



مجله علمی روشنی مکانیک سازه ها و شماره ۴



دانشگاه صنعتی شاهرود

مجله مکانیک سازه ها و شماره ها آمادگی انتشار مقالات تخصصی در کلیه زمینه های مهندسی مکانیک و مباحث میان رشته ای مرتبط با این شاخه علمی را دارا است. لذا از کلیه اساتید، دانشجویان، پژوهشگران و فعالین صنعت دعوت می شود که حاصل تحقیقات جدید، پژوهش های بنیادین و ایده های نو خود را جهت انتشار به این نشریه ارسال نمایند. شایان ذکر است که این مجله دارای رویکرد یکسان در دعوت از تحقیقات دارای جنبه عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی است. همچنین امکان انتشار مقالات جدید در زمینه روشهای عددی و تحلیلی (شامل هر دو دیدگاه معین و تصادفی) در مهندسی مکانیک فراهم شده است. در پایان خاطر نشان می شود که سیاست اصلی این مجله بر تسریع فرآیند داوری و تعیین تکلیف مقالات در حداقل زمان ممکن استوار شده است.

#### اعتبار علمی - پژوهشی

اعتبار مجله مکانیک سازه ها و شماره ها در جلسه مورخ ۸۹/۱۲/۲۵ کمیسیون نشریات علمی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری مورد ارزیابی قرار گرفت و با درجه "علمی- پژوهشی" به تایید رسید و طی نامه شماره ۹/۳/۱۱/۱۰۵۲۷۸ به معاونت پژوهشی و فناوری این دانشگاه ابلاغ گردید.

# موزاییک‌بندی تصادفی و کاربرد آن در مکانیک ریزساختارها

خلیل فرهنگدوست<sup>۱</sup>، سعید رهنما<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد  
<sup>۲</sup>دانشجوی دکتری گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

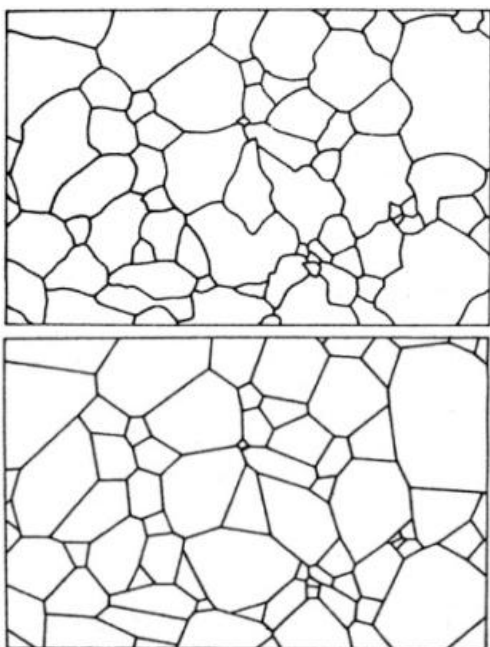
## چکیده

تقسیم‌بندی سطوح و حجم‌ها به قسمت‌های کوچک‌تر با شکل، اندازه و تعداد کاملاً تصادفی در اکثر علوم بویژه مهندسی کاربرد دارد. در این تحقیق ابتدا الگوریتم‌های ساخت نمودار ورونوی معرفی و بر پایه این الگوریتم‌ها برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب نوشته خواهد شد. توانایی در تولید تصادفی ریزساختار با استناد به داده‌های استخراج شده از پردازش تصویر ریزساختارهای واقعی، همچنین گنجاندن پارامترهای تصادفی در برنامه برای تولید سیستم‌های چند فاز با درصد فازهای متفاوت و نیز توانایی تولید داده‌های مفید جهت انتقال ریزساختار مورد نظر به نرم‌افزارهای المان محدود از جمله نقاط قوت برنامه نوشته شده است. در ادامه به یکی از کاربردهای موزاییک‌بندی جهت یافتن خواص مکانیکی معادل از روی خواص غیر ایزوتروپ کریستال‌ها اشاره شده است. در این بررسی با افزایش تعداد دانه‌ها، به عبارت دیگر کاهش اندازه دانه‌ها، مقادیر خواص تغییر کرده و به مقدار تجربی ماده که با در نظر گرفتن نتایج تست با دیدگاه ماکرو بدست آمده نزدیک شده و همچنین مقدار انحراف معیار کاهش یافته و خواص به حالت ماده ایزوتروپیک نزدیک‌تر می‌شود.

**کلمات کلیدی:** موزاییک‌بندی تصادفی؛ ورونوی؛ ریزساختار؛ خواص معادل.

## ۱- مقدمه

تقسیم بندی سطح به چند ضلعی و فضا به چند وجهی‌های کاملاً تصادفی، موزاییک‌بندی تصادفی نام دارد. در موزاییک‌بندی تصادفی تعداد، شکل و اندازه اجزاء کاملاً تصادفی است [۱]. یکی از پرکاربردترین ابزار ریاضی جهت انجام موزاییک‌بندی تصادفی نمودار ورونوی<sup>۱</sup> است [۲]. این دباگرام از تعدادی نقطه که بصورت تصادفی در صفحه یا فضا پخش شده‌اند و مرزهای بین این نقاط تشکیل شده است. الگوریتم‌های متفاوتی جهت ساخت نمودار ورونوی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به الگوریتم مستقیم و الگوریتم فورچون<sup>۲</sup> اشاره کرد [۳]. موزاییک‌بندی تصادفی در علوم مهندسی بویژه مهندسی مواد و مکانیک کاربردهای روز افزونی یافته است [۴-۸]. در مهندسی مواد جهت مدل کردن دانه‌بندی ریزساختارها در مواد بلوری که در واقعیت پدیده‌ای کاملاً تصادفی است، از موزاییک‌بندی تصادفی استفاده می‌شود. همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، ریزساختارهای فلزی را با ساده سازی می‌توان بصورت چند ضلعی‌های نامنتظم در نظر گرفت.



شکل ۱- ریزساختار مدل شده توسط چند ضلعی غیر منتظم [۱]

<sup>۱</sup> Voronoi

<sup>۲</sup> Fortune

به طور مشابه، واریانس مساحت سلولها در یک صفحه به مساحت  $C$  برابر است با:

$$\text{Var}(A) \approx \frac{0.2802c^2}{\lambda^2} \quad (5)$$

## ۲-۲- فرآیند خطی

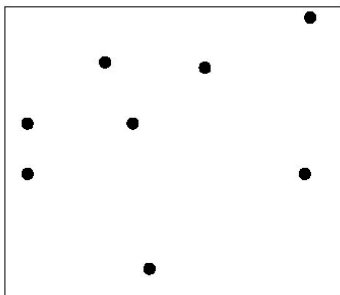
این فرآیند تصادفی به صورت تعدادی خط تصادفی در صفحه تعریف می‌شود. این خطوط اضلاع سلولها را مشخص می‌کنند و براساس عرض از مبدا و زاویه‌ی خط با افق خطوط تولید می‌شوند [۱]. فرآیند نقطه‌ای فرآیندی ساده‌تر و کاربردی‌تر است و با نمودارهای ورونوی که در ادامه شرح داده می‌شود، ارتباط مستقیم دارد. به همین دلیل در این تحقیق از این فرآیند جهت تولید موزایک‌بندی تصادفی و در نهایت شبیه سازی هندسی ریزساختار استفاده می‌شود.

## ۲-۳- نمودار ورونوی

یکی از ابزارهای ریاضی برای تعریف موزایک‌بندی در فرآیند نقطه-ای نمودار منسوب به ورونوی است [۲]. این نمودار از تعدادی نقاط تصادفی توزیع شده در صفحه و مرز بین آنها، تشکیل شده است. مرزبندی در نمودار ورونوی به گونه‌ای است که نواحی داخل هر سلول، دارای کمترین فاصله با نقطه مرکز خود، نسبت به سایر نقاط مرکزی سلولهای دیگر باشند. با این تعریف ریاضی می‌توان چند ضلعی‌هایی تصادفی و دارای اضلاع تصادفی در صفحه ایجاد نمود. برای توضیح کامل‌تر نمودار ورونوی، ابتدا تعاریف مقدماتی ارائه می‌شود.

نقطه: نقاط در یک صفحه به صورت یک مختصات دو بعدی تعریف می‌شوند. بدین منظور مختصات یک نقطه مانند  $Z$  به صورت  $(z_x, z_y)$  نشان داده می‌شود.

مرکز:  $S$  مجموعه  $n$  نقطه در صفحه مورد نظر است. این نقاط که به صورت تصادفی یکنواخت و یا هر توزیع تصادفی دیگری در صفحه توزیع شده‌اند، مرکز نامیده می‌شوند. شکل ۲،  $n = 8$  مرکز را در یک صفحه محدود به یک مربع نشان می‌دهد.



شکل ۲- مرکزها در یک صفحه

فاصله نقاط: فاصله نقطه  $z$  تا هر نقطه  $p$  با  $d_p(z)$  نشان داده می‌شود. در یک صفحه اقلیدسی فاصله نقطه  $z = (z_x, z_y)$  تا نقطه  $p = (p_x, p_y)$  برابر است با:

$$d_p(z) = \sqrt{(p_x - z_x)^2 + (p_y - z_y)^2} \quad (6)$$

مدل ریزساختار تولید شده طی فرآیند موزایک‌بندی تصادفی، اخیراً مورد توجه محققین مکانیک نیز قرار گرفته است. مطالعه در مورد تغییر شکل‌ها، جریان‌های تنش، ناحیه پلاستیک، جوانه زنی ترک و رشد ترک خستگی از جمله تحقیقاتی است که در ابعاد ریزساختاری و با کمک شبیه‌سازی هندسی ریزساختار رو به گسترش است. بررسی اثرات ریزساختاری بر روی پدیده‌های مکانیکی به درک صحیح از واقعیت رخ داده در درون ماده و بهبود قواعد و قوانین تجربی که نتیجه دیدگاه ماکرو به مسائل بوده، منتهی خواهد شد. در این تحقیق ابتدا الگوریتم‌های ساخت نمودار ورونوی که بر پایه آن برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب نوشته شده، معرفی شده است. در ادامه نیز به یکی از کاربردهای موزایک‌بندی جهت یافتن خواص مکانیکی معادل از روی خواص غیر ایزوتروپ کریستال‌ها اشاره شده است. همچنین اثرات پارامترهایی از جمله اندازه و تعداد دانه بر روی خواص معادل بررسی خواهد شد.

## ۲- فرآیندهای موزایک‌بندی

فرآیندهای تصادفی مختلفی برای تعریف موزایک‌بندی تصادفی مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از آن جمله مهمترین و کاربردی-ترین آنها دو فرآیند نقطه‌ای و خطی هستند.

## ۲-۱- فرآیند نقطه‌ای

این فرآیند تصادفی با تعدادی نقطه تصادفی در صفحه تعریف می‌شود. این نقاط می‌توانند مراکز سلولها و یا نقاط تلاقی اضلاع چند ضلعی‌هایی باشند که در هر صورت موزایک‌بندی مشخصی را تعریف می‌کنند [۱]. در این فرآیند تعداد نقاط توزیع شده به صورت تصادفی در صفحه، دارای توزیع پواسون (یا هر توزیع دیگر) با میانگین برابر  $\lambda$  است. به عبارت دیگر:

$$P(N_i = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

که در آن  $N$ ، متغیر تصادفی تعداد نقاط در صفحه است. بسادگی می‌توان نشان داد در فرآیند نقطه‌ای پواسون (توزیع تعداد نقاط توزیع پواسون باشد)، متوسط مساحت سلولها در یک صفحه به مساحت واحد برابر است با:

$$E(S) = \frac{1}{\lambda} \quad (2)$$

بدیهی است اگر مساحت صفحه مقدار ثابت  $C$  باشد:

$$E(S) = \frac{C}{\lambda} \quad (3)$$

همینطور هیندس<sup>۱</sup> و هاینز<sup>۲</sup> با استفاده از روش شبیه سازی آماری مونت-کارلو<sup>۳</sup> مقدار واریانس مساحت سلولها را در یک صفحه به مساحت واحد بصورت زیر تقریب زده‌اند [۹]:

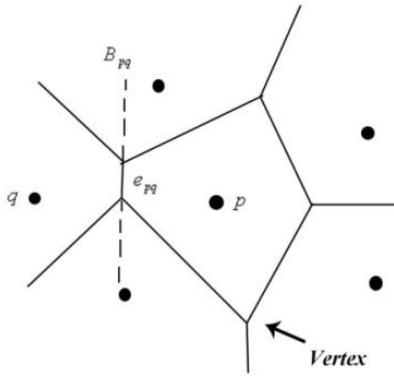
$$\text{Var}(A) \approx \frac{0.2802}{\lambda^2} \quad (4)$$

<sup>1</sup> Hindis

<sup>2</sup> Hinse

<sup>3</sup> Monte-Carlo

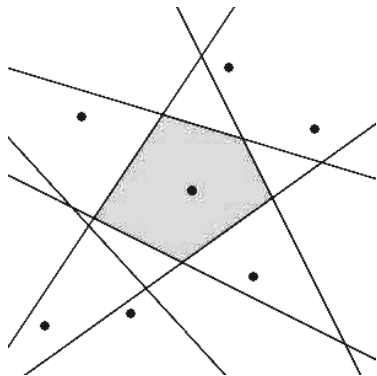
رأس<sup>۱</sup>: نقطه‌ای که در آن حداقل ۳ پاره خط یا خط هم را قطع کرده باشند، رأس گفته می‌شود. رأس در واقع نقطه‌ای است که حداقل از سه مرکز دارای فاصله مساوی باشد. لبه: به پاره خطها، نیم خطها و یا خطوط (اگر همه مراکز در یک ردیف باشند) در یک نمودار ورونوی، گفته می‌شود. همانطور که در شکل ۵ نشان داده شده،  $e_{pq}$  لبه‌ای است که بین دو مرکز  $p$  و  $q$  قرار گرفته و به نوعی مرز بین دو چند ضلعی شامل  $p$  و  $q$  است.



شکل ۵- رأس، عمود منصف و لبه یک ناحیه ورونوی

۲-۴- ساخت نمودار ورونوی با الگوریتم مستقیم

برای یافتن لبه‌ها، بایستی عمود منصف‌ها رسم شده سپس نقاط تقاطع این عمود منصف‌ها رأس‌ها و اشتراک آنها لبه‌ها را ایجاد می‌کند. همانطور که اشاره شد، عمود منصف دو نقطه  $p$  و  $q$  در واقع خط عمود بر خط متصل کننده دو نقطه در نقطه وسط آنهاست. برای ساختن چند ضلعی حول یک نقطه  $p$  بایستی، تمامی عمود منصف‌های بین  $p$  و سایر نقاط بدست آید. همان طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، نقاط دورتر از  $p$  عمود منصف‌هایی تولید می‌کنند که تأثیری در ساخت چند ضلعی مربوط به  $p$  ندارند. در ضمیمه (الف) الگوریتم ساخت نمودار ورونوی به روش مستقیم آمده است.



شکل ۶- نقاط تقاطع عمود منصف‌ها برای ساخت نمودار ورونوی

روش مستقیم نیاز به حذف خطوط اضافی برای هر نقطه و مقایسه  $\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n$  نقطه با یکدیگر در صفحه و تشخیص رأس‌ها از بین نقاط اتصال خطها دارد. بنابراین روش‌های دیگری

نزدیکترین فاصله: فاصله نزدیکترین نقطه تا نقطه  $z$  برابر است با:

$$d(z) = \min_{p \in S} d_p(z) \quad (7)$$

نمودار ورونوی روی مجموعه  $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ ،  $V(S)$ : به مجموعه نواحی در یک صفحه  $\Omega \supset S$  به صورت  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  گفته می‌شود، به طوری که:

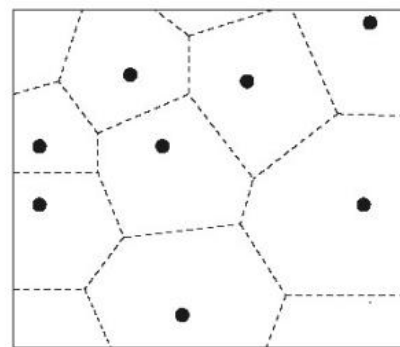
الف.  $i = 1, \dots, n, p_i \in \Omega_i$

ب.  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j$

ج.  $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega$

د. برای هر نقطه  $z \in \Omega_i$  و  $p_i \in S$   $d_p(z) = d(z)$

در اینجا برای بررسی چگونگی ساخت نمودار ورونوی، مانند آنچه که در شکل ۳ نشان داده شده است، به تعریف اجزای یک نمودار ورونوی پرداخته می‌شود.

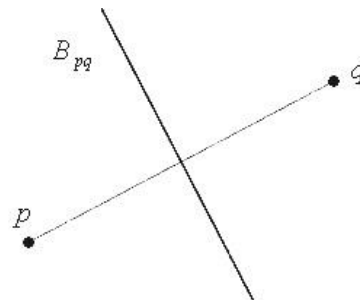


شکل ۳- نمودار ورونوی

عمود منصف  $B_{pq}$ : عمود منصف خطی است که نقاط روی آن فاصله یکسان با  $p$  و  $q$  داشته باشند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{z \in \mathbb{R}^2: d_p(z) = d_q(z)\} \quad (8)$$

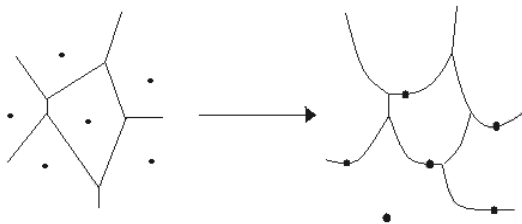
همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، عمود منصف خط عمود بر نقطه وسط خط اتصال دهنده دو نقطه است.



شکل ۴- عمود منصف دو نقطه

ناحیه ورونوی شامل  $p$ : این ناحیه یک چند ضلعی محدب شامل نقطه  $p$  است که به صورت  $R_p = \bigcap_{q \neq p} B_{pq}$  تعریف می‌شود. اجتماع این چند ضلعی‌ها،  $V(S)$ ، نمودار ورونوی را تشکیل می‌دهند. دایره ورونوی: دایره‌ای حول یک نقطه  $z$  به شعاع  $d(z)$  دایره ورونوی گفته می‌شود.

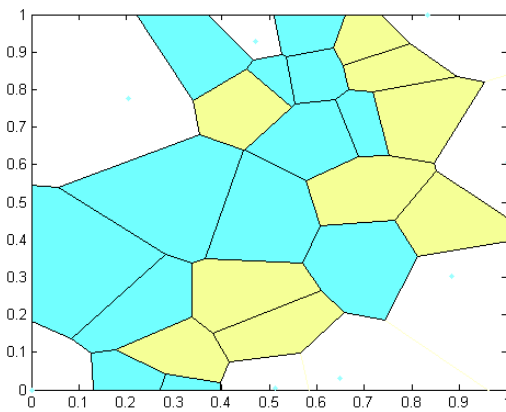
<sup>1</sup> Vertex



شکل ۸- نگاشت لبه ها و رأس های نمودار

۳- رسم نمودار ورونوی در نرم افزار متلب

در شکل ۹ از دستورات رایج و مرسوم در نرم افزار متلب جهت تولید نمونه تصادفی استفاده شده است. تعداد نقاط ۳۰ و با استفاده از توزیع برنولی اقدام به نوع بندی و رنگ آمیزی سلول ها با دو رنگ، جهت نشان دادن فازهای مختلف، شده است.



شکل ۹- نمودار ورونوی رنگ آمیزی شده بر اساس مدل برنولی

همانطور که در شکل ۹ مشاهده می شود، نمودار رسم شده توسط دستورات مرسوم متلب دارای چند نقیصه قابل توجه است. اولین نقیصه رسم نکردن برخی از لبه ها در این نمودار و دومین نقیصه تلفیق برخی سلولهای حاشیه ای با یکدیگر به نحوی که تعداد سلول ها معمولاً از تعداد نقاط کمتر است. نقیصه دوم باعث ایجاد نواحی سفید (رنگ آمیزی نشده) شده که مطلوب نیست. به نظر می رسد، این نقایص به سبب در نظر گرفتن صفحه دو بعدی نامحدود به جای مربع محدود در محاسبات مربوط به رسم نمودار بوجود آمده است. همچنین بدلیل عدم دسته بندی داده ها توسط این دستورات که برای استفاده از نمودار در نرم افزار المان محدود الزامی است و به منظور رفع دیگر نواقص که در این بخش ذکر شد، با استفاده از الگوریتم مستقیم که در ضمیمه (الف) توضیح داده شده است، نمودارها رسم می شوند. در این برنامه قابلیت ایجاد تمامی پارامترها بر اساس توزیع های مختلف آماری گنجانده شده است. تعداد سلول ها، احتمال نوع بندی جهت ایجاد درصد های مختلف فازی در ریزساختارهای چند فازی و همچنین تولید سیستم های سه فازی از جمله این پارامترها می باشند. نمونه های دو

معرفی شده اند که به مقایسه کمتر و در نتیجه زمان کوتاه تری نیاز دارند و فضای کمتری برای محاسبه را اشغال می کنند. یکی از معروف ترین و کاربردی ترین این روش ها، الگوریتم منسوب به فورچون است که در بخش بعد به معرفی و توضیح آن پرداخته می شود.

۲-۵- ساخت نمودار ورونوی با الگوریتم فورچون

در این بخش به معرفی شکل ریاضی الگوریتم پرداخته و سپس در ضمیمه (ب) ساخت نمودار ورونوی به روش الگوریتم فورچون ارائه خواهد شد.

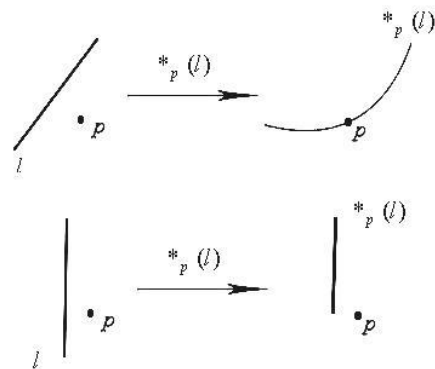
نگاشت  $*$ : نگاشت  $R^2 \rightarrow R^2$  به صورت  $(z) = (z_x, z_y + d(z))$  برای سادگی در نگارش، از این پس  $(B)$  با  $B^*$  نشان داده می شود، که  $B$  زیر مجموعه ای از صفحه است.

نگاشت  $*p$ : برای شرح بهتر ابتدا یک نگاشت کمکی به صورت  $(z) = (z_x, z_y + d_p(z))$  تعریف و به بررسی خصوصیات آن پرداخته می شود.

همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده است، خصوصیات نگاشت  $*p$  شامل:

الف: اگر  $l$  یک خط غیر عمودی (اریب یا افقی) باشد، آنگاه نگاشت  $(l)$  یک هذلولی است.

ب: اگر  $l$  عمودی باشد، آنگاه نگاشت  $(l)$  نیم خط بالای نقطه  $p$  است.



شکل ۷- نگاشت نقطه ای یک خط عمودی و غیر عمودی

بنابراین نگاشت  $*$  برای یک لبه از نمودار ورونوی، یک هذلولی و یا یک خط عمودی است. از آنجا که نگاشت  $*$  مختصات عمودی هر نقطه از یک خط را به اندازه فاصله نزدیک ترین نقطه مرکز افزایش می دهد، بنابراین هر مرکز پایین ترین نقطه از هذلولی ایجاد شده از چند ضلعی انتقال یافته حول آن مرکز است. به عبارت دیگر، اگر  $p_{pq}$  زیر نقطه  $p$  باشد، آنگاه  $p$  روی  $e_{pq}^*$  قرار دارد و پایین ترین نقطه آن است. نگاشت  $*$  یک نگاشت یک به یک روی  $V$  است. شکل ۸ نگاشت نمودار ورونوی را نشان می دهد. در نهایت جهت ساخت نمودار از نگاشت  $*^{-1}$  استفاده می شود. در ضمیمه (ب) ساخت نمودار ورونوی به روش الگوریتم فورچون آمده است.

#### ۴- راستی آزمایشی ریزساختار تولید شده توسط برنامه نوشته شده

برای بررسی صحت شبیه سازی انجام شده توسط برنامه نوشته شده دور روش وجود دارد که در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

#### ۴-۱- برآورد متوسط میزان کثرت سلولها بر اساس آزمون نیکویی برآزش مربع کای

نمونه ای تصادفی به تعداد  $m$ ، از مربع های دارای مساحت یکسان  $c$  در نظر گرفته شده است، به طوری که نمونه نام شامل  $n_i$  سلول باشد. در این صورت یک برآوردگر برای متوسط میزان کثرت سلولها یعنی  $\lambda$  برابر است با:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m n_i \quad (9)$$

بدیهی است که برآوردگر میزان متوسط کثرت سلولها را واحد برابر با  $\frac{\hat{\lambda}}{c}$  است و بدین ترتیب برآوردگر میانگین مساحت سلولها برابر است با:

$$\hat{E}(S) = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{mc}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad (10)$$

که همان میانگین هارمونیک متوسط مساحت اختصاص یافته به هر مرکز برای نمونه است. از این برآوردگر می توان برای شبیه سازی قطعات نمونه بر اساس مدل ریاضی ورونوی تولید شده با یک فرآیند نقطه ای پواسون با میانگین  $\hat{\lambda}$  استفاده نمود. به عبارت دیگر، اگر نمونه هایی از نمودار ورونوی بر اساس فرآیند نقطه ای پواسون با میانگین  $\hat{\lambda}$  تولید شود، این نمونه ها به طور متوسط دارای ویژگی های شکل شناسی یکسانی با نمونه های واقعی خواهند بود. از جمله این ویژگی های شکل شناسی یکسان، دارا بودن متوسط مساحت یکسان برای سلولها و تطابق توزیع مکانی رأس هاست. تمام ویژگی های ذکر شده برای برآوردگر  $\lambda$  در صورتی درست هستند که فرض تطابق توزیع فرآیند با توزیع پواسون درست باشد. برای بررسی صحت این فرض از آزمون نیکویی برآزش مربع کای استفاده می شود. برای آزمون فرض نیکویی برآزش به توزیع پواسون، برای نمونه بیان شده، ابتدا برآوردگر  $\hat{\lambda}$  به دست می آید، سپس جدول فراوانی مقادیر  $n_i$  تشکیل شده به طوری که آخرین دسته جدول شامل فراوانی مقادیر بزرگتر و یا مساوی مقدار بیشینه باشد و برای هر مقدار  $z$  (و یا بازه مقادیر) در جدول، احتمال زیر به دست می آید:

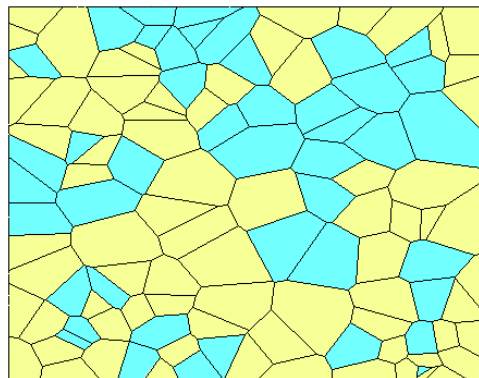
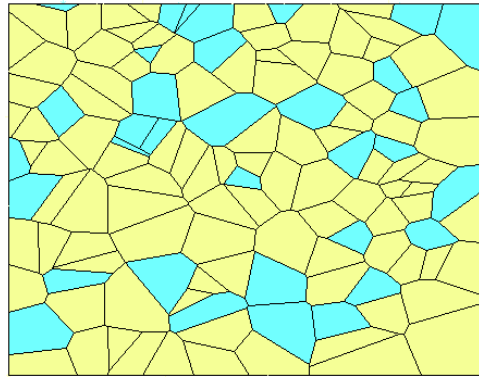
$$\hat{P}_j = P(N = j) \quad (11)$$

که در آن  $N$  متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با میانگین  $\hat{\lambda}$  است. با در نظر گرفتن  $\hat{e}_j = m\hat{P}_j$ ، اگر فراوانی مقدار  $z$  در جدول فراوانی برابر  $E_j$  و تعداد مقادیر آن برابر  $k$  باشد، آنگاه:

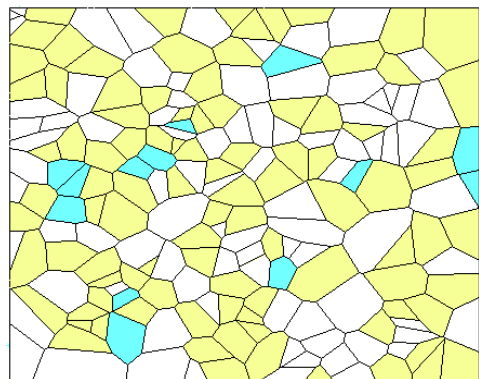
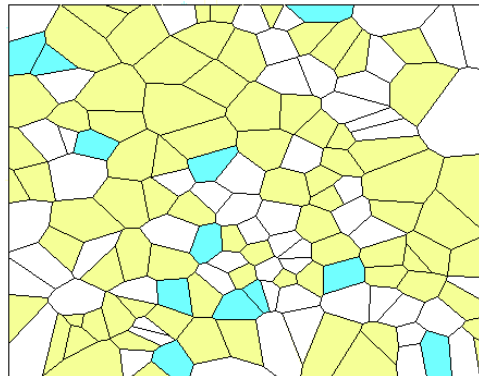
$$Z = \sum_j \frac{(E_j - \hat{e}_j)^2}{\hat{e}_j} \quad (12)$$

حال با مقدار بحرانی توزیع مربع کای با  $k-2$  درجه آزادی یعنی،  $\chi_{1-\alpha}^2(k-2)$ ، که  $\alpha$  خطای نوع اول آزمون فرض است، مقایسه می شود. اگر  $Z > \chi_{1-\alpha}^2(k-2)$ ، فرض برآزش توزیع پواسون به فرآیند رد شده و در غیر این صورت فرض پذیرفته می شود. در

فازی از نمودارهای ایجاد شده توسط برنامه فوق در شکل ۱۰ و دو نمونه با ریزساختار سه فازی در شکل ۱۱ آورده شده است.



شکل ۱۰- نمودارهای دو فازی تولید شده توسط برنامه متلب



شکل ۱۱- نمودارهای سه فازی تولید شده توسط برنامه متلب

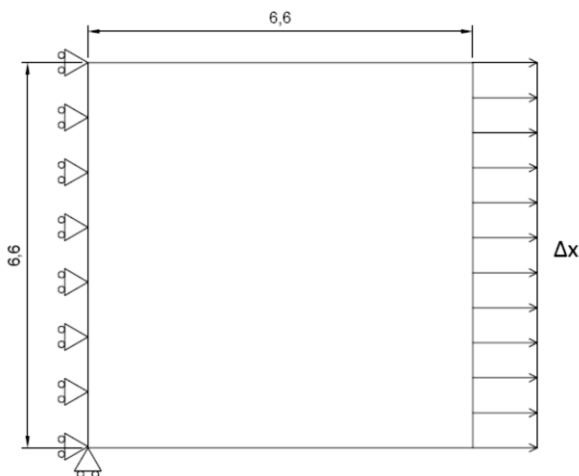
### ۵- کاربرد در مکانیک ریزساختارها

در این بخش به بررسی یک نمونه از کاربردهای موزاییک‌بندی تصادفی در یافتن مدول الاستیک و ضریب پواسون معادل از روی خواص غیر ایزوتروپیک دانه‌ها در یک صفحه نازک از جنس BaTiO<sub>3</sub> با ساختار کریستالی تتراگونال که خواص الاستیک غیر ایزوتروپ کریستال آن در جدول ۱ آمده است، پرداخته می‌شود. انتخاب این جنس به دلیل وجود نتایج تجربی در مورد این آلیاژ خاص است.

جدول ۱- ضرایب الاستیک کریستال تتراگونال BaTiO<sub>3</sub>

مقدار (GPa)	ضرایب الاستیک
۲۷۵.۱	C <sub>11</sub>
۱۷۹.۰	C <sub>12</sub>
۵۴.۳	C <sub>44</sub>
۱۶۴.۹	C <sub>33</sub>
۱۵۱.۶	C <sub>13</sub>
۱۱۳.۱	C <sub>66</sub>

در این تحلیل یک سطح مقطع مربع شکل تحت بارگذاری مانند آنچه که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. سطح این مربع توسط الگوریتم ورونوی و نرم‌افزار متلب با ۴۰ آرایش مختلف موزاییک‌بندی شده و وارد نرم‌افزار اباکوس شده، سپس هر کدام از دانه‌های تولید شده در هر نمونه با در نظر گرفتن یک جهت‌گیری تصادفی برای جهت کریستالی [100] که از توزیع یکنواخت  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq +90$ ، بدست می‌آید با در نظر گرفتن خواص جدول ۱، بصورت غیر ایزوتروپیک شبیه‌سازی می‌شوند. چون نتایج آزمایشگاهی بر اساس اندازه میانگین دانه  $1 \mu\text{m}$  انجام شده، با استفاده از معادله (۳) تعداد میانگین دانه‌ها ۵۶ دانه در نظر گرفته می‌شود. در این حالت جهت کریستالی [001] عمود بر صفحه مربعی خواهد بود.



شکل ۱۳- ابعاد به  $\mu\text{m}$  و نحوه بارگذاری مدل المان محدود صفحه

شکل ۱۴ ریزساختاری که توسط برنامه متلب تولید شده، در محیط نرم افزار المان محدود نشان می‌دهد.

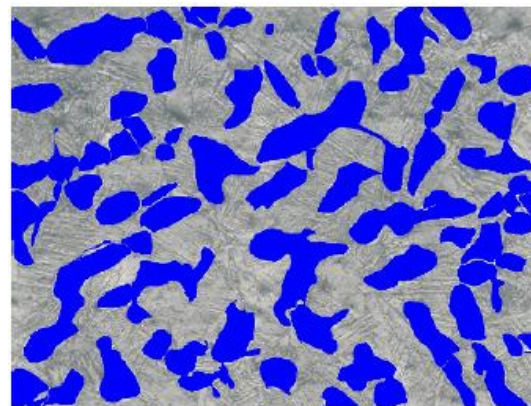
ضمیمه (ج) یک نمونه مثال جهت راستی آزمایشی فرض توزیع پواسون برای تعداد سلول‌ها آمده است.

### ۴-۲- پردازش تصویر

در این روش عکس گرفته شده از ریزساختار واقعی توسط نرم‌افزار پردازش تصویر کلمکس، پردازش شده و نتایج آماری بدست آمده از آن بعنوان ورودی در اختیار الگوریتم قرار گرفته و سپس بر روی خروجی‌های برنامه نیز پردازش تصویر انجام می‌گیرد. شکل ۱۲ نمونه‌ای از ریزساختار آلیاژ Ti-6Al-4V را در کنار تصویر پردازش شده نشان می‌دهد. در شکل ۱۲-الف فاز روشن‌تر  $\alpha$  و فاز تیره‌تر  $\beta$  و تعداد کل دانه‌ها ۱۲۲ عدد و درصد فاز  $\alpha$ ، ۴۰ درصد می‌باشد. به تعداد ۱۸ نمونه از عکس این آلیاژ داده‌ها حاکی از میانگین تعداد دانه‌ها ۹۸ و واریانس ۲ و درصد فاز  $\alpha$  با میانگین ۳۸ درصد و واریانس ۲/۵ است. پس از ورود داده‌ها به برنامه نوشته شده، نمودارهای خروجی مورد پردازش تصویر قرار گرفته و نتایج حاکی از درصد خطای بین ۱ تا ۵ درصد در مورد پارامترهای فوق‌الذکر است. این خطا ناشی از فرآیند تصادفی حاکم بر الگوریتم و روش ورونوی می‌باشد که در مورد تولید هندسی دانه‌بندی ریزساختارها، خود آن نقطه قوتی برای برنامه نوشته شده در نرم‌افزار متلب محسوب می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱۲- (الف): ساختار دوفازی آلیاژ Ti-6Al-4V، (ب): تصویر پردازش شده



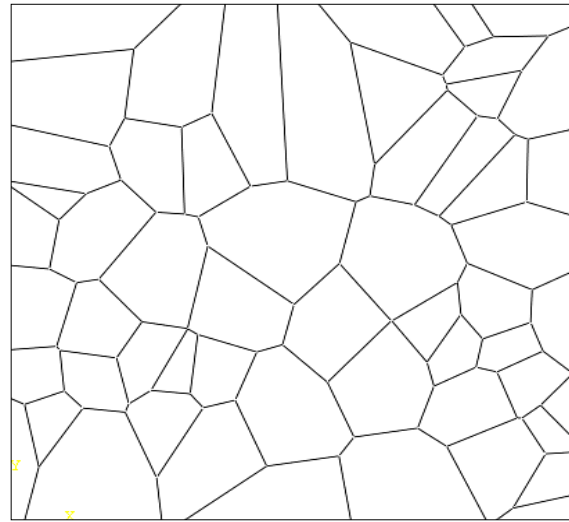
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{L} \quad (14)$$

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (15)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (16)$$

همانطور که در شکل ۱۵ می توان دید، تنش معادل فان مایسز بدلیل تغییرات ضرایب الاستیک غیر ایزوتروپیک در مرز دو دانه بصورت غیر پیوسته است و مقادیر مختلف را نشان می دهد. در جدول ۲ نتایج بدست آمده با نتایج تجربی مقایسه شده است. نتایج حاکی از دقت شبیه سازی مدل ریزساختاری در پیش گویی مدول الاستیک و با تقریبی ضعیف تر در مورد ضریب پواسون است.

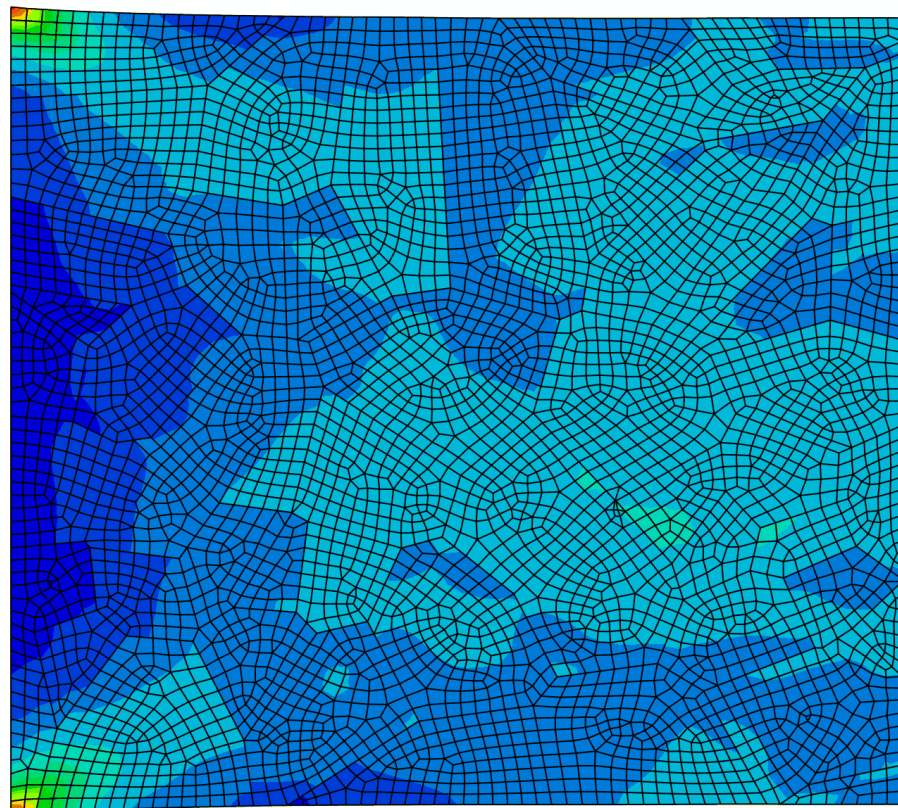
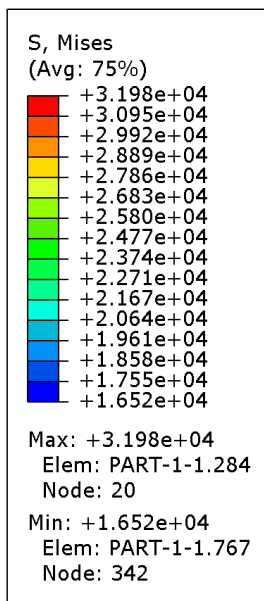
در گام بعدی اثرات تعداد دانه بر روی خواص مکانیکی بررسی شده است. در این بخش با افزایش دانه ها و به تبع آن کاهش اندازه دانه همانطور که در جدول ۳ و جدول ۴ دیده می شود، مقدار میانگین مدول الاستیک به نظر می رسد به اندازه مدول الاستیک واقعی ماده در ابعاد ماکرو نزدیک می شود و همچنین انحراف معیار استاندارد رو به کاهش است. این در حالی است که تست بر روی قطعه با اندازه دانه های کوچک انجام نشده و نتایج حاصل پیش بینی در مورد خواص الاستیک است که از شبیه سازی گرفته شده است.



شکل ۱۴- مدل ریزساختار تولید شده توسط نرم افزار متلب که وارد نرم افزار آباکوس شده

این ساختار شبیه سازی شده با وارد شدن در نرم افزار المان محدود آباکوس مورد تحلیل استاتیکی قرار گرفته و از روی نتایج بدست آمده از نرم افزار مدول الاستیک و ضرایب پواسون معادل از معادلات زیر بدست می آیند:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} \quad (13)$$



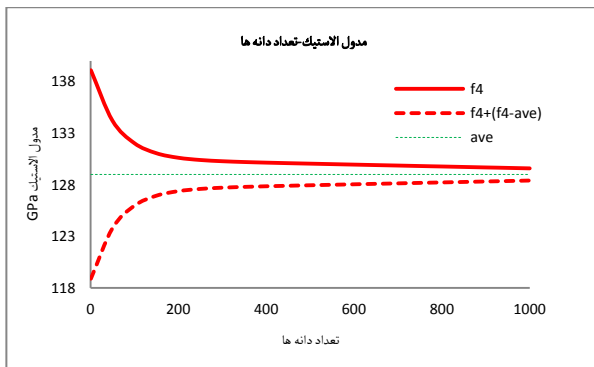
شکل ۱۵- تنش فان مایسز و ناپیوستگی تنش در مرز دانه ها



جدول ۵- ثابت‌های توابع  $f_4$  و  $f_6$ 

	a	b	c	d	g	h
$f_4$	8.741	-0.0168	130.5	-7e-6	-	-
$f_6$	8.52	-0.0156	130.1	-6.75e-6	2.1	-0.1e-8

در شکل ۱۷ تابع  $f_4$  بر حسب تعداد دانه که محدوده قرار گیری داده‌ها را نشان می‌دهد، ترسیم شده است. همانطور که دیده می‌شود با افزایش دانه‌ها تابع به خط میانگین نزدیک می‌شود. با یافتن رابطه تعداد دانه و مدول الاستیک از تعدادی محدود نمونه می‌توان پیش از تولید ریزساختارهای متفاوت با استفاده از فرآیندهای متالورژیکی، عملیات حرارتی پرهزینه و زمان‌بر و انجام تست، خواص کششی همچون مدول الاستیک و ضریب پواسون را پیش‌بینی کرد و قطعات مورد نظر را پیش از تولید با ساختارهای متفاوت از طریق شبیه‌سازی مورد آزمون قرار داد.



شکل ۱۷- محدوده قرارگیری ۹۵٪ داده‌ها بر حسب تعداد دانه‌ها

#### ۶- نتیجه‌گیری

همانطور که اشاره شد، روش موزایک‌بندی و رونوی، ابزاری کاربردی جهت بررسی‌های ریزساختاری در مورد آلیاژهای مختلف است. در این تحقیق ابتدا الگوریتم‌های ساخت نمودار و رونوی معرفی و بر پایه این الگوریتم‌ها برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب نوشته شد. توانایی در تولید تصادفی ریزساختار با استناد به داده‌های استخراج شده از پردازش تصویر ریزساختارهای واقعی، همچنین گنجانیدن پارامترهای تصادفی در برنامه برای تولید سیستم‌های چند فاز با درصد فازهای متفاوت و نیز توانایی تولید داده‌های مفید جهت انتقال ریزساختار مورد نظر به نرم‌افزارهای المان محدود از جمله نقاط قوت برنامه نوشته شده است. برای راستی آزمایی توزیع تعداد دانه‌ها و خروجی برنامه به دو روش اشاره شد که هر دو آنها از درستی و صحت برنامه در تولید ریزساختار حکایت دارند. در ادامه به یکی از کاربردهای موزایک‌بندی جهت یافتن خواص مکانیکی معادل از روی خواص غیر ایزوتروپ کریستال‌ها اشاره شد. در این تحقیق با افزایش تعداد دانه‌ها و یا به عبارت دیگر کاهش اندازه دانه‌ها، مقادیر خواص تغییر کرده و به مقدار تجربی که با در نظر گرفتن دیدگاه ماکرو آزمایش و محاسبه شده است، نزدیک شده و همچنین مقدار انحراف معیار کاهش یافته و خواص به حالت ماده ایزوتروپیک

جدول ۲- مقایسه نتایج تجربی با نتایج حاصل از مدل ریزساختاری

خاصیت مکانیکی	این تحقیق	نتایج تجربی
E(GPa)	۱۲۹.۰ انحراف معیار ۰.۷	۹۵-۱۵۰
$\nu_{xy}$	۰.۲۶۴ انحراف معیار ۰.۲۳۷	۰.۳-۰.۳۸

جدول ۳- تاثیر افزایش تعداد دانه و یا به عبارت دیگر کاهش اندازه دانه‌ها، بر روی مدول الاستیک (GPa)

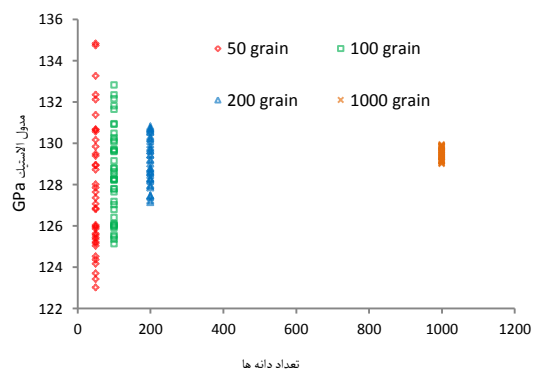
	دانه ۲۰۰	دانه ۱۰۰	دانه ۵۶
میانگین	۱۲۵.۶	۱۲۷.۰۱	۱۲۹.۰
انحراف معیار	۰.۳۷	۰.۵۶	۰.۷

جدول ۴- تاثیر افزایش تعداد دانه و یا به عبارت دیگر کاهش اندازه دانه‌ها، بر روی ضریب پواسون

	دانه ۲۰۰	دانه ۱۰۰	دانه ۵۶
میانگین	۰.۲۵۱	۰.۲۵۵	۰.۲۶۴
انحراف معیار	۰.۰۹	۰.۱۵	۰.۲۷۲

با افزایش تعداد دانه‌ها انحراف معیار استاندارد و پخش داده‌ها کاهش می‌یابد. با در نظر گرفتن این موضوع می‌توان برای قرارگیری ۹۵٪ داده‌ها یک محدوده خاص توسط توابع مختلف بر حسب تعداد دانه ارائه داد. همانطور که در شکل ۱۶ دیده می‌شود، با افزایش تعداد دانه‌ها پخش داده‌ها کمتر شده و می‌توان تابعی بصورت نمایی با چهار ثابت در نظر گرفت که باندی جهت قرارگیری اکثر داده‌ها در این محدوده را مشخص می‌کند:

$$f_4 = a \cdot e^{bx} + c \cdot e^{dx} \quad (17)$$



شکل ۱۶- پراکندگی داده‌ها برای مدول الاستیک در ۴۰ نمونه در تعداد مختلف دانه درون صفحه مربعی

برای بالا بردن دقت این تابع می‌توان از تابع نمایی با شش ثابت نیز استفاده کرد. مقادیر ثابتها در جدول ۵ آمده است.

$$f_6 = a \cdot e^{bx} + c \cdot e^{dx} + g \cdot e^{hx} \quad (18)$$

برای تابع  $f_4$  با چهار ثابت، درصد خطا ۰.۲٪ و برای تابع  $f_6$  با شش ثابت، درصد خطا ۰.۱٪ محاسبه شده است.

۱۳- فرض شود،  $c$  نقطه میانی دو نقطه  $V_i$  و  $V_{i+1}$  باشد.

$$d = d(c, p_i)$$

۱۴- برای  $h = 1, \dots, n$  بجز  $i$  و  $z$  مراحل زیر انجام شود.

$$d' = d(c, p_h)$$

اگر  $d' < d$  از حلقه شمارش  $h$  خارج شود.

$h$  بعدی

اگر به هیچ عنوان از حلقه شمارش  $h$  خارج نشد، بازه

$(V_i, V_{i+1})$  یک لبه است.

۱۵- لبه مورد نظر رسم شود.

۱۶-  $l$  بعدی

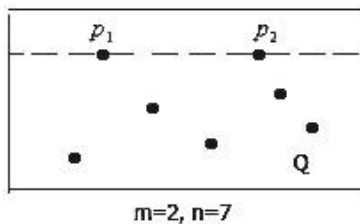
۱۷-  $z$  بعدی

۱۸-  $i$  بعدی

۱۹- پایان

### ضمیمه (ب): الگوریتم فورچون

بنا به تعاریف ذکر شده، با توجه به شکل ب-۱ و با فرض اینکه  $T$  خط ساحلی باشد، همین طور  $m$  نقطه، دارای مختصات  $y$  بیشینه که به ترتیب مختصات  $x$  شان مرتب شده‌اند، به صورت  $p_1, \dots, p_m$  باشند. الگوریتم فورچون بصورت زیر خواهد بود.



شکل ب-۱- نقاط با بیشینه  $y$  و مجموعه  $Q$

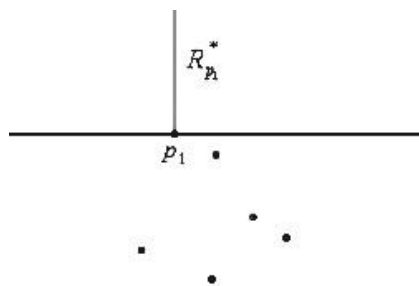
۱- همه نقاط غیر از  $p_1, \dots, p_m$  در  $Q$  قرار داده شود.

۲- در این حالت خط ساحلی  $T$  شامل هذلولی‌های  $p_1, \dots, p_m$  و مرزهای مشترک آنهاست که به ترتیب به صورت زیر در  $T$  قرار داده می‌شود.

روشن  $R_{p_1}^*, C_{p_1, p_2}^0, R_{p_2}^*, C_{p_2, p_3}^0, \dots, C_{p_{m-1}, p_m}^0, R_{p_m}^*$  جهت  $T \leftarrow$

شدن بهتر مرحله سوم الگوریتم، با توجه به شکل ب-۲ اگر فرض

شود،  $m = 1$ . در این حالت:  $T \leftarrow R_{p_1}^*$



شکل ب-۲- آغاز تشکیل ناحیه نگاشت هذلولی شکل یک نقطه

چارو شده

نزدیک‌تر می‌شود، یعنی در ریزساختارهای درشت تفاوت بین خواص کششی از یک نمونه تا نمونه دیگر زیاد خواهد بود و با افزایش تعداد دانه و عبارتی دیگر کوچکتر شدن اندازه دانه تفاوت خواص بین نمونه‌ها کاهش می‌یابد.

تست‌ها معمولاً بر روی یک جنس با یک اندازه دانه‌بندی انجام می‌گیرد و برای دانستن اثرات تغییرات اندازه دانه و پیشگویی در مورد خواص الاستیک قطعات با ریزساختار و اندازه دانه متفاوت، قطعه جدید برای تست باید در دسترس باشد که این فرآیند زمان‌بر و پرهزینه است. به همین دلیل استفاده از شبیه سازی ریزساختار توسط یک فرآیند موزاییک‌بندی تصادفی توانایی پیش‌گویی و پیش‌بینی خواص و رفتار ماده مثلاً در مواجهه با طیف وسیعی از بارگذاری و رشد ترک را بدون در دست بودن آن و صرف هزینه ساخت و عملیات حرارتی مختلف جهت رسیدن به دانه‌بندی مورد نظر، میسر می‌سازد.

با توسعه روش ورونوی در فضای سه بعدی می‌توان پیش‌بینی دقیق‌تری از خواص معادل و همچنین درک عمیق‌تر از قوانین حاکم بر مکانیک ریزساختاری داشت. در چشم‌انداز دیگری می‌توان به این نکته اشاره کرد که استفاده از الگوریتم ورونوی و موزاییک‌بندی حاصل از آن، علاوه بر کاربرد آن در بدست آوردن خواص کلی از خواص محلی کریستال‌ها، در دیگر زمینه‌های مکانیک ریزساختاری نیز می‌تواند کاربرد داشته باشد. مکانیک شکست در ابعاد ریزساختاری و همچنین رشد ترک خستگی در این ابعاد و اثرات ریزساختاری مانند تعداد دانه‌ها، اندازه دانه‌ها، مورفولوژی ریزساختار و نواحی مرزی بین دانه‌ها از دیگر مسائلی است که می‌توان با کمک گرفتن از موزاییک‌بندی تصادفی مورد بررسی قرار داد.

### ۷- ضمایم

#### ضمیمه (الف): الگوریتم مستقیم

۱- برای  $i = 1, \dots, n-1$  مراحل زیر انجام شود. برای  $i = 1, \dots, n$  مراحل زیر را انجام شود.

۲- معادله عمود منصف دو نقطه  $p_i$  و  $p_j$  به دست آورده شود.

۳- برای  $k = 1, \dots, n$  بجز  $i$  و  $z$  مراحل زیر انجام شود.

۴- معادله عمود منصف دو نقطه  $p_i$  و  $p_k$  به دست آورده شود.

۵- محل تلاقی دو عمود منصف به دست آمده در بالا  $p_j - p_i$  یا  $p_k - p_i$  به دست آورده شود.

۶- برای هر  $k$  این محل تلاقی به یک بردار مثل  $V$  اضافه شود.

۷-  $k$  بعدی

۸- در معادله عمود منصف دو نقطه  $p_i$  و  $p_j$  مقادیر کمینه و بیشینه  $x$  قرار داده شود.

۹- دو نقطه به دست آمده به بردار  $V$  اضافه شود.

۱۰- بردار  $V$  بر اساس مولفه  $x$  اش مرتب شود.

۱۱- تعداد نقاط  $N(V) = V$  و نقطه  $\lambda_m$  بردار  $V_i = V$

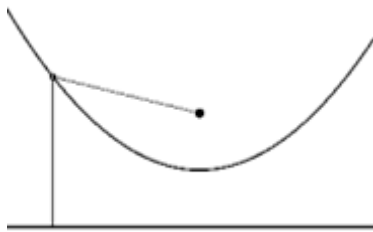
۱۲- برای  $l = 1, \dots, N(V)$  مراحل زیر انجام شود.

(c) از لیست Q نقاط تلاقی  $C_{uq}$  و  $C_{qr}$  و نقاط تلاقی  $C_{rs}$  و  $C_{sv}$  حذف شود.  
 (d) به لیست Q نقاط تلاقی  $C_{uq}$  و  $C_{qs}$  و نقاط تلاقی  $C_{qs}$  و  $C_{sv}$  اضافه شود.  
 (e) p به عنوان نقطه پایینی  $C_{qr}$  و  $C_{rs}$  و نقطه بالایی  $C_{qs}$  ثبت شود.

(f) مقطع‌های  $C_{qr}$  و  $C_{rs}$  به خروجی داده شود.  
 نقاط Q باقی مانده مرزهای T به خروجی داده شود.  
 ۴- پایان

تفسیر شهودی الگوریتم:

الگوریتم فورچون بر اساس این ایده است که برای یک نقطه p و یک خط l (غیر شامل p) مجموعه نقاط با فاصله مساوی از خط l و نقطه p مانند آنچه در شکل ب-۵ نشان داده شده است، تشکیل یک هذلولی می‌دهند که با  $P_{p,l}$  نشان داده می‌شود. این هذلولی صفحه را به دو ناحیه A و B تقسیم می‌کند. نقاط ناحیه A به خط l نزدیک‌ترند تا به نقطه p و نقاط ناحیه B به نقطه p نزدیک‌ترند تا خط l.

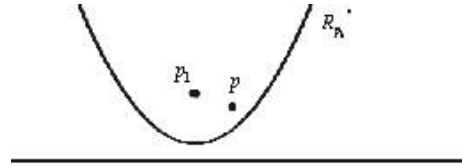


شکل ب-۵- تشکیل هذلولی از مجموعه نقاط با فاصله یکسان از خط و نقطه

حال اگر فرض شود، خط مذکور همان خط جارو کننده باشد که از بالا به پایین حرکت می‌کند. یک نقطه مثل  $q = (q_x - q_y)$  با خط l فاصله‌ای برابر  $q_y - l_y$  دارد. پس:  
 (ناحیه B) اگر q بالای  $P_{p,l}$  باشد،  $d_q(p) < q_y - l_y$   
 (روی هذلولی) اگر q روی  $P_{p,l}$  باشد،  $d_q(p) = q_y - l_y$   
 (ناحیه A) اگر q زیر  $P_{p,l}$  باشد،  $d_q(p) > q_y - l_y$   
 همان طور که خط جارو کننده از بالا به پایین حرکت می‌کند مانند آنچه در شکل ب-۶ دیده می‌شود، نقاط بالای خط جارو کننده و هذلولی‌های متناظر آنها، در نظر گرفته می‌شوند. حال اشتراک پایین‌ترین نقاط این هذلولی‌ها را در نظر گرفته و خط ساحلی نامیده می‌شود. (شباهت به اثر چند موج روی هم افتاده در روی ماسه‌های ساحل).

اگر یک نقطه بالای خط ساحلی باشد، این نقطه به یکی از نقاط بالای خط جارو کننده نزدیک‌تر است تا به خود خط.

۳- تا زمانی که Q تهی نشده مراحل زیر انجام شود.  
 الف) ماکزیمم Q در p قرار داده شود و از لیست Q حذف شود.  
 ب) اگر p یک مرکز است:  
 (a) مانند شکل ب-۳ چک شود آیا یک هذلولی در T وجود دارد که شامل p باشد.



شکل ب-۳- قرار گرفتن یک نقطه در ناحیه نقطه قبلی

(b) عمود منصف  $B_{pq}$  را تشکیل داده و  $B_{pq}^*$  به دو قسمت  $C_{pq}^-$  در سمت چپ، شامل p و  $C_{pq}^+$  در سمت راست، شامل p تقسیم شود. در این صورت  $C_{pq}^-$  اکیداً نزولی و  $C_{pq}^+$  اکیداً صعودی می‌شود.  
 (c) لیست خط ساحلی T به صورتی تغییر داده شود که به جای  $R_q^*$  شامل  $R_q^+, C_{p,q}^-, R_{p,q}^+, C_{p,q}^+, \dots$  باشد.

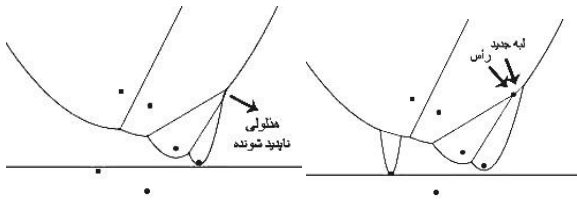
(d) در لیست Q تمام نقاط مشترک بین نیمه چپ و راست  $R_q^*$  حذف شده و تمام نقاط مشترک بین  $C_{pq}^-$  و نیمه چپ  $R_q^*$  و  $C_{pq}^+$  و نیمه راست  $R_q^*$  وارد لیست شود (در صورت وجود).



شکل ب-۴- تغییر شکل خط ساحلی و ایجاد اولین لبه

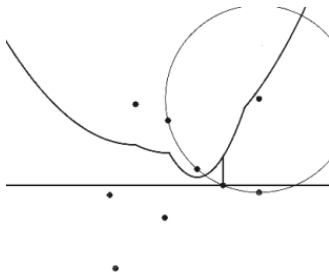
(ج) اگر p یک رأس در  $V^*$  است:

(a) فرض شود p محل تلاقی  $C_{qr}$  در چپ و  $C_{rs}$  در راست باشد و فرض شود، همسایه سمت چپ  $C_{qr}$  در لیست T یک مرز به صورت  $C_{uq}$  و همسایه سمت راست آن در لیست T یک مرز به صورت  $C_{sv}$  باشد. آنگاه مرز جدید  $C_{qs}$  به صورت زیر بوجود می‌آید:  
 (i) اگر  $q_y = s_y$  ،  $C_{qs} = C_{qs}^0$   
 (ii) اگر p در سمت چپ و پایین‌تر از q و s باشد،  $C_{qs} = C_{qs}^+$   
 (iii) در غیر این صورت،  $C_{qs} = C_{qs}^-$   
 (b) مرز جدید  $C_{qs}$  جایگزین  $C_{qr}, R_q^+, C_{rs}$  در لیست T شود.



شکل ب-۸- ناپدید شدن یک هدلولی و ایجاد یک رأس

این پدیده مانند آنچه که در شکل ب-۹ دیده می‌شود، رخداد دایره نامیده می‌شود. رخداد دایره زمانی کامل می‌شود که خط جارو کننده از پایین‌ترین نقطه دایره بگذرد.



شکل ب-۹- رخداد دایره

بنابراین همان طور که خط جارو کننده از بالا به پایین حرکت می‌کند، روی خط از چپ به راست باید انتظار یک رخداد مرکز و یا رخداد دایره جدید داشت تا لبه‌ها و رأس‌های نمودار مشخص شوند. بدین منظور ترتیب مراکز و هدلولی‌های آنها ضبط می‌شوند. این ترتیب تا زمانی که یک رخداد مرکز یا رخداد دایره جدید اتفاق نیافتده، تغییر نمی‌کند و همچنین نقاط شکست نیز ثبت می‌شوند. حال اگر یک رخداد مرکز اتفاق بیفتد، ابتدا مرکز جدید در لیست مراکز به ترتیب وارد می‌شود، سپس رخداد لبه جدید نیز ثبت می‌شود. اگر یک رخداد دایره جدید اتفاق بیفتد، رخداد یک رأس جدید و همین‌طور این رأس که نقاط پایانی لبه‌هایی است که نقاط شکست متناظر آنها به هم رسیده‌اند، ثبت می‌شوند.

**ضمیمه (ج): راستی آزمایی به روش مربع کای**

بطور مثال ۱۰ نمونه مقطع مربعی به مساحت ۵ میکرون از سطح یک ماده به صورت جدول ج-۱ باشد.

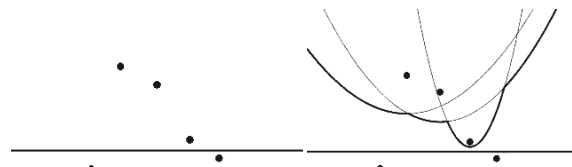
جدول ج-۱- شماره نمونه‌ها و تعداد سلول در هر کدام از آنها

شماره نمونه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد سلول	۱۵	۱۵	۱۶	۱۹	۲۰	۲۴	۲۶	۲۷	۲۸	۳۰

برآورد متوسط میزان کثرت سلول‌ها برابر است با  $\hat{\lambda} = 22$ . جدول فراوانی مقادیر  $n_i$  به صورت جدول ج-۲ است.

جدول ج-۲- فراوانی داده‌ها

مقدار فراوانی	۲	۳	۳	۳
$n_i \leq 15$				
$15 < n_i \leq 20$				
$20 < n_i \leq 27$				
$27 < n_i$				



شکل ب-۶- تشکیل خط ساحلی

یعنی این نقطه درون چند ضلعی ورونوی یکی از نقاطی است که خط جارو کننده از آنها گذشته است. فرض کنید نقطه  $q$  به مرکز  $p_1$  از هر مرکز دیگری نزدیک‌تر باشد یعنی:

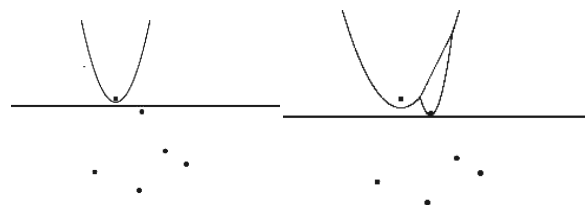
$$d_q(p_1) \leq d_q(p_i), \forall i$$

حال اگر  $q$  روی  $P_{p1,l}$  باشد:

$$q_y - l_y \leq d_q(p_i), \forall i$$

این بدین معنی است که اگر  $q$  روی  $P_{p1,l}$  باشد، نمی‌تواند بالای هدلولی‌های دیگر باشد، بنابراین  $q$  حتماً روی خط ساحلی است. لذا وقتی نقطه‌ای روی خط ساحلی باشد، این نقطه روی هدلولی مربوط به نزدیک‌ترین مرکز است. بنابراین اگر نقطه‌ای روی نقاطی از خط ساحلی باشند که تقاطع دو هدلولی است (نقاط شکست)، آنگاه آن نقاط دارای کمترین فاصله از دو مرکز هستند. به عبارت بهتر «نقاط شکست روی لبه‌های نمودار ورونوی قرار می‌گیرند».

بنابراین همان طور که خط جارو کننده پایین می‌رود و نقاط شکست جابجا می‌شوند، این نقاط شکست لبه‌های نمودار را جارو می‌کنند. پس اولین گام، تشخیص زمانی است که یک جفت نقاط شکست ساخته می‌شوند. این اتفاق زمانی می‌افتد که یک هدلولی جدید مانند شکل ب-۷ به خط ساحلی اضافه می‌شود و این وقتی است که خط جارو کننده از یک مرکز جدید می‌گذرد. این اتفاق رخداد مرکز نامیده می‌شود.



شکل ب-۷- ایجاد لبه و رخداد مرکز

برای پیدا کردن رأس‌ها باید منتظر زمانی بود که دو لبه به هم در یک نقطه برخورد می‌کنند. همانند شکل ب-۸ این اتفاق زمانی می‌افتد که یکی از هدلولی‌های خط ساحلی ناپدید شود. در این حالت یک لبه جدید نیز تولید می‌شود.

تشخیص به وجود آمدن یک هدلولی جدید (رخداد مرکز) آسان است. ناپدید شدن یک هدلولی خط ساحلی زمانی اتفاق می‌افتد که یک نقطه روی خط ساحلی در فاصله یکسان از سه مرکز قرار بگیرد یا به عبارت بهتر، دایره‌ای به مرکز رأس و شعاع نزدیک‌ترین فاصله از سه مرکز بگذرد.

در نتیجه:

## ۹- مراجع

- [1] Stoyan D, Kendall WS, Mecke J (1995) Stochastic geometry and its application. 2nd ed. John Wiley & Sons.
- [2] Voronoi G (1908) Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Math. 134: 198–287.
- [3] Fortune S (1986) A sweep line algorithm for Voronoi diagrams. proceedings of the second annual symposium on computational geometry, Yorktown Heights, New York, United States: 313–322.
- [4] Okabe A, Boots B, Sugihara K, Chiu S (2000) Spatial Tesselations, Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley & Sons.
- [5] Cailletaud G, Diard O, Feyel F, Forest S (2003) Computational Crystal Plasticity: From Single Crystal to Homogenized Polycrystals, Tech Mech. 23: 130–145.
- [6] Venkatramani G, Ghosh S, Mills M (2007) A size-dependent crystal plasticity finite-element model for creep and load shedding in polycrystalline titanium alloys. Acta Materialia. 55: 3971–3986.
- [7] Manchiraju S, Kirane K, Ghosh S (2007) Dual-time scale crystal plasticity FE model for cyclic deformation of Ti alloys. J Computer-Aided Mater. 14: 47–61.
- [8] Cizelj L, Simonovski I (2007) Multiscale modeling of short crack in random polycrystalline of aggregates. MTAEC9. 41: 227–231.
- [9] Hindes WGS, Hines R J (1980) Monte Carlo estimates of the distributions of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to Poisson process. J Statist. Comput. Simul. 10: 205–223.

$$\hat{P}_1 = P(N \leq 15) = \sum_{j=0}^{15} \frac{e^{-22} 22^j}{j!} \approx 0.077$$

$$\hat{P}_2 = P(15 < N \leq 20) = \sum_{j=16}^{20} \frac{e^{-22} 22^j}{j!} \approx 0.310$$

$$\hat{P}_3 = P(20 < N \leq 27) = \sum_{j=21}^{27} \frac{e^{-22} 22^j}{j!} \approx 0.491$$

$$\hat{P}_4 = P(N > 27) = 1 - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \hat{P}_3 \approx 0.122$$

و به طور متناظر  $\hat{e}_1 = 0.77$ ,  $\hat{e}_2 = 3.10$ ,  $\hat{e}_3 = 4.91$  و  $\hat{e}_4 = 1.22$ . بدین ترتیب مقدار آماره  $Z \approx 3.21$  به دست می آید.

برای خطای نوع اول برابر  $\alpha = 0.05$  داریم  $\chi_{0.95}^2(4) = 9.49$  بنابراین فرض برآزش فرآیند به توزیع پواسون پذیرفته می شود.

## ۸- فهرست علائم

$\sigma$	تنش $N/m^2$
$E$	مدول الاستیسیته $N/m^2$
$\nu$	ضریب پواسون
$\varepsilon$	کرنش
$E(S)$	متوسط مساحت $m^2$
Var	واریانس
$\chi_{1-\alpha}^2$	مقدار بحرانی توزیع مربع کای