



شناسایی ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه تیرها

مجید عابدی^۱، محمدرحیم همتیان^{۲*}، امید سروی غیاث آبادی^۱^۱ کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز^۲ استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۴/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۵/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۹/۲۲

چکیده

تکیه‌گاه‌ها و اتصالات، نقش اساسی و مهمی در سازه‌های مهندسی ایفا می‌کنند. شناسایی پارامترهای گوناگون تکیه‌گاه‌ها ضروری است. پارامترهای سفتی و میرایی، مهمترین پارامترهای یک تکیه‌گاه به شمار می‌روند. در این مقاله، یک روش معکوس بر پایه داده‌های اندازه‌گیری دینامیکی شتاب برای شناسایی و بررسی ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه‌های تیرهای طره‌ای و دو سر درگیر بکار برده شده است. برای این منظور، با استفاده از روش حداقل مربعات یک مسأله بهینه‌سازی تعریف شده است و سپس به حل آن پرداخته شده است. در تیر طره‌ای تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل، مقدار خطای اندازه‌گیری، تعداد داده‌های اندازه‌گیری، تعداد حسگرها، بازه زمانی اعمال نیرو، مقادیر پارامترهای سفتی و میرایی و زمان داده برداری بر پاسخ تحلیل معکوس، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای تیر دو سر درگیر، تأثیر مقدار خطاهای اندازه‌گیری، تعداد داده‌های اندازه‌گیری، نوع داده‌ها و تعداد حسگرها روی نتایج بررسی شده است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهند که مسأله تیر دو سر درگیر، بسیار مشکل‌تر از مسأله تیر یک سر درگیر است. استفاده از دو حسگر در مسأله تیر با دو سر درگیر بسیار مناسب است. با بررسی دقیق نتایج عددی بدست آمده سعی شده است، به کلیه سؤالات و مشکلاتی که ممکن است هنگام آزمایش‌های عملی به‌وجود آید پاسخ داده شود.

کلمات کلیدی: تحلیل معکوس؛ تکیه‌گاه تیر؛ ضریب سفتی؛ ضریب میرایی؛ داده‌های اندازه‌گیری دینامیکی.

Identification of Stiffness and Damping Coefficients of Beam Supports

M. Abedi¹, M. R. Hematiyan^{2,*}, and O. Sarvi Ghiasabadi¹¹ School of Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

Abstract

Supports and joints play a basic and important role in the engineering structures. It is necessary to identify the various parameters of supports. The stiffness and damping parameters are the most important parameters of a support. In this work, an inverse method based on the dynamic acceleration measurement data is used to identify and study the stiffness and damping coefficients of the supports of the cantilever and doubly clamped beams. To this end, an optimization problem is defined and subsequently solved using the least squares method. In the cantilever beam, the effects of various parameters such as the magnitude of measurement errors, number of measured data, number of sensors, time duration of the applied load, magnitude of the stiffness and damping parameters, and time interval of data collection are studied on the inverse solutions. For the doubly-clamped beam, the effects of magnitude of measurement errors, number of measured data, data type, and number of sensors on the results are studied. The results obtained show that the doubly-clamped beam problem is much more difficult than the cantilever beam one. It is appropriate to use two sensors for problems with the doubly-clamped beam. By a careful investigation of the numerical results obtained, an attempt is made to answer the questions and difficulties that may occur during the practical tests.

Keywords: Inverse Analysis; Beam Support; Stiffness Coefficient; Damping Coefficient; Dynamic Measurement Data.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۷۱۳۶۱۳۳۱۴۹؛ فکس: ۰۷۱۳۶۴۷۳۵۱۱

آدرس پست الکترونیک: mhemat@shirazu.ac.ir

۱- مقدمه

ارتعاشات اجسام مختلف، سال‌هاست که مورد تحقیق و بررسی پژوهشگران و محققان به‌ویژه دانشمندان علوم مکانیک، فیزیک و ریاضیات بوده است. شناسایی و تحلیل ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی و به دنبال آن محاسبه فرکانس‌ها و مودهای طبیعی، همواره خود را به صورت یک مسأله مهم در علم مکانیک در راستای طراحی، شناسایی عیوب و کنترل این سیستم‌ها مطرح کرده است. از طرفی تحلیل و بررسی ارتعاشات سیستم‌های پیوسته، نیازمند اطلاع دقیق از هندسه، خواص فیزیکی و مکانیکی، بارگذاری‌ها، شرایط اولیه و مرزی حاکم بر سیستم است؛ لذا مدل کردن هرچه دقیق‌تر و واقعی‌تر این پارامترها، کمک بسیار شایانی در راستای طراحی، کنترل و شناسایی عیوب یک سیستم تلقی می‌شود.

واضح است که تکیه‌گاه‌ها در یک سیستم مکانیکی، میزان اتلاف انرژی و انعطاف‌پذیری آن سیستم را به شدت تحت تأثیر خود قرار می‌دهند. تکیه‌گاه‌ها در واقعیت رفتاری متفاوت با حالت ایده‌آل خود دارند که این امر می‌تواند بر پاسخ سیستم مکانیکی تأثیرات متفاوتی داشته باشد. به همین دلیل، در طراحی و تحلیل سیستم‌های سازه‌ای توجه به رفتار دقیق تکیه‌گاه‌ها و اتصالات و نوع عملکرد آن‌ها امری اجتناب‌ناپذیر به شمار می‌رود.

بسیاری از سازه‌های مکانیکی از سازه‌های کوچکتر تشکیل شده‌اند که به وسیله اتصالاتی چون پیچ به یکدیگر متصل شده‌اند. در بسیاری از تحقیقات خواص سفتی و میرایی این اتصالات نادیده گرفته شده‌اند. این در حالی است که برای داشتن یک تحلیل دینامیکی دقیق، ابتدا باید خواص اتصالات شناسایی شوند. یوشیمورا [۲۰۱]، یک سری از پیشنهادات تجربی برای اندازه‌گیری پارامترهای دینامیکی و مقادیر سفتی و میرایی اتصالات ساخته شده از پیچ و جوش و همچنین اتصالات بکار رفته در ابزارها و ماشین‌های مکانیکی ارائه داده است. پارامترهای مودال اندازه‌گیری شده نیز در تعدادی از تحقیقات پیشین برای شناسایی پارامترهای سازه‌ای اتصالات مورد استفاده قرار گرفته است [۳-۵]. این روش‌ها، نیازمند پارامترهای مودال دقیق هستند. این در حالی است که اندازه‌گیری این پارامترها مخصوصاً در مواردی که میرایی بالایی وجود داشته باشد، بسیار مشکل است. برای

غلبه بر این مشکل بسیاری از محققان، توابع پاسخ فرکانسی را برای محاسبه پارامترهای اتصالات پیشنهاد داده‌اند [۷،۶]. ابراهیم و پتیت [۸]، به طور مفصل به مرور تاریخچه مربوط به استفاده و مدل کردن اتصالاتی همچون پیچ پرداخته‌اند. آنها در مقاله خود به مرور مدل‌هایی پرداخته‌اند که برای مدل کردن اتصالات شامل، پیچ‌ها و دیگر اتصالات مورد استفاده و تحلیل قرار گرفته است.

یک تحلیل و طراحی مناسب از سیستم‌های سازه‌ای به دو عامل صلب بودن اتصالات و ایده‌آل بودن آن‌ها وابسته است؛ اما واضح است که ساختن اتصالات ایده‌آل ممکن نیست و یا بسیار مشکل است؛ در نتیجه اتصالات موجود نمی‌توانند در عمل رفتار اتصالات ایده‌آل را ارائه دهند [۹،۱۰]؛ بنابراین شناسایی خواص اتصالات و تکیه‌گاه‌ها یک امر مهم و ضروری برای پیش‌بینی پارامترهای دینامیکی سیستم‌های مکانیکی از قبیل، ابزارها و ماشین‌های دینامیکی [۱۱،۱۲]، سازه‌های فضایی [۱۳،۱۴] و بسیاری از سیستم‌های سازه‌ای دیگر به شمار می‌رود.

محققان زیادی از فنر برای مدل کردن پارامترهای مختلف بهره جسته‌اند. در برخی از موارد از فنر برای شناسایی وجود ترک و میزان تأثیری استفاده شده است که ترک در کاهش سفتی یک تیر دارد [۱۵-۱۷]. برخی از محققان نیز از فنر برای مدل کردن تکیه‌گاه‌ها و اتصالات بهره جسته‌اند. سیلوا و همکاران [۱۸]، با استفاده از فنر و با بکارگیری آن در تکیه‌گاه روتور، به ارائه یک مدل صحیح از خواص آن پرداخته‌اند. آنها در مقاله خود با مقایسه کردن نتایج تجربی و مدل پیشنهادی خود، به این نتیجه رسیده‌اند که استفاده از سفتی الاستیک پیچشی برای مدل کردن رفتار دینامیکی تکیه‌گاه بسیار مناسب است. آن‌ها همچنین داده‌های خود را از فرکانس‌ها و مودهای طبیعی تشکیل داده‌اند. دروسا و همکاران [۱۹]، رفتار تکیه‌گاه‌های تیر در برابر چرخش و حرکت انتقالی را به صورت الاستیک مدل کرده‌اند؛ بنابراین این مدل می‌تواند تمامی شرایط تکیه‌گاهی رایج یک تیر را نیز پوشش دهد. گوئل [۲۰]، ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی خطی را بررسی کرده است که در هر دو تکیه‌گاه آن فنر پیچشی قرار دارد. وی نتایج را برای سه فرکانس اول با مقادیر نسبی سفتی مختلف (نسبت سفتی فنر به سفتی تیر) و نسبت‌های مخروطی مختلف ارائه داده است.

محاسبه می‌شوند. در وهله اول، یک تیر یک سر درگیر و بعد از آن یک تیر دو سر درگیر که پارامترهای تکیه‌گاهی آن‌ها یعنی سفتی و ضریب میرایی تکیه‌گاه مجهول است، در نظر گرفته می‌شود. واضح است که پارامترهای سفتی و میرایی تکیه‌گاه‌ها در پاسخ ارتعاشی تیرهای مذکور، نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند. در این مقاله، هر تکیه‌گاه با یک پین به همراه یک فنر پیچشی خطی و یک دمپر پیچشی خطی ویسکوز مدل شده است. پین مذکور، تنها اجازه چرخش حول محور عمود بر پین را دارد و بقیه جهات را ثابت می‌کند. تکیه‌گاه‌های مذکور از نظر نوع دلخواه هستند و می‌توانند از پیچ، جوش و ... ساخته شده باشند. با ارائه چند مثال عددی مختلف تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل، مقدار خطای اندازه‌گیری، تعداد داده‌های اندازه‌گیری، محل نصب شتاب‌سنج، تعداد شتاب‌سنج‌ها، بازه زمانی اعمال نیرو، مقادیر پارامترهای سفتی و میرایی و زمان داده‌برداری بر پاسخ تحلیل معکوس، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲- صورت مسأله

در این مقاله، یک تیر یک سر درگیر و یا دو سر درگیر با جنس و هندسه مشخص در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از یک چکش ضربه در یک نقطه مشخص از تیر نیرویی با تغییرات زمانی معلوم وارد می‌شود و همزمان در نقاط مشخصی از تیر به ثبت داده‌های شتاب در زمان‌های مختلف پرداخته می‌شود. در عمل مقادیر شتاب و نیرو برحسب زمان به کمک یک دیتالاگر در کامپیوتر ثبت می‌شوند، اما در این تحقیق، این مقادیر بصورت عددی شبیه‌سازی می‌شوند تا بتوان بصورت گسترده‌تر و کامل‌تر تأثیر پارامترهای مختلف را بررسی کرد. پارامترهای تکیه‌گاهی هر تکیه‌گاه که در این مقاله یک فنر و دمپر خطی فرض شده‌اند، مجهولات مسأله به شمار می‌روند. این مجهولات به کمک روش معکوس و با داشتن معلومات مذکور محاسبه خواهند شد.

در طی بررسی‌های متعدد، تأثیر محل نصب حسگر، تعداد حسگرها، بازه زمانی اعمال نیرو، مقادیر پارامترهای سفتی و میرایی، زمان داده‌برداری بر پاسخ تحلیل معکوس مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

یک تیر طره‌ای با مدول الاستیسیته E ، نسبت پواسون ν ، میرایی ساختاری c_{st} ، چگالی ρ ، طول L ، عرض b

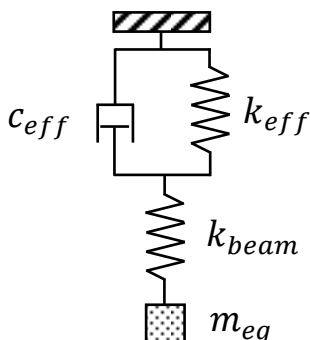
ساتو [۲۱]، تأثیر نیروی محوری را بر ارتعاشات عرضی و کماتش تیرهای مخروطی خطی را بررسی کرده است. که در هر دو تکیه‌گاه آن فنر پیچشی قرار دارد. جونز و همکاران [۲۲]، به تحلیل قاب‌ها با اتصالات نیمه‌صلب پرداخته‌اند. آنها همچنین به بررسی داده‌های تجربی در دسترس روی اتصالات نیمه‌صلب و روش‌هایی برای مدل کردن اینگونه اتصالات نیز پرداخته‌اند.

به دلیل پیچیدگی رابطه بین پاسخ سازه و پارامترهای تکیه‌گاهی، در بسیاری از تحقیقات صورت گرفته از روش معکوس بهره گرفته می‌شود. در یک مسأله مستقیم اغلب با داشتن بارگذاری‌ها، شرایط اولیه و مرزی، شکل هندسی، خواص ماده و غیره به عنوان ورودی به محاسبه جابجایی‌ها، تغییر فرم‌ها، کرنش‌ها، تنش‌ها، فرکانس‌های طبیعی، مودهای ارتعاشی و غیره به عنوان خروجی پرداخته می‌شود؛ اما در یک مسأله معکوس پارامترهایی از خروجی سیستم نظیر، سرعت، شتاب، فرکانس‌های طبیعی و غیره ممکن است معلوم باشند (به طور مثال از طریق آزمایشات تجربی)؛ اما از سوی دیگر، پارامترهایی از ورودی سیستم نظیر، بارگذاری، خواص ماده، هندسه سازه، شرایط مرزی و یا ترکیبی از این پارامترها، هدف مسأله محسوب می‌شوند. نخستین بار در سال ۱۹۲۳ در تحقیقاتی که توسط هادمارد صورت گرفت، به مفهوم بدنهادگی و نبود جواب یکتا در بسیاری از مسائل معکوس اشاره شد [۲۳]؛ اما از چند دهه پیش تعریف و تحلیل مسائل معکوس در رشته‌های مختلف مهندسی و غیرمهندسی آغاز گردیده است و هم اکنون نیز تحقیقات در این زمینه ادامه دارد. در سال‌های اخیر، استفاده از روش معکوس در حل مسائل مختلف در حوزه مهندسی مکانیک، بسیار فراگیر شده است. محققان و پژوهشگران زیادی با استفاده از روش معکوس به شناسایی معکوس بارهای ضربه‌ای [۲۴، ۲۵]، شناسایی معکوس ثابت‌های مواد [۲۶-۲۹]، ترک و عیوب [۳۰-۳۲] و دیگر مسائل رایج در مهندسی مکانیک پرداخته‌اند.

در مقاله پیش رو برای اولین بار یک روش معکوس بر مبنای داده‌های دینامیکی شتاب جهت شناسایی پارامترهای سفتی و میرایی تکیه‌گاه‌های تیرها ارائه گردیده است. با اندازه‌گیری زمانمند شتاب در یک یا چند نقطه از تیر که تحت یک نیروی ضربه‌ای قرار می‌گیرد، مجهولات مورد نظر

$$\begin{cases} \omega_{beam} = \sqrt{\frac{k_{beam}}{m_{eq}}} \\ T_{beam} = \frac{2\pi}{\omega_{beam}} \end{cases} \quad (2)$$

مجموعه تیر و تکیه‌گاه آن را مطابق شکل ۳ مدل می‌کنیم. برای این منظور، فنر و دمپر نظیر تکیه‌گاه (k, c) را با فنر معادل تیر (k_{beam}) سری فرض می‌کنیم.



شکل ۳- سیستم جرم-فنر معادل شده برای تیر طره‌ای معادل شده

در شکل ۳ پارامترهای k_{eff} و c_{eff} عبارتند از:

$$\begin{cases} k_{eff} = \frac{k}{L^2} \\ c_{eff} = \frac{c}{L^2} \end{cases} \quad (3)$$

با توجه به سیستم جرم-فنر-دمپر شکل ۳ داریم:

$$k_{eq} = \frac{k_{beam}k_{eff}}{k_{beam}+k_{eff}} \quad (4)$$

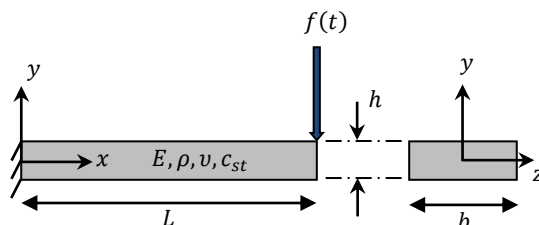
حال با توجه به پارامترهای فوق و سیستم جرم-فنر-دمپر شکل ۳، پارامترهای بی‌بعد برای بازه اعمال نیروی ضربه، ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} t^* = \frac{t_2}{T_{beam}} \\ k^* = \frac{k_{eff}}{k_{beam}} \\ c^* = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}} \end{cases} \quad (5)$$

۳- فرمول‌بندی تحلیل معکوس

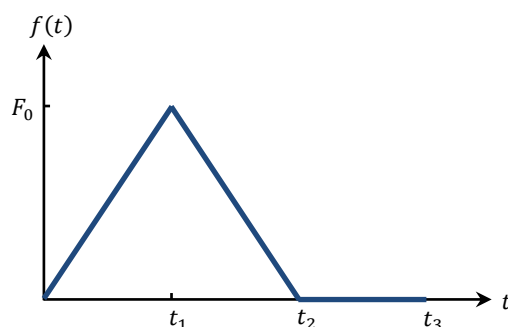
یک تیر یک سر درگیر و یا دو سر درگیر با جنس و هندسه مشخص که سر درگیر آن‌ها دارای تکیه‌گاه با ویژگی‌های مجهول است، در نظر گرفته می‌شود. در M نقطه از این تیر

و ضخامت h مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۱- شماتیک تیر طره‌ای تحت نیروی زمانمند

که در آن نیروی اعمالی به تیر $f(t)$ ، یک نیروی ضربه‌ای است که تغییرات زمانی آن شبیه به آنچه در شکل ۲ نمایش داده شده است. در بسیاری از موارد عملی نیروی ضربه‌ای تغییراتی مشابه فرم نشان داده شده در شکل ۲ دارد. در این تحقیق، نیروی ضربه مطابق با شکل ۲ با چهار پارامتر t_1, F_0, t_2 و t_3 بیان می‌شود. پارامتر t_3 زمان کل اعمال نیرو و داده‌برداری را نشان می‌دهد.



شکل ۲- نمودار نیرو بر حسب زمان

جرم و سفتی معادل تیر را می‌توان با معادل قرار دادن تیر با یک سیستم جرم و فنر بدست آورد. جرم و فنر معادل تیر طره‌ای از رابطه (۱) قابل محاسبه است [۳۳]:

$$\begin{cases} k_{beam} = \frac{3EI}{L^3} \\ m_{eq} = \frac{33}{140}m_{beam} = \frac{3}{140}\rho Lbh \end{cases} \quad (1)$$

با داشتن جرم و ضریب فنر یک سیستم جرم-فنر، به راحتی می‌توان فرکانس طبیعی و دوره تناوب آن سیستم را محاسبه کرد [۳۳]:

سفتی و یک ضریب میرایی مجزا خواهد بود؛ بنابراین مجهولات مسأله در این مثال شامل، دو ضریب سفتی و دو ضریب میرایی خواهد بود:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

بردارهای $\mathbf{Y}^{(i)}$ و $\mathbf{U}^{(i)}$ به ترتیب شامل مقادیر شتاب اندازه‌گیری شده (مقادیر آزمایشگاهی) و محاسباتی (مقادیر محاسبه شده به وسیله روش مستقیم) در نقطه i ام هستند که به صورت رابطه (۹) قابل بیان هستند:

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(i)} \\ Y_2^{(i)} \\ \vdots \\ Y_N^{(i)} \end{bmatrix}, \mathbf{U}^{(i)} = \begin{bmatrix} U_1^{(i)} \\ U_2^{(i)} \\ \vdots \\ U_N^{(i)} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$i = 1, 2, \dots, M$

به عبارت دیگر $Y_j^{(i)}$ و $U_j^{(i)}$ به ترتیب، داده اندازه‌گیری شده و محاسباتی در نقطه i ام و در گام زمانی j ام هستند. برای یافتن بردار مجهول \mathbf{X} ، تابع هدف Π را به شکل رابطه (۱۰) تعریف می‌کنیم:

$$\Pi = (\mathbf{Y} - \mathbf{U})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{U}) \quad (۱۰)$$

که در آن:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{Y}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(M)} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

بردار مجهول \mathbf{X} ، با کمینه کردن تابع Π بدست می‌آید. برای کمینه کردن تابع Π از این تابع نسبت به بردار \mathbf{X} مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} = -2\mathbf{S}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{U}) = 0 \quad (۱۲)$$

ماتریس \mathbf{S} در معادله (۱۲)، ماتریس حساسیت نسبت به تمام حالات اندازه‌گیری داده‌هاست که به صورت رابطه (۱۳) قابل بیان است:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(1)} \\ \mathbf{S}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{S}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

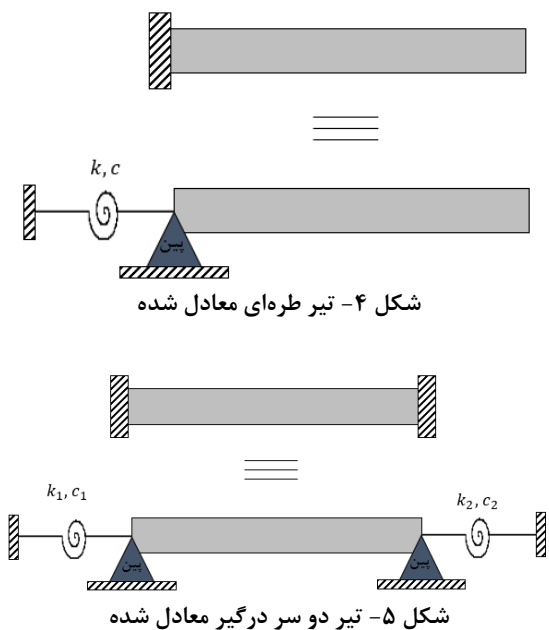
که در آن $\mathbf{S}^{(i)}$ ، ماتریس حساسیت نسبت به کمیت اندازه‌گیری i ام است و به صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود:

$$\mathbf{S}^{(i)} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(i)} & \dots & S_{1P}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1}^{(i)} & \dots & S_{NP}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

شتاب‌سنج نصب شده است که به وسیله آن‌ها داده‌های شتاب در هر نقطه در N لحظه ثبت می‌شوند؛ بنابراین تعداد معلومات برابر $M \times N$ خواهد بود. بردار \mathbf{X} شامل، P مجهول است که قرار است در طی فرآیند معکوس شناسایی شوند:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_P \end{bmatrix} \quad (۶)$$

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، در این مقاله دو حالت مختلف تیر یک سردرگیر و تیر دو سردرگیر، مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای اینکه بردار پارامترهای مجهول این مثال‌ها را تشکیل دهیم، ابتدا تیر یک سردرگیر و تیر دوسردرگیر را به صورتی که در شکل ۴ و ۵ آمده است، معادل می‌کنیم:



مطابق شکل ۴، تیر یک سر درگیر شامل تنها یک تکیه‌گاه است؛ بنابراین مجهولات مسأله در این مثال تنها شامل، یک ضریب سفتی و یک ضریب میرایی خواهد بود:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} \quad (۷)$$

اما مطابق شکل ۵، یک تیر دو سر درگیر شامل دو تکیه‌گاه است و از آنجایی که این دو تکیه‌گاه نمی‌توانند دقیقاً با یکدیگر یکسان باشند، بنابراین خواص آنها نیز با یکدیگر متفاوت خواهد بود؛ در نتیجه هر تکیه‌گاه دارای یک ضریب

انتگرالی صورت می‌پذیرد [۳۶، ۳۵]. اگرچه هزینه محاسباتی روش دوم از روش اول کمتر است؛ اما روش دوم، بسیار پیچیده‌تر از روش اول است. در این مقاله، برای تحلیل حساسیت از روش تفاضل محدود استفاده شده است. این روش در تحلیل معکوس و آنالیز حساسیت متداول است [۳۷-۴۱]. در این تحقیق، روش مبتنی بر روش تفاضل محدود مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب ماتریس حساسیت بیان شده در معادله (۱۵) را می‌توان به صورت تقریبی به وسیله این روش به شکل رابطه (۲۱) نمایش داد:

$$S_{ij}^{(l)} = \frac{\partial U_i^{(l)}}{\partial X_j} = \frac{U_i^{(l)}|_{X_j+\epsilon X_j} - U_i^{(l)}|_{X_j}}{\epsilon X_j} \quad (21)$$

که در آن ϵ (پارامتر مشتق‌گیری) یک مقدار کوچکی است.

۴- مثال‌های عددی

در این مقاله، به بررسی دو مثال پرداخته می‌شود. در مثال اول، به بررسی تیر یک سر درگیر (تیر طره‌ای) و در مثال دوم، به بررسی تیر دو سر درگیر پرداخته می‌شود. در تیر طره‌ای، به بررسی تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل، تعداد داده‌های اندازه‌گیری، نوع داده‌ها، محل نصب شتاب‌سنج، زمان اعمال نیرو، مقدار خطای اندازه‌گیری، نسبت حدس اولیه به مقدار دقیق، اختلاف زمانی و غیره بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود و در تیر دو سر درگیر و به طور خلاصه‌تر نسبت به تیر طره‌ای، تنها به بررسی تأثیر مقدار خطای اندازه‌گیری، تعداد داده‌های اندازه‌گیری، تعداد شتاب‌سنج‌ها بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود.

در مثال‌هایی که بررسی خواهند شد، مشخصات هندسی و مکانیکی تیر، ضریب مشتق‌گیری (بیان شده در معادله (۲۱)) و معیار همگرایی (بیان شده در معادله (۲۰)) به صورت رابطه (۲۲) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} E = 73 \text{ GPa}, \quad \rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \\ v = 0.3, \quad c_{es} = 0, \quad e_i = \epsilon = 10^{-3}, \\ L = 30 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad h = 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (22)$$

۴-۱- شبیه‌سازی داده‌های اندازه‌گیری

در این تحقیق، همانند بسیاری از تحقیقات قبلی انجام شده در زمینه تحلیل معکوس، داده‌های اندازه‌گیری به صورت عددی شبیه‌سازی شده‌اند (برای نمونه مراجع [۳۵-۳۶] و [۴۲-۴۴] را ببینید). منظور از شبیه‌سازی داده‌های

اعضای ماتریس حساسیت $S^{(i)}$ را می‌توان به صورت رابطه (۱۵) بیان کرد:

$$S_{ij}^{(l)} = \frac{\partial U_i^{(l)}}{\partial X_j} \quad (15)$$

برای محاسبه ماتریس حساسیت در معادله (۱۴)، بایستی از داده‌های محاسباتی نسبت به مجهولات مشتق گرفت. بردار مجهول \mathbf{X} را می‌توان با یک فرآیند تکراری با استفاده از معادله (۱۲) بدست آورد. با فرض اینکه $\bar{\mathbf{X}}$ یک حدس برای مقادیر مجهول و $\bar{\mathbf{U}}^{(i)}$ داده‌های محاسبه شده به روش مستقیم و با استفاده از حدس انجام شده در نقطه $\bar{\mathbf{X}}$ باشد، بردار تقریبی شتاب را می‌توان به صورت رابطه (۱۶) بیان کرد:

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{s}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \quad (16)$$

که در آن:

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{U}^{(1)} \\ \bar{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{U}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۱۲) و سپس با انجام محاسبات ساده خواهیم داشت:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{S}^T \mathbf{s}]^{-1} [\mathbf{S}^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{S}^T \mathbf{s} \bar{\mathbf{X}}] \quad (18)$$

معادله فوق برای انجام فرآیند تکراری مورد استفاده قرار می‌گیرد که می‌توان آن را به صورت رابطه (۱۹) بیان کرد:

$$\mathbf{x}^{q+1} = [(\mathbf{S}^q)^T \mathbf{S}^q]^{-1} [(\mathbf{S}^q)^T (\mathbf{y} - \mathbf{U}^q) + (\mathbf{S}^q)^T \mathbf{S}^q \mathbf{x}^q] \quad (19)$$

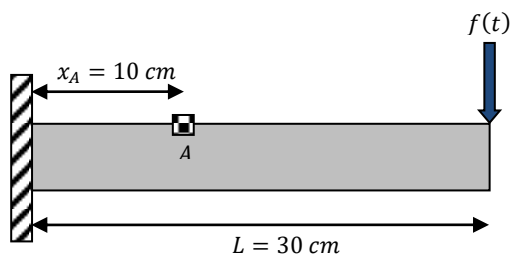
که در آن q نمایانگر شماره تکرار است. همچنین معیار همگرایی به صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود:

$$\left\| \frac{x_i^{q+1} - x_i^q}{x_i^q} \right\| \leq e_i \quad (20)$$

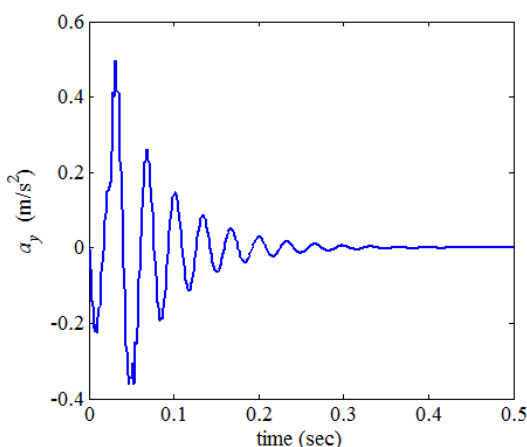
که در آن e_i یک مقدار مجاز برای خطای نسبی است. اگر تعداد داده‌های اندازه‌گیری شده کافی باشد (بیشتر از تعداد مجهولات)، یک پاسخ مطمئن و دقیق می‌تواند حاصل شود، حتی اگر داده‌ها دارای خطا باشند.

۳-۱- محاسبه ماتریس حساسیت

همان‌گونه که اشاره شد، برای محاسبه ماتریس حساسیت در معادله (۱۴)، بایستی از داده‌های محاسباتی نسبت به مجهولات مشتق گرفت. معمولاً دو روش اصلی برای انجام این کار بکار گرفته می‌شود. یکی استفاده از روش تفاضل محدود [۳۴] است و دیگری با استفاده از معادلات ماتریسی و



شکل ۶- شماتیکی از نقطه داده‌برداری (نقطه A) و محل اعمال نیرو در تیر طره‌ای



شکل ۷- نمودار شتاب-زمان نقطه A از تیر معادل شده تحت اثر ضربه در انتهای تیر در تیر طره‌ای

۴-۲-۱- بررسی تأثیر خطای اندازه‌گیری بر پاسخ

معکوس در تیر طره‌ای

همان‌طور که می‌دانیم، اندازه‌گیری دینامیکی پارامترهایی چون شتاب همواره با خطاهایی همراه است و بسیار مشکل است که بتوان چنین پارامترهایی را بدون خطا اندازه‌گیری کرد. این خطاها می‌تواند ناشی از خطای دستگاه اندازه‌گیری (به عنوان مثال، خطای سنسورهای اندازه‌گیری)، خطاهای انسانی، خطای تقریب‌های در نظر گرفته شده و غیره باشد؛ بنابراین در مسائلی که به علت عدم وجود داده آزمایشگاهی به داده شبیه‌سازی شده روی آورده می‌شود، مدنظر گرفتن این خطاها در داده شبیه‌سازی شده بسیار ضروری است. بدین ترتیب است که می‌توان نتایج حاصله از بررسی‌های انجام شده را به واقعیت نزدیک دانست. میزان خطا در داده‌های آزمایشگاهی، به عوامل مختلفی بستگی دارد و تحت شرایط مختلف می‌تواند بسیار متغیر باشد؛ بنابراین بایستی

اندازه‌گیری، فراهم کردن داده آزمایشگاهی به صورت عددی است. به عبارت دیگر، با اعمال مقداری خطا در داده‌های بدست آمده از روش مستقیم، آن داده‌ها را به عنوان داده آزمایشگاهی می‌پذیریم. در این مقاله، برای شبیه‌سازی داده‌های اندازه‌گیری، ابتدا داده‌های دقیق شتاب را توسط نرم افزار انسیس و با استفاده از مقادیر مشخص برای مجهولات، بدست آورده (Y_i^{exact}) و سپس با ایجاد خطا به روش توزیع خطای گوس در این داده‌ها، آن را به عنوان داده‌های اندازه‌گیری شده می‌پذیریم:

$$Y_i = Y_i^{exact} + \alpha_i Y_i^{exact}; \quad i = 1, 2, \dots, N_t \quad (23)$$

که در آن $N_t = M \times N$ تعداد کل داده‌های اندازه‌گیری و α_i خطای نسبی است. α_i یک عدد تصادفی از توزیع گوسی با میانگین صفر است. با شبیه‌سازی عددی داده‌های اندازه‌گیری می‌توان خطای دلخواه برای داده‌های اندازه‌گیری در نظر گرفت و تأثیرات آن را بررسی کرد.

۴-۲- بررسی تیر یک سر درگیر (تیر طره‌ای)

در این قسمت، به طور مفصل به بررسی تیر یک سر درگیر پرداخته خواهد شد (شکل ۴). در ابتدا و برای بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ معکوس، مقادیر دقیق پارامترهای مجهول تکیه‌گاهی به صورتی در نظر گرفته می‌شوند که نمودار شتاب در راستای y (a_y) برحسب زمان برای آن به حالت واقعی نزدیکتر باشند. این مقادیر عبارتند از:

$$\mathbf{X}^{exact} = \begin{bmatrix} k^{exact} \\ c^{exact} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^3 \frac{N.m}{rad} \\ 1 \frac{N.m.sec}{rad} \end{bmatrix} \quad (24)$$

با توجه به مقادیر فوق، پارامترهای بی‌بعد k^* و c^*

عبارتند از:

$$\begin{cases} k^* = 0.1644 \\ c^* = 0.1302 \end{cases} \quad (25)$$

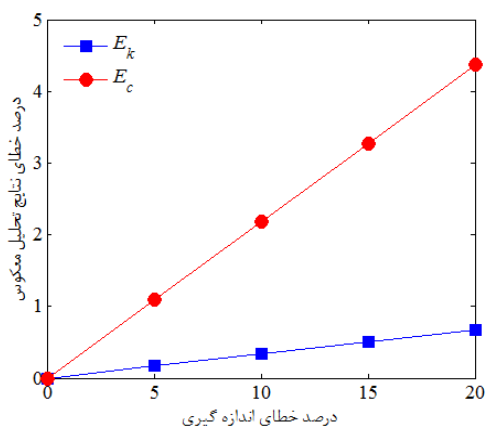
نمودار شتاب برحسب زمان در نقطه A از این تیر به مختصات $(x, y, z) = (10, 0.5, 0) \text{ cm}$ که نیروی ضربه در انتهای تیر وارد می‌شود (شکل ۶)، در شکل ۷ به تصویر کشیده شده است.

در نمودار شکل ۷، مشخصات نیروی ضربه به شرح رابطه

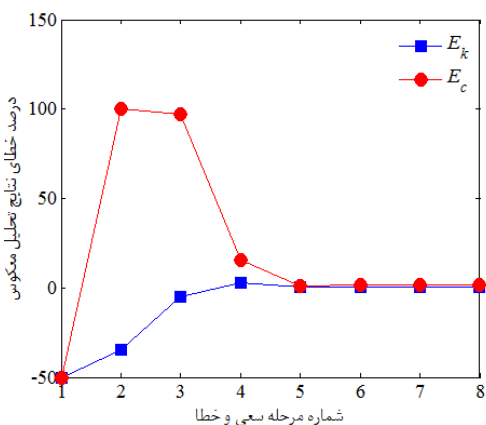
(۲۶) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} t^* = 5 \\ t_1 = \frac{t_2}{2} \\ F_0 = -1 \text{ N} \end{cases} \quad (26)$$

در شکل ۹، روند همگرایی پاسخ در حالتی آمده است که داده‌ها در نقطه A خوانده شده، محل اعمال نیرو در انتهای سر آزاد تیر و تعداد داده‌های اندازه‌گیری $N = 50$ است و همچنین داده‌ها تا زمان $t_3 = t_2$ ثبت گردیده‌اند و خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل ۹ به وضوح می‌توان دریافت که ضریب سفتی، روند همگرایی بهتر و سریع‌تری نسبت به ضریب میرایی دارد.



شکل ۸- خطای جواب تحلیل معکوس به ازای خطاهای مختلف اندازه‌گیری



شکل ۹- روند همگرایی پاسخ تحلیل معکوس

۴-۲-۳- بررسی تأثیر تعداد داده‌های اندازه‌گیری بر

پاسخ معکوس در تیر طره‌ای

همان‌گونه که می‌دانیم، در یک مسئله معکوس نسبت تعداد معلومات به تعداد مجهولات بسیار حائز اهمیت است؛ به طوری که همگرایی پاسخ تحلیل معکوس به شدت به این

مسئله مورد نظر را با در نظر گرفتن مقدار خطاهای مختلف تحلیل کرد. از این رو در این مقاله، عوامل خطاساز به صورت جداگانه مورد بررسی قرار نگرفته است؛ اما از سوی دیگر، مقادیر خطای اندازه‌گیری بیشتر از خطاهای رایج در آزمایشات استاندارد در نظر گرفته شده است.

در این قسمت با داده‌برداری از داده‌های شتاب در نقطه A از تیر طره‌ای که نیروی ضربه بر انتهای سر آزاد تیر وارد می‌شود (شکل ۶) و همچنین با در نظر گرفتن تعداد داده‌های اندازه‌گیری $N = 50$ ، برای خطاهای مختلف اندازه‌گیری $\% \{0, 5, 10, 15, 20\}$ به حل مسئله به روش معکوس خواهیم پرداخت. با توجه به اینکه داده‌ها تنها از یک نقطه ثبت می‌گردند، بنابراین در این حالت $M = 1$ خواهد بود. نمودار شکل ۸، خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای خطاهای مختلف اندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

در نمودار شکل ۸ پارامترهای E_k و E_c عبارتند از درصد خطای ایجاد شده در پاسخ تحلیل معکوس، که به صورت رابطه (۲۷) قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} E_k = \left| \frac{k^{exact-k}}{k^{exact}} \right| \times 100 \\ E_c = \left| \frac{c^{exact-c}}{c^{exact}} \right| \times 100 \end{cases} \quad (27)$$

لازم به ذکر است که در تحلیل‌های انجام شده مشخصات

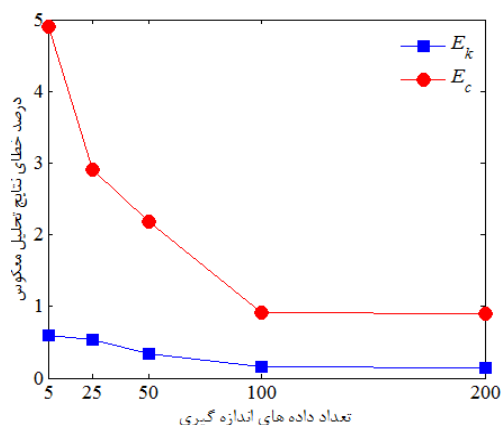
نیروی ضربه مورد استفاده در تحلیل فوق، در معادله (۲۶) آمده است. همچنین در تحلیل‌های انجام شده، زمان داده‌برداری داده‌های شتاب t_3 برابر با t_2 در نظر گرفته شده است.

همان‌گونه که انتظار می‌رفت با افزایش خطای اندازه‌گیری، خطای پاسخ نیز افزایش می‌یابد. از نمودار شکل ۸ می‌توان دریافت که این افزایش خطا به صورت خطی صورت می‌پذیرد و همچنین مشاهده می‌شود که خطای اندازه‌گیری بر پاسخ میرایی تأثیر بیشتری دارد؛ اما نکته قابل توجه این است که خطای ایجاد شده در پاسخ معکوس به مراتب از خطای اندازه‌گیری کمتر است، از همین رو نتایج بدست آمده قابل قبول خواهند بود.

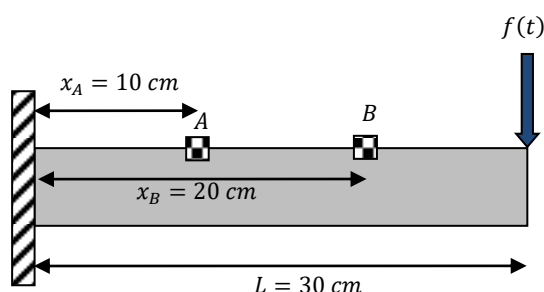
۴-۲-۴- بررسی روند همگرایی پاسخ معکوس در تیر

طره‌ای

در شکل ۹، روند همگرایی پاسخ بدست آمده از حل معکوس مسئله نشان داده شده است.



شکل ۱۰- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای تعداد داده‌های اندازه‌گیری



شکل ۱۱- شماتیکی از نقاط داده‌برداری (نقاط A و B) در تیر طره‌ای

در این قسمت تعداد داده‌های اندازه‌گیری شده در هر شتابسنج برابر $N = 50$ است. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند.

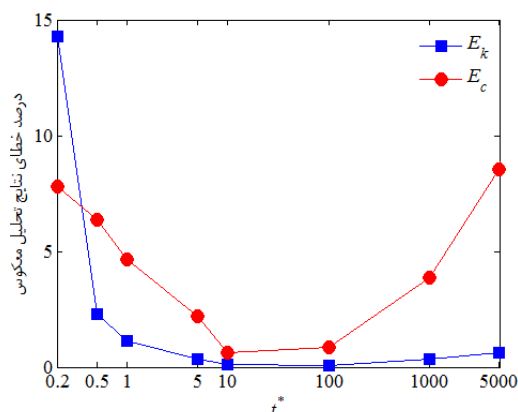
نمودار شکل ۱۲ به وضوح نشان می‌دهد که با افزایش تعداد شتابسنج‌ها، شاهد پاسخ‌های دقیق‌تری نسبت به حالتی که شتابسنج در نزدیک تکیه‌گاه نصب شده است، خواهیم بود. به عبارت دیگر، افزایش تعداد شتابسنج‌ها در نقاط دور از تکیه‌گاه، اطلاعات جدیدی را به مسئله اضافه نمی‌کند. توجه شود که در شکل ۱۲، عبارت‌های Ac in A، Ac in B و Ac in A & B به ترتیب به معنای نصب شتابسنج در نقطه A، نصب شتابسنج در نقطه B و نصب شتابسنج در نقاط A و B به طور همزمان است.

نسبت وابسته است؛ بنابراین بررسی این موضوع در یک مسأله معکوس ضروری است. به همین منظور در این قسمت، به بررسی تأثیر تعداد داده‌های اندازه‌گیری بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. برای انجام تعداد داده‌های اندازه‌گیری به ترتیب ۵، ۲۵، ۵۰ و ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. در این قسمت، محل قرارگیری شتابسنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه و محل اعمال نیرو در انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶). همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند.

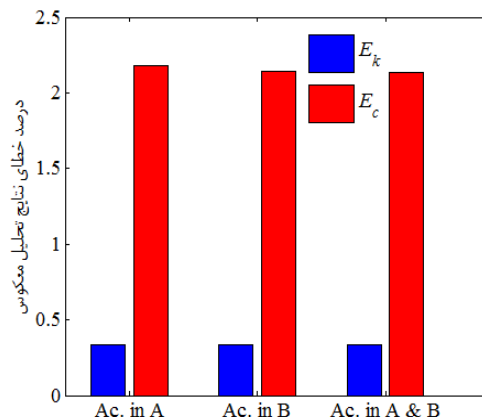
نمودار شکل ۱۰ به وضوح نشان می‌دهد که با افزایش تعداد داده‌های اندازه‌گیری، شاهد پاسخ‌های دقیق‌تری خواهیم بود. همچنین واضح است که با افزایش تعداد داده‌های اندازه‌گیری از یک مقدار مشخص، شاهد تأثیر زیادی بر پاسخ معکوس نخواهیم بود، زیرا افزایش بیش از حد تعداد داده‌ها منجر به افزایش اطلاعات مسأله نخواهد شد. شکل ۱۰ نشان می‌دهد که در این مثال با کاهش تعداد داده‌های اندازه‌گیری شتاب تا مقدار $N = 5$ نیز پاسخ معکوس قابل قبول است.

۴-۲-۴- بررسی تأثیر تعداد شتابسنج بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای

همان‌گونه که می‌دانیم، از راه‌های کاهش بدنهادگی یک مسأله معکوس، افزایش اطلاعات (معلومات) مسأله است. یکی از راه‌های افزایش معلومات، داده‌برداری از نقاط مختلف سازه مورد نظر است. در این قسمت، بررسی تأثیر تعداد شتابسنج‌ها بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. در همین راستا، نیروی ضربه بر انتهای تیر طره‌ای وارد می‌کنیم، سپس و در ابتدا یک شتابسنج را در نقطه A قرار داده، به ثبت داده‌ها پرداخته می‌شود، سپس همان شتابسنج را در نقطه B به فاصله ۲۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (شکل ۱۱) قرار داده به ثبت داده‌ها پرداخته می‌شود و در انتها با در نظر گرفتن داده‌های هر دو شتابسنج به حل مسأله پرداخته می‌شود.



شکل ۱۳- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف زمان اعمال نیرو



شکل ۱۲- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای تعداد شتاب‌سنج‌ها در تیر طره‌ای

۴-۲-۶- بررسی تأثیر اختلاف زمانی بر پاسخ تیره‌ای

در هنگام داده‌برداری از نتایج آزمایشات دینامیکی و ارتعاشی معمولاً داده‌های مختلف اندازه‌گیری مربوط به یک زمان یکسان، با یک اختلاف زمانی نسبت به یکدیگر خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر، داده‌های مختلفی که در طول یک آزمایش به ثبت می‌رسند، غالباً با یک اختلاف زمانی نسبت به یکدیگر ثبت می‌شوند. به عنوان مثال، به هنگام داده‌برداری از داده‌های شتاب و داده‌های نیرو، مشاهده می‌شود که داده‌های شتاب و نیرو به لحاظ زمانی با یکدیگر همخوانی ندارند. این اختلاف زمانی می‌تواند تأثیر زیادی بر پاسخ معکوس تیر طره‌ای داشته باشد. در این قسمت، به بررسی این پارامتر پرداخته می‌شود. در این قسمت، مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند. همچنین در این قسمت، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶).

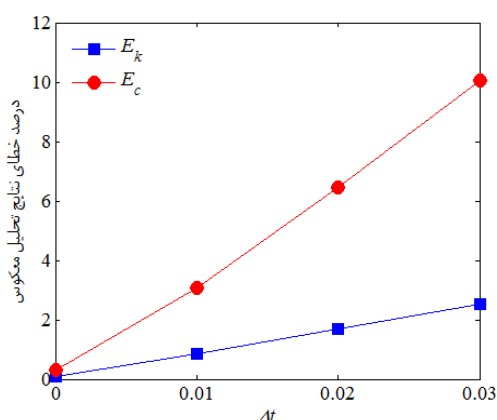
خطای پاسخ بدست آمده در این حالت در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. در نمودار شکل ۱۴، پارامتر Δt عبارت است:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_s}{T_{beam}} \quad (28)$$

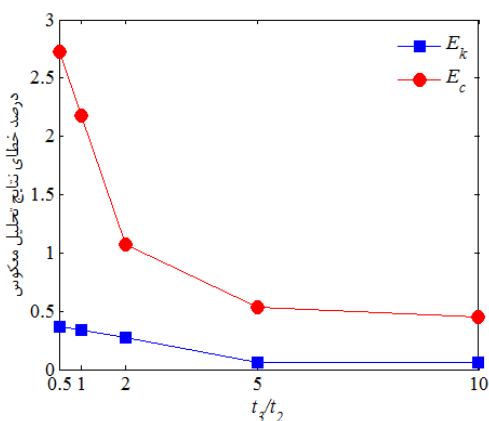
۴-۲-۵- بررسی تأثیر زمان اعمال نیرو بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای

همان‌گونه که می‌دانیم، زمان اعمال نیروی ضربه تأثیر بسزایی در خروجی مسئله دارد. لذا بررسی این موضوع، دارای اهمیت خواهد بود. از طرفی در واقعیت، برای اعمال نیروی ضربه، استفاده از چکش ضربه بسیار رایج است و از آنجایی که زمان اعمال نیرو توسط چکش ضربه به شدت به نوع جنس نوک چکش وابسته است، انتخاب جنس نوک چکش با بررسی این موضوع (بررسی زمان اعمال نیرو بر پاسخ مسئله معکوس) می‌تواند به شکل مطلوب‌تری انجام گیرد. در این قسمت، به بررسی تأثیر زمان اعمال نیرو t_2 بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. برای انجام این کار، مقدار t^* را برابر مقادیر مختلف قرار داده، پاسخ تحلیل معکوس را ثبت می‌کنیم. در این قسمت داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مقدار $t_1 = 0.5t_2$ در نظر گرفته می‌شوند. در این قسمت نیز، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶). نمودار شکل ۱۳ به وضوح نشان می‌دهد که برای بازه $0.5 \leq t^* \leq 5000$ پاسخ تحلیل معکوس قابل قبول است.

نظر گرفتن اختلاف زمانی پرداختیم. بررسی اینکه زمان داده‌برداری با داشتن اختلاف زمانی، چقدر می‌تواند بر روند تحلیل معکوس مؤثر باشد، هدف این قسمت خواهد بود؛ بنابراین در این قسمت، به بررسی تأثیر زمان داده‌برداری (t_3) بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. همچنین در این قسمت اختلاف زمانی برابر $\Delta t = 0.01$ در نظر گرفته می‌شود. برای انجام این کار برای مقادیر مختلف t_3 پاسخ تحلیل معکوس را ثبت می‌کنیم. در این قسمت، مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند. همچنین در این قسمت محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶).



شکل ۱۴- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف Δt



شکل ۱۵- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف t_3/t_2 بدون در نظر گرفتن اختلاف زمانی

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش اختلاف زمانی بین داده‌های شتاب و نیرو، خطای پاسخ‌ها نیز افزایش می‌یابد. نمودار شکل ۱۴ نشان می‌دهد که این افزایش خطای پاسخ‌ها تقریباً خطی هستند. همچنین ملاحظه می‌شود که برای $\Delta t \leq 0.03$ ، خطای پاسخ تحلیل معکوس در مقایسه با خطای اندازه‌گیری کمتر و مناسب است.

۴-۲-۷- بررسی تأثیر زمان داده‌برداری بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای بدون در نظر گرفتن اختلاف زمانی

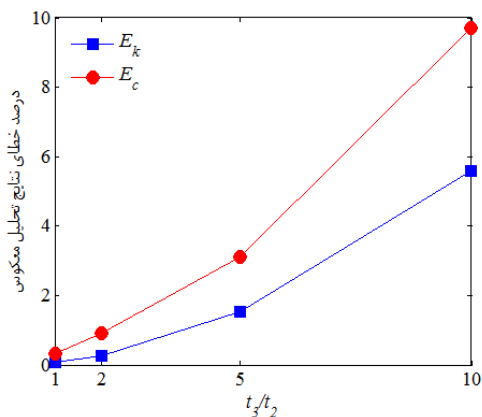
همان‌طور که می‌دانیم در این مقاله، ورودی مسأله معکوس پاسخ ارتعاشی سیستم در نظر گرفته شده است و در نتیجه واضح است که انتخاب زمان داده‌برداری کاملاً در اختیار ما قرار دارد. بررسی اینکه زمان داده‌برداری چقدر می‌تواند بر روند تحلیل معکوس مؤثر باشد، هدف این قسمت خواهد بود؛ بنابراین در این قسمت، به بررسی تأثیر زمان داده‌برداری (t_3) بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. همچنین در این قسمت اختلاف زمانی برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. برای انجام این کار برای مقادیر مختلف t_3 پاسخ تحلیل معکوس را ثبت می‌کنیم. در این قسمت، مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند. همچنین در این قسمت، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶).

نمودار شکل ۱۵ به وضوح نشان می‌دهد که هرچه نسبت t_3/t_2 بیشتر باشد، پاسخ معکوس دارای نتیجه بهتری خواهد بود. البته برای نسبت‌های $t_3/t_2 \geq 5$ پاسخ معکوس تغییرات قابل توجهی ندارد. همچنین نمودار شکل ۱۵ نشان می‌دهد، اگر $t_3/t_2 = 0.5$ باشد، پاسخ معکوس قابل قبول است. با این حال برای اطمینان بیشتر، بهتر است که این نسبت را بیشتر از ۱ اختیار کرد.

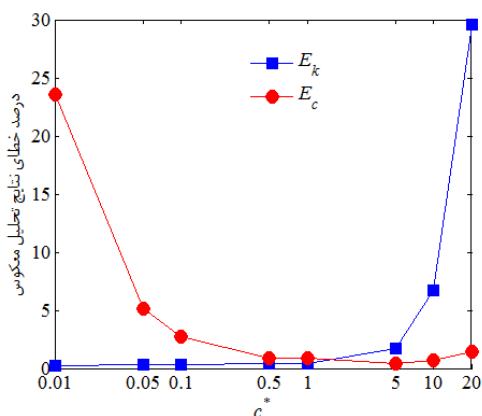
۴-۲-۸- بررسی تأثیر زمان داده‌برداری بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای با در نظر گرفتن اختلاف زمانی

همان‌طور که مشاهده شد، در قسمت قبل به بررسی تأثیر زمان داده‌برداری بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای بدون در

خواهد شد؛ به طوری که برای $c^* > 10$ ، شناسایی ضریب سفتی ممکن نیست.



شکل ۱۶- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف t_3/t_2 با در نظر گرفتن اختلاف زمانی



شکل ۱۷- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف c^*

۴-۲-۱۰- بررسی تأثیر مقدار ضریب سفتی بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای

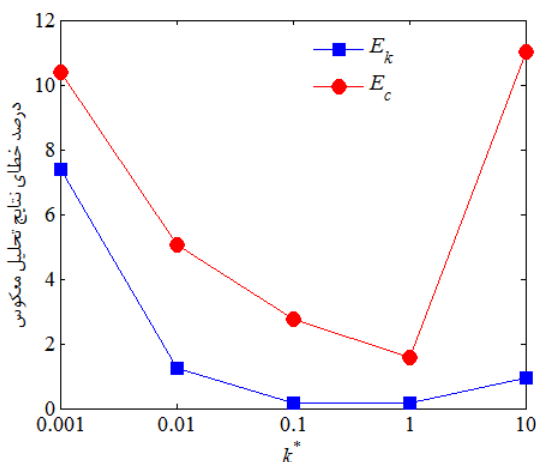
در این قسمت نیز، به بررسی تأثیر مقدار ضریب سفتی تکیه‌گاه بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. برای انجام این کار با ثابت گرفتن ضریب بی‌بعد شده ($c^* = 0.1302$) برای مقادیر مختلف ضریب میرایی (یا همان ضریب بی‌بعد شده k^*)، پاسخ تحلیل معکوس را ثبت می‌کنیم. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در

نمودار شکل ۱۶ نشان می‌دهد که هرچه نسبت t_3/t_2 بیشتر باشد، پاسخ معکوس دارای نتیجه بدتری خواهد بود. با توجه به نتایج این قسمت می‌توان به این نتیجه رسید که بهتر است، نسبت t_3/t_2 برابر ۱ اختیار شود تا بدین ترتیب از خطای ایجاد شده ناشی از اختلاف زمانی پرهیز شود. به همین دلیل در دیگر بررسی‌های صورت گرفته، نسبت $t_3/t_2 = 1$ اختیار شده است.

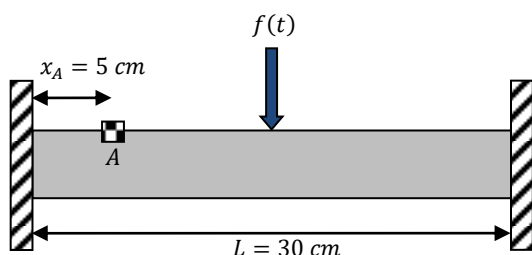
۴-۲-۹- بررسی تأثیر مقدار ضریب میرایی بر پاسخ معکوس در تیر طره‌ای

از آنجایی که هدف این مقاله شناسایی ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه تیر است و همچنین از آنجایی که در واقعیت میزان سفتی و میرایی تکیه‌گاه می‌تواند متغیر باشد، بنابراین ممکن است، در واقعیت با تکیه‌گاه‌هایی مواجه شویم که مقادیر سفتی و میرایی آنها بسیار با یکدیگر متفاوت باشد؛ در نتیجه بررسی پاسخ تحلیل معکوس برای مقادیر مختلف سفتی و میرایی بسیار ضروری است. در این قسمت و در قسمت بعد به ترتیب، به بررسی تأثیر مقدار ضریب میرایی و ضریب سفتی بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. برای انجام این کار و در این قسمت با ثابت گرفتن ضریب سفتی (یا $k^* = 0.1644$) برای مقادیر مختلف ضریب میرایی (یا همان ضریب بی‌بعد شده c^*)، پاسخ تحلیل معکوس را ثبت می‌کنیم. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند. در این قسمت، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶). خطای نتایج بدست آمده در این حالت، در شکل ۱۷ نمایش داده شده است.

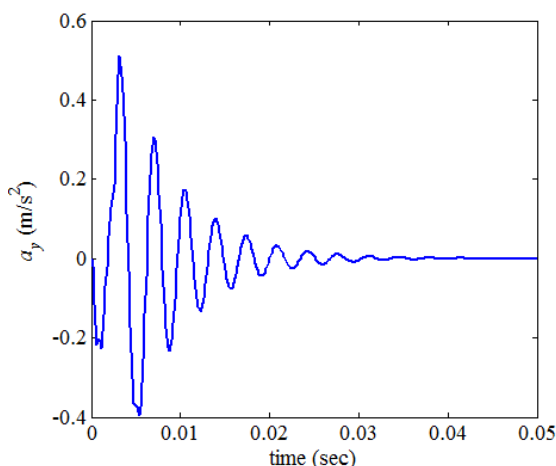
با توجه به نمودار شکل ۱۷ واضح است که برای تیرهایی که دارای میرایی اندک هستند، ضریب میرایی بدست آمده غیرقابل قبول است. به عبارت دیگر، به ازای $c^* \leq 0.05$ ، شناسایی میرایی امکان‌پذیر نخواهد بود و برعکس به ازای مقادیر بزرگ برای c^* ، ضریب میرایی با دقت قابل قبولی شناسایی خواهد شد. این در حالی است که با کاهش c^* ، ضریب سفتی با دقت بهتری صورت می‌گیرد و هرچه ضریب c^* افزایش می‌یابد، خطای شناسایی ضریب سفتی نیز بیشتر



شکل ۱۸- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای مقادیر مختلف k^*



شکل ۱۹- شماتیکی از نقطه داده‌برداری (نقطه A) و محل اعمال نیرو در تیر دو سر درگیر



شکل ۲۰- نمودار شتاب-زمان نقطه A از تیر معادل شده تحت اثر ضربه در وسط تیر در تیر دو سر درگیر

معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند. در این قسمت، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۱۰ سانتیمتری از تکیه‌گاه (نقطه A) و محل اعمال نیرو، انتهای تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۶). نتایج حاصل در نمودار شکل ۱۸ آمده است. براساس نمودار شکل ۱۸ روشن است که برای محدوده مشخصی از ضریب $k^* (0.001 \leq k^* \leq 10)$ ، پاسخ بدست آمده از تحلیل معکوس قابل قبول خواهد بود. با توجه به اینکه با افزایش ضریب سفتی تکیه‌گاه، تکیه‌گاه صلب‌تر می‌شود، بنابراین برای مقادیر بزرگ k^* ، تکیه‌گاه کاملاً صلب عمل می‌کند و در نتیجه واضح است که شناسایی پارامترها سخت‌تر می‌شود.

۴-۳- بررسی تیر دو سر درگیر

برای بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ معکوس، در این مثال نیز، مقادیر دقیق پارامترهای مجهول تکیه‌گاهی به صورتی در نظر گرفته می‌شوند که نمودار شتاب در راستای y (a_y) برحسب زمان برای آن به نمودارهای نمونه‌های واقعی نزدیک‌تر باشد. این مقادیر عبارتند از:

$$X^{exact} = \begin{bmatrix} k_1^{exact} \\ k_2^{exact} \\ c_1^{exact} \\ c_2^{exact} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \frac{N.m}{rad} \\ 1200 \frac{N.m}{rad} \\ 0.4 \frac{N.m.sec}{rad} \\ 0.6 \frac{N.m.sec}{rad} \end{bmatrix} \quad (29)$$

نمودار شتاب برحسب زمان در نقطه A از این تیر به مختصات $(x, y, z) = (5, 0.5, 0) \text{ cm}$ که نیروی ضربه در وسط تیر وارد می‌شود (شکل ۱۹)، در شکل ۲۰ به تصویر کشیده شده است.

۴-۳-۱- بررسی تأثیر خطای اندازه‌گیری بر پاسخ

معکوس در تیر دو سر درگیر

در این قسمت با داده‌برداری داده‌های شتاب در نقطه A از تیر دو سر گیردار معادل شده که نیروی ضربه بر وسط تیر وارد می‌شود (شکل ۱۹) و همچنین با در نظر گرفتن تعداد داده‌های اندازه‌گیری $N = 200$ ، برای خطاهای مختلف اندازه‌گیری $\{0, 5, 10, 15, 20\} \%$ به حل مسأله به روش معکوس خواهیم پرداخت. نمودار شکل ۲۱، خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای خطاهای مختلف اندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

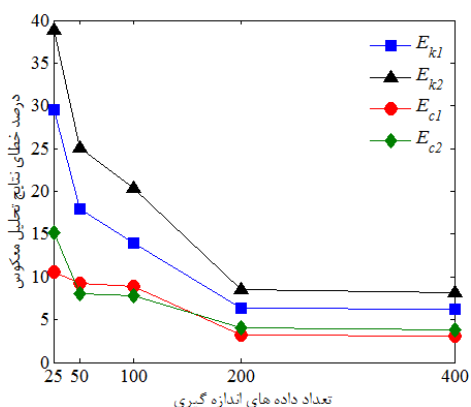
که محل نصب شتاب‌سنج به تکیه‌گاه سمت چپ نزدیک‌تر است. دلیل ذکر شده در بررسی‌های بعدی به وضوح دیده خواهد شد.

از دیگر نتایج قابل استنتاج از نمودار شکل ۲۱ این است که ضرایب میرایی نسبت به ضرایب سفتی، دارای خطای کمتری هستند (برخلاف آنچه که در تیر طره‌ای مشاهده شد). نکته قابل توجه دیگر این است که خطای ایجاد شده در پاسخ معکوس، تقریباً هم مرتبه با خطای اندازه‌گیری است.

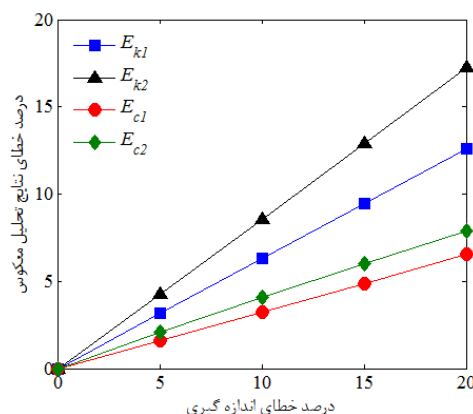
۴-۳-۲- بررسی تأثیر تعداد داده‌های اندازه‌گیری بر پاسخ معکوس در تیر دو سر درگیری

در این قسمت، به بررسی تأثیر تعداد داده‌های اندازه‌گیری بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. برای انجام تعداد داده‌های اندازه‌گیری به ترتیب ۲۵، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۴۰۰ در نظر گرفته می‌شود. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. در این قسمت، محل قرارگیری شتاب‌سنج در فاصله ۵ سانتیمتری از تکیه‌گاه و محل اعمال نیرو، وسط تیر در نظر گرفته شده است (شکل ۱۹). همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند.

نمودار شکل ۲۲، به وضوح نشان می‌دهد که با افزایش تعداد داده‌های اندازه‌گیری، شاهد پاسخ‌های دقیق‌تری خواهیم بود. همچنین با افزایش تعداد داده‌های اندازه‌گیری از یک مقدار مشخص، شاهد تأثیر زیادی بر پاسخ معکوس نخواهیم بود. این نتیجه در تیر طره‌ای نیز صادق بود.



شکل ۲۲- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای تعداد داده‌های اندازه‌گیری



شکل ۲۱- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای خطاهای مختلف اندازه‌گیری

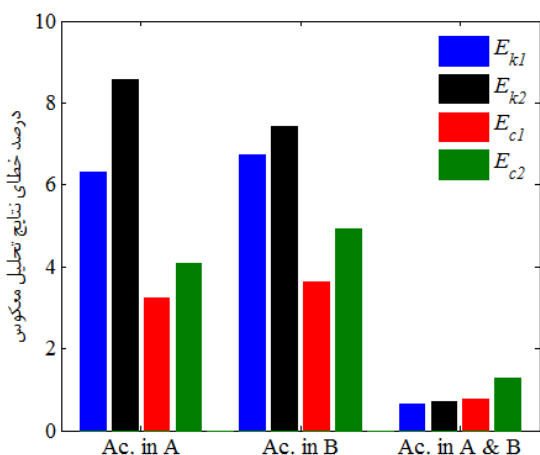
در نمودار شکل ۲۱، پارامترهای E_{k1} ، E_{k2} ، E_{c1} و E_{c2} عبارتند از: درصد خطای ایجاد شده در پاسخ تحلیل معکوس، که به صورت رابطه (۳۰) قابل بیان هستند:

$$\begin{cases} E_{k1} = \left| \frac{k_1^{exact} - k_1}{k_1} \right| \times 100 \\ E_{k2} = \left| \frac{k_2^{exact} - k_2}{k_2} \right| \times 100 \\ E_{c1} = \left| \frac{c_1^{exact} - c_1}{k_1} \right| \times 100 \\ E_{c2} = \left| \frac{c_2^{exact} - c_2}{k_2} \right| \times 100 \end{cases} \quad (30)$$

همچنین مشخصات نیروی ضربه مورد استفاده در تحلیل مورد استفاده در نمودار شکل ۲۱ در معادله (۲۶) آمده است. با این تفاوت که در تیر دو سر درگیر دوره تناوب در حدود $T_{beam} \approx 0.001 \text{ sec}$ است. همچنین در تحلیل‌های انجام شده، زمان داده‌برداری داده‌های شتاب t_3 برابر با t_2 در نظر گرفته شده است.

همان‌گونه که انتظار می‌رفت، با افزایش خطای اندازه‌گیری، خطای پاسخ‌ها نیز افزایش می‌یابد. در این مثال، نیز به مانند تیر طره‌ای، تغییرات خطای پاسخ معکوس نسبت به خطای اندازه‌گیری خطی است. با توجه به نمودار شکل ۲۱ و با مقایسه خطای ایجاد شده در ضریب سفتی تکیه‌گاه سمت راست (k_2) با ضریب سفتی تکیه‌گاه سمت چپ (k_1) و همچنین ضریب میرایی تکیه‌گاه سمت راست (c_2) با ضریب میرایی تکیه‌گاه سمت چپ (c_1)، می‌توان دریافت که خطای ایجاد شده در ضرایب تکیه‌گاه سمت راست، بیشتر از خطای ایجاد شده در ضرایب تکیه‌گاه سمت چپ است ($E_{c1} < E_{c2}$ و $E_{k1} < E_{k2}$). این نتیجه به این دلیل است

اما نکته حائز اهمیت در نمودار شکل ۲۴ این است که وقتی داده‌ها از شتاب‌سنج نصب شده در نقطه A استخراج می‌شود، ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه سمت چپ در مقایسه با ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه سمت راست، دارای خطای کمتری خواهند بود و برعکس اگر از داده‌ها شتاب‌سنج نصب شده در نقطه B استخراج شود، ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه سمت راست در مقایسه با ضرایب سفتی و میرایی تکیه‌گاه سمت چپ، دارای خطای کمتری خواهند بود. همچنین دقت شود که وقتی از دو شتاب‌سنج داشته باشیم، مقدار M برابر ۲ خواهد بود و از آنجایی که تعداد داده‌ها برابر $N = 200$ است، تعداد کل داده‌های اندازه‌گیری برابر $N_t = M \times N = 400$ خواهد بود.



شکل ۲۴- خطای پاسخ تحلیل معکوس به ازای تعداد شتاب‌سنج‌ها در تیر دو سر درگیر

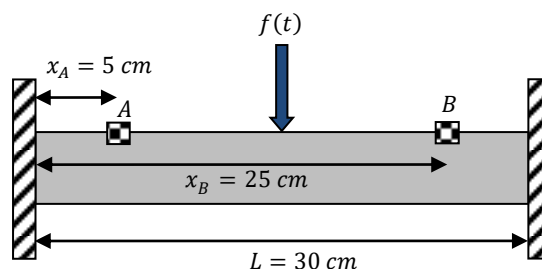
۵- بحث در نتایج و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به روش معکوس و با استفاده از داده‌های دینامیکی شتاب به بررسی و شناسایی پارامترهای تکیه‌گاه صلب تیر پرداخته شد. در یک مثال، به بررسی تیر یک سر درگیر که در آن تیر، دارای یک تکیه‌گاه صلب است، پرداخته شد و در مثالی دیگر، به بررسی یک تیر دو سر درگیر که دارای دو تکیه‌گاه صلب است، پرداخته شد. در مثال اول، پارامترهای متعددی که می‌توانند بر پاسخ تحلیل معکوس تأثیرگذار باشند، مورد بررسی قرار گرفت و مثال دوم، به طور خلاصه مورد بررسی قرار گرفت.

۴-۳-۳- بررسی تأثیر تعداد شتاب‌سنج بر پاسخ معکوس در تیر دو سر درگیر

در این قسمت، به بررسی تأثیر تعداد شتاب‌سنج‌ها بر پاسخ تحلیل معکوس پرداخته می‌شود. در همین راستا، نیروی ضربه را بر وسط تیر وارد می‌کنیم، سپس در ابتدا یک شتاب‌سنج را در نقطه A به فاصله ۵ سانتیمتری قرار داده، به ثبت داده‌ها پرداخته می‌شود، سپس همان شتاب‌سنج را در نقطه B به فاصله ۲۵ سانتیمتری از تکیه‌گاه (شکل ۲۳) قرار داده به ثبت داده‌ها پرداخته می‌شود و در انتها با در نظر گرفتن داده‌های هر دو شتاب‌سنج، به حل مسأله پرداخته می‌شود.

در این قسمت، تعداد داده‌های اندازه‌گیری شده در هر شتاب‌سنج برابر $N = 200$ است. این داده‌ها، داده‌های شتاب تا زمان $t_3 = t_2$ هستند. همچنین مقدار خطای اندازه‌گیری ۱۰٪ و مشخصات نیروی بیان شده در معادله (۲۶) در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۲۳- شماتیکی از نقاط داده‌برداری (نقاط A و B) در تیر دو سر درگیر

نمودار شکل ۲۴، به وضوح نشان می‌دهد که با افزایش تعداد شتاب‌سنج‌ها، شاهد پاسخ‌های به مراتب دقیق‌تری خواهیم بود. این در حالی است که در تیر طره‌ای، نتایج حاصل از داده‌برداری از دو شتاب‌سنج در مقایسه با نتایج حاصل از داده‌برداری از یک شتاب‌سنج، دارای مزیت بهتری نبودند. دلیل اینکه پاسخ تیر دو سر درگیر در حالتی که دو شتاب‌سنج نصب شود، بهتر می‌شود، این است که هر کدام از شتاب‌سنج‌ها نسبت به یکی از تکیه‌گاه‌ها حساس‌تر است و نصب دو شتاب‌سنج باعث می‌شود که داده‌های برداشته شده حاوی اطلاعاتی در خصوص پارامترهای هر دو تکیه‌گاه باشند که این امر باعث می‌شود تا پاسخ مسأله بهبود یابد.

شاهد اختلاف زمانی هستیم، بهتر است که نسبت زمان داده‌برداری به زمان اعمال نیرو برابر یک انتخاب شود. نسبت زمان اعمال نیرو به دوره تناوب تیر بسیار تأثیرگذار است. این نسبت بایستی در یک محدوده مشخصی باشد تا پاسخ تحلیل معکوس همگرا باشد. اگر ضریب میرایی تیر طره‌ای کم باشد، شناسایی ضریب میرایی امکان‌پذیر نخواهد بود و اگر ضریب میرایی زیاد باشد، شناسایی ضریب سفتی امکان‌پذیر نخواهد بود. همچنین ضریب سفتی تیر طره‌ای بایستی در محدوده مشخصی باشد تا شناسایی ضرایب سفتی و میرایی امکان‌پذیر باشد. همچنین باید توجه داشت که در صورتی که نیروی تحریک کننده به اندازه کافی بزرگ نباشد، خطاهای اندازه‌گیری شتاب افزایش یافته، دقت نتایج استخراج شده کاهش می‌یابد.

۶- مراجع

- [1] Yoshimura M, Okushima K (1977) Measurement of dynamic rigidity and damping property for simplified joint models and simulation by computer. *Annals of the CIRP* 25: 193-198.
- [2] Yoshimura M (1980) Computer design improvement of machine tool structure incorporation joint dynamics data. *Annals CIRP*, Vol. 28(1): 241-246.
- [3] Good MR, Marioce D (1989) Using experimental modal analysis to characterize automobile body joints and improve finite element analysis. *Proceedings of the Seventh International Modal Analysis Conference, Las Vegas, NV* 106-110.
- [4] Inamura T (1979) Stiffness and damping properties of the elements of a machine tool structure. *Annals of the CIRP* 28: 235-239.
- [5] Yuan J, Wu X (1985) Identification of the joint structural parameters of machine tool by DDS and FEM. *J Manuf Sci Eng* 107(1): 64-69.
- [6] Tsai JS, Chou YF (1988) The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *J Sound Vib* 125(3): 487-502.
- [7] Mottershead J, Stanway R (1986) Identification of structural vibration parameters by using a frequency domain filter. *J Sound Vib* 109(3): 495-506.
- [8] Ibrahim R, Pettit C (2005) Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *J sound and Vib* 279(3): 857-936.

نتایج حاصله از بررسی مثال‌های مذکور نشان می‌دهند که تحلیل معکوس تیر دو سر درگیر، بسیار مشکل‌تر از تحلیل معکوس تیر یک سر درگیر است. به عبارت دیگر، مسأله معکوس تیر دو سر درگیر بسیار بدنهاده‌تر از مسأله تیر یک سر درگیر است. تغییرات خطای پاسخ‌های تحلیل معکوس برحسب خطای اندازه‌گیری در هر دو مثال مورد بررسی در این مقاله خطی است؛ اما شیب تغییرات برای هر کدام از مجهولات معکوس متفاوت است. در تیر یک سر درگیر ضریب سفتی با دقت بهتری نسبت به ضریب میرایی حاصل می‌شود؛ در حالی که در تیر دو سر درگیر این نتیجه کلی حاصل نشد. استفاده از دو شتاب‌سنج در مسأله تیر دو سر درگیر بسیار مناسب است و منجر به نتایج بسیار بهتری می‌شود. این در حالی است که در مسأله تیر یک سر گیردار نتایج حاصل از دو شتاب‌سنج با نتایج حاصل از یک شتاب‌سنج تفاوت چندانی ندارد. نسبت تعداد داده‌های اندازه‌گیری (معلومات مسأله معکوس) به تعداد مجهولات بسیار مهم و تأثیرگذار است. اگر این نسبت کم باشد، مسأله به شدت بدنهاده خواهد شد. همچنین اگر این نسبت را از یک حد مشخصی بیشتر کنیم، باعث بهبود وضعیت مسأله نخواهد شد و دیگر تغییری در نتایج حاصله ایجاد نمی‌کند، زیرا اطلاعات جدیدی به مسأله اضافه نمی‌کند. در مسأله تیر دو سر گیردار، محل قرارگیری شتاب‌سنج به هر کدام از تکیه‌گاه‌ها که نزدیک‌تر باشد، پارامترهای آن تکیه‌گاه با دقت بهتری بدست می‌آیند. در حالاتی که اختلاف زمانی بین اندازه‌گیری نیرو و شتاب برابر صفر باشد، هرچه نسبت زمان داده‌برداری به زمان اعمال نیرو بیشتر باشد، نتایج تحلیل معکوس بهتر خواهند بود؛ اما با افزایش این نسبت از یک مقدار مشخصی دیگر شاهد بهبود پاسخ‌ها نخواهیم بود؛ اما برعکس اگر اختلاف زمانی داشته باشیم، با افزایش زمان داده‌برداری خطای پاسخ‌ها نیز افزایش می‌یابند. در این حالت، اگر زمان داده‌برداری با زمان اعمال نیرو برابر باشد، پاسخ‌ها مناسب خواهند بود و با توجه به اینکه معمولاً در آزمایشات تجربی

- [24] Hollandsworth P, Busby H (1989) Impact force identification using the general inverse technique. *Int J Imp Eng* 8(4): 315-322.
- [25] Kazemi M, Hematiyan MR (2009) An efficient inverse method for identification of the location and time history of an elastic impact load. *J Test Eval* 37(6): 545-555.
- [26] Soares CM, De Freitas MM, Araújo A, Pedersen P (1993) Identification of material properties of composite plate specimens. *Compos Struct* 25(1): 277-285.
- [27] Hematiyan MR, Khosravifard A, Shiah Y, Tan C (2012) Identification of Material Parameters of Two-Dimensional Anisotropic Bodies Using an Inverse Multi-Loading Boundary Element Technique. *Comput. Model Eng Sci (CMES)* 87(1): 55-76.
- [28] Shokrieh MM, Madoliat R, Bostani B, Ghasemi GA, Mahmoodian V (2015) A new inverse method for determination of unidirectional ply mechanical properties of a laminated composite. *Modares Mec Eng* 15(1): 352-360. (In Persian)
- [29] Khodadad M (2015) Identifying two regular interfacial boundary configurations and simultaneously estimation of mechanical properties using Imperialist competitive Algorithm and Simplex method. *Modares Mec Eng* 14(10): 71-79. (In Persian)
- [30] Talebi A (2014) Vibration analysis of a variable cross-section cracked Timoshenko beam and their crack detection using genetic algorithm. *Modares Mech Eng* 13(13): 78-89. (In Persian)
- [31] Law S, Lu Z (2005) Crack identification in beam from dynamic responses. *J. Sound Vib.* 285(4): 967-987.
- [32] Lele S, Maiti S (2002) Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *J Sound Vib* 257(3): 559-583.
- [33] Rao SS, Yap FF (1995) *Mechanical vibrations*: Addison-Wesley New York.
- [34] Ohkami T, Ichikawa Y, Kawamoto T (1991) A boundary element method for identifying orthotropic material parameters. *Int J Num Anal Methods Geomech.* 15(9): 609-625.
- [35] Huang L, Sun X, Liu Y, Chen Z (2004) Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method. *Eng Anal Bound Elem* 28(2): 109-121.
- [36] Gallego R, Comino L, Ruiz- Cabello A (2006) Material constant sensitivity boundary integral equation for anisotropic solids. *Int J Num Methods Eng* 66(12): 1913-1933.
- [37] Hematiyan MR, Khosravifard A, Shiah YC (2015) A novel inverse method for identification of 3D
- [9] Bickford J (1995) *An introduction to the design and behavior of bolted joints*. Revised and expanded: CRC press.
- [10] Jones S, Kirby P, Nethercort D (1983) The analysis of frames with semi-rigid connections—a state-of-the-art report. *J Constr Steel Res* 3(2): 2-13.
- [11] Kim T, Wu S, Eman K (1989) Identification of joint parameters for a taper joint. *J Manuf Sci Eng* 111(3): 282-287.
- [12] Ito Y, Masuko M (1971) Study on the Horizontal Bending Stiffness of Bulletin of the Bolted Joint. *Bulletin of JSME* 14(74): 876-889.
- [13] Ikegami R, Church S, Keinholtz D, Fowler B (1987) Experimental characterization of deployable trusses and joints. Workshop on Structure Control and Interaction Flexible Structures, Marshall Space Flight Center, Huntsville, AL. 1271-1288.
- [14] Crawley EF, O'Donnell KJ (1987) Force-state mapping identification of nonlinear joints. *AIAA journal* 25(7): 1003-1010.
- [15] Adams R, Cawley P, Pye C, Stone B (1978) A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *J Mech Eng Sci* 20(2): 93-100.
- [16] Haisty B, Springer W (1988) A general beam element for use in damage assessment of complex structures. *J Vib Acous* 110(3): 389-394.
- [17] Loya JA, Rubio L, Fernández-Sáez J (2006) Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *J Sound Vib* 290(3): 640-653.
- [18] Silva T, Maia N, Roque A, Travassos J (2009) Identification of Elastic Support Properties on a Bernoulli-Euler Beam. Society for Experimental Mechanics (SEM), editor, Proceedings of the 27th International Modal Analysis Conference, Orlando, USA.
- [19] De Rosa M, Franciosi C, Maurizi M (1996) On the dynamic behaviour of slender beams with elastic ends carrying a concentrated mass. *Comp Struct* 58(6): 1145-1159.
- [20] Goel R (1976) Transverse vibrations of tapered beams. *J Sound Vib* 47(1): 1-7.
- [21] Sato K (1980) Transverse vibrations of linearly tapered beams with ends restrained elastically against rotation subjected to axial force. *Int J Mech Sci* 22(2): 109-115.
- [22] Abbas B (1984) Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends. *J. Sound Vib.* 97(4): 541-548.
- [23] Hadamard J (2014) *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*: Courier Corporation.

- [41] Golsorkhi NA, Tehrani HA (2014) Levenberg-Marquardt Method for Solving the Inverse Heat Transfer Problems. *J Math & Comp Sci* 13: 300-310.
- [42] Beck JV (1985) *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, James Beck, 1985.
- [43] Möller PW (1999) Load identification through structural modification. *J Appl Mech* 66(1): 236-241.
- [44] Najafi H, Woodbury KA, Beck JV (2015) A filter based solution for inverse heat conduction problems in multi-layer mediums. *Int J Heat Mass Transfer* 83: 710-720.
- thermal conductivity coefficients of anisotropic media by the boundary element analysis. *Int J Heat Mass Transfer* 89: 685-693.
- [38] Muniz WB, Velho HFC, Ramos FM (1999) A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation. *Appl & Comput Top Part Diff Eq* 103(1): 145-163.
- [39] Bitterlich S, Knabner P (2002) An efficient method for solving an inverse problem for the Richards equation. *J Comput Appl Math* 147(1): 153-173.
- [40] Dennis BH, Jin W, Dulikravich GS, Jaric J (2011) Application of the Finite Element Method to Inverse Problems in Solid Mechanics. *Int J Struc Changes Sol Mech & Appl* 3(2): 11-21.