مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۴/ دوره ۵/ شماره ۳/ صفحه ۷۹-۹۱

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2015.574

حل تطبیقی در تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌ها با استفاده از روش‌های تخمین خطا مبتنی بر بازیافت تنش

ابوذر میرزاخانی[1,*]، بهروز حسنی[2] و احمد گنجعلی[3]

[1] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران

[2] استاد، گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

[3] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی ، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۱/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۸/۲۵

چکیده

در این پژوهش برای اولین بار در تحلیل ایزوژئومتریک به بهبود شبکه نقاط کنترلی بر مبنای خطای برآورد شده از روشی مبتنی بر بازیافت تنش پرداخته شده است. در ابتدا از الگوریتم برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش، برای یافتن نرم خطای انرژی هر المان استفاده شده است. سپس با تعریف میله‌هایی بین نقاط کنترلی، مقادیر تخمینی خطا در مجاورت نقاط کنترلی، به عنوان گرادیان حرارتی به هر میله تخصیص داده شده است. به این ترتیب، پس از تحلیل شبکه میله‌های فرضی که دچار تغییر دما شده‌اند، آرایش جدیدی از نقاط کنترلی و بردارهای گرهی حاصل می‌شود که بکارگیری این روند در چند سیکل در تحلیل ایزوژئومتریک، منجر به توزیع بهتر خطا در دامنه و در نتیجه حصول شبکه‌ای بهینه برای محاسبه انتگرال‌ها خواهد شد. به منظور سنجش کارایی این روش، نتایج حاصل از مدل‌سازی و تحلیل دو مسأله الاستیسیته، مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش بهبود شبکه ابداعی در کاهش میزان خطا موثر بوده، می‌تواند جهت افزایش دقت نتایج تحلیل ایزوژئومتریک، مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک؛ نقاط کنترلی؛ حل تطبیقی؛ نرم خطا.

Adaptivity in Isogeometric Analysis of Structures using Error Estimation Methods Based on Stress Recovery

A. Mirzakhani[1,*], B. Hassani[2], A. Ganjali[3]

[1] Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

[2] Professor, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran.

[3] Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

Abstract

In this research work, for the first time, the net of control points in the isogeometric analysis is improved by employing an error estimator based on a stress recovery method. First an error estimation algorithm was used based on stress recovery to obtain the energy norm for each element. Then the artificial rods between the control points were defined, and the estimated values for errors in the control points located at the vicinity of a typical point were assigned to each rod as a thermal gradient. Subsequently, by analyzing this hypothetical truss problem under temperature changes, a new arrangement of control points, and consequently, the knot vectors were obtained. Repeating this process in the isogeometric analysis led to a better distribution of errors in the domain of the problem and resulted in an optimal net of control points to calculate the integrals. To evaluate the efficiency of this method, the results of modeling and analysis of two elasticity problems were presented. The results obtained show that this innovative approach has a good performance, and can be employed to reduce the analysis errors.

Keywords: Isogeometric Analysis; Control Points; Adaptive Analysis; Error Norm.

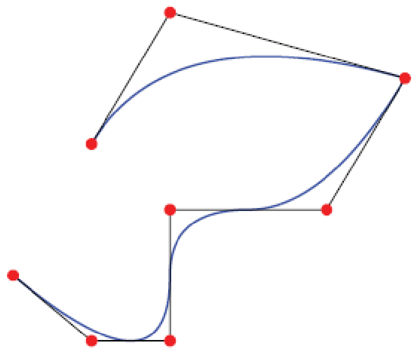
* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۸۱۲۷۳۴۸

آدرس پست الکترونیک: aboozar.mirzakhani@iau-shahrood.ac.ir

۱- مقدمه

از آنجایی که واکاوی بسیاری از پدیده‌های طبیعی به معادلاتی از جنس معادلات با مشتقات جزئی منجر می شوند، حل این نوع از معادلات همواره مورد توجه بوده است. از طرفی تاکنون برای گروه عمده ای از این نوع معادلات، روش تحلیلی ارائه نشده است؛ بنابراین برای حل آنها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. تحلیل ایزوژئومتریک نیز روش عددی جدیدی برای تحلیل مسائل مهندسی است که معادلات حاکم بر آن‌ها، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی است، این روش دارای شباهت‌هایی با روش اجزای محدود بوده، بر مبنای هندسه تحلیلی ارائه شده است. در واقع در ابداع تحلیل ایزوژئومتریک، از روش‌های طراحی به کمک کامپیوتر (CAD[1]) الهام گرفته شده است [۱].

توابع پایه ای B-Spline و به طور مشخص نوع خاصی از آن که NURBS[2] نام دارد، در این روش مبنای مدل‌سازی قرار گرفته است. این توابع که چند جمله‌ای‌های درونیاب بوده و وابسته به یک سری نقاط کنترلی هستند، می‌توانند هندسه نسبتاً دقیقی را جهت ایجاد مدل و ترسیم فضای پارامتری تحلیل فراهم کنند، بدین ترتیب که با جابجایی نقاط کنترلی در این سیستم، انواعی از منحنی‌ها و سطوح لازم ترسیم می‌شود (شکل ۱)، در حالی که در روش‌های رایج المان محدود برای مدل کردن انواعی از احجام با اشکال مختلف، مرزها به قطعات متعدد تقسیم شده، نمی‌توان دامنه حل مسأله را با المان‌های مورد نظر به طور کامل پوشانید.



شکل ۱- نقاط کنترلی مربوط به یک منحنی

[1] Computer Aided Design
[2] NURBS (Non Uniform Rational B-Spline)

تاریخچه استفاده از این توابع نشان می دهد که مدتها قبل B-Spline ها توسط ریزنفیلد در ۱۹۷۲ معرفی شده بود و NURBS ها هم قبل از ۱۹۷۵ توسط ورسپریل بکار رفت که بعدها مبنای اساسی صنایع CAD قرار گرفت؛ اما به خاطر اینکه سالها پیش (۱۹۵۶) روش‌های المان محدود جهت تحلیل گسترش یافته بود، بین گرافیست‌ها و تحلیلگران مسائل مهندسی جدایی وجود داشت و این دو، از توابع مبنایی مشترک استفاده نکردند [۱] تا اینکه روش ایزوژئومتریک توانست حلقه وصل بین طراحی گرافیکی و تحلیل عددی باشد.

استفاده از فناوری طراحی به کمک رایانه در تحلیل مسائل با استفاده از روش نوین ایزوژئومتریک، دارای مزیت های فراوانی است که از جمله آنها حذف خطای مدل‌سازی هندسه است؛ اما در روش‌های عددی، وجود خطا در تقریب تابع مجهول امری اجتناب ناپذیر است و همواره باعث نگرانی بوده است. روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح، بر پایه استفاده از خاصیت فوق همگرایی نقاط انتگرال گیری گوسی، اولین بار توسط حسنی و همکاران معرفی شد [۲] که در این پژوهش، از آن جهت برآورد توزیع خطا بر روی دامنه حل مسئله استفاده شده است.

استفاده از روش‌های عددی برای حل مسایل مختلف همواره با خطا همراه است. برای کاهش خطای جواب‌ها و افزایش سرعت و دقت محاسبات در روش‌های عددی، از فرآیند تظریف استفاده می‌کنیم. تلاش برای بدست آوردن کاراترین، سریعترین و بهینه ترین روش برای تظریف، براساس خطای برآورد شده، تظریف تطبیقی[3] نامیده می شود. تظریف تطبیقی شبکه، برای بدست آوردن جوابهایی با دقت بالاتر از جمله مسائلی بوده که همواره در روش‌های عددی، مورد توجه بوده است، به گونه‌ای که فرآیندهای تظریف همزمان با روش‌های عددی پیشرفت کرده اند.

اولین تلاش برای رسیدن به شبکه المان بهینه، توسط نایس و مارکال در سال ۱۹۷۴ صورت گرفت [۳].در این روش، موقعیت گره‌ها به صورت نامعلوم در نظر گرفته

[3] Adaptive refinement

می‌شود و سپس با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل، می‌توان موقعیت گره‌ها را تعیین کرد. بابوشکا و همکارانش، در سال ۱۹۸۶ برای اولین بار شبکه المان بهینه را شبکه‌ای با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی روی کل دامنه، برای مسائل یک بعدی تعریف کردند [۴]. در سال ۱۹۸۹ زینکوویچ و زو طی مقاله‌ای با تخمین خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان بندی مثلثی ارائه کردند که طی آن المان‌ها ریزتر می‌شد [۵]. در زمینه بهبود شبکه در روش ایزوژئومتریک نیز تاکنون تلاش‌هایی انجام شده که عمدتاً تکیه آنها بر استفاده از توابع پایه T-Spline جهت افزایش نقاط کنترلی در نواحی با خطای بالاتر بوده، Johannessen برای اولین بار تحلیل تطبیقی به این سبک را ارائه کرد [۶]، Michael R. Dörfel و همکاران در ۲۰۱۰، بهبود محلی شبکه با افزایش نقاط کنترلی و با استفاده از تی- اسپیلاینها را پیشنهاد کردند [۷] و Denga Jiansong و همکاران در ۲۰۱۱ با استفاده از Rational PHT-Splines یا تی- اسپیلاین‌های مرتبه‌ای نوعی بهبود محلی را ارائه دادند [۸] که در مجموع همه روش‌های ذکر شده با افزایش تعداد نقاط و حجم محاسبات همراه بوده است.

در این پژوهش برای اولین بار روشی بر پایه استفاده از گرادیان حرارتی جهت بهبود شبکه نقاط کنترلی تحلیل ایزوژئومتریک مبتنی بر جابجایی نقاط، ارائه شده است. ویژگی بارز این روش، عدم افزایش حجم محاسبات به دلیل اضافه نشدن نقاط کنترلی جدید و همچنین امکان بهبود شبکه در چندین چرخه مختلف است.

در ادامه جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه تحلیل ایزوژئومتریک، به نحوه مدل‌سازی در این روش پرداخته شده است. بخش سوم مربوط به معرفی روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک است. تشریح روش بهبود شبکه با استفاده تولید گرادیان حرارتی در بخش چهارم و صحت سنجی این روش با حل دو مثال نمونه در بخش پنجم از این پژوهش ارائه شده است.

۲ - مدل‌سازی

نربزها از بی- اسپیلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین‌ها در فضای پارامتری (ناحیه)(Patch) تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه مدل‌سازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی(Knot Vector) در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت رابطه (۱) تشکیل می‌شود[۹].

$$\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n+p+1}\}\ ,\quad \xi_{i+1}\ge\xi_i \quad i=1,2,\dots,n+p+1 \qquad (۱)$$

که در آن ξ_i امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل‌دهنده بی- اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد؛ ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای بنام بردارهای گره ای نامتناوب[1] یا باز[2] استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به صورت رابطه (۲) نشان داده می‌شوند:

$$\Xi=\left\{\underbrace{a,\dots,a}_{p+1},\xi_{p+1},\dots,\xi_{m-p-1},\underbrace{b,\dots,b}_{p+1}\right\} \qquad (۲)$$

در این صورت، i امین تابع پایه ای بی‌اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود [۹]:

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & if\quad \xi_i\le\xi<\xi_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$
$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۳)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپیلاین از درجه p بصورت رابطه (۴) تعریف می‌شود[۹]:

$$C(\xi)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)P_i \qquad a\le\xi\le b \qquad (۴)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای (Piecewise polynomial curve) است که در آن $\{P_i\}$، نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپیلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به‌صورت رابطه (۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m=n+p+1$ را برای آنها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی- اسپیلاین به‌صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود [۹]:

[1] Nonperiodic knot vectors
[2] Open

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)P_{i,j} \qquad (5)$$

که در آن:

$$\Xi=\{\underbrace{0,...,0}_{p+1},\xi_{p+1},...,\xi_{r-p-1},\underbrace{1,...,1}_{p+1}\}\;; \qquad (6)$$
$$\mathscr{H}=\{\underbrace{0,...,0}_{q+1},\eta_{q+1},...,\eta_{s-q-1},\underbrace{1,...,1}_{q+1}\}$$

بطوری که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و $\mathscr{H}$ دارای $s+1$ گره است.

منحنی نربز از درجه p به‌صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود [۹]:

$$C(\xi)=\frac{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)w_iP_i}{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)w_i} \qquad a\le\xi\le b \qquad (7)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپیلاین از درجه p هستند که روی بردار گره‌ای به‌صورت رابطه (۲) تعریف شده اند. در نهایت، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد، بصورت رابطه (۸) تعریف می‌شود[۹]:

$$S(\xi,\eta)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}, \qquad (8)$$
$$0\le\xi,\eta\le1$$

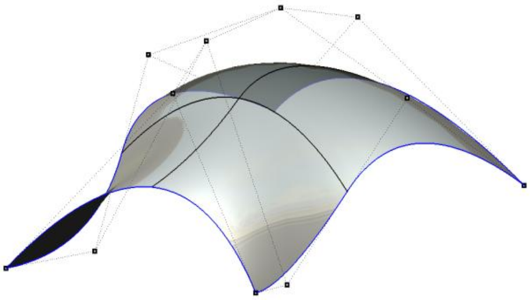
در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$، شبکه نقاط کنترلی است که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها، $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی- اسپیلاین هستند که روی بردارهای گره ای به صورت رابطه (۶) تعریف شده اند. در رابطه(۸) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را بصورت رابطه (۹) تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \qquad (9)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{i,j} \qquad (10)$$

در شکل ۲ شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز بدست آمده از آن با توابع پایه درجه دو مشاهده می‌شود.



شکل ۲- شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو

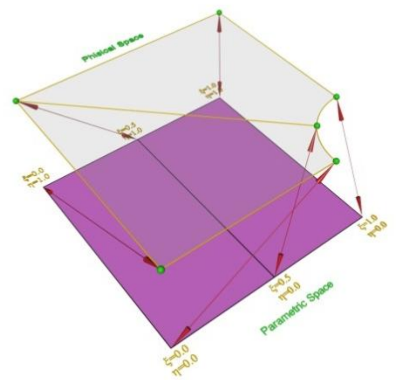
۳- سطح تنش بهبود یافته و برآورد خطا

در فرآیندهای معمول تخمین خطا دو مقدار از یک کمیت (مقدار محاسبه شده و مقدار مرجع)، مورد نیاز است. مقدار محاسبه شده، کمیت خامی است که از محاسبه مستقیم بدست می‌آید؛ در حالی که مقدار مرجع از مقدار اول بعد از یک فرآیند پس پردازشی مانند هموارسازی به‌دست می‌آید. به عنوان مثال در اجزای محدود، معمولا تنش‌ها در مرز المان‌ها یا ناپیوسته هستند یا از دقت کمتری برخوردارند. مقادیر تصحیح شده آن‌ها از طریق فرآیند هموارسازی به‌دست می‌آید. اختلاف بین مقادیر خام و مقادیری که از طریق فرآیند فوق به‌دست آمده‌اند، تشکیل‌دهنده مقدار اولیه برای برآورد خطا است.

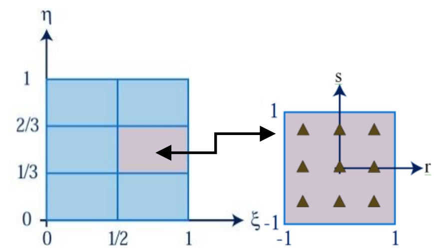
در روش ایزوژئومتریک، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه، به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی به‌دست می‌آید که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده‌اند [۱].

یک سطح نربز زمانی بدست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x و y هر نقطه کنترلی توسط کاربر، تنها مؤلفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافتهٔ تنش، مؤلفه سوم نقطه کنترلی است. محاسبه مختصات سوم نقاط کنترلی، به نحوی است

که سطح تنش جدید بدست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک بدست آمده است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود. برای محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه بدست آوردن سطح تنش بهبود یافته از خاصیت نقاط فوق همگرا استفاده می‌شود [۲]. در تحلیل ایزوژئومتریک، این نقاط فوق همگرا بر حداقل تعداد نقاط گوسی مورد نیاز المان چهار ضلعی منطبق هستند (شکل های۳ و ۴).



شکل۳- نقاط موجود در فضای پارامتری و نقاط متناظر با آنها بر روی هندسه مسئله



الف) فضای پارامتری ب) فضای انتگرال گیری گوس

شکل ۴- نقاط انتگرال گیری گوس در روش ایزوژئومتریک

مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوس المان‌های هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می‌شود.

در این بخش، به طور مختصر به چگونگی استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرا در تشکیل سطح تنش بهبود یافته پرداخته می-شود و جهت آشنایی بیشتر با جزئیات این روش، مراجعه به مرجع [۲] پیشنهاد می شود.

در صورتی که سطح بازیافتی (بهینه) هریک از مؤلفه‌های بردار تنش را باσ^* نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نربز می‌توان این سطح را داخل هر ناحیه به صورت رابطه (۱۱) بیان کرد:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \qquad (۱۱)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، R توابع شکل نربز و P مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش است. در صورتی که R و P را به ترتیب بردار توابع شکل نربز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف کنیم، رابطه (۱۳) را می‌توان به صورت (۱۴) بیان کرد.

$$\mathbf{R} = \left[R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,n}, \dots, R_{m,n}\right]^T \qquad (۱۲)$$

$$\mathbf{P} = \left[P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,n}\right]^T \qquad (۱۳)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \qquad (۱۴)$$

تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات z نقاط کنترلی (بردار P) است. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور، تابع F(P) را به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\sigma^*_{i,j} - \bar{\sigma}_{i,j})^2 \qquad (۱۵)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و k_x و k_y به ترتیب، تعداد نقاط گوس در جهت‌های x و y موجود در هر ناحیه است. با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۱۵) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{l=1}^{K}(\mathbf{R}_l^T\mathbf{P}_l - \bar{\sigma}_l)^2 \qquad (۱۶)$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه است. در نهایت با مشتق‌گیری از تابع F(P) نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات، نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته بدست می‌آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{AP} = \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\,\bar{\sigma}_i \qquad (۱۷)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید. این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش به‌دست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق‌تر است و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به‌کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به صورت تقریبی می توان به معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروفترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای المان به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود [۱۰]:

$$\| e \| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق بردار تنش، $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی، $\mathbf{D}$ ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان است. با توجه به اینکه در حالت کلی جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود است، حل دقیق مسئله در دسترس نیست، لذا به‌جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در این صورت، نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| e \| = \| \bar{e} \| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک است. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

برای سنجش دقت تخمین‌کننده خطا نیز یک شاخص تأثیر که از نسبت خطای برآورد شده به خطای دقیق بدست می آید، به صورت رابطه زیر به کار گرفته می شود:

$$\theta = \frac{\| e^* \|}{\| e \|} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه e^* نرم خطای انرژی تقریبی و e نرم خطای انرژی دقیق است.

۴- اصلاح وفقی[1]

در فرآیند حرکت‌دهی شبکه که یکی از روش‌های اصلاح وفقی است، تعداد کل نقاط ثابت باقی می‌ماند؛ ولی محل نقاط طبق خطاهای به دست آمده تغییر می‌کند. این روش در مقابل سایر روش‌ها همچون اصلاح شبکه P[2] و یا غنی سازی[3]، مزایای متعددی دارد؛ اما در اجزای محدود با محدودیت هایی همراه است؛ زیرا در زمان جابجایی نقاط ممکن است اتصال[4] اجزا به هم بخورد و بعضی از المان‌ها همپوشانی پیدا کرده و یا مساحت بعضی از المان‌ها صفر شود [۱۱]؛ بنابراین استفاده از این روش با مشکلات زیادی همراه است. به همین دلیل در اجزای محدود محبوب‌ترین روش برای تظریف تطبیقی استفاده از همان روش غنی کردن شبکه است که از لحاظ محاسباتی پر هزینه است؛ ولی از آنجایی که به‌طور کلی در روش‌های بدون شبکه و همچنین روش تحلیل ایزوژئومتریک در فضای پارامتری آن، المان بندی وجود ندارد، استفاده از روش جابه‌جایی نقاط به‌راحتی امکان پذیر است؛ بنابراین در فرآیند تظریف ارائه شده برای روش تحلیل ایزوژئومتریک، ایده جابه‌جایی نقاط به‌کار گرفته شده است.

در این مقاله با معرفی یک فرآیند جدید تظریف تطبیقی در تحلیل ایزوژئومتریک که از جمله روش‌های حرکت‌دهی شبکه محسوب می‌شود، حل تطبیقی برای مسائل حوزه مکانیک جامدات نشان داده شده است.

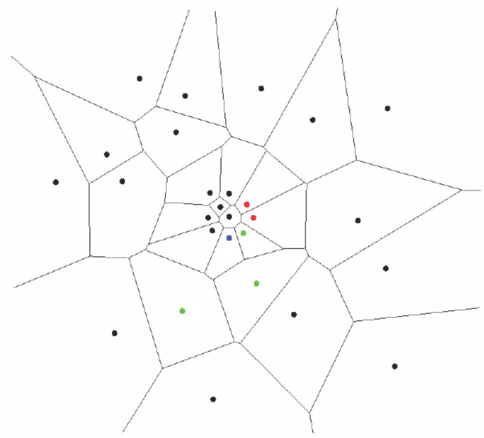
روش‌های متعددی برای جابجایی نقاط شبکه در اجزای محدود پیشنهاد شده و برای مسائل مختلف به کار گرفته شده است از میان این روش‌ها چهار روش به نام‌های isoparametric [۱۲]، trans-finite interpolation(TFI) [۱۳]، mapping [۱۴] elastic analogy و سیستم فنرها[5] [۱۵]، بیشتر مورد توجه بوده است.

---

[1] Refinement
[2] P-Refinement
[3] Element Subdivision (Enrichment)
[4] Connectivity
[5] Spring Analogy

TFI و Isoparametric mapping الگوریتم‌های ریاضی هستند که برای مسائل شبکه‌های ساختار یافته و ساده مناسب می باشند. از طرف دیگر، elastic analogy و سیستم فنرها برای هر دو حالت مسائل دارای شبکه ساختار یافته و ساختار نیافته کاربرد دارند؛ ولی این روش‌ها نیز در حل تطبیقی مسائل اجزاء محدود دارای محدودیت‌هایی بوده‌اند.

در روش ارائه شده در این پژوهش، ابتدا حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی شناسایی و سپس هر نقطه کنترلی بوسیله میله‌هایی فرضی به نقاطی متصل می‌شود که در همسایگی آن قرار دارد.



شکل ۵ - دیاگرام Voronoiجهت شناسایی حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی

برای یافتن نقاط همسایه از دیاگرام Voronoi استفاده شده است. (شکل۵) دیاگرام Voronoi، شکل محدبی است که از تقاطع عمود منصف‌های وارد بر پاره خط بین گره‌ها حاصل می‌شود. این حوزه همسایگی طبق رابطه (۲۱) تعریف می‌شود [۱۶]:

$$T_i = \{x \in \Re : d(X, X_i) < d(X, X_j) \forall j \neq i\} \qquad (۲۱)$$

که در آن $d(x, x_i)$ فاصله (اقلیدسی) بین X_i و X است؛ معنی رابطه‌ی بالا این است که نقاط متعلق به سلول Voronoi گره i نقاطی هستند که به این گره نزدیک‌ترند تا سایر گره‌ها.

در این مرحله گره‌ها را بوسیله اعضای سازه‌ای متصل کرده و خطاهایی را که به روش بازیافت تنش تخمین زده‌ایم به عنوان درجه حرارت منفی (برودت) به اعضاء اختصاص می‌دهیم؛ در واقع چون میانگین خطای سطوح مجاور هر عضو و در مسائل سه بعدی احجام مجاور هر عضو را به عنوان خطا یا به تعبیر این روش، اختلاف درجه حرارت در نظر می‌گیریم، اعضایی که در نواحی با خطای بیشتر قرار دارند، اختلاف حرارت بیشتری را متحمل می‌شوند؛ بنابراین برای هر عضو مطابق رابطه زیر:

$$\delta = L * \alpha * \Delta T \qquad (۲۲)$$

که در آن:

δ : تغییر طول عضو

L : طول اولیه عضو

A : ضریب انتقال حرارت ماده

ΔT : اختلاف حرارت موجود

تغییر طول اعضای فرضی بدست آمده و به نیرو تبدیل می‌شود.

$$\delta = \frac{FL}{EA} \qquad (۲۳)$$

که در آن:

δ : تغییر طول عضو

F : نیروی حاصل از اختلاف حرارت (خطا)

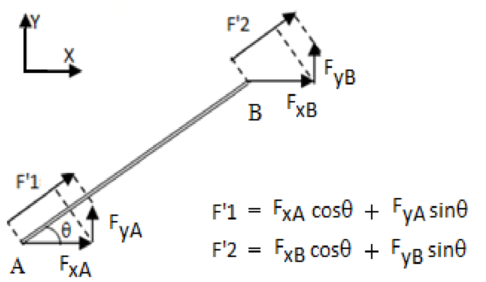
L : طول اولیه عضو

E : ضریب الاستیسیته

A : سطح مقطع اعضا

از طرفی چون نیروی به وجود آمده در مختصات محلی است با نگاشت زیر در مختصات کلی تعریف می‌شود (شکل۶):

$$\begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xA} \\ F'_{yA} \\ F'_{xB} \\ F'_{yB} \end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

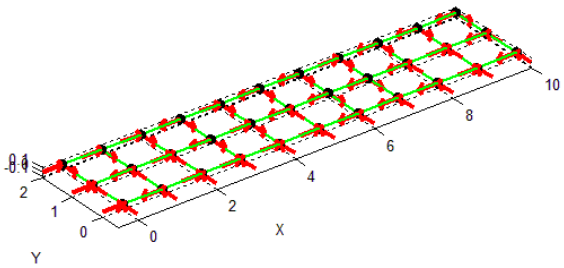


شکل۶– تبدیل نیروها به مختصات کلی

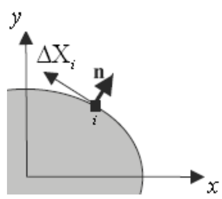
نتیجه آنکه سازه متشکل از نقاط کنترلی و اعضای متصل کننده فرضی را تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی تحلیل کرده (شکل ۷) و جابجایی‌ها را برای انجام مجدد تحلیل ایزوژئومتریک در نقاط کنترلی و با نسبتی معین در بردارهای گرهی اعمال می کنیم.

در الگوریتم ارائه شده برای رسیدن به دقت کافی، قابلیت انجام مراحل تحلیل، تخمین خطا و جابجایی نقاط کنترلی، به عنوان حل تطبیقی، در سیکل‌های متعدد وجود دارد.

شرایط مرزی مجموعه نقاط گرهی و المان‌ها چنین است که نقاط روی مرزهای حوزه تنها می‌توانند در راستای مرز جابه‌جا شوند (شکل ۸)؛ به عبارت دیگر در جهت عمود بر مرز جابجایی آن‌ها صفر است. نتیجه طبیعی این شرط این است که نقاط گرهی واقع بر محل برخورد دو مرز که زاویه غیر صفر دارند، بی حرکت می‌مانند. همچنین با این شرایط، هیچ نقطه‌ای از یک مرز وارد مرز دیگر نخواهد شد.



شکل۷- تحلیل یک سازه دو بعدی نمونه تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی



شکل ۸- حالت کلی برای شرایط مرزی

در زیر روابط مربوط به شرط مرزی آورده شده است.

$$\Delta X_i n_i = \left[\Delta x_i \Delta y_i\right]\begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = \left[\left(x_i-\overline{x}_i\right)\left(y_i-\overline{y}_i\right)\right]\begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \qquad (۲۵)$$

که در آن ΔX_i بردار تغییر مکان نقطه‌ی i ام و n_i بردار برونگرای عمود بر مرز در این نقطه است.

با ضرب کردن دو بردار ΔX_i و n_i در رابطه بالا داریم:

$$y_i = w + s x_i \qquad (۲۶)$$

که در آن w و s چنین‌اند:

$$w = \bar{x}_i \frac{n_x^i}{n_y^i} + \bar{y}_i \qquad (۲۷)$$

$$s = -\frac{n_x^i}{n_y^i} \qquad (۲۸)$$

روابط فوق برای حالتی که مرز عمود بر یکی از محورهای مختصات باشد، به صورت روابط (۲۹) و (۳۰) ساده می شود:

$$y_i = \bar{y}_i \quad if \quad n_x^i = 0 \left(n \perp x\right) \qquad (۲۹)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad if \quad n_y^i = 0 \left(n \perp y\right) \qquad (۳۰)$$

مفهوم این دو رابطه این است که اگر مرز موازی بر محور x باشد، نقطه واقع بر آن تنها می‌تواند درجهت x جابه جا شود وتغییر مکان آن در جهت y صفر است و همچنین اگر مرزی موازی بر محور y باشد، نقطه واقع بر آن تنها می تواند در جهت y جابه‌جا شود وتغییر مکان آن در جهت x صفر است. این دو شرط مرزی همانند اعمال شرایط مرزی دریشله (تغییر مکانی) در روش اجزای محدود اعمال می شوند.

همانطور که اشاره شد، پس از اعمال شرایط مرزی و تحلیل سازه خرپایی بوجود آمده، مختصات جدید نقاط کنترلی بدست می‌آید. در این روش متناسب با تغییر مختصات نقاط کنترلی، فواصل نقاط بردار گرهی هم اصلاح می شود.

به عنوان معیاری به منظور رسیدن به همگرایی در بهبود حل تطبیقی، مقدار تغییرات نسبی شاخص تأثیر θ (از رابطه (۲۰)) در هر سیکل، مورد استفاده قرار می گیرد و به یک مقدار کوچک محدود می شود. همچنین در مسائلی که به نرم خطای دقیق دسترسی نداریم، اختلاف بین نرم خطای تقریبی بدست آمده از دو سیکل متوالی بهبود شبکه معیاری برای توقف روند حل تطبیقی خواهد بود.

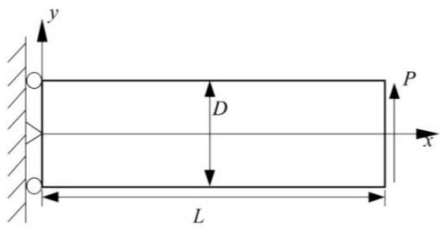
در ادامه جهت بررسی کارایی روش بهبود شبکه، به مدل‌سازی و تحلیل و بررسی خطاها و نحوه تغییرات مؤلفه های تنش دو مسأله الاستیسیته که دارای حل تحلیلی هستند، پرداخته شده است و نشان داده می‌شود که این روش در بهبود دقت حل روش ایزوژئومتریک موثر است.

۵- مسائل نمونه

۵-۱- تیر طره تیمو شنکو

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدل‌سازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۹). پارامترهای به‌کار برده شده در این آنالیز، به صورت زیر می‌باشد:

$$L=10, D=2,\ P=300,\ E=1500\ ,\ \ \nu=0.15$$

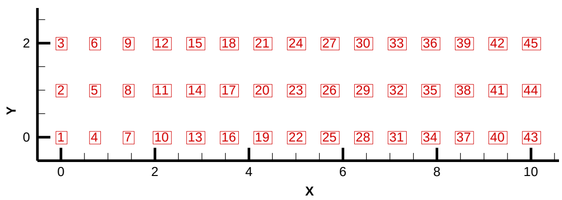


شکل ۹- تیر طره در شرایط تنش مساوی

تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو و گودیر به صورت رابطه (۳۱) ارائه شده است [۷].

$$\sigma_x=-\frac{P(L-x)y}{I}\ \ ;\ \ \sigma_y=0\ \ \ ;\sigma_{xy}=\frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4}-y^2) \qquad (۳۱)$$

که در آن $I=\dfrac{D^3}{12}$ است. برای مدل‌سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۴۵ نقطه کنترلی و یک ناحیه استفاده شده است (شکل ۱۰).



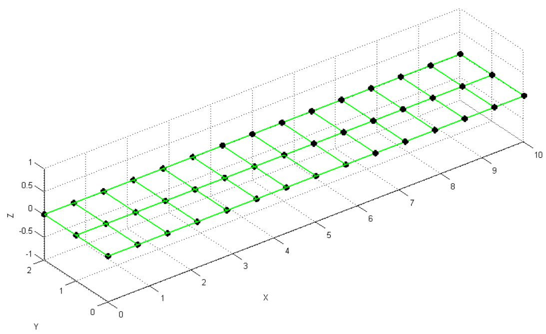
شکل ۱۰- نقاط کنترلی مورد استفاده در مدل‌سازی تیر طره

جهت کارایی بهتر تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [۱۷]، از توابع شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات η و ξ به‌صورت رابطه (۳۲) است.

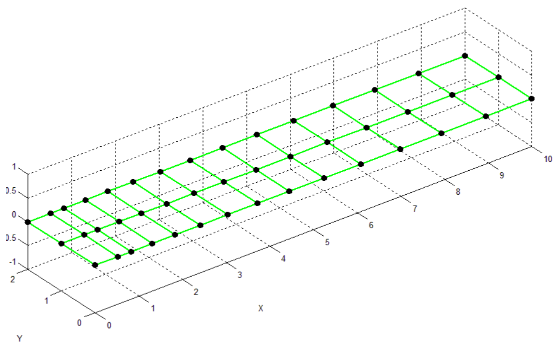
$$\eta=\{0,0,0.3,0.5,0.7,1,1\}\ ,$$
$$\xi=\{0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\} \qquad (۳۲)$$

همچنین در این مثال از نه نقطه گوس جهت انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است.

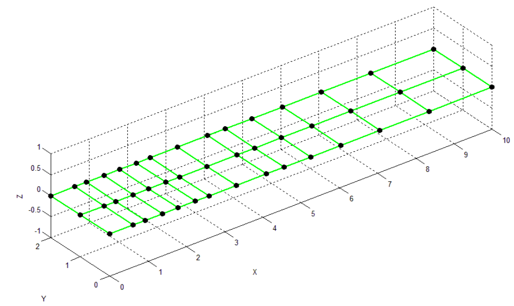
در شکل ۱۱، شبکه اولیه نقاط کنترلی تحت تاثیر نیروهای ناشی از اختلاف درجه حرارت و در شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول و دو سیکل دیگر حل تطبیقی ایزوژئومتریک نشان داده شده است.



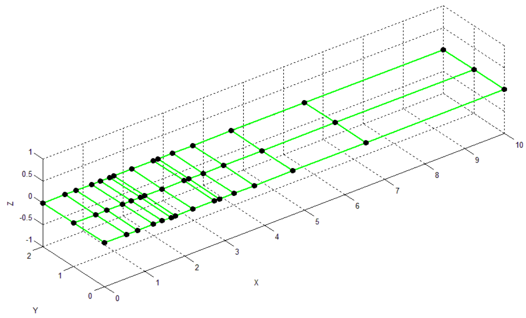
شکل ۱۱- شبکه اولیه نقاط کنترلی تحت تاثیر نیروهای ناشی از اختلاف درجه حرارت تیر طره



شکل ۱۲- مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول حل تطبیقی تیر طره



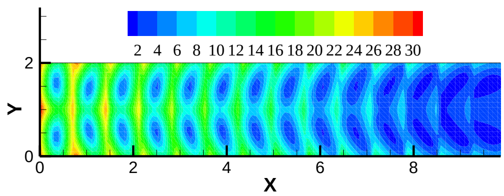
شکل ۱۳- مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل دوم حل تطبیقی تیر طره



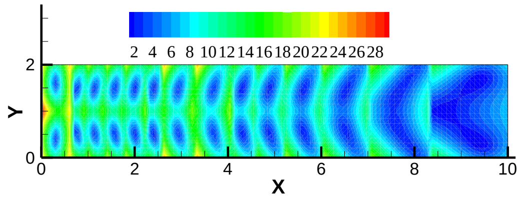
شکل ۱۴- مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل چهارم حل تطبیقی تیر طره

در شکل‌های ۱۵ تا ۱۷ نرم خطای انرژی دقیق بدست آمده از حل این مثال در سیکل‌های مختلف بهبود شبکه نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ماکزیمم خطا از ۳۰ به ۲۸ و ۲۶ کاهش یافته است که حاکی از عملکرد مناسب روش بهبود شبکه در کاهش خطا با طی چند سیکل است.

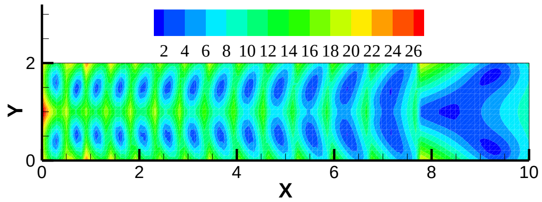
همچنین در شکل‌های ۱۸ و ۱۹، با رسم تغییرات مؤلفه‌های تنش در مسیر x=0.1، تاثیر بهبود شبکه بر افزایش دقت تنش در هر سیکل نشان داده شده است.



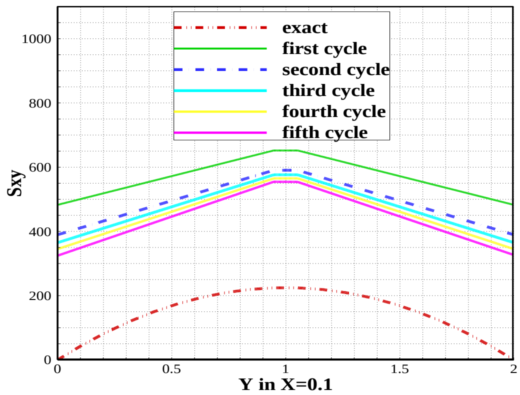
شکل ۱۵- نرم خطای انرژی در اولین سیکل از تحلیل تطبیقی تیر طره



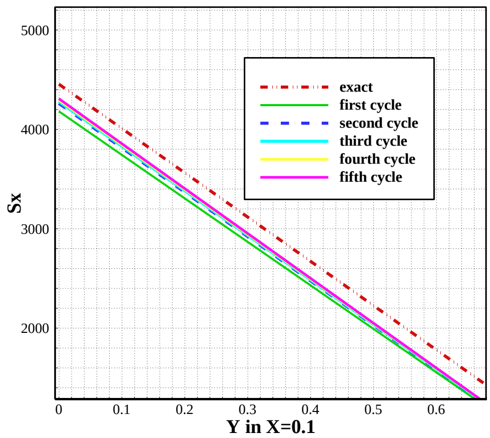
شکل ۱۶- نرم خطای انرژی در دومین سیکل از تحلیل تطبیقی تیر طره



شکل ۱۷- نرم خطای انرژی در چهارمین سیکل از تحلیل تطبیقی تیر طره



شکل ۱۸- تنش σxy تیر طره در مسیر x=0.1



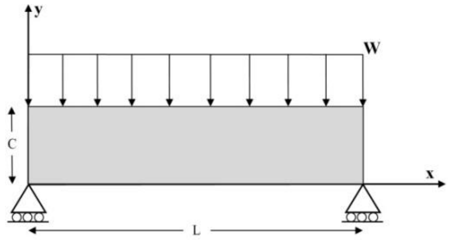
شکل ۱۹- تنش σ_x تیر طره در مسیر x=0.1

۵-۲- تیر دو سر مفصل

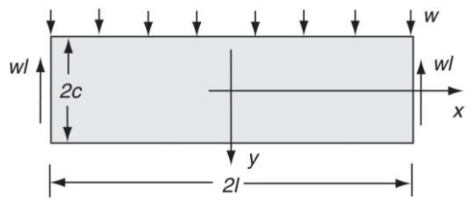
در این قسمت به مدل‌سازی تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک دو سر مفصل تحت بار گسترده در شرایط تنش مستوی پرداخته می‌شود (شکل ۲۰). پارامترهای به کار برده شده در مدل‌سازی و تحلیل این مثال به صورت زیر است (شکل۲۱):

$$L=10,\ C=2,\ W=11,\ E=1500,\ \nu=0.25$$

تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در بالا به صورت روابط (۳۳) تا (۳۵) در نظر گرفته شده است [۱۸].



شکل ۲۰- تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده



شکل ۲۱- پارامترهای تعریف شده در حل تحلیلی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده [۵]

$$\sigma_x=\frac{3w}{4c}\left(\frac{l^2}{c^2}-\frac{2}{5}\right)y-\frac{3w}{4c^3}\left(x^2y-\frac{2}{3}y^3\right) \qquad (۳۳)$$

$$\sigma_y=-\frac{w}{2}+\frac{3w}{4c}y-\frac{w}{4c^3}y^3 \qquad (۳۴)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{3w}{4c}x+\frac{3w}{4c^3}xy^2 \qquad (۳۵)$$

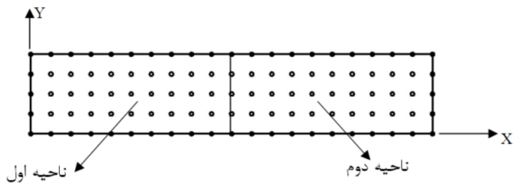
برای مدل‌سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۱۰۵ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است (شکل۲۲).

همچنین از توابع شکل نربز مرتبه دو و نه نقطه گوسی جهت انتگرال‌گیری عددی در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ξ و η به صورت رابطه (۳۶) است.

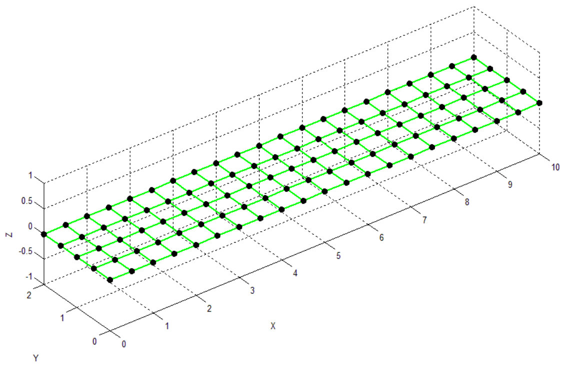
$$\xi=\{0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\}$$
$$\eta=\{0,0,0.3,0.5,0.7,1,1\} \qquad (۳۶)$$

در شکل ۲۳، شبکه اولیه نقاط کنترلی تحت تاثیر نیروهای ناشی از اختلاف درجه حرارت و در شکل‌های ۲۴ و ۲۵، مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول و دوم حل تطبیقی ایزوژئومتریک نشان داده شده است.

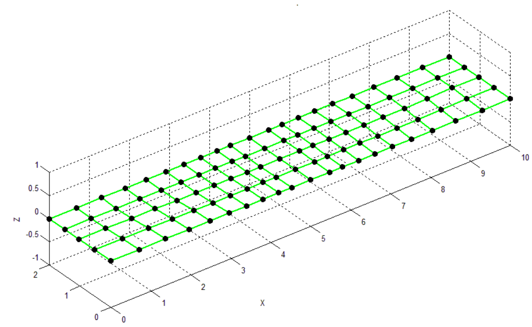
در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ نرم خطای انرژی دقیق در دو سیکل نشان داده شده است؛ همانطور که مشاهده می‌شود، میزان ماکزیمم نرم خطا از عدد ۱ به ۰/۹ کاهش یافته است که مؤید عملکرد مناسب روش تظریف در ایجاد کاهش خطا در این مثال است.



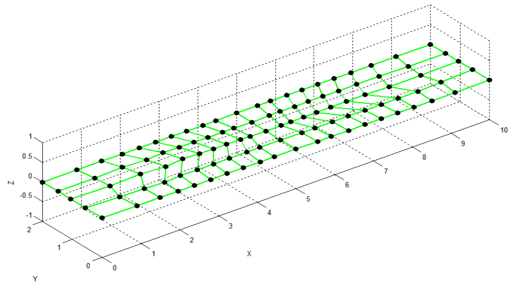
شکل ۲۲- نقاط کنترلی تیر دو سر مفصل در تحلیل ایزوژئومتریک



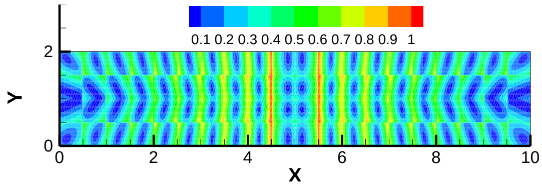
شکل۲۳- شبکه اولیه نقاط کنترلی تحت تاثیر نیروهای ناشی از اختلاف درجه حرارت تیر دو سر مفصل



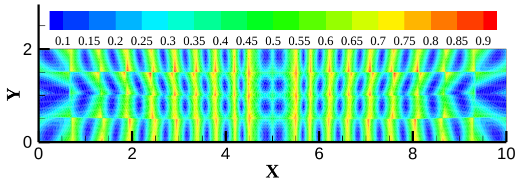
شکل۲۴- مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل اول حل تطبیقی تیر دو سر مفصل



شکل ۲۵- مختصات جدید نقاط کنترلی در سیکل دیگری از حل تطبیقی تیر دو سر مفصل

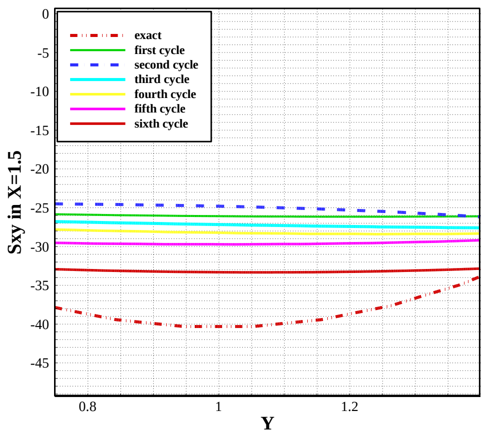


شکل ۲۶- نرم خطای انرژی در اولین سیکل از تحلیل تطبیقی تیر دو سر مفصل



شکل ۲۷- نرم خطای انرژی در دومین سیکل از تحلیل تطبیقی تیر دو سر مفصل

همچنین در شکل ۲۸، با رسم تغییرات یکی از مؤلفه های تنش در مسیر x=1.5 ، تأثیر بهبود شبکه بر افزایش دقت تنش تیر دو سر مفصل در هر سیکل نشان داده شده است.



شکل ۲۸- تنش σ_{xy} تیر دو سر مفصل در مسیر x=1.5

۶- نتیجه‌گیری

ارائه روشی ابداعی جهت بهبود شبکه نقاط کنترلی در تحلیل ایزوژئومتریک در این مقاله، مورد بحث قرار گرفت. همچنین کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک جهت حل تطبیقی، مورد ارزیابی قرار گرفته است. توجه به کاهش نرم خطای انرژی دقیق بعد از هر سیکل بهبود شبکه و نزدیک شدن مؤلفه تنش ایزوژئومتریک به حل دقیق در حل تطبیق یافته، نشان می دهد که روش ارائه شده در این پژوهش، به درستی شبکه نقاط کنترلی را به سمت نواحی با خطای بیشتر راهنمایی کرده و روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش نیز می تواند به درستی در حل تطبیقی نتایج تحلیل ایزوژئومتریک به‌کار رود.

۷- تشکر و قدردانی

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود انجام گردیده است.

۸- مراجع

[1] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement,Comput. Meth Appl Mech Engrg 194(39–41): 4135–195.

[2] Hassani B, Ganjali A, Tavakkoli SM (2012) An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. Eur J Mech 31: 101-109.

[3] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, Zienkiewicz OC (1987) Adaptive remeshing for compressible flow computations. J Comp Phys 72(2):449-466.

[4] Gyi W, Babuska I (1986) The h, p and h-p version of the finite element method in one dimention: Part 1: The error analysis of the p version. Part 2: The error analysis of the h and h-p version. Part 3: The adaptive h-p version. Numerische Math 48: 577-683.

[5] Zienkiewicz OC, Zhu Z (1989) Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. Int J Numer Meth Eng 28: 2839-2853.

[6] Kjetil AJ (2009) An adaptive isogeometric finite element Analysis. M.S. thesis, Norwegian University of Science and Technology.

[7] Michael RD, Bert J, Bernd S (2010) Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. Comput Methods Appl Mech Eng 199: 264-275.

[8] Ping W, Jinlan X, Jiansong D, Falai C (2011) Adaptive isogeometric analysis using rational PHT-splines. Comput Aided Design 43: 1438-1448.

[9] Piegl L, Tiller W (1997) The NURBS book (monographs in visual communication). 2nd edn. Springer-Verlag, New York.

[10] Timoshenko SP, Goodier JN (1977) Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York.

[11] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2005) The Finite Element Method. 6th edn. Elsevier Butterworth - Heinemann.

[12] Haber R, Shephard MS, Abel JF, Gallagher RH, Greenberg DP (1981) A general two-dimensional graphical finite-element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings. Int J Numer Meth Eng 17: 1015.

[13] Zienkiewicz OC, Philips DV (1971)An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates. Int J Numer Meth Eng 3: 519.

[14] Bar-Yoseph PZ, Mereu S, Chippada S, Kalro VJ (2001) Automatic monitoring of element shape quality in 2-D and 3-D computational mesh dynamics. Comput Mech 27: 378.

[15] Zeng D, Ethier CR (2005) A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains. Finite Elem Anal Des 41: 1118–1139.

[16] George PL, Borouchaki H (1998) Delaunay triangulation and meshing: application to finite elements. HERMES, Paris.

[17] Doorfel MR, Juttler B, Simeon B, (2010) Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. Comput Methods Appl Mech Eng 199(5-8): 264-275.

[18] Sadd MH (2005) ELASTICITY: theory, applications, and numerics. Elsevier Butterworth–Heinemann.