L(u, v) = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \frac{u-v}{|u|-|v|} \right|^q \right) (u + v) \quad (۸)$$

مقدار توان q انتخابی است و بین ۲ تا ۳ است [۱۷]. حال

باید w_i و w_{i+1} را با مقادیر جدید w_L و w_R جایگزین کرد.

$$w_R = w_{i+1} - \frac{1}{2} L(\Delta w_{i+3/2}, \Delta w_{i-1/2})$$

$$w_L = w_i - \frac{1}{2} L(\Delta w_{i+3/2}, \Delta w_{i-1/2}) \quad (۹)$$

۵- روش بالادست AUSM+

روش AUSM+ در سال ۱۹۹۶ توسط لیو [۵] ارائه شده است. الگوریتم AUSM+ با ایجاد تغییراتی در الگوریتم پایه روش AUSM+ و با تعریف سرعت صوت در وجه سلول، دقت و توانایی حل در گرفتن ناپیوستگی‌های قوی جریان را بالا برده است و مشکل پایداری عددی رفع گردیده است که در روش‌های پیش از این وجود داشته است [۶].

همان‌گونه که در بخش مقدمه بیان شد، پایه اصلی روش با در نظر گرفتن عملکرد مجزا این دو ترم، بر تقسیم شار به دو قسمت جابه‌جایی و فشاری است؛ بنابراین بردارهای شار در جهت x و y از دو قسمت جابه‌جایی و فشاری تشکیل شده است.

همانطور که اشاره شد، در روش‌های خانواده AUSM شار عبوری از وجه سلول بر حسب سرعت صوت و عدد ماخ متوسط تعریف می‌شود که البته ابداع‌کنندگان این روش‌ها نشان دادند، در صورت استفاده از سرعت صوت عددی به جای سرعت صوت متوسط، نتایج بهتری به ویژه در سرعت-های بسیار کم حاصل می‌شود. سرعت صوت عددی به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود [۵]:

$$\bar{a} = f(\bar{M}, M) \bar{a} \quad (30)$$

که در آن ضریب مقیاس‌کننده به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود:

$$f(\bar{M}, M_*) = \frac{\sqrt{(1-M_*^2)^2 \bar{M}^2 + 4M_*^2}}{(1+M_*^2)} \quad (31)$$

عدد ماخ مرجع و متوسط نیز، توسط روابط (۳۲-۳۳) محاسبه می‌شوند:

$$M_*^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_{CO}^2)) \quad (32)$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{M}_L + \bar{M}_R}{2} \quad (33)$$

لیو مقدار M_{CO}^2 را جهت جلوگیری از ایجاد شرایط تکین در نقطه سکون، 10^{-4} پیشنهاد کرده است. همچنین جهت اطمینان از پیوستگی میدان فشار و سرعت جملات پخش فشاری D_P و پخش سرعت D_V به روابط ارائه شده برای محاسبه عدد ماخ و فشار در وجه سلول افزوده می‌شود:

$$M_K = M^+ + M^- + D_P \quad (34)$$

$$P_K = P^+ P_L + P^- P_R + D_V \quad (35)$$

$$D_V = -P^+ P^- \left(\frac{\rho_L + \rho_R}{2} \right) \bar{a} (M_R - M_L) \quad (36)$$

$$D_P = \frac{1}{4} \frac{\Delta M (P_L - P_R)}{M_*^2 (P_L - P_R)} \quad (37)$$

در روابط (۳۴-۳۷) ΔM به صورت معادله (۳۴) استفاده می‌شود:

$$\Delta M = (M_{2L} - M_{1L}) - (M_{2R} - M_{1R}) \quad (38)$$

۶- بحث و بررسی نتایج

در کار حاضر، ابتدا به منظور مقایسه عملکرد روش‌های اتلاف مصنوعی اسکالر و کاسپ و روش بالادست AUSM+ در رژیم-های مختلف جریان (مافوق صوت، گذرصوت، مادون صوت)، به مدل‌سازی جریان یک بعدی غیرلزج داخل نازل همگرا-واگرا، با شبکه بندی استاندارد و با تعداد ۲۰۰ سلول در راستای X پرداخته شده است که با این تعداد نقاط حل از شبکه مستقل است.

$$\xi_s = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (17)$$

روابط مورد نیاز جهت محاسبه ماخ انتقال دهنده اطلاعات و فشار در وجه سلول که تابعی از عدد ماخ چپ و راست وجه سلول می‌باشند، با روابط (۲۰-۲۳) ارائه گردیده است [۲۰]:

$$M_K = M_L^+ + M_R^- \quad (18)$$

$$P_K = P^+ P_L + P^- P_R \quad (19)$$

$$\begin{cases} M^+ = M_{2L}, P^+ = P_{5L} & \text{if } |M_L| < 1 \\ M^+ = M_{1L}, P^+ = \frac{M_{1L}}{M_L} & \text{else} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} M^- = M_{2R}, P^- = P_{5R} & \text{if } |M_R| < 1 \\ M^- = M_{1R}, P^- = \frac{M_{1R}}{M_R} & \text{else} \end{cases} \quad (21)$$

بالانویس + و - مربوط به انتشار اطلاعات از چپ و راست سلول و زیر نویس L و R نیز، مربوط به سلول چپ و راست وجه می‌باشند. $M_{1,2L,R}$ چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم، از اعداد ماخ چپ و راست هستند:

$$M_{2R} = -\frac{1}{4}(M_R - 1)^2, M_{2L} = \frac{1}{4}(M_L + 1)^2 \quad (22)$$

$$M_{1R} = \min(M_R, 0), M_{1L} = \max(M_L, 0) \quad (23)$$

$P_{5L,R}$ نیز به صورت چندجمله‌ای درجه پنجم معرفی می‌شوند:

$$P_{5L} = +M_{2L}(2 - M_L) + \frac{3}{16}M_L(M_L^2 - 1)^2 \quad (24)$$

$$P_{5R} = -M_{2R}(2 + M_R) - \frac{3}{16}M_R(M_R^2 - 1)^2 \quad (25)$$

عدد ماخ در چپ و راست وجه سلول، با توجه به سرعت صوت روی وجه سلول محاسبه می‌شود که از روابط ساده (۲۸-۲۹) برای محاسبه آن می‌توان استفاده کرد [۱۹]:

$$M_{R,L} = \frac{v_{R,L}}{a_{j+\frac{1}{2}} \xi_s} \quad (26)$$

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{a_j a_{j+1}} \text{ OR } a_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(a_j + a_{j+1})}{2} \quad (27)$$

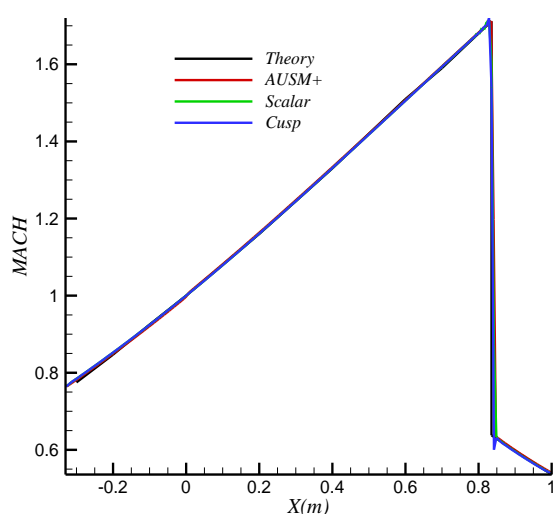
$$\text{OR } a_{j+1/2} = \min(a_j, a_{j+1})$$

الگوریتم AUSM+ با تعریف سرعت صوت عددی \bar{a} برای جریان با ماخ پایین نیز توسعه یافته است. با این کار الگوریتم عددی را از اعمال پیش شرط برای محاسبات جریان‌های ماخ پایین بی نیاز کرده است و با بزرگ کردن مجازی عدد ماخ از کوچک شدن توابعی که بر اساس آن میزان استفاده از ماخ چپ و راست وجه سلول را مشخص می‌کنند، از جواب‌های غیرمنطقی جلوگیری می‌کند. در این الگوریتم، اگر سرعت جریان به سمت صفر میل کند، سرعت صوت عددی نیز به صفر میل می‌کند.

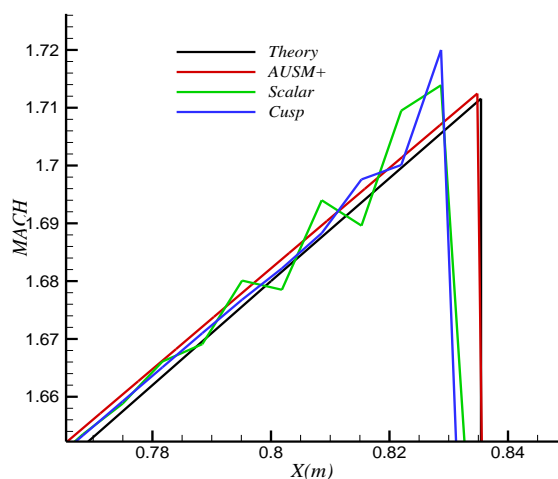
جدول ۱- مقایسه عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای و

موقعیت موج ضربه‌ای (نسبت فشار = ۰/۷)

| نام طرح | تئوری | AUSM+ | کاسپ | اسکالر |
|-------------------|-------|-------|-------|--------|
| شروع موج ضربه‌ای | ۰/۸۳۶ | ۰/۸۳۵ | ۰/۸۲۸ | ۰/۸۲۸ |
| اتمام موج ضربه‌ای | ۰/۸۳۶ | ۰/۸۴۷ | ۰/۸۴۲ | ۰/۸۴۹ |
| M_1 | ۱/۷۱۱ | ۱/۷۱۲ | ۱/۷۱۹ | ۱/۷۱۳ |
| M_2 | ۰/۶۳۸ | ۰/۶۳۵ | ۰/۶۰۱ | ۰/۶۳۳ |



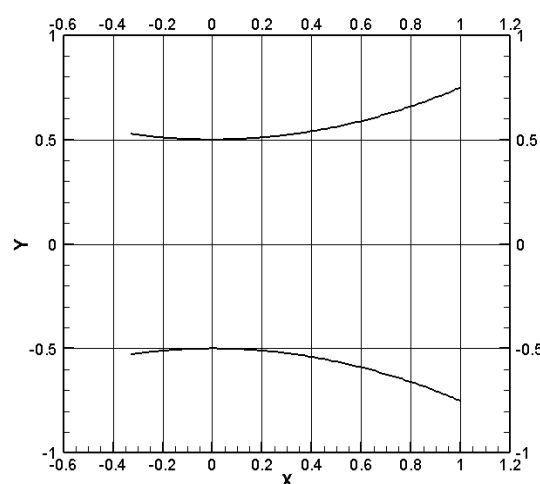
شکل ۲- نمودار تغییرات عدد ماخ در طول نازل (نسبت فشار = ۰/۷)



شکل ۳- تغییرات عدد ماخ در نزدیکی موج ضربه‌ای (نسبت فشار = ۰/۷)

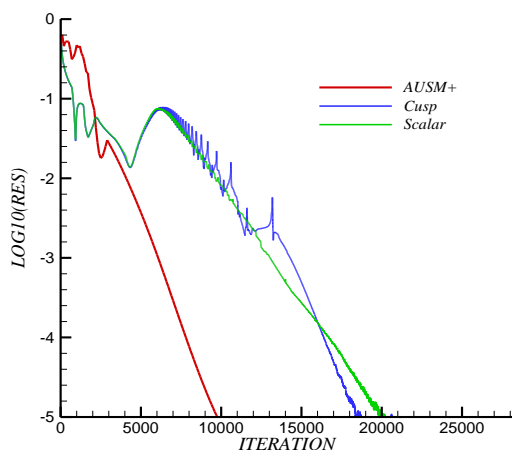
شکل ۱ هندسه نازل همگرا- واگرای مورد بررسی را نشان می‌دهد که نسبت سطح خروجی به گلوگاه در آن برابر با ۱/۵ و معادله منحنی آن مطابق با معادله (۳۹) است.

$$y = 0.25x^2 + 0.5 \quad (39)$$

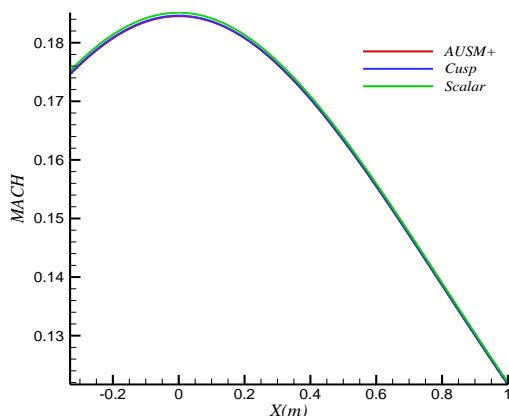


شکل ۱- شکل هندسه نازل همگرا- واگرای بررسی شده

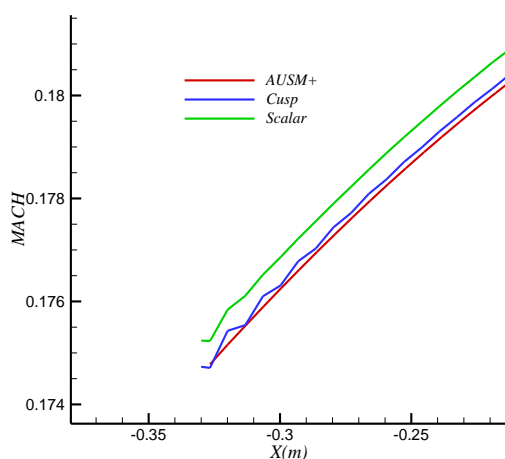
اگر نسبت فشار پایین دست به فشار ورودی نازل ۰/۷ در نظر گرفته شود، عدد ماخ در ورودی نازل از حدود ۰/۷۷ شروع می‌شود و با کاهش مساحت در نزدیکی خروجی تا حدود ۱/۷ افزایش می‌یابد و سپس یک موج ضربه‌ای عمودی اتفاق می‌افتد. شکل ۲، توزیع عدد ماخ در طول نازل با استفاده از روش بالادست AUSM+ و روش‌های اتلاف مصنوعی اسکالر و کاسپ را به همراه حل تئوری به دست آمده از جداول موج ضربه‌ای نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به حل تئوری، ظاهراً هر سه این روش‌ها جواب قابل قبولی را ارائه می‌دهند، اما با توجه به شکل ۳ که نمودار توزیع عدد ماخ در نزدیکی موج ضربه‌ای را نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود، در نزدیکی موج ضربه‌ای روش اتلاف مصنوعی اسکالر با توجه به عدم دقت در میزان اتلاف مصنوعی مورد نیاز، نوسان بیشتری در مقایسه با روش کاسپ دارد، این در حالی است که روش AUSM+، دارای هیچ گونه نوسانی نمی‌باشد. چگونگی پیش‌بینی موقعیت موج ضربه‌ای، مقادیر عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای توسط سه روش مذکور و مقایسه آنها با حل تئوری نیز، در جدول (۱) آمده است.



شکل ۴- نرخ همگرایی بر حسب تعداد تکرار (نسبت فشار = ۰/۷)



شکل ۵- نمودار تغییرات عدد ماخ در طول نازل (نسبت فشار = ۰/۹۹)



شکل ۶- تغییرات عدد ماخ در ورودی نازل (نسبت فشار = ۰/۹۹)

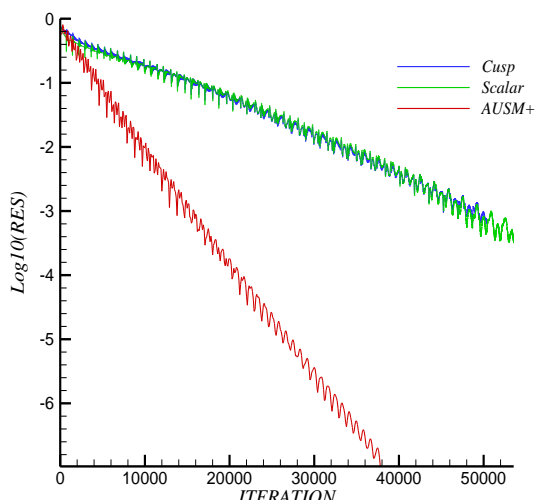
همانگونه که از جدول ۱ و شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، روش AUSM+ با توجه به اینکه بر پایه انتشار اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه استوار است و با فیزیک جریان در سراسر میدان تطابق خوبی دارد، ضخامت موج ضربه‌ای پیش بینی شده را کمتر نشان می‌دهد و همچنین با توجه به نتایج تئوری دقت بیشتری در تعیین محل موج ضربه‌ای، مقدار عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای نیز دارد. لازم به ذکر است، روش بالادست AUSM+ در مقایسه با روش‌های جیمسون نیز بهتر کار می‌کند که چون تفاضل مرکزی هستند، برای سرعت‌های حدود صوت و مافوق صوت پایین مناسب‌ترند.

شکل ۴، نرخ همگرایی که معیار آن در جریان‌های مختلف بر اساس معادله پیوستگی و اختلاف مقادیر چگالی در دو مرحله است، را بر حسب تعداد تکرار برای سه روش ذکر شده نشان می‌دهد. سرعت همگرایی، وابسته به عدد CFL است که در این بررسی، این مقدار برای تمام طرح‌ها یکسان و برابر با ۰/۵ در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، روش بالادست AUSM+ نسبت به دو روش دیگر در تعداد کمتری تکرار به باقیمانده مورد نظر می‌رسد، بنابراین سرعت همگرایی در روش AUSM+ بسیار بیشتر است.

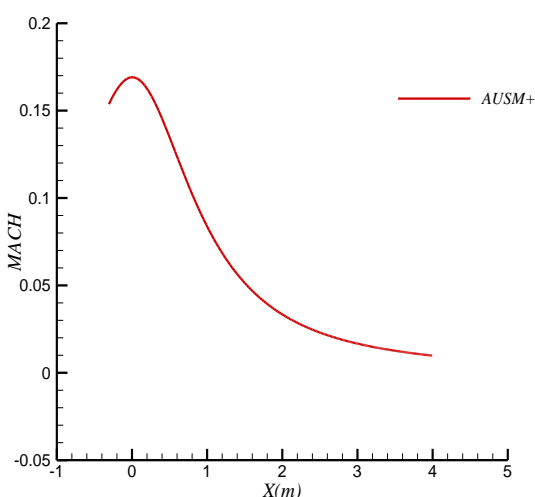
یکی از موارد بسیار مهم در بررسی عملکرد روش‌های چگالی مینا، چگونگی همگرایی آن‌ها در ماخ‌های بسیار کم است. برای بررسی عملکرد طرح‌های مذکور در اعداد ماخ پایین، نسبت فشار برابر با ۰/۹۹ در نظر گرفته می‌شود.

باتوجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که توزیع عدد ماخ در طول نازل با استفاده از سه روش مذکور را نشان می‌دهد، در این حالت نیز، هر سه روش جواب‌های قابل قبولی ارائه می‌دهند، اما اگر با دقت بیشتر به ابتدا یا انتهای نمودار توجه شود، همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، روش AUSM+ دارای نوسانات موجود در دو روش کاسپ و اسکالر نمی‌باشد و این خود برتری روش AUSM+ را نشان می‌دهد.

شکل ۷ نیز، نرخ همگرایی سه روش مذکور را بر حسب تعداد تکرار نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۷ مشخص می‌شود، سرعت همگرایی روش‌های کاسپ و اسکالر مشابه و نسبت به روش AUSM+، بسیار پایین‌تر است. به عبارت دیگر روش AUSM+، دارای بیشترین سرعت همگرایی است



شکل ۷- نرخ همگرایی بر حسب تعداد تکرار (نسبت فشار = ۰/۹۹)



شکل ۸- نمودار عدد ماخ در داخل نازل (نسبت فشار = ۰/۹۹۶)

جدول ۲- مقایسه عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای و موقعیت موج ضربه‌ای (نسبت فشار = ۰/۳)

| نام طرح | تئوری | AUSM+ | کاسپ | اسکالر |
|--------------------|-------|-------|-------|--------|
| شروع موج ضربه ای | ۱/۳۹۱ | ۱/۳۹۵ | ۱/۴۷۶ | ۱/۴۷۶ |
| انتمام موج ضربه ای | ۱/۳۹۱ | ۱/۴۳۸ | ۱/۴۸۸ | ۱/۵۱۱ |
| M ₁ | ۳/۰۶۱ | ۳/۰۵۰ | ۳/۴۶۷ | ۳/۵۴۰ |
| M ₂ | ۰/۴۷۲ | ۰/۴۶۱ | ۰/۴۸۸ | ۰/۴۱۰ |

و در تعداد تکرار کمتری در مقایسه با روش‌های کاسپ و اسکالر به باقیمانده مشخص می‌رسد؛ بنابراین مدت زمان همگرایی در روش AUSM+ در مقایسه با دو روش دیگر بسیار کاهش یافته است. لازم به ذکر است که روش بالادست AUSM+، توانایی رسیدن به مقادیر بسیار کمتری از باقی مانده‌ها را نیز دارد که خود از مزایای این روش است.

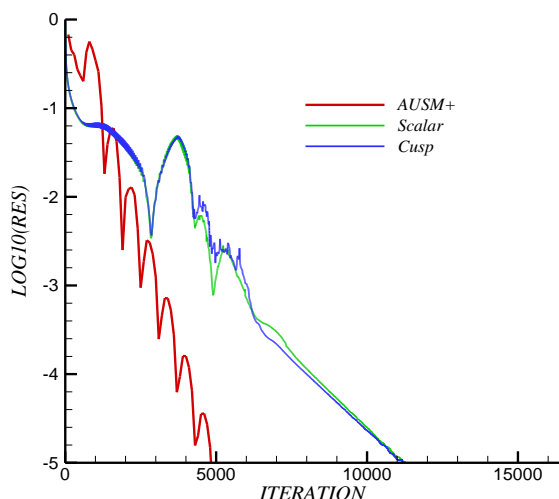
ضمن این که روش AUSM+ دارای زمان همگرایی و مقدار باقیمانده کمتر است، یکی دیگر از توانایی‌های این روش در این بخش، ارائه جواب‌های قابل قبول تا محدوده ماخ‌های پایین (حدود ۰/۰۱) است؛ این در حالی است که روش کاسپ و اسکالر در این حدود ماخ‌ها، جواب قابل قبولی از خود نشان نمی‌دهند و واگرا می‌شوند. شکل ۸، توزیع عدد ماخ را در طول نازلی که در آن $(\frac{A_2}{A_1})$ در حدود ۱۷ است و برای حالتی نشان می‌دهد که نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۹۹۶ است.

به منظور رسیدن به ماخ‌های بالا از شیپوره با معادله منحنی $y = 0.27x^2 + 0.15$ استفاده شده است که نسبت سطح در آن $\frac{A}{A^*} = 8.2$ است. اگر نسبت فشار پایین دست به فشار ورودی ۰/۳ در نظر گرفته شود، عدد ماخ در شیپوره به حدود ۳ می‌رسد و سپس یک موج ضربه‌ای عمودی رخ می‌دهد. شکل ۹، توزیع عدد ماخ در طول نازل با استفاده از سه روش اسکالر، کاسپ و AUSM+ به همراه حل تئوری را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، روش اسکالر مشابه حالت نسبت فشار ۰/۷ به علت عدم دقت در میزان ترم اتلاف مصنوعی در نزدیکی موج ضربه‌ای به شدت نوسانی می‌شود؛ به طوری که نمی‌توان مشخصات موج را با دقت خوبی با استفاده از این روش بدست آورد. روش کاسپ در ماخ‌های بالا نیز، دقت کافی ندارد؛ این در حالی است که روش AUSM+، هیچ گونه نوسان از خود نشان نمی‌دهد و با توجه به نتایج تئوری، دقت بیشتری در تسخیر کردن و پیش‌بینی مکان موج ضربه‌ای دارد.

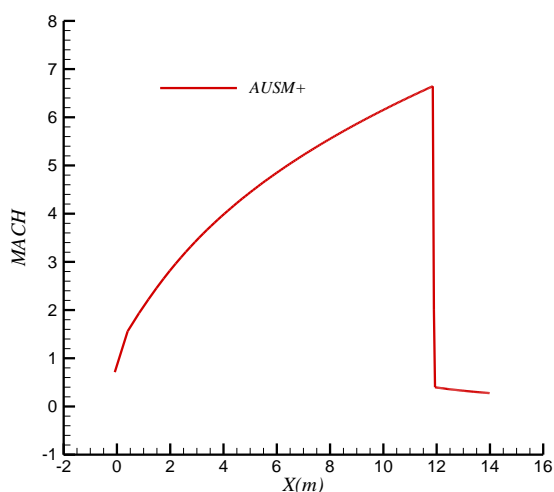
نتایج حاصل از بکارگیری سه روش ذکر شده، داده‌های تئوری بدست آمده از جدول موج ضربه‌ای در جدول ۲ آمده است. همان‌طور که از جدول ۲ مشاهده می‌شود، روش AUSM+ دقت بیشتری در تعیین محل موج ضربه‌ای، مقدار عدد ماخ قبل و بعد از موج ضربه‌ای دارد

این در حالی است که روش‌های کاسپ و اسکالر در این حدود ماخ‌ها، جواب دقیقی را ارائه نمی‌دهند.

شکل ۱۲، توزیع عدد ماخ برای نازلی که در آن $(\frac{A_2}{A^*})$ حدود ۲۰۰ و برای حالتی نشان می‌دهد که نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی ۰/۱۴ است.

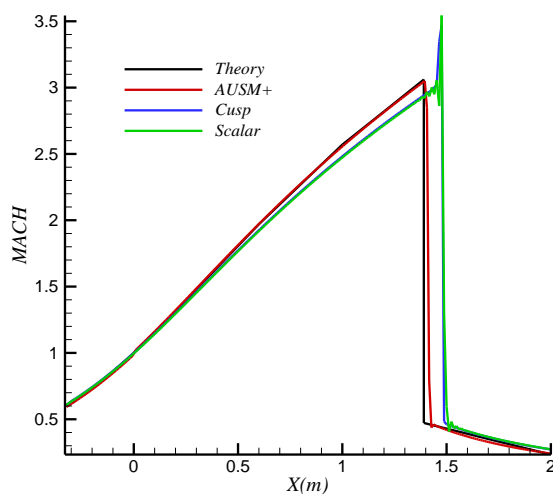


شکل ۱۱- نرخ همگرایی بر حسب تعداد تکرار (نسبت فشار = ۰/۳)

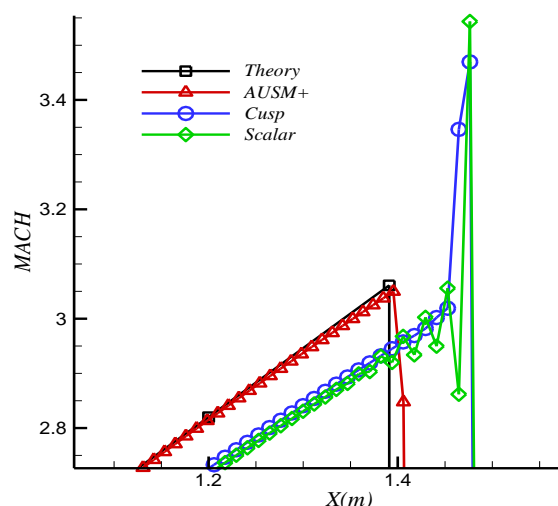


شکل ۱۲- نمودار عدد ماخ در داخل شیپوره (نسبت فشار = ۰/۱۴)

برای بررسی خطای عددی برنامه مورد نظر، نمودار فشار سکون در طول نازل، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. همان طور که می‌دانید، پدیده موج ضربه‌ای دارای تلفات



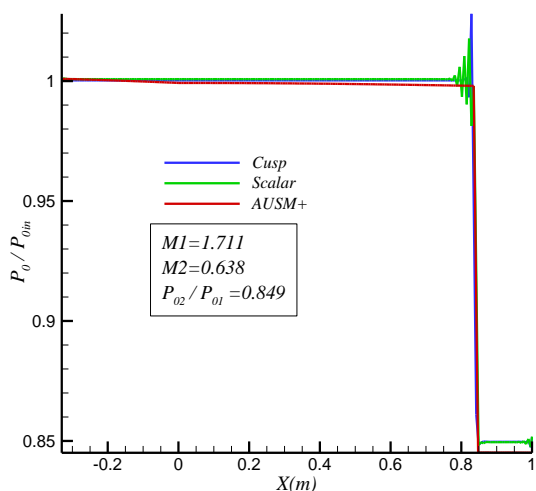
شکل ۹- نمودار عدد ماخ در داخل نازل (نسبت فشار = ۰/۳)



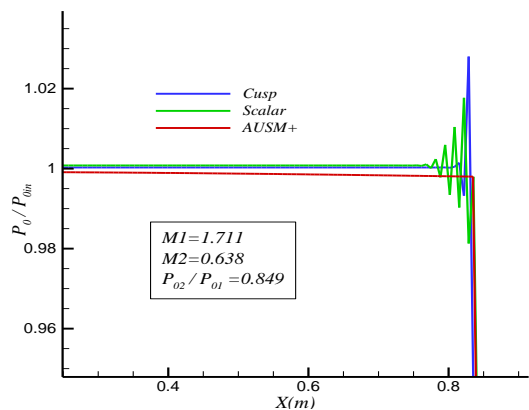
شکل ۱۰- تغییرات عدد ماخ در نزدیکی موج ضربه‌ای (نسبت فشار = ۰/۳)

شکل ۱۱، میزان همگرایی سه روش فوق در حالت نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی برابر با ۰/۳ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش AUSM+ همانند رژیم‌های جریانی قبل در مقایسه با دو روش دیگر، سرعت همگرایی بسیار بیشتری دارد.

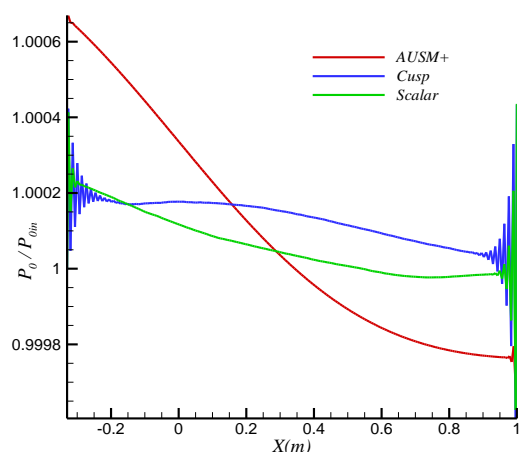
لازم به ذکر است، ضمن این که روش AUSM+ دارای زمان همگرایی و مقدار باقیمانده کمتری است، تا محدوده ماخ‌های بالا (حدود ۷) جواب‌های قابل قبولی ارائه می‌دهد؛



شکل ۱۳- نمودار تغییرات فشار سکون به فشار سکون اولیه در طول نازل (نسبت فشار=۰/۷)



شکل ۱۴- نمودار تغییرات فشار سکون به فشار سکون اولیه در طول نازل در نزدیکی موج ضربه ای (نسبت فشار=۰/۷)

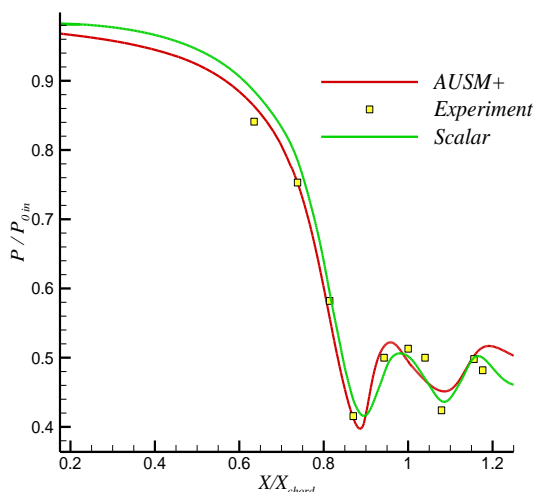


شکل ۱۵- نمودار تغییرات فشار سکون به فشار سکون اولیه در طول نازل (نسبت فشار=۰/۹۹)

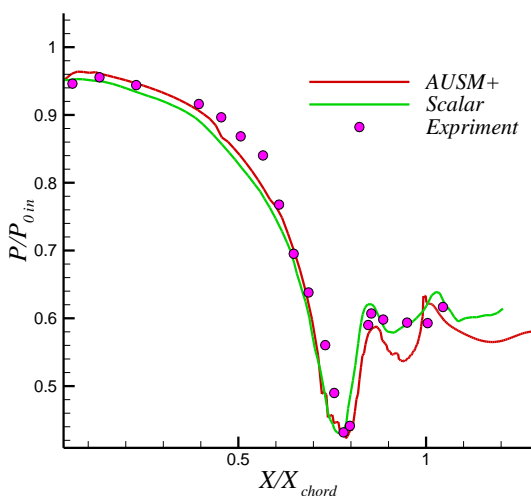
است، این تلفات در محاسبات خود را به صورت کاهش فشار سکون نشان می‌دهد. در جریان مورد نظر که آدیاباتیک و غیرلزج است، مقدار فشار سکون باید تا قبل از موج ضربه‌ای ثابت بماند و در محل موج ضربه‌ای عمودی افت کند. هرچه میزان افت کمتر باشد و به مقدار ارائه شده در حل‌های تحلیلی نزدیک‌تر باشد، حل مساله به پیش فرض‌ها نزدیک‌تر است و حلی نزدیک‌تر به واقعیت خواهیم داشت. شکل‌های ۱۳ تا ۱۶، تغییرات فشار سکون نسبت به فشار سکون اولیه بدست آمده از روش‌های تفاضل مرکزی کاسپ، اسکالر و روش بالادست AUSM+ را، برای سه رژیم جریان ذکر شده در بالا (مادون صوت، گذر صوت و مافوق صوت)، نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش‌های تفاضل مرکزی کاسپ و اسکالر به دلیل عدم تقریب مناسب ترم‌های حذف شده هنگام گسسته‌سازی و به عبارت دیگر، وجود ترم اتلاف مصنوعی، در این نمودارها مشابه نمودارهای توزیع ماخ در بخش‌های قبلی دارای نوساناتی می‌باشند که در روش بالادست AUSM+، این نوسانات مشاهده نمی‌شود. همچنین با مقایسه نسبت فشار سکون‌های قبل و بعد از موج ضربه‌ای با داده‌های تئوری که در نمودارهای ۱۳ و ۱۶ آمده است، مشاهده می‌شود، روش AUSM+، دارای اتلافات کمتری نسبت به دو روش دیگر است و از این نظر ارجح است.

پس از مدل‌سازی جریان یک بعدی و غیرلزج داخل نازل همگرا- واگرا، به بررسی روش بالادست AUSM+ در مدل‌سازی جریان دو بعدی غیرلزج و گذر صوتی داخل پره-های توربین در دو حالت خروجی مافوق و مادون صوت پرداخته شده است. شکل ۱۷ شبکه‌بندی پره مورد نظر که مربوط به مقطع میانی پرهی ثابت توربین است و مرزهای میدان جریان را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شبکه مورد استفاده در پره توربین شبکه استاندارد و ساده نوع H است که در نقاط حساس جریان به ظرافت آن افزوده شده است. برای روش بالادست AUSM+، پس از بررسی‌های لازم جهت استقلال نتایج از شبکه‌بندی، شبکه با تعداد ۳۹×۲۴۷ سلول انتخاب شده است. همچنین برای روش اسکالر شبکه با اندازه ۱۲×۱۱۵ انتخاب شده است که استقلال آن در مراجع قبلی به اثبات رسیده است [۱۳، ۲۱].

در شکل‌های ۱۸ و ۱۹، تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره به ترتیب در خط مرکزی جریان مافوق صوت و در سطح مکش جریان مادون صوت نشان داده شده است.

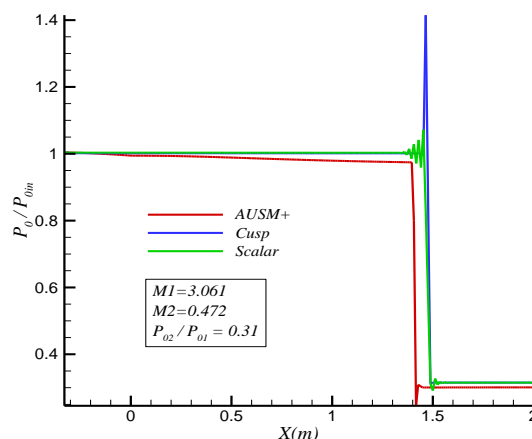


شکل ۱۸- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در خط مرکزی جریان مافوق صوت



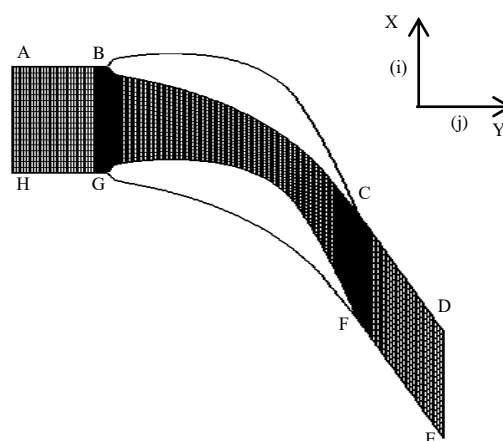
شکل ۱۹- توزیع فشار استاتیک به فشار سکون اولیه در طول پره در سطح مکش جریان مادون صوت

در شکل‌های ۱۸ و ۱۹، اولین افزایش فشار در روی سطح مکش ناشی از انتشار موج ضربه‌ای انتهایی سطح فشار فوقانی و برخورد آن با سطح مکش پایینی است. افزایش فشار بعدی روی سطح مکش نیز، معرف موج ضربه‌ای



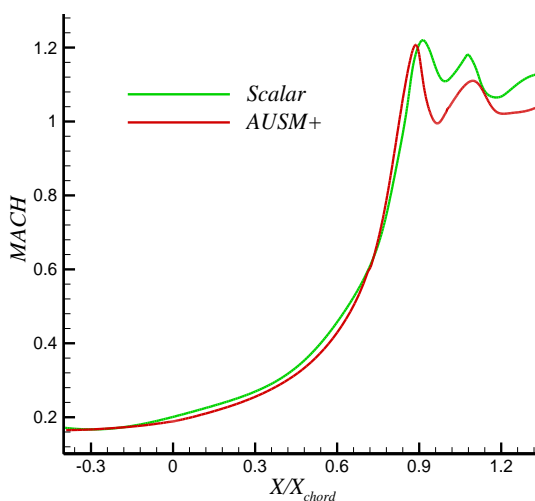
شکل ۱۶- نمودار تغییرات فشار سکون به فشار سکون اولیه در طول نازل (نسبت فشار = ۰/۳)

باتوجه به شکل ۱۷، چهار نوع مرز قابل تشخیص است که عبارتند از مرز ورودی AH، مرز خروجی DE، مرز صلب یا دیواره GF و BC و مرزهای پرودیک AB، CD، EF و GH. شرط‌های مرزی برای جریان پایدار دو بعدی با زاویه ورودی صفر، تراکم پذیر، آدیباتیک و غیر لزج در دو حالت، نسبت فشار پایین دست به فشار سکون ورودی، برابر با ۰/۴۸ (جریان خروجی مافوق صوت) و ۰/۵۷ (جریان خروجی مادون صوت) اعمال می‌شود.

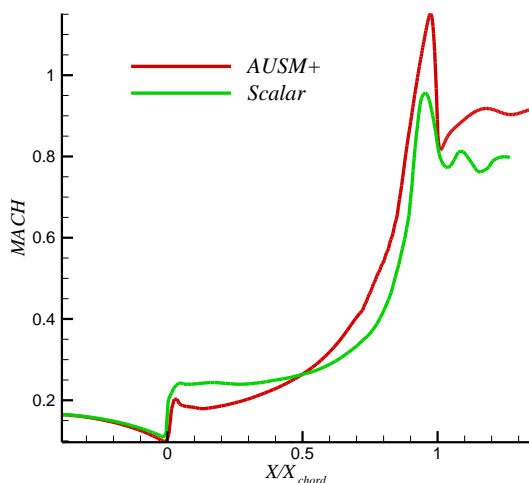


شکل ۱۷- شبکه استاندارد نوع H

نتایج حاصل از اعمال روش بالادست AUSM+ و طرح اتلاف مصنوعی اسکالر در حالت‌های جریان خروجی مادون-صوت و مافوق صوت در شکل‌های ۱۸ تا ۲۱ ارائه شده است.



شکل ۲۰- منحنی تغییرهای ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان مافوق صوت



شکل ۲۱- منحنی تغییرهای ماخ در طول پره در سطح فشار جریان مادون صوت

کار حاضر، مقایسه عملکرد طرح‌های تفاضل مرکزی و طرح بالادست AUSM+ در محدوده وسیعی از ماخ‌های ورودی است. به این منظور به اعمال آن‌ها روی دو هندسه مختلف تلاش شده است که به صورت استاندارد در آمده، در اکثر مقالات موجود و نتایج تئوری و تجربی برای آن‌ها در دسترس است. در مورد هندسه نازل همگرا- واگرا، نتایج نشان می‌دهد که طرح AUSM+ در محدوده ماخ‌های مختلف ضمن ارائه دقیق‌تر نتایج نسبت به طرح کاسپ و اسکالر، نوسانات را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. علاوه بر این، طرح

آرودینامیکی در انتهای سطح مکش یا لبه فرار است. همان‌گونه که در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو روش، انطباق نسبتاً مطلوبی با نتایج تجربی دارند. شایان ذکر است، روش اسکالر اساساً برای جریان‌های گذر صوتی طراحی شده است و بهترین جواب‌ها را در این محدوده ارائه می‌دهد؛ ولی باتوجه به نتایج موجود مشاهده می‌شود، روش بالادست AUSM+ در این محدوده نیز با روش اسکالر قابل رقابت است، به طوری که حتی نتایج حاصل از آن که متعاقباً آورده می‌شود، از خطاهای عددی کمتر و حفظ بقای جرم بهتری برخوردار است.

شکل‌های ۲۰ و ۲۱ نیز، توزیع عدد ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان در حالت جریان مافوق صوت و در سطح فشار در حالت مادون صوت را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج توزیع عدد ماخ مشابه نتایج توزیع فشار است.

نظر به این که جریان مورد نظر آدیاباتیک و غیرلزج است، همانطور که گفته شد، مقدار فشار سکون باید تا قبل از موج ضربه‌ای ثابت بماند. در جریان مورد نظر تغییرهای فشار سکون نسبت به فشار سکون اولیه در طول پره برای جریان مافوق صوت و مادون صوت بررسی شده است و مشاهده شده است که در روش بالادست AUSM+، این تغییرات کمتر است؛ در نتیجه خطای عددی نسبت به روش تفاضل مرکزی اسکالر کمتر بوده، حل جریان به خصوص در محدوده خارج از امواج ضربه‌ای به پیش فرض‌ها نزدیک‌تر است. لازم به ذکر است، در شرایط پایدار برای بقای جرم، باید میزان دبی ورودی در طول مسیر ثابت باشد. تغییرات دبی جرمی نسبت به دبی جرمی ورودی در طول پره در دو حالت جریان خروجی مافوق صوت و مادون صوت با استفاده از دو روش اتلاف مصنوعی اسکالر و روش بالادست AUSM+ نیز بررسی شده است و مشاهده می‌شود، در روش بالادست AUSM+ نوسانات دبی جرمی نسبت به روش اسکالر کمتر و شرط بقای جرمی را حداقل ۲۵ درصد بهبود بخشیده است.

۵- نتیجه گیری

بحث و بررسی پیرامون هر روش بدون شک به اعمال آن روی نمونه‌های مختلف و برای شرایط رژیم‌های مختلفی و ارائه نتایج حاصل از آن بستگی دارد. همانگونه که بیان شد، نوآوری

- [7] Chima RV, Liou MS (2003) Comparison of the AUSM+ and H-CUSP schemes for turbomachinery applications. AIAA Paper 4120.
- [8] Zha GC, Hu Z (2004) Calculation of transonic internal flows using an efficient high resolution upwind scheme. AIAA paper 2004-1097.
- [9] Liou MS (2006) A sequel to AUSM, Part II: AUSM+up for all speeds. J Comput Phys 214: 137-170.
- [10] Pasandideh fard M, Salari M, Mansoor M, Malek Jafarian M (2008) An investigation and comparison of ROE upwind methods with CUSP central difference schemes. 12th ACFM. Daejeon, Korea.
- [11] Younis MY, Sohail MA, Rahman T, Muhammad Z, Bakaul SR (2011) Application of AUSM+ scheme on subsonic, supersonic and hypersonic flows fields. J Eng Tech 49: 242-248.
- [12] Singh R, Holmes G (2012) Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD-AUSM. AIAA paper 2012-3069.
- [۱۳] یوسفی راد ادیس، مه پیکر محمدرضا، تیمورتاش علیرضا (۱۳۹۳) بکارگیری روش کاسپ و بهینه سازی آن با استفاده از روش معکوس جهت بهبود روش حجم محدود جیمسون دو بعدی. مجله علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۸، صفحه ۱۷۴-۱۸۲.
- [14] Robbins DJ, Cant RS, Gladden LF (2013) Development of accurate liquid equations of state for multi-phase CFD simulations with a modified AUSM+up scheme. J Comput Fluids 77: 166-180.
- [15] Qu F, Yan C, Yu J, Sun D (2014) A new Flux Splitting Scheme for the Euler Equations. J Comput Fluids 102: 203-214.
- [16] Jamson A, Schmidt W (1985) Some recent developments in numerical methods for transonic flows. Comput Method Appl M 51: 467-493.
- [17] Shah A, Yuan L, Khan A (2010) Upwind compact finite difference scheme for time-accurate solution of the incompressible navier-stokes equation. Appl Math Comput 215(9): 3201-3213.
- [18] Liou MS, Edwards JR (1999) Numerical speed of sound and its application to schemes for all speed. AIAA Paper 993268.
- [19] Liou MS (2001) Ten years in the making-AUSM-family. AIAA Paper 2521.
- [20] Colonia S, Steil R, Barakos GN (2014) Implicit implementation of the AUSM+ and AUSM+up schemes. Int J Numer Meth Eng 75: 687-712.
- [21] Bakhtar F, Mahpeykar MR, Abbas K (1995) An investigation of nucleating flows of steam in a cascade of turbine blading-theoretical treatment. J Fluids Eng 117(1).

AUSM+ دارای سرعت همگرایی بیشتر و خطای عددی کمتر نسبت به روش‌های تفاضل مرکزی است و در محدوده ماخ‌های بالا تا حدود ۷ و ماخ‌های پایین تا حدود ۰/۰۱ همگرایی خوبی از خود نشان می‌دهد، این در حالی است که روش‌های اتلاف مصنوعی جیمسون در این حالات، همگرا نمی‌شوند و پاسخ قابل قبولی ارائه نمی‌دهند.

نتایج حاصل از مدل‌سازی دو بعدی جریان غیرلزج بین پره‌های ثابت توربین با استفاده از شبکه استاندارد و ساده نوع H با استفاده از روش بالادست AUSM+ و روش اتلاف مصنوعی اسکالر و مقایسه آن‌ها با نتایج آزمایشگاهی نیز نشان می‌دهد، نتایج حاصل از روش عددی بالادست AUSM+ ضمن ارائه نتایج منطبق با نتایج تجربی در تمام طول پره، در مقایسه با نتایج حاصل از روش اسکالر، دارای اتلافات فشار سکون کمتری است؛ لذا روش بالادست AUSM+، خطاهای عددی کمتری دارد؛ در نتیجه به واقعیت جریان نزدیک‌تر است. ضمن این که روش بالادست AUSM+، شرط بقای جرم را بهتر ارضا می‌نماید. لازم به ذکر است که روش بالادست AUSM+ برای ماخ‌های بالاتر نسبت به نتایج روش اتلاف مصنوعی اسکالر به مراتب بهتر است.

۶- مراجع

- [1] Jameson A (1995) Analysis and design of numerical scheme for gas dynamics, 2: artificial diffusion and discrete shock structure. Int J Comput Fluid Dyn 5(1-2): 1-38.
- [2] Liu F, Jennions I, Jameson A (1998) Computational of turbomachinery flow by a convective-upwind-split-pressure (CUSP) scheme. 36th ASME. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [3] Liou MS, Steffen CJ (1993) A new Flux Splitting Scheme. J Comput Phys 107: 23-39.
- [4] Liou MS (2010) The evolution of AUSM scheme. Defence SCI J 60(6): 606-613.
- [5] Liou MS (1996) A Sequel to AUSM: AUSM+. J Comput Phys 129: 364-382.
- [6] Hajzman M, Bublik O, Vimmr J (2007) On the modelling of compressible inviscid flow problems using AUSM schemes. ACM 1: 469-478.