مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۴/ دوره ۵/ شماره ۲/ صفحه ۲۰۵-۲۱۹

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

مطالعه‌ی عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مزدوج در محفظه‌ی بسته متخلخل به روش شبکه‌ی بولتزمن

محمدرضا رضائی[۱] و محمد جواد مغربی[۲*]

[۱]دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

[۲]استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۳/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۱/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۳۰

چکیده

در مقاله حاضر، به بررسی عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی آرام در محفظه بسته مربعی متخلخل با دو دیواره جامد به روش شبکه‌ی بولتزمن می‌پردازیم. در این تحلیل، محیط متخلخل در مقیاس ماکروسکوپیک مدلسازی شده است و از مدل دارسی- برینکمن- فورش‌هایمر برای مدلسازی این محیط در عدد پرانتل ۱ و در محدوده اعداد دارسی $۱۰^{-۱}$ تا $۱۰^{-۴}$، رایلی $۱۰^{۳}$ تا $۱۰^{۶}$، ضریب تخلخل ۰/۴ تا ۰/۹، نسبت ضخامت دیواره ۰/۱ تا ۰/۴ و نسبت ضریب نفوذ حرارتی جامد به سیال ۱ تا ۱۰۰، استفاده شده است و اثرات محیط متخلخل با افزودن ضریب تخلخل در تابع توزیع تعادلی چگالی و افزودن ترم نیروهای بدنی در معادلات در نظر گرفته می‌شود. اثر هر یک از پارامترهای ذکر شده بر میزان انتقال حرارت از هندسه توسط عدد ناسلت متوسط بررسی شده است. با توجه به نتایج بدست آمده، افزایش عدد دارسی، رایلی، ضریب تخلخل و نسبت ضریب نفوذ حرارتی با توجه به تغییر رژیم غالب انتقال حرارت از هدایت به جابه‌جایی، سبب افزایش ضریب انتقال حرارت و افزایش ضخامت دیواره به دلیل کاهش بخش محیط متخلخل سبب کاهش ضریب انتقال حرارت می‌شود.

کلمات کلیدی: انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مزدوج؛ محفظه متخلخل؛ روش شبکه‌ی بولتزمن؛ دارسی- برینکمن- فورش‌هایمر.

Numerical Investigation of Conjugate Natural Convection Heat Transfer in Porous Enclosure with Lattice Boltzmann Method

M. R. Rezaie[1] and M. J. Maghrebi[2*]

[1]M.Sc. Student, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

[2]Prof, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract

In this study, the laminar conjugate natural convection inside a porous enclosure with two solid walls is studied numerically using the lattice Boltzmann method. The Porous media is simulated at the representative elementary volume scale. The Darcy–Brinkman–Forchheimer model is used to model the porous media in the range of $10^{-4}<Da<10^{-1}$ for Darcy, $10^{3}<Ra<10^{6}$ for Rayleigh, $0.4<\epsilon<0.9$ for porosity, $0.1<t_r<0.4$ for wall thickness ratio and $1<A_r<100$ for thermal diffusion ratio number at pr=1. The influence of porous media is considered by introducing the porosity to the equilibrium distribution function and by adding a force term to the evolution equation. The effects of these parameters on heat transfer are investigated by an average Nusselt number. The results with respect to changes in heat transfer regime from conduction to convection show that any increase in Darcy, Rayleigh, porosity and thermal diffusion ratio number cause an increase in heat transfer coefficient. On the other hand, any increase in wall thickness ratio causing weakening of heat transfer coefficient.

Keywords: Conjugate Natural Convection Heat Transfer; Porous Enclosure; Lattice Boltzmann Method; Darcy–Brinkman–Forchheimer.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۱۳۸۸۰۴۴۳۱

آدرس پست الکترونیک: mjmaghrebi@ um.ac.ir

۱- مقدمه

در پدیده انتقال حرارت در صورتی که هر دو مکانیزم انتقال حرارت جابه‌جایی و هدایت وجود داشته باشد، انتقال حرارت مزدوج رخ می‌دهد. این نوع انتقال حرارت، دارای کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی است که از جمله این کاربردها، می‌توان در علوم ژئوفیزیک، سیستم‌های تهویه مطبوع، خنک‌کاری قطعات الکترونیکی، انتقال حرارت در میکروسیستم‌های الکتریکی مکانیکی[۱]، طراحی کلکتورهای خورشیدی، بازیاب حرارتی، عایق‌های صنعتی، طراحی سردخانه‌ها و مبدل‌های حرارتی اشاره کرد. در بسیاری از کاربردهای فوق همچون، پنجره‌های دوجداره، عایق‌کاری در ساختمان و سردخانه‌ها انتقال حرارت جابه‌جایی در محیط متخلخل صورت می‌گیرد که ضرورت انتقال حرارت مزدوج (جابه‌جایی- رسانش) در محیط متخلخل را نشان می‌دهد.

شبیه‌سازی‌های عددی موجود به کمک روش‌های معمول در دینامیک سیالات محاسباتی[۲]، همچون روش اختلاف محدود[۳]، حجم محدود[۴] و ... دشواری‌های فراوانی در اعمال شرایط مرزی در محل تقاطع بین سیال و جامد دارندکه در مسئله‌ی انتقال حرارت مزدوج بیان شرایط مرزی ساده‌ای همچون، دما و شار ثابت در مرز سیال و جامد مناسب نیست. رسانش گرمایی در جسم جامد، نقش مهمی در انتقال حرارت کلی دارد [۱] که بیان این نوع شرایط مرزی در هندسه‌های پیچیده، هزینه‌ی محاسبات زیادی را در بر دارد [۲]. در سال‌های اخیر، روش شبکه‌ی بولتزمن به عنوان یکی از روش‌های جایگزین در مدلسازی جریان سیال و انتقال حرارت در مسائل مختلف تبدیل شده است. این روش، بر پایه مکانیک آماری است که به جای حل معادلات غیرخطی و مرتبه‌ی دوم ناویر- استوکس، معادله‌ی خطی و مرتبه‌ی اول بولتزمن را حل می‌کند. این روش به دلیل وجود اغتشاشات آماری توسط مک نامارا و زانتی [۳] در سال ۱۹۸۸ جایگزین روش شبکه‌ی گاز شده است [۴] و در سال ۱۹۸۹ توسط هیگورا و جیمز [۵] و در سال ۱۹۹۲ توسط چن و همکارانش گسترش و توسعه پیدا کرد [۶]. از مزایای این روش، می‌توان به خطی بودن معادله انتقال، محلی بودن، راحتی برنامه نویسی و اجرا در رایانه‌های موازی و بیان شرایط مرزی پیچیده اشاره کرد. همچنین این روش، در مدلسازی انتقال حرارت مزدوج [۷] و محیط متخلخل به طور موفقیت آمیزی به کار گرفته می‌شود.

مدلسازی محیط متخلخل در سه مقیاس حفره[۵]، متوسط حجمی[۶] و دامنه[۷] صورت می‌گیرد [۸] که روش شبکه بولتزمن، قادر به مدلسازی در دو مقیاس حفره و متوسط حجمی می‌باشد. در مدل‌سازی در مقیاس حفره، محیط متخلخل توسط هندسه‌های ساده‌ای همچون، بلوک‌های مربعی و استوانه‌ای مدلسازی می‌شوند و روی این سطوح از شرط مرزی عدم لغزش استفاده می‌شود و معادلات ساده بولتزمن در تحلیل جریان و انتقال حرارت در این محیط استفاده می‌شوند. در مقیاس متوسط حجمی، محیط متخلخل به صورت ماکروسکوپیک مدل‌سازی می‌شود که تاکنون مدل‌های بسیاری در توصیف این محیط ارائه شده است. مدل دارسی از جمله مدل‌های ساده‌ای است که می‌توان به آن اشاره کرد و اختلاف نتایج حاصل از این مدل ساده در سرعت‌های بالا با نتایج آزمایشگاهی زیاد است که در سال‌های بعد فورش‌هایمر[۸] و برینکمن[۹] با در نظرگیری نیروی پسای ناشی از حضور ماده‌ی متخلخل، مدلی برای بهبود مدل دارسی ارائه نموده‌اند که در نهایت، معادله‌ی تعمیم یافته ناویر- استوکس[۱۰] را ارائه کردند [۹]. در این مقیاس، معادلات اصلی بولتزمن تصحیح می‌شود و اثر محیط متخلخل در جمله‌ی نیروهای بدنی ظاهر می‌شود.

پژوهش‌های فراوانی در مدل‌سازی جابه‌جایی طبیعی و اجباری در محیط متخلخل توسط روش شبکه‌ی بولتزمن در مقیاس متوسط حجمی صورت گرفته است. ژائولی و ژائو [۱۰]، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی و ترکیبی در محیط متخلخل پرداخته‌اند. در پژوهشی دیگر، مدل‌سازی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در محفظه‌ی متخلخل توسط مدل دارسی برینکمن- فورش‌هایمر، در اعداد دارسی، رایلی و

[1] MEMS
[2] CFD
[3] FDM
[4] FVM

[5] Pore
[6] REV
[7] Domain
[8] Forchheimer
[9] Brinkman
[10] Generalized Navier- Stokes

ضریب تخلخل مختلف توسط ستا و همکاران [۱۱]، صورت گرفته است و در مدل‌سازی دیگر توسط حق‌شناس و همکاران [۱۲]، به بررسی این انتقال حرارت در محفظه متخلخل باز پرداخته‌اند. در تحقیقی دیگر ژاو و همکاران [۱۳]، این نوع انتقال حرارت را در محفظه بسته‌ی متخلخل در شرایط حرارتی محلی غیرتعادلی را مورد بررسی قرار داده-اند.

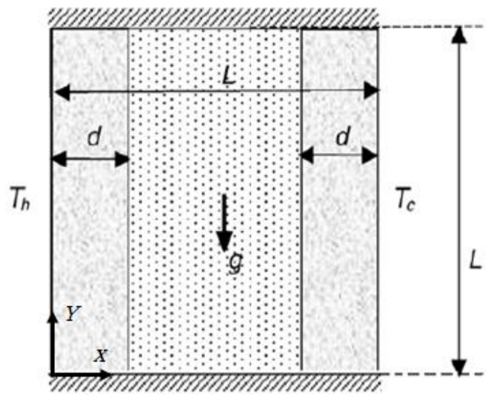
در زمینه انتقال حرارت مزدوج در محیط متخلخل، پژوهش‌هایی توسط روش‌های عددی مرسوم (حجم محدود، اختلاف محدود،...) صورت گرفته است. چانگ و همکاران [۱۴]، اثر رسانش در دیواره‌های محفظه بسته متخلخل، در رژیم غیر دارسی[۱] را در انتقال حرارت کلی مورد بررسی قرار داده‌اند. بیتاس و همکاران [۱۵]، در سال ۲۰۰۱ توسط روش حجم محدود انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مزدوج در محفظه متخلخل دارای دو دیواره جامد افقی با ضخامت محدود را مورد بررسی قرار داده‌اند. نواف [۱۶و ۱۷] در سال ۲۰۰۷، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مزدوج در محیط متخلخل فشرده شده بین دو دیواره جامد با ضخامت محدود پرداخته است و در پژوهشی دیگر توسط این محقق، اثر رسانش حرارتی در یک دیواره در انتقال حرارت کلی از محفظه مورد ارزیابی قرار گرفته است و در هر یک از این پژوهش‌ها، جریان در محیط متخلخل در رژیم دارسی است و اثر ضخامت دیواره، نسبت ضریب رسانش و عدد رایلی در تغییر ضریب انتقال حرارت، مورد بررسی قرار گرفته شده است. چمخا و همکاران [۱۸]، این نوع انتقال حرارت را توسط روش اختلاف محدود در محفظه بسته متخلخل دارای نانوسیال با یک دیواره مثلثی گرم را به ازای پارامترهای مختلف مدل‌سازی کرده‌اند.

با توجه به پژوهش‌های ذکر شده در فوق، تحقیق جامعی در مدلسازی انتقال حرارت جابه‌جایی مزدوج در محیط متخلخل غیردارسی توسط روش شبکه بولتزمن صورت نگرفته است. در تحقیق حاضر، سعی بر این است مدل‌سازی به ازای اعداد بی‌بعد رایلی، دارسی، ضریب تخلخل، نسبت ضرایب نفوذ دیواره‌های جامد بر سیال و ضخامت دیواره مختلف، مورد بررسی قرار گیرد و اثر هر یک از پارامترهای فوق بر میزان انتقال حرارت از هندسه توسط عدد بی‌بعد ناسلت[۲] متوسط، مورد ارزیابی قرار گیرد.

۲- معادلات حاکم

در مطالعه حاضر، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در محفظه بسته متخلخل با ابعاد $L \times L$ و دو دیواره عمودی جامد با ضخامت d در طرفین محفظه می‌پردازیم که دیواره بالا و پایین عایق و سطح چپ دیواره‌ی جامد چپ، در دمای $T_{\rm h}$ سطح راست دیواره‌ی جامد راست در دمای $T_{\rm c}$ قرار دارند که در شکل ۱، هندسه‌ی مسئله به صورت کامل نشان داده شده است.

مطابق هندسه‌ی مسئله، در دیواره جامد انتقال حرارت هدایت و در محفظه‌ی متخلخل انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی داریم. در این تحلیل، سیال غیرقابل تراکم، نیوتنی و جریان پایا در نظر گرفته شده است. با توجه به پایا بودن انتقال حرارت و عدم وجود منبع حرارتی بزرگ [۱۹و ۲۰]، شرط تعادل حرارتی بین سیال و ماتریس متخلخل برقرار است. از جمله اتلافات ویسکوز در معادله انرژی، صرف‌نظر شده است. تمامی خواص ترموفیزیکی سیال به جز چگالی، ثابت در نظر گرفته شده است. در نهایت معادلات تعمیم یافته ناویراستوکس حاکم بر فیزیک مسئله که شامل جمله درگ ویسکوز[۳] و جمله درگ شکل[۴][۲۱]، به صورت روابط (۱-۳) بیان می‌شود:



شکل ۱- هندسه مسئله

[1] Non-Darcian Porous Media

[2] Nusselt

[3] Viscous drag

[4] Form drag

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{1}{\varepsilon}(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{\varepsilon}{\rho}\nabla p+\upsilon_e\nabla^2\vec{u}+\vec{E} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_{\rm p}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)T_{\rm p}=\alpha_{\rm m}\nabla^2T_{\rm p} \quad (3)$$

$\vec{u}$ بردار سرعت، p فشار، T_p دما سیال در محیط متخلخل است، ε ضریب تخلخل محیط متخلخل است که به صورت نسبت حجم اشغال شده سیال در محیط متخلخل به کل حجم کنترل، تعریف می‌شود، $\upsilon_{\rm e}$ ویسکوزیته موثر در محیط متخلخل است که در این پژوهش، برابر ویسکوزیته سیال (υ) است، $\alpha_{\rm m}$ ضریب نفوذ گرمایی متوسط در محیط متخلخل است که در مطالعه حاضر همچنین این ضریب برابر ضریب نفوذ سیال (α) است. در دیواره جامد به دلیل اینکه مکانیزم انتقال حرارت به صورت رسانش است، معادله انرژی به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود:

$$\nabla^2T_{\rm w}=0 \quad (4)$$

$\rm T_w$ توزیع دما در دیواره است. در معادله ۲ ترم $\vec{E}$ نیروهای بدنی وارد بر سیال است که اثرات حضور ماده متخلخل و سایر نیروهای بدنی را نمایش می‌دهد و به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود[۱۰]:

$$\vec{E}=-\frac{\varepsilon\upsilon}{K}\vec{u}-\frac{\varepsilon F_\varepsilon}{\sqrt{K}}\left|\vec{u}\right|\vec{u}+\varepsilon\vec{G} \quad (5)$$

و F_ε تابع هندسی و $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$ و K نفوذپذیری ماده متخلخل است و به عنوان یک خاصیت ثابت ماده تعریف می‌شود و تابعی از اندازه و نوع ماده‌ی متخلخل است[۲۲].

$$F_\varepsilon=\frac{1.75}{\sqrt{150\varepsilon^3}} \quad (6)$$

$$K=\frac{\varepsilon^3d_p^2}{150\left(1-\varepsilon\right)^2} \quad (7)$$

در رابطه‌ی (۵)، جمله‌ی اول اثرات نیروی ویسکوز و جمله‌ی دوم، اثر نیروی درگ فشاری (درگ شکل) را بر سیال مشخص می‌کند و جمله $\vec{G}$ نشان دهنده نیروی شناوری حاصل از اختلاف دمای بین دو دیواره‌ی سرد و گرم است که با توجه به تقریب بوزینسک[1] به صورت رابطه‌ی (۸) تعریف می‌شوند:

$$G=g\beta(T-T_{\rm m})\,{\rm j} \quad (8)$$

g شتاب گرانشی و β ضریب انبساط حجمی سیال است. عدد رایلی، عدد رایلی تصحیح شده برای محیط متخلخل، عدد پرنتل و عدد دارسی به ترتیب به صورت روابط (۹-۱۲) تعریف می‌شود:

$$\text{Ra}=\frac{g_0\beta(T_{\rm h}-T_{\rm c})L^3}{\upsilon\alpha} \quad (9)$$

$$\text{Ra}_{\rm m}=\text{RaDa} \quad (10)$$

$$\text{pr}=\frac{\upsilon}{\alpha} \quad (11)$$

$$\text{Da}=KL^2 \quad (12)$$

در تمام تحلیل‌های انجام شده عدد پرنتل ۱ در نظر گرفته شده است؛ مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد. $\rm Da$ عدد دارسی است، یک متغیر بدون بعد است که توانایی سیال برای عبور از محیط متخلخل را مشخص می‌کند و L طول مشخصه‌ی هندسه است.

پارامترهای بی‌بعد دیگر در مطالعه حاضر:

$$X=\frac{x}{L} \quad (13)$$

$$Y=\frac{y}{L} \quad (14)$$

$$\theta_{\rm p}=\frac{T_{\rm p}-T_c}{T_{\rm h}-T_{\rm c}} \quad (15)$$

$$\theta_{\rm w}=\frac{T_{\rm w}-T_c}{T_{\rm h}-T_{\rm c}} \quad (16)$$

$$A_{\rm r}=\frac{\alpha_{\rm w}}{\alpha_{\rm p}} \quad (17)$$

$$t_{\rm r}=\frac{d}{L} \quad (18)$$

با توجه به اینکه سطوح افقی محفظه(دیواره‌ی بالایی و پایینی) عایق است، میزان انتقال حرارت عبوری از هر مقطعی بین این دو دیواره یکسان است. پارامتر فیزیکی دیگری که نمایانگر میزان انتقال حرارت عبوری از هندسه است، عدد ناسلت متوسط می‌باشد و با توجه به اینکه انتقال حرارت در

---

[1]Boussinesq

دو محیط متخلخل و جامد است، عدد ناسلت به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود[۲۳ و ۲۴]:

$$\overline{\mathrm{Nu}}=\frac{1}{L(T_\mathrm{h}-T_\mathrm{c})}\int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{L}\left(\frac{uT}{\alpha_\mathrm{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdy \qquad (۱۹)$$

که u معرف مولفه افقی بردار سرعت است و T دما و α_x در جامد و محیط متخلخل به ترتیب، برابر α_s و α_p است. لازم به ذکر است که میانگین‌گیری از عدد ناسلت در کل محفظه، سبب افزایش دقت در نتایج عددی می‌شود.

۲-۱- شرایط مرزی

با توجه به هندسه مذکور، برای حل معادلات (۱) تا (۵) نیازمند شرایط مرزی مناسب هستیم. مولفه‌های افقی و عمودی سرعت در دیواره‌ها برابر صفر است و همچنین شرایط مرزی دمایی به صورت روابط (۲۱-۲۷) تعریف می‌شود:

$$T_\mathrm{w}(x=0,y)=T_\mathrm{h} \qquad (۲۰)$$

$$T_\mathrm{w}(x=\mathrm{L},y)=T_\mathrm{c} \qquad (۲۱)$$

$$\frac{\partial T_\mathrm{w}(x,y=0)}{\partial y}=\frac{\partial T_\mathrm{w}(x,y=\mathrm{L})}{\partial y}=0 \qquad (۲۲)$$

$$\frac{\partial T_\mathrm{p}(x,y=0)}{\partial y}=\frac{\partial T_\mathrm{p}(x,y=\mathrm{L})}{\partial y}=0 \qquad (۲۳)$$

$$T_\mathrm{w}(x=d,y)=T_\mathrm{p}(x=d,y) \qquad (۲۴)$$

$$T_\mathrm{w}(x=\mathrm{L}\text{-}d,y)=T_\mathrm{p}(x=\mathrm{L}\text{-}d,y) \qquad (۲۵)$$

$$-k_\mathrm{w}\frac{\partial T_\mathrm{w}(x=d,y)}{\partial x}=-k_\mathrm{p}\frac{\partial T_\mathrm{p}(x=d,y)}{\partial x} \qquad (۲۶)$$

$$-k_\mathrm{w}\frac{\partial T_\mathrm{w}(x=\mathrm{L}\text{-}d,y)}{\partial x}=-k_\mathrm{p}\frac{\partial T_\mathrm{p}(x=\mathrm{L}\text{-}d,y)}{\partial x} \qquad (۲۷)$$

چهار شرط مرزی انتهایی، پیوستگی دما و شار حرارتی در فصل مشترک سیال و جامد را نشان می‌دهد و بیان این نوع شرط مرزی در روش‌های معمول دینامیک سیالات از دشواری‌های خاصی برخوردار است.

۳- روش شبکه‌ی بولتزمن

در این مطالعه، از روش شبکه‌ی بولتزمن حرارتی جهت حل میدان سرعت و دما استفاده شده است که فرم گسسته شده‌ی این معادله برای توابع توزیع چگالی و انرژی به ترتیب به صورت روابط (۲۸) و (۲۹) بیان می‌شوند[۸]:

$$f_k(\vec{x}+\vec{e}_k\delta t,t+\delta t)=f_k(\vec{x},t)$$
$$-\frac{\delta t}{\tau_\mathrm{v}}\left[f_k(\vec{x},t)-f_k^{eq}(\vec{x},t)\right]+\delta t\vec{F_k} \qquad (۲۸)$$

$$g_k(\vec{x}+\vec{e}_k\delta t,t+\delta t)=g_k(\vec{x},t)$$
$$-\frac{\delta t}{\tau_\mathrm{t}}\left[g_k(\vec{x},t)-g_k^{eq}(\vec{x},t)\right] \qquad (۲۹)$$

از روابط (۲۸) و (۲۹) توسط بسط چاپمن- انسکوگ[1] به معادلات ناویراستوکس و انرژی می‌رسیم. با توجه به مدل $\mathrm{D_2Q_9}$ برای شبکه‌ی بولتزمن، زیرنویس k از ۰ تا ۸ و τ نرخ رهایی تا حالت تعادل است و $\mathrm{f_k^{eq}}$ و $\mathrm{g_k^{eq}}$ تابع توزیع تعادلی برای توزیع چگالی و انرژی را نشان می‌دهد و سرعت‌های گسسته در دستگاه مختصات کارتزین در این مدل $\vec{e_0}=0$ و $\vec{e_i}=\lambda_i(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$ است و برای $i=1\sim4$ به صورت $\lambda_i=1$ و $\theta_i=(i-1)\pi/2$ و برای $i=5\sim8$ به صورت $\lambda_i=\sqrt{2}$ و $\theta_i=(i-5)\pi/2+\pi/4$ تعریف می‌شود و همچنین ضرایب وزنی برای این شبکه، به صورت روابط (۳۰) تعریف می‌شود:

$$w_\mathrm{k}=\begin{cases}\frac{4}{9} & k=0\\ \frac{1}{9} & k=1\sim4\\ \frac{1}{36} & k=5\sim8\end{cases} \qquad (۳۰)$$

جهت محاسبه عدد ماخ (Ma) در مقیاس شبکه‌ی بولتزمن از رابطه‌ی (۳۱) استفاده می‌شود [۱۱].

$$\mathrm{Ma}=\sqrt{\frac{3Ra\upsilon^2}{M^2 Pr}} \qquad (۳۱)$$

که M تعداد گره در شبکه‌ی بولتزمن است. عدد ماخ مورد استفاده در این تحلیل، به گونه‌ای است که خطای ناشی از بسط چاپمن-انسکوگ کمتر از ۱٪ باشد[۲۵]، به این ترتیب در کلیه تحلیل‌ها عدد ماخ ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود که با این فرض، شرط تراکم ناپذیری سیال برقرار است. زمان‌های رهایی به صورت $\tau_\mathrm{v}=0.5+3\upsilon$ و $\tau_\mathrm{t}=0.5+3\alpha$ تعریف می‌شوند و در این تحلیل، با توجه به ثابت بودن عدد ماخ و استفاده از شبکه‌های مختلف در اعداد رایلی مختلف، ضرایب

[1] Chapman-Enskog

آسایش بین ۰/۵۴ تا ۱/۰۵ در نظر گرفته شده است. عبارت $\delta t\overrightarrow{F_k}$ در رابطه‌ی (۲۸)، تغییر مومنتم ناشی از نیروهای خارجی را علاوه بر تغییر مومنتم ناشی از برخورد ذرات را نشان می‌دهد. جمله $\overrightarrow{F_k}$ در رابطه‌ی (۲۸)، نیروی بدنی کل وارد بر سیال است که شامل، نفوذ ویسکوزیته و اینرسی ناشی از حضور محیط متخلخل و نیروی شناوری است و به صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود[۱۰]:

$$\overrightarrow{F_k}=w_k\rho\left(1-\frac{1}{2\tau_v}\right)\left\{\frac{3\overrightarrow{e_k}\cdot E}{c^2}+\frac{9\left[(\vec{u}\cdot\overrightarrow{e_k})(\vec{E}\cdot\overrightarrow{e_k})\right]}{\varepsilon c^4}-\frac{3\vec{u}\cdot\vec{E}}{\varepsilon c^2}\right\}_{k=0\sim8} \quad (۳۲)$$

$\vec{u}$ بردار سرعت، $c=\frac{\delta x}{\delta t}$ بردار سرعت در شبکه بولتزمن است و با توجه به خطای تراکم پذیری، انتخاب صحیح گام مکانی و زمانی بسیار حائز اهمیت است، به طوری که رابطه $\delta x\approx\delta t^2$ برقرار باشد. به همین منظور، برای راحتی $\delta x=\delta t$ قرار می‌دهیم و سرعت در شبکه برابر یک می‌شود. $\vec{E}$ بردار نیروی ناشی از حضور محیط متخلخل(رابطه (۵)) و سایر میادین نیروهای خارجی همچون، نیروی شناوری است که در قسمت قبل توسط رابطه‌ی (۸) تعریف شد.

تابع توزیع تعادلی چگالی(f_k^{eq}) برای مدل D_2Q_9 به صورت رابطه (۳۳) تعریف می‌شود[۸]:

$$f_k^{eq}=w_k\rho\left[1+\frac{2}{3}(\overrightarrow{e_k}\cdot\vec{u})+\frac{9}{2\varepsilon}(\overrightarrow{e_k}\cdot\vec{u})^2-\frac{3}{2\varepsilon}\left|\vec{u}\right|^2\right]_{k=0\sim8} \quad (۳۳)$$

تابع توزیع تعادلی انرژی g_k^{eq} برای انتقال حرارت جابه‌جایی در هر گره به صورت رابطه (۳۴) تعریف می‌شود[۸]:

$$g_k^{eq}=w_kT\left[1+\frac{3}{c^2}(\overrightarrow{e_k}\cdot\vec{u})\right] \quad (۳۴)$$

و همچنین تابع توزیع تعادلی g_k^{eq} در رسانش گرمایی در هر گره به صورت رابطه (۳۵) است [۲۶]:

$$g_k^{eq}=w_kT \quad (۳۵)$$

مقادیر ماکروسکوپیک چگالی، دما و فشار به ترتیب، به صورت $\rho=\sum_{k=0}^{8}f_k$ ، $T=\sum_{k=0}^{8}g_k$ و $P=\rho/(3\varepsilon)$ محاسبه می‌شوند.

سرعت ماکروسکوپیک سیال به صورت:

$$\vec{u}=\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{8}\overrightarrow{e_k}f_k+\frac{\delta t}{2}\vec{E} \quad (۳۶)$$

که نیروی بدنی $\vec{E}$ شامل، ترم سرعت است و روابط (۵) و (۳۶) دو دستگاه معادله غیرخطی در $\vec{E}$ و $\vec{u}$را نشان می‌دهد. این رابطه غیرخطی را می‌توان با تعریف سرعت کمکی برطرف کرد که به صورت رابطه (۳۷) تعریف می‌شود[۱۰]:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{c_0+\sqrt{c_0^2+c_1\left|\vec{v}\right|}} \quad (۳۷)$$

در رابطه (۳۷) $5\delta t$ $+\varepsilon$ $c_0=0$، $c_1=0.5\varepsilon\delta tF_\varepsilon/\sqrt{K}$ و $\vec{v}$ به صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شود:

$$\vec{v}=\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{8}\overrightarrow{e_k}f_k+\frac{\varepsilon\delta t}{2}\vec{G} \quad (۳۸)$$

در دیواره‌ها به منظور ارضاء شرط عدم لغزش، از شرط مرزی بازگشتی[1] [۲۶] استفاده شده است که به عنوان مثال، برای دیواره سمت راست $f_3=f_1$ ، $f_6=f_8$ و $f_7=f_5$ است و به همین ترتیب، برای سایر دیواره‌ها با شرط عدم لغزش توابع توزیع مجهول محاسبه می‌شود. در دیواره دما ثابت با دمای T_h و T_c شرط مرزی، بازگشت به عقب توابع توزیع غیرتعادلی برقرار است [۲۶]. در دیواره‌های عایق تابع توزیع(g_k) در کلیه جهات (با توجه به مدل D_2Q_9)، برابر تابع توزیع در گره مجاور می‌شود.

در حد فاصل بین دیواره‌های جامد و محیط متخلخل با توجه به اختلاف در تابع توزیع تعادلی[۱]، به طور همزمان شرط پیوستگی دما و شار حرارتی، به صورت خودکار اعمال می‌شود که از مهمترین ویژگی‌های روش شبکه‌ی بولتزمن، در مدل‌سازی انتقال حرارت مزدوج است.

۴- الگوریتم حل

رویه حل در این روش به صورت زیر است:

مقداردهی اولیه: در ابتدا مقادیر چگالی و سرعت‌ها و دما مقداردهی اولیه می‌شوند، سپس توابع توزیع تعادلی f_k^{eq} و

[1] Bounce Back

g_k^{eq} با توجه به ناحیه(جامد یا سیال)، توسط روابط (۳۳) تا (۳۵) تعیین می‌شوند که از این مقادیر، برای مقداردهی اولیه توابع توزیع f_k و g_k استفاده می‌شود.

برخورد: در این مرحله برخورد برای توابع توزیع چگالی و دما مطابق روابط (۳۹-۴۰) صورت می‌گیرد و توابع توزیع اصلاح می‌شوند.

$$f_k(\vec{x},t+\delta t)=f_k(\vec{x},t)-\frac{1}{\tau_{\mathrm{v}}}(f_k-f_k^{eq}) \quad (۳۹)$$

$$g_k(\vec{x},t+\delta t)=g_k(\vec{x},t)-\frac{1}{\tau_{\mathrm{t}}}(g_k-g_k^{eq}) \quad (۴۰)$$

برخورد در توابع توزیع چگالی در محدوده بین دو دیواره و در مکانی رخ می‌دهد که سیال وجود دارد و برخورد در توابع توزیع دما در کلیه دامنه اتفاق می‌افتد.

جاری شدن: در این مرحله، توابع توزیع با توجه به جهات بردار سرعت در شبکه‌ی بولتزمن، مطابق روابط (۴۱) و (۴۲) به گره‌های مجاور جاری می‌شود.

$$f_k(\vec{x}+\vec{e}_k\delta t,t+\delta t)=f_k(\vec{x},t+\delta t) \quad (۴۱)$$

$$g_k(\vec{x}+\vec{e}_k\delta t,t+\delta t)=g_k(\vec{x},t+\delta t) \quad (۴۲)$$

محاسبه مقادیر ماکروسکوپیک: در این مرحله پارامترهای ماکروسکوپیک همچون، سرعت، دما، چگالی و فشار با توجه به توابع توزیع محاسبه می‌شوند.

بررسی شرط همگرایی: در این مرحله، شرط همگرایی بررسی می‌شود و در صورت برقراری دقت حل مورد نظر، حل متوقف می‌شود که این شرط همگرایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\sum\left|\varphi^{(n+1)}-\varphi^{(n)}\right|}{\sum\left|\varphi^{(n)}\right|}\leq 10^{-6} \quad (۴۳)$$

پارامتر φ، معرف هر یک از مقادیر سرعت و دما است و بالانویس n، شمارنده‌ی تکرارها را نمایش می‌دهد.

۵- ارزیابی صحت نتایج

جهت ارزیابی صحت نتایج حاصل شده از برنامه کامپیوتری نوشته شده به زبان سی، نتایج حاصله با نتایج موجود در مطالعات گذشته در حالت حدی مقایسه می‌شود. در ابتدا با صرف‌نظر از محیط متخلخل و دیواره‌ی جامد، انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی درون محفظه را مورد بررسی قرار می‌دهیم، سپس با صرف‌نظر از دیواره‌ی جامد انتقال حرارت، جابه‌جایی طبیعی درون محفظه‌ی متخلخل را بررسی می‌کنیم و در نهایت، صحت نتایج بدست آمده در حالت محفظه غیر متخلخل با دیواره‌ایی جامد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵-۱- جابه‌جایی طبیعی در محفظه‌ی غیرمتخلخل

در این حالت، هندسه‌ی مذکور محفظه‌ای است، غیرمتخلخل و انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در هندسه در حضور اختلاف دما بین دو دیواره انجام می‌شود که جهت رسیدن به معادله ناویر- استوکس در غیاب محیط متخلخل، عدد دارسی به اندازه‌ی کافی بزرگ ($۱۰^۷$) در نظر گرفته می‌شود و همچنین ضریب تخلخل به عدد یک میل می‌کند. در این زمینه، مطالعات زیادی توسط محققان انجام شده است و در ادامه فقط به مقایسه با مرجع [۲۵] بسنده می‌کنیم. مقایسه به ازای اعداد رایلی $۱۰^۳$ تا $۱۰^۵$ و در عدد پرنتل ۱ انجام شده است و اعداد ناسلت متوسط و خطای نتایج حاصله با نتایج موجود، به صورت جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱- مقایسه عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی غیر متخلخل در Pr =۱ با مرجع [۲۵]

Ra		$۱۰^۳$	$۱۰^۴$	$۱۰^۵$
اندازه شبکه		۶۴×۶۴	۱۲۸×۱۲۸	۱۲۸×۱۲۸
$\overline{Nu}$	مرجع[۲۵]	۱/۱۱۷	۲/۲۴۳	۴/۵۷۹
	مطالعه حاضر	۱/۱۱۶	۲/۲۴۶	۴/۵۷۵
خطا(٪)		۰/۹۰	۰/۱۳۴	۰/۱۳۴

۵-۲- جابه‌جایی طبیعی در محفظه‌ی متخلخل

در این حالت، محفظه با ماده‌ی متخلخل همگن پر شده است و انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در حضور ماده متخلخل انجام می‌شود. این بررسی به ازای ضریب تخلخل ۰/۴، ۰/۶ و ۰/۹ و اعداد دارسی $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۴}$ و اعداد رایلی اصلاح شده ۱۰، $۱۰^۲$ و $۱۰^۳$ انجام شده است و برای اعداد رایلی اصلاح شده ذکر شده به ترتیب، از شبکه‌های ۱۲۸×۱۲۸، ۱۹۲×۱۹۲ و ۲۵۶×۲۵۶ استفاده شده است. با توجه به این که عدد ناسلت متوسط به عنوان پارامتری بدون بعد برای نمایش میزان انتقال حرارت است، در جدول ۲ اعداد ناسلت متوسط و همچنین میزان خطای حل حاضر، متناظر با هر یک از

جدول ۲- مقایسه عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی متخلخل در Pr =۱ با مرجع [۲۵] و [۲۷]

Da	Ra_m	۱۰			۱۰^{۲}			۱۰^{۳}		
	ε	۰/۴	۰/۶	۰/۹	۰/۴	۰/۶	۰/۹	۰/۴	۰/۶	۰/۹
۱۰$^{-۲}$	مطالعه حاضر	۱/۰۰۸	۱/۰۱۲	۱/۰۱۷	۱/۳۵۹	۱/۴۸۹	۱/۶۲۸	۲/۹۷۵	۳/۴۱۶	۳/۸۹۰
	مرجع[۲۵]	–	–	۱/۰۱۲	–	–	۱/۶۲۱	–	–	۳/۹۰۰
	خطا(٪)			۰/۴۹۴			۰/۴۳۲			۰/۲۵۶
	مرجع[۲۷]	۱/۰۱	۱/۰۱۵	۱/۰۲۳	۱/۴۰۸	۱/۵۳۰	۱/۶۴	۲/۹۸۳	۳/۵۵۵	۳/۹۱۰
	خطا(٪)	۰/۱۹۸	۰/۲۹۶	۰/۵۸۶	۳/۴۸۰	۲/۶۷۹	۰/۷۳۲	۰/۲۶۸	۳/۹۱۰	۰/۵۱۲
۱۰$^{-۴}$	مطالعه حاضر	۱/۰۶۱	۱/۰۶۳	۱/۰۶۸	۲/۵۶۳	۲/۶۵۹	۲/۷۲۶	۷/۶۵۷	۸/۲۹۶	۹/۰۸۱
	مرجع[۲۵]	۱/۰۶۰	۱/۰۶۳	۱/۰۶۵	۲/۶۱۴	۲/۷۲۵	۲/۸۱۲	۷/۷۸۳	۸/۵۷۶	۹/۳۱۷
	خطا(٪)	۰/۰۹	۰	۰/۲۸	۱/۹۵۱	۲/۴۲۲	۳/۰۵۸	۱/۶۱۹	۳/۲۶۵	۲/۵۳۳
	مرجع[۲۷]	۱/۰۶۷	۱/۰۷۱	۱/۰۷۲	۲/۵۵۰	۲/۷۲۵	۲/۷۴۰	۷/۸۱۰	۸/۱۸۳	۹/۲۰۲
	خطا(٪)	۰/۵۶۲	۰/۷۴۷	۰/۳۷۳	۰/۵۱۰	۲/۴۲۲	۰/۵۱۱	۱/۹۶۰	۱/۳۸۱	۱/۳۱۵

مراجع و به ازای پارامترهای مختلف را شاهد هستیم. با توجه به میزان بیشینه خطای ۳/۳٪ گزارش شده در جدول ۲، نتایج حاصل شده از دقت قابل قبولی برخوردارند و نشان دهنده دقت بالای روش شبکه‌ی بولتزمن در مدلسازی جریان در محیط متخلخل در رژیم غیردارسی است.

۵-۳- جابه‌جایی طبیعی مزدوج در محفظه‌ی غیر متخلخل با دیواره جامد

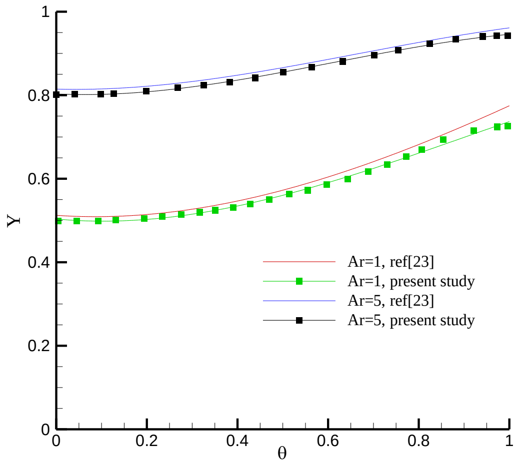
در انتها، جهت بررسی صحت نتایج بدست آمده از روش شبکه‌ی بولتزمن در انتقال حرارت مزدوج، نتایج حاصل شده از برنامه کامپیوتری را با نتایج مرجع [۲۸] مقایسه می‌کنیم. در این مطالعه عددی (مرجع [۲۸]) هندسه مورد نظر به کار برده شده، محفظه‌ای بسته مربعی است که یک دیواره جامد با ضخامت غیر صفر در سمت راست هندسه قرار دارد و در این دیواره، انتقال حرارت رسانش و در محفظه انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی رخ می‌دهد. همانند قسمت ۵-۲ برای رسیدن به معادله ناویر- استوکس، عدد دارسی به اندازه‌ی کافی بزرگ (۱۰^{۷}) در نظر گرفته می‌شود و ضریب تخلخل به عدد یک میل می‌کند. در این مقایسه، توزیع دمای حد فاصل دیواره جامد و سیال به عنوان پارامتر مقایسه‌ای در نظر گرفته شده است. این مقایسه در عدد رایلی ۱۰^{۴}×۷، نسبت نفوذهای ۱ و ۵، نسبت ضخامت (t_r) ۰/۲ و در عدد پرنتل ۰/۷ صورت گرفته و نتایج حاصله را در شکل ۲ شاهد هستیم که نشان دهنده انطباق خوبی بین نتایج بدست آمده از روش شبکه‌ی بولتزمن و روش حجم محدود است.

۶- نتایج

در این قسمت، به بررسی نتایج به ازای پارامترهای مختلفی همچون عدد رایلی، دارسی، ضریب تخلخل، نسبت ضریب نفوذ جامد به سیال و نسبت ضخامت دیواره به ابعاد محفظه، در انتقال حرارت کلی از محفظه می‌پردازیم. برای نمایش میزان انتقال حرارت از محفظه از عدد ناسلت متوسط استفاده می‌کنیم که توسط رابطه (۱۹) تعریف می‌شود. در عدد پرنتل ۱، اعداد رایلی در محدوده‌ی ۱۰^{۳} تا ۱۰^{۶}، اعداد دارسی بین ۱۰$^{-۴}$ تا ۱۰$^{-۱}$، ضریب تخلخل بین ۰/۴ تا ۰/۹، نسبت ضریب نفوذپذیری حرارتی دیواره جامد به سیال بین ۱ تا ۱۰۰ و نسبت ضخامت بین ۰/۱ تا ۰/۴ تغییر می‌کنند.

در حل حاضر، جهت استقلال حل از شبکه از عدد ناسلت متوسط در عدد دارسی ۱۰$^{-۴}$، ضریب تخلخل ۰/۶، نسبت ضریب نفوذ ۱۰ و نسبت ضخامت دیواره ۰/۲ استفاده کرده‌ایم و مشهود است در عدد رایلی ۱۰^{۳} به ازای افزایش اندازه شبکه از ۱۰۰×۱۰۰ به بعد، نتایج تغییر قابل ملاحظه‌ای نمی‌کنند و

به همین ترتیب، برای اعداد رایلی $۱۰^{۴}$، $۱۰^{۵}$ و $۱۰^{۶}$ به ترتیب، از شبکه‌های ۱۵۰×۱۵۰، ۲۰۰×۲۰۰ و ۲۵۰×۲۵۰ استفاده شده است. در ادامه و در هر قسمت اثر هر یک از پارامترهای ذکر شده را در میزان انتقال حرارت متوسط از هندسه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



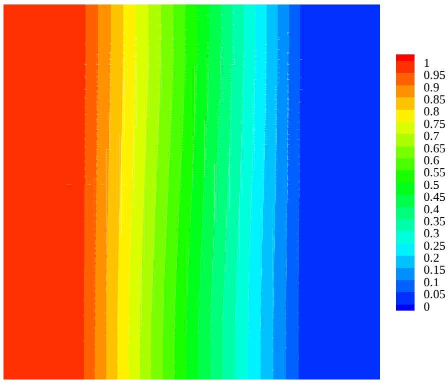
شکل ۲- توزیع دما در X=1

جدول ۳- عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی به ازای A_r =۱۰، ε =۰/۶ و t_r =۰/۲

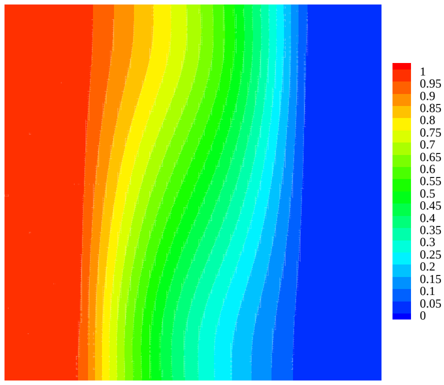
Ra	Da		
	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۴}$
$۱۰^{۳}$	۱/۰۱۲	۱/۰۰۷	۱/۰۰۵
$۱۰^{۴}$	۱/۲۳۰	۱/۱۳۷	۱/۰۰۵
$۱۰^{۵}$	۲/۲۴۴	۲/۰۹۴	۱/۰۳۰
$۱۰^{۶}$	۳/۷۴۰	۳/۶۱۸	۱/۸۱۹

عدد رایلی تصحیح شده (Ra_m)، پارامتری بدون بعد است که در جریان‌های با نیروی محرکه‌شناوری در محیط متخلخل، رژیم جریان را مشخص می‌کند. در رایلی‌های تصحیح شده کوچک ($Ra_m = ۱۰$)، به دلیل کوچک بودن سرعت‌ها در محیط متخلخل، مهمترین نیرو در برابر حرکت سیال، نیروی درگ ویسکوز ناشی از ماتریس متخلخل است و انتقال حرارت غالب از نوع رسانش است و با افزایش این عدد از این مقدار، سرعت‌ها در محیط افزایش یافته، اثر نیروی درگ شکل نیز در جریان سیال اثر گذار می‌شود؛ به طوری که هر دو مکانیزم، انتقال حرارت رسانش و جابه‌جایی هم مرتبه می‌شوند. در اعداد رایلی تصحیح شده بزرگتر از $۱۰^{۴}$ به بعد، اثر درگ شکل ناشی از حضور محیط متخلخل در جریان سیال چشمگیر می‌شود و انتقال حرارت جابه‌جایی غالب می‌شود. در جدول ۳ تغییرات عدد ناسلت متوسط در اعداد دارسی مختلف و ضریب تخلخل ۰/۶ و در نسبت ضریب نفوذ حرارتی (A_r) ۱۰ و نسبت ضخامت (t_r) ۰/۲ را شاهد هستیم. همانطور مشاهده می‌شود، در یک عدد دارسی مشخص به ازای رایلی‌های اصلاح شده‌ی $۱۰^{۲}$ و کوچکتر انتقال حرارت غالب رسانش است. در این رژیم($Ra_m \leq ۱۰^{۲}$)، نیروی شناوری قدرت کافی جهت غلبه بر اینرسی حرارتی سیال و درگ ویسکوز ناشی از حضور محیط را ندارد و همچنین در این رژیم، درگ ویسکوز بر درگ شکل غلبه می‌کند. با افزایش عدد رایلی تصحیح شده، نیروی شناوری قدرت بیشتری پیدا می‌کند و در نهایت، اثر انتقال حرارت جابه‌جایی افزایش می‌یابد و همانطور که ذکر شد، از عدد رایلی تصحیح شده $۱۰^{۴}$ انتقال حرارت جابه‌جایی غالب است و سبب افزایش عدد ناسلت متوسط می‌شود و همچنین در یک رایلی مشخص با کاهش عدد دارسی به دلیل کاهش سرعت‌ها در محیط متخلخل و در پی آن کاهش نفوذپذیری سیال در محیط متخلخل، عدد ناسلت کاهش می‌یابد.

در شکل‌های ۳ تا ۶، توزیع دما در هندسه در رایلی‌های مختلف قابل مشاهده است. با افزایش عدد رایلی تصحیح شده، شاهد کوچکتر شدن لایه مرزی حرارتی هستیم و همانطور که از این اشکال مشهود است، خطوط هم‌تراز دما بین دو دیواره در عدد رایلی تصحیح شده ۱۰ در حالت عمودی می‌باشند که نشان دهنده مکانیزم غالب رسانش است و با افزایش این عدد تا $۱۰^{۴}$، به حالت افقی تبدیل می‌شود که انتقال حرارت غالب جابه‌جایی را نمایش می‌دهد. شکل ۷، تغییرات دما در میانه محفظه (Y=۰/۵) در اعداد دارسی مختلف را نشان می‌دهد که با توجه به این نمودار، با کاهش عدد دارسی تغییرات دما در میانه محفظه از حالت غیرخطی به حالت خطی تبدیل می‌شود که بدین معنی است که رژیم انتقال حرارت در اعداد دارسی پایین به صورت رسانش است.

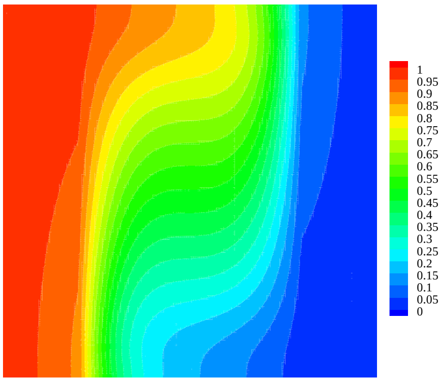


شکل ۳- خطوط هم‌تراز دما در $Ra=10^{3}$ ، $Da=10^{-2}$ ، $A_r=10$ ، $t_r=0/2$ **و** $\varepsilon=0/6$

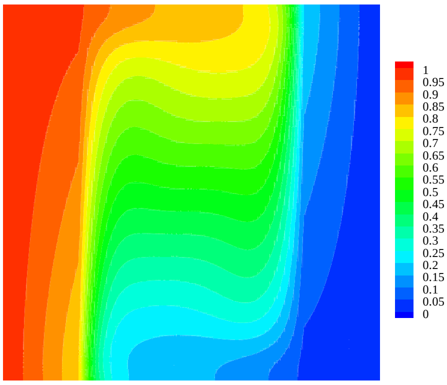


شکل ۴- خطوط هم‌تراز دما در $Ra=10^{4}$ ، $Da=10^{-2}$ ، $A_r=10$ ، $t_r=0/2$ **و** $\varepsilon=0/6$

از دیگر پارامترهای موثر در انتقال حرارت از محیط متخلخل، ضریب تخلخل ماده‌ی متخلخل است. با افزایش این ضریب، میزان تخلخل در محیط کاهش می‌یابد و در مقابل حرکت سیال، مقاومت کمتری وجود دارد و این کاهش مقاومت به معنی کاهش در درگ ویسکوز و درگ شکل در محیط متخلخل است که با این وجود سیال، سرعت‌های بالاتری را تجربه می‌کند و سبب افزایش خواص جابه‌جایی در محیط متخلخل می‌شود و افزایش نرخ انتقال حرارت را ناشی می‌شود.

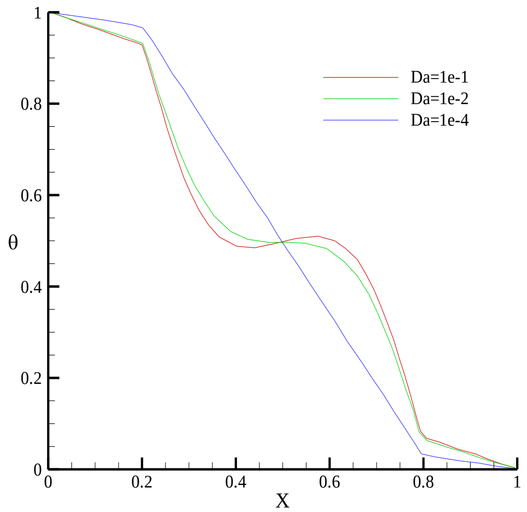


شکل ۵- خطوط هم‌تراز دما در $Ra=10^{5}$ ، $Da=10^{-2}$ ، $A_r=10$ ، $t_r=0/2$ **و** $\varepsilon=0/6$

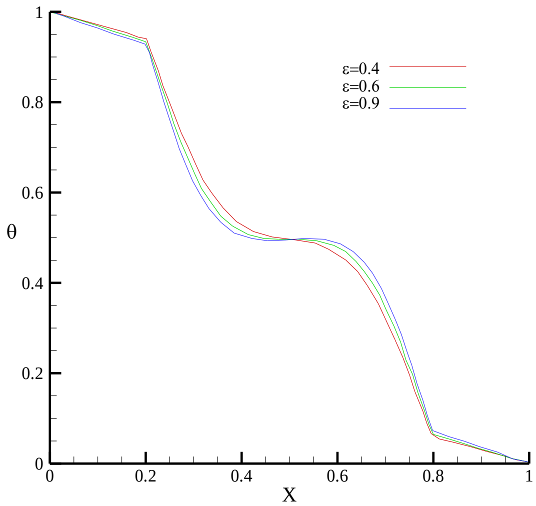


شکل ۶- خطوط هم‌تراز دما در $Ra=10^{6}$ ، $Da=10^{-2}$ ، $A_r=10$ ، $t_r=0/2$ **و** $\varepsilon=0/6$

در شکل ۸، اثر ضریب تخلخل در تغییرات دما در میانه محفظه $(Y=0/5)$ در یک عدد رایلی و دارسی مشخص رسم شده است و همچنین اثر این پارامتر در میزان انتقال حرارت از محفظه در جدول ۴ آورده شده است و مشاهده می‌شود که در یک رایلی مشخص با افزایش ضریب تخلخل، عدد ناسلت متوسط در محفظه افزایش می‌یابد و همچنین تغییرات خطوط جریان به ازای تغییر این پارامتر در یک عدد رایلی و دارسی مشخص، به صورت کیفی در شکل‌های ۹ تا ۱۱ آورده شده است.



شکل ۷- تغییرات دما در Y=۰/۵ به ازای Ra =۱۰^{۵}، A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و ε =۰/۶

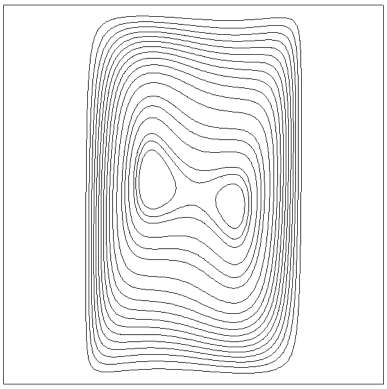


شکل ۸- تغییرات دما در Y=۰/۵ به ازای Ra =۱۰^{۵}، A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و Da =۱۰$^{-۲}$

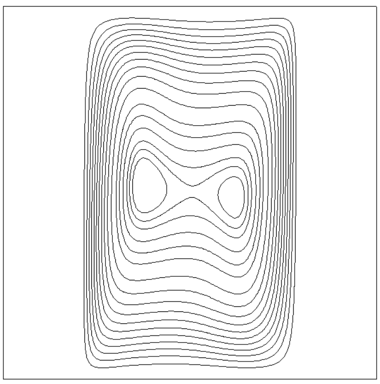
مطابق شکل ۱۲ با افزایش ضخامت دیواره‌ها اختلاف دمای بین دو دیواره قسمت متخلخل کوچکتر می‌شود و با توجه به تعریف عدد رایلی (رابطه‌ی (۹))، نیروی شناوری کاهش می‌یابد و با کاهش نیروی شناوری، خواص جابه‌جایی در انتقال حرارت در محیط متخلخل کاهش پیدا می‌کند.

همچنین با توجه به شکل‌های ۱۳ تا ۱۵، خطوط هم‌تراز دما با افزایش ضخامت دیواره به صورت خطوط عمودی تبدیل می‌شوند که این رفتار، به این معنی است که رژیم جریان با افزایش ضخامت دیواره به صورت رسانش می‌شود و لایه مرزی حرارتی، بزرگتر می‌شود.

شکل ۹- خطوط هم‌تراز دما در Ra =۱۰^{۶}، Da =۱۰$^{-۲}$، A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و ε =۰/۴



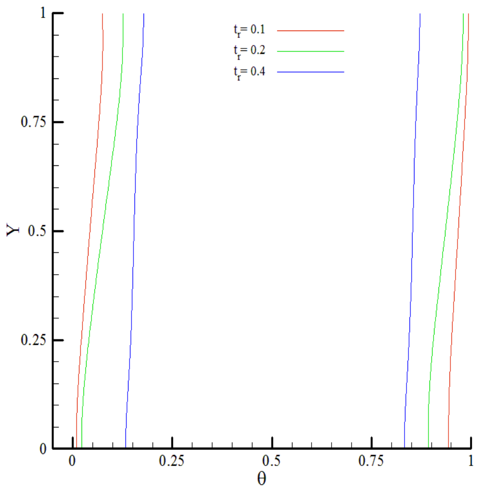
شکل ۱۰- خطوط هم‌تراز دما در Ra =۱۰^{۶}، Da =۱۰$^{-۲}$، A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و ε =۰/۶



شکل ۱۱- خطوط هم‌تراز دما در Ra =۱۰^{۶}، Da =۱۰$^{-۲}$، A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و ε =۰/۹

جدول ۴- عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی به ازای A_r =۱۰، t_r =۰/۲ و Da =$۱۰^{-۲}$

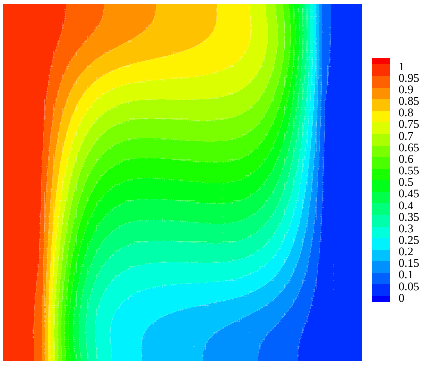
Ra	ε ۰/۴	۰/۶	۰/۹
$۱۰^{۳}$	۱/۰۰۶	۱/۰۰۷	۱/۰۰۸
$۱۰^{۴}$	۱/۰۸۶	۱/۱۳۷	۱/۲۰۳
$۱۰^{۵}$	۱/۸۸۸	۲/۰۹۴	۲/۳۰۸
$۱۰^{۶}$	۳/۲۷۰	۳/۶۱۸	۴/۰۰۰



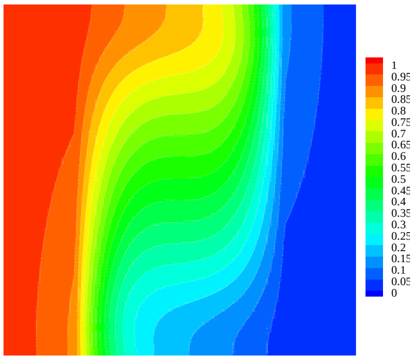
شکل ۱۲- تغییرات دما در حدفاصل دیوار و محیط متخلخل در Ra= $۱۰^{۵}$، Da= $۱۰^{-۲}$، A_r = ۱۰، ε = ۰/۶

در جدول ۵ اثر تغییر ضخامت دیواره در میزان انتقال حرارت از محفظه در یک عدد رایلی و سایر پارامترهای مشخص دیگر بررسی شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، در یک رایلی مشخص با افزایش ضخامت دیواره عدد ناسلت متوسط کاهش می‌یابد و به نزدیکی ۱ می‌رسد.

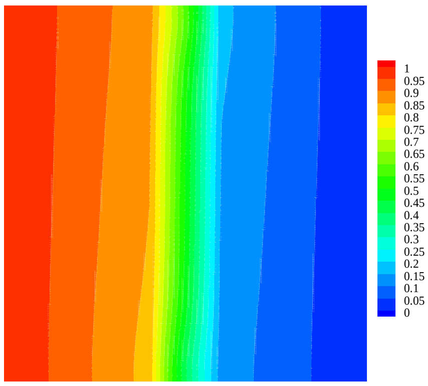
پارامتر مهم دیگری که در این مسئله مورد اهمیت است، نسبت ضریب نفوذ حرارتی دیواره‌ی جامد به محیط متخلخل(A_r) است. با تغییر این پارامتر، توزیع دما در محفظه (مطابق شکل‌های ۱۶ تا ۱۸) به طور چشمگیری تغییر می‌کند و عدد ناسلت متوسط با افزایش این پارامتر در یک عدد رایلی و دارسی مشخص مطابق جدول ۶ افزایش می‌یابد و این افزایش را می‌توان این گونه تعبیر کرد که با افزایش این ضریب، هدایت حرارتی در قسمت دیواره جامد افزایش می‌یابد و مقاومت کلی محفظه در انتقال کاهش پیدا می‌کند و این افزایش، سبب افزایش ناسلت متوسط در محفظه می‌شود. در رایلی اصلاح شده $۱۰^{۴}$ افزایش نسبت ضریب نفوذ، سبب رشد چشمگیری در انتقال حرارت نسبت رایلی‌های کوچک‌تر می‌شود.



شکل ۱۳- خطوط هم‌تراز دما در Ra =$۱۰^{۵}$، Da =$۱۰^{-۲}$، A_r =۱۰، ε =۰/۶ و t_r =۰/۱



شکل ۱۴- خطوط هم‌تراز دما در Ra =$۱۰^{۵}$، Da =$۱۰^{-۲}$، A_r =۱۰، ε =۰/۶ و t_r =۰/۲



شکل ۱۵- خطوط هم‌تراز دما در Ra =$۱۰^{۵}$، Da =$۱۰^{-۲}$، A_r =۱۰، ε =۰/۶ و t_r =۰/۴

جدول ۵- عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی به ازای ۱۰ =A_r، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$ و $\varepsilon=۰/۶$

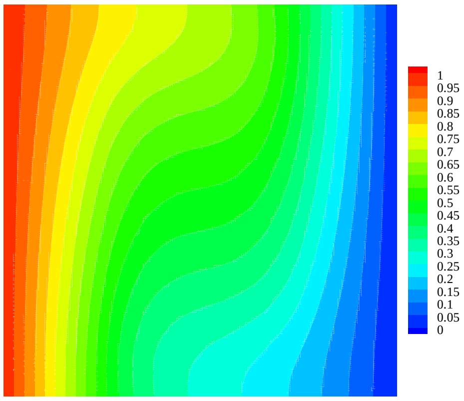
Ra	t_r		
	۰/۱	۰/۲	۰/۴
$۱۰^{۳}$	۱/۰۱۲	۱/۰۰۷	۱/۰۰۴
$۱۰^{۴}$	۱/۳۲۸	۱/۱۳۷	۱/۰۰۳
$۱۰^{۵}$	۲/۷۵۶	۲/۰۹۴	۱/۰۱۴
$۱۰^{۶}$	۵/۲۱۵	۳/۶۱۸	۱/۲۸۳

جدول ۶- عدد ناسلت متوسط در محفظه‌ی به ازای $t_r=۰/۲$، $\varepsilon=۰/۶$ و $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$

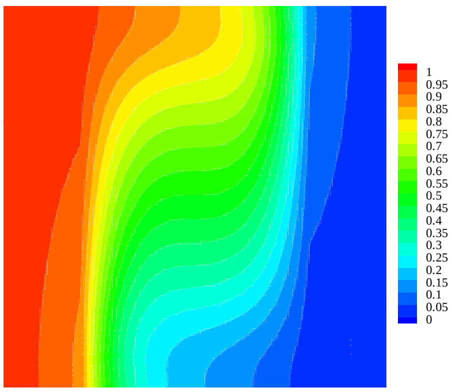
Ra	A_r		
	۱	۱۰	۱۰۰
$۱۰^{۳}$	۱/۰۰۰	۱/۰۰۷	۱/۰۰۸
$۱۰^{۴}$	۱/۰۵۱	۱/۱۳۷	۱/۱۵۴
$۱۰^{۵}$	۱/۴۰۲	۲/۰۹۴	۲/۲۹۰
$۱۰^{۶}$	۱/۷۵۷	۳/۶۱۸	۴/۴۱۱

۷- نتیجه‌گیری

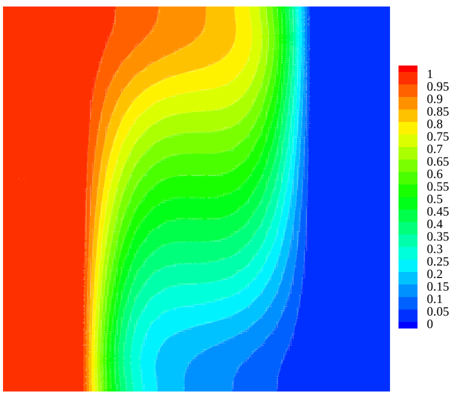
در مطالعه حاضر، به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مزدوج در محفظه بسته متخلخل به روش شبکه بولتزمن پرداختیم. این روش برخلاف روش‌های معمول در شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محیط‌های پیچیده و با شرایط مرزی پیچیده، بسیار کارآمدتر است. مدلسازی جریان و انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل، از مسائل مهم و کاربردی در علم مکانیک سیالات به شمار می‌آید که مدلسازی این محیط توسط روش شبکه‌ی بولتزمن، در دو مقیاس حفره و ماکروسکوپیک انجام می‌پذیرد. در پژوهش حاضر، محیط متخلخل در مقیاس ماکروسکوپیک توسط روش شبکه‌ی بولتزمن مدلسازی شده است و ترم‌های درگ ویسکوز و شکل در معادلات تعمیم یافته ناویر- استوکس به صورت نیروهای بدنی در معادلات شبکه‌بولتزمن بیان شده‌اند و همچنین در این روش، شرط مرزی پیوستگی دما و شار حرارتی در حد فاصل جامد و سیال که از شرط‌های مرزی پیچیده در روش‌های معمول در دینامیک سیالات محاسباتی است، به صورت خودکار و فقط با تفاوت در توابع توزیع جامد و سیال ارضا می‌شود که از مزیت‌های این روش به شمار می‌آید.



شکل ۱۶- خطوط هم‌تراز دما در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$، $A_r=۱$، $\varepsilon=۰/۶$ و $t_r=۰/۲$



شکل ۱۷- خطوط هم‌تراز دما در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$، $A_r=۱۰$، $\varepsilon=۰/۶$ و $t_r=۰/۲$



شکل ۱۸- خطوط هم‌تراز دما در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$، $A_r=۱۰۰$، $\varepsilon=۰/۶$ و $t_r=۰/۲$

جهت اعتبارسنجی مسئله‌ی حاضر، نتایج حاصل شده از برنامه‌ی رایانه‌ای را در سه حالت حدی با پژوهش‌های گذشته مقایسه کردیم که نتایج بدست آمده با خطای قابل قبولی با نتایج مطالعات گذشته در انطباق هستند. اثر هر یک از پارامترهای عدد رایلی، دارسی، ضریب تخلخل، نسبت ضخامت دیواره‌ی جامد به محیط متخلخل و نسبت ضریب نفوذ (در حالتی که سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته شود) در میزان انتقال حرارت از محیط متخلخل، توسط پارامتر بدون بعد عدد ناسلت متوسط بررسی شد و با توجه نتایج حاصل، مشاهده شد که با افزایش عدد رایلی، میزان انتقال حرارت از محیط به دلیل تغییر در رژیم انتقال حرارت از رسانش به جابه‌جایی، افزایش می‌یابد و با کاهش عدد دارسی به دلیل کاهش نفوذپذیری سیال در محیط متخلخل، میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد و با افزایش ضریب تخلخل به دلیل کاهش میزان مقاومت در مسیر سیال، میزان انتقال حرارت در محیط افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش ضخامت دیواره‌های جامد، به دلیل چیرگی انتقال حرارت رسانش در انتقال حرارت کلی از محفظه و تمرکز انتقال حرارت جابه‌جایی به لایه‌ایی نازک در میانه محفظه، میزان انتقال حرارت کلی از محفظه کاهش می‌یابد و در نهایت، با افزایش میزان نسبت نفوذپذیری حرارتی دیواره‌های جامد به محیط متخلخل نیز، میزان انتقال حرارت کلی از محفظه افزایش می‌یابد.

۸- ضمائم

در هر نقطه و در راستای افقی، شار حرارتی محلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q\left(x,y\right)=\frac{uT}{\alpha}-\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۴۴)$$

در راستای هر خط موازی با محور y، جریان حرارتی به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{Nu_x}=\frac{1}{\left(T_h-T_c\right)}\int_0^L Q\left(x,y\right)\mathrm{dy} \qquad (۴۵)$$

در نهایت مقدار متوسط عدد ناسلت در کل محفظه با استفاده از انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۴۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\overline{\mathrm{Nu}}=\frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{Nu_x}\,\mathrm{dx} \qquad (۴۶)$$

که این رابطه در واقع نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی (۱۹) می‌باشد.

۹- مراجع

[1] Mohammadi Pirouz M, Farhadi M, Sedighi K, Nemati H, Fattahi E (2011) Lattice Boltzmann simulation of conjugate heat transfer in a rectangular channel with wall-mounted obstacles. Sci Iran 18(2): 213-221.

[2] Fedorov AG, Viskanta R (2000) Three-dimensional conjugate heat transfer in the microchannel heat sink for electronic packaging. Int J Heat Mass Tran 43(3): 399-415.

[3] McNamara GR, Zanetti G (1988) Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata. Phys Rev E 61(20): 2332-2335.

[4] Chen S, Doolen GD (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annu Rev Fluid Mech 30: 329-364.

[5] Higuera FJ, Jiménez J. (1989) Boltzmann Approach to Lattice Gas Simulations. EPL (Europhys Let) 9(7): 663.

[6] Teixeira C, Chen H, Freed DM (2000) Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation. Comput Phys Commun 129(1–3): 207-226.

[7] Wang J, Wang M, Li Z (2007) A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer. Int J Therm Sci 46(3): 228-234.

[8] Nazari M, Mohebbi R, Kayhani MH (2014) Power-law fluid flow and heat transfer in a channel with a built-in porous square cylinder: Lattice Boltzmann simulation. J Non-Newton Fluid 204: 38-49.

[9] Guo Z, Zhao TS (2002) Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. Phys Rev E 66(3).

[10] Guo Z, Zhao TS (2005) A Lattice Boltzmann model for convection heat transfer in porous media. Numer Heat Tr B-Fund 47(2): 157-177.

[11] Seta T, Takegoshi E, Okui K (2006) Lattice Boltzmann simulation of natural convection in porous media. Math Comput Simulat 72(2–6): 195-200.

[12] Haghshenas A, Nasr MR, Rahimian MH (2010) Numerical simulation of natural convection in an open-ended square cavity filled with porous medium by lattice Boltzmann method. Int Commun Heat Mass 37(10): 1513-1519.

[13] Gao D, Chen Z, Chen L (2014) A thermal lattice Boltzmann model for natural convection in porous

media under local thermal non-equilibrium conditions. Int J Heat Mass Tran 70: 979-989.

[14] Chang WJ, Lin HC (1994) Wall heat conduction effect on natural convection in an enclosure filled with a non-Darcian porous medium. Numer Heat Tr A-Appl, 25(6): 671-684.

[15] Baytaş AC, Liaqat A, Groşan T, Pop I (2001) Conjugate natural convection in a square porous cavity. Heat Mass Transfer 37(4-5): 467-473.

[16] Nawaf HS (2007) Conjugate natural convection in a vertical porous layer sandwiched by finite thickness walls. Int Commun Heat Mass 34(2): 210-216.

[17] Nawaf. HS (2007) Conjugate natural convection in a porous enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls. Int J Therm Sci 46(6): 531-539.

[18] Chamkha AJ, Ismael MA (2013) Conjugate heat transfer in a porous cavity filled with nanofluids and heated by a triangular thick wall. Int J Therm Sci 67: 135-151.

[19] Beckermann C, Vikanta R, Ramadhyani S (1988) Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers. J Fluid Mech 186: 257-284.

[20] Gao D, Chen Z, Chen L (2014) A thermal lattice Boltzmann model for natural convection in porous media under local thermal non-equilibrium conditions. Int J Heat Mass Tran 70: 979-989.

[21] Hsu CT, Cheng P (1990) Thermal dispersion in a porous medium. Int J Heat Mass Tran 33(8): 1587-1597.

[22] Vafai K (1984) Convective flow and heat transfer in variable-porosity media. J Fluid Mech 147: 233-259.

[23] Vahl Davis GD (1983) Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. Int J Numer Meth Fl 3: 249-264.

[۲۴] نظری م، کیهانی م ح، انارکی حاجی باقری آ (۱۳۹۲) مقایسه انتقال حرارت در یک محفظه بسته دارای لایه متخلخل عمودی و افقی به روش شبکه بولتزمن، مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس ۱۳(۸): ۹۳-۱۰۷.

[25] Vishnampet R, Narasimhan A, Babu V (2011) High Rayleigh Number Natural Convection Inside 2D Porous Enclosures Using the Lattice Boltzmann Method. J Heat Transf 133(6).

[26] Mohamad AA (2007) Applied Lattice Boltzmann method for transport phenomena, Momentum, Haet Mass transfer. Sure print, Calggray, Canada.

[27] Nithiarasu P, Seetharamu KN, Sundararajan T (1997) Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium. Int J Heat Mass Tran 40(16): 3955-3967.

[28] Kaminski DA, Prakash C (1986) Conjugate natural convection in a square enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls. Int J Heat Mass Tran 29(12): 1979-1988.