



شبیه‌سازی آزمون‌های شکست مود ترکیبی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

علی عباس زاده بیدختی^{۱*}، امیررضا شاهانی^۲^۱دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

آستاذ، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۵/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۰۲/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۳/۲۹

چکیده

در این پژوهش، یک نمونه آزمون مود ترکیبی شکست، با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، شبیه‌سازی می‌شود. بدین منظور، نمونه‌ای با نام " ورق مربعی با بارگذاری قطری" انتخاب شده که برای آن، نتایج آزمون‌های تجربی موجود است. فرایند بارگذاری قبل از شکست، لحظه شکست و رشد ترک در قطعه، شبیه‌سازی شده و بارگذاری به صورت جابجایی کنترل در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی انجام شده مبتنی بر واقعیت بوده، در هر مرحله از تحلیل، با استفاده از معیارهای شکست، زاویه و مقدار رشد ترک تعیین شده است. همچنین برای شبیه‌سازی آزمون‌های مختلف، از یک مدل با مش‌بندی ثابت استفاده شده که در نتیجه هزینه‌های محاسباتی به شدت کاهش یافته است. همچنین انتگرال‌گیری عددی در المان‌های غنی شده مورد بررسی قرار گرفته و با تحلیل تأثیر تعداد نقاط گاوس در این المان‌ها بر پارامتر شکست، تعداد نقاط گاوس بهینه، تعیین گردیده است. مقایسه نتایج شبیه‌سازی، به روش المان محدود توسعه یافته با میانگین داده‌های آزمون‌های تجربی، نشان می‌دهد بار بحرانی و ضرایب شدت تنش در لحظه شکست قطعات، کمتر از ده درصد اختلاف دارند. همچنین مسیر رشد ترک در آزمون‌های تجربی و تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته مقایسه می‌شود. مشاهده می‌شود که بین نتایج مسیر رشد ترک، تطابق خوبی وجود دارد.

کلمات کلیدی: ورق مربعی با بارگذاری قطری؛ مود ترکیبی شکست؛ المان محدود توسعه یافته.

Modeling of Mixed Mode Fracture Tests Using Extended Finite Element Method

A. Abbaszadeh Bidokhti^{1*}, A. R. Shahani²¹PhD Student, Mech. Eng., K.N. Toosi Univ of Tech., Tehran, Iran²Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi Univ of Tech., Tehran, Iran

Abstract

In the present study, a mixed mode fracture specimen was simulated by the extended finite element method. For this, a specimen called "Diagonally loaded square plate" was selected. For this specimen, experimental test results are available. The loading process including the fracture and crack growth is simulated. Displacement control loading is considered. The crack growth increment and direction are determined using the fracture criteria. Various test specimens are simulated using a model with the fixed mesh. Therefore, computational costs have decreased significantly. Furthermore, numerical integration in the enriched elements is studied and the optimum numbers of gauss points in these elements are determined. Comparing the results of the extended finite element method with the experimental data show that the critical fracture load and the stress intensity factors at the fracture moment differ less than 10%. Furthermore, there is a convincing agreement between the crack growth path in the experimental test results and numerical analysis by the extended finite element method.

Keywords: Diagonally loaded square plate, Mixed mode fracture, Extended finite element.

۱- مقدمه

در مدل‌سازی مسائل شامل ناپیوستگی به کمک روش المان محدود، المان‌بندی باید بر مرز ناپیوستگی منطبق باشد. المان‌بندی، باید به گونه‌ای انجام گیرد که مرز ناپیوستگی از درون هیچ یک از المان‌ها عبور نکند؛ در نتیجه در مسائلی نظیر ترک‌ها، جواب نهایی به نحوه المان‌بندی، امتداد آنها و شکل و ابعاد آنها وابسته است؛ همچنین شبیه‌سازی حرکت ناپیوستگی، مستلزم بازتولید مش و انطباق مش بر مرزهای ناپیوستگی در هر مرحله از محاسبات است. تنها با روش‌هایی مانند المان‌بندی مجدد که روش‌هایی بسیار پرهزینه هستند، می‌توان به جواب‌های قابل اطمینانی در اینگونه مسائل دست یافت.

روش المان محدود توسعه‌یافته، تقریب جدیدی از روش المان محدود ارائه می‌دهد. در این روش با اضافه‌کردن توابع مناسب به فضای تقریب استاندارد، امکان در نظر گرفتن میدان ناپیوسته در سطح هریک از المان‌ها فراهم می‌شود؛ در نتیجه، مرز ناپیوستگی می‌تواند از داخل المان‌ها عبور کند. در صورت استفاده از این روش در مسائل دارای ناپیوستگی، مش مستقل از ترک بوده، نیازی به شبکه‌بندی با توجه به سطوح ناپیوستگی نمی‌باشد و نیاز به شبکه‌بندی مجدد و بازسازی المان‌ها هنگام رشد ترک از بین می‌رود. این امر، هزینه‌های محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد.

معرفی روش المان محدود توسعه‌یافته^۱ برای اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط بلیچکو^۲ و همکارش [۱] انجام گرفت. در این کار، از توابع پایه مربوط به تغییر مکان‌های نوک ترک برای غنی‌سازی المان محدود گره‌های نزدیک نوک ترک استفاده گردیده است. آنها در کارشان از خاصیت تقسیم‌بندی واحد استفاده کرده‌اند. این خاصیت، واحد بودن مجموع توابع شکل را بیان می‌کند. این خاصیت، برای همگرایی بسیار مهم و تعیین کننده است. موس^۳ و همکارانش [۲]، روش فوق را با در نظر گرفتن یک میدان ناپیوسته در امتداد وجوه ترک غیر از نوک آن بهبود بخشیدند. آنها تابع هویساید عمومی را به عنوان وسیله‌ای برای مدل کردن ترک غیر از نوک آن پیشنهاد داده، قوانین ساده‌ای برای تعریف غنی‌سازی

ناپیوستگی‌ها و نوک ترک توسعه دادند. اضافه کردن یک میدان ناپیوسته، امکان مدل کردن مستقل ترک از مش را می‌دهد و نیاز به مش‌بندی مجدد هنگام رشد ترک را حذف می‌کند. بلیچکو^۲ و همکارانش [۳]، روش فوق را برای مدل کردن ناپیوستگی‌های مستقل از مش، عمومیت بخشیدند. در این کار، بررسی جامعی از مدل کردن توابع با ناپیوستگی‌های دلخواه (ناپیوستگی‌های قوی) و مشتقات ناپیوسته (ناپیوستگی‌های ضعیف) ارائه می‌شود. این روش در مورد اغلب مسائل شامل، ناپیوستگی‌ها توسعه داده شده است. به عنوان مثال، دالبو^۴ و همکارانش [۴]، شکست ورق‌های میندلین-رایزنر را با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی کردند. داکس^۵ و همکارانش [۵]، روش المان محدود توسعه یافته را برای مدل کردن سوراخ‌ها و ترک‌های شاخه دار بکار بردند. لیو^۶ و همکارانش [۶]، این روش را برای استخراج ضرایب شدت تنش مود در ترک‌های بین دو ماده گسترش دادند. همچنین در زمینه سیالات، چسا^۷ و همکارانش [۷]، از روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل کردن جریان چند فازی استفاده کرده است. در بیشتر کارهای انجام شده، عموماً توسعه روش فوق مدنظر قرار گرفته و کمتر مسائل تجربی شبیه‌سازی شده است. از معدود موارد انجام شده، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: بررسی رشد ترک دینامیکی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در یک قطعه و مقایسه با نتایج تجربی [۸]، تخمین عمر خستگی سایشی با استفاده از داده‌های تجربی و روش المان محدود توسعه یافته [۹] و مدل کردن رشد ترک بین لایه‌ای در سازه‌های لایه‌ای با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و مقایسه با نتایج تجربی [۱۰].

در بسیاری از پژوهش‌های انجام شده براساس روش المان محدود توسعه یافته، فرضیاتی در نظر گرفته شده و معمولاً مقدار رشد ترک در هر مرحله به عنوان پیش فرض در نظر گرفته می‌شود.

ویژگی‌های اصلی پژوهش حاضر، به شرح زیر است: یک مسأله تجربی مکانیک شکست با نتایج مشخص، با استفاده از

^۴Belytschko^۵Dolbow^۶Daux^۷Liu^۸Chessa^۱eXtended Finite Element Method (X-FEM)^۲Belytschko^۳Moës

پژوهش، یک نمونه آزمون مود ترکیبی شکست با نام "ورق مربعی با بارگذاری قطری" است. این نمونه، دارای ویژگی‌های مناسبی است، از جمله به آسانی و با هزینه کم قابل ساخت است، نیاز به فیکسچر بارگذاری پیچیده ندارد و شرایط مختلف بارگذاری مودهای اول و دوم در حالت ترکیبی را فراهم می‌کند. در این پژوهش، نمونه آزمون مود ترکیبی فوق، با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، شبیه‌سازی می‌شود. بدین منظور، ابتدا اصول کلی این روش، روابط مربوطه و چگونگی محاسبه ضرایب شدت تنش مود ترکیبی و معیار رشد ترک، بیان می‌شود؛ سپس آزمون نمونه تجربی مود ترکیبی "ورق مربعی با بارگذاری قطری"، ارائه شده توسط مرجع [۱۷]، بررسی گردیده است. در ابتدا، تعداد نقاط گاوس بهینه در المان‌های غنی شده تعیین می‌شود و سپس تحلیل شکست و رشد ترک در حالت شکست مود ترکیبی در این نمونه با استفاده از تحلیل عددی المان محدود توسعه یافته، شبیه‌سازی می‌شود. در هر مرحله از تحلیل، با استفاده از معیارهای شکست، زاویه و مقدار رشد ترک تعیین شده است. مقایسه نتایج تجربی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی، تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهد.

۲- اصول روش المان محدود توسعه یافته

در روش المان محدود توسعه یافته، تقریب جابجایی از دو قسمت تشکیل می‌شود: قسمت استاندارد (\mathbf{u}^{std}) و قسمت غنی شده (\mathbf{u}^{enr})؛ بنابراین \mathbf{u} از رابطه (۱) به دست خواهد آمد:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{std} + \mathbf{u}^{enr} \quad (1)$$

قسمت استاندارد، همان تقریب استفاده شده در روش استاندارد المان محدود است که توسط رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}^{std} = \sum_{I \in S} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2)$$

که در آن S مجموعه گره‌های شبکه، $N_I(\mathbf{x})$ توابع شکل مربوط به گره نام است که عبارت است از $N_I(\mathbf{x}_I) = \delta_{ij}$ ، \mathbf{x}_I مختصات گره نام، \mathbf{u}_I مجهولات گره‌ای در گره نام هستند. در روش المان محدود توسعه یافته، برحسب نوع ناپیوستگی یک تابع ناپیوسته روی المان مدل می‌شود. از برآیند این میدان ناپیوسته و میدان پیوسته به دست آمده از

روش المان محدود توسعه یافته مدل‌سازی شده است. مدل‌سازی انجام شده، مبتنی بر واقعیت بوده، در هر مرحله از تحلیل، با استفاده از معیارهای شکست، زاویه و مقدار رشد ترک تعیین شده است. هیچ‌گونه پیش‌فرضی در مقدار و زاویه رشد ترک در نظر گرفته نشده است. همچنین برای شبیه‌سازی آزمون‌های مختلف، از یک مدل با مش‌بندی ثابت استفاده شده است که نسبت به مدل‌های المان محدود، المان بسیار کمتری دارد. برای تحلیل المان محدود، باید برای هر نمونه، مدل جدید با مش‌بندی خاص ایجاد گردد و تحلیل رشد ترک، مستلزم استفاده از روش‌های پرهزینه مانند، مش‌بندی مجدد است؛ بنابراین هزینه‌های محاسباتی به شدت کاهش یافته است.

همچنین انتگرال‌گیری عددی در المان‌های غنی شده مورد بررسی دقیق قرار گرفته و تأثیر تعداد نقاط گاوس در این المان‌ها بر پارامترهای شکست، تحلیل شده است. بر این اساس، تعداد نقاط گاوس بهینه در این المان‌ها، تعیین گردیده است.

در بسیاری موارد، شکست سازه‌های مهندسی تحت بارگذاری مود ترکیبی رخ می‌دهد. به عنوان مثال، می‌توان از موارد ذیل نام برد: شکست پره توربین که تحت بارگذاری گریز از مرکز و بارگذاری خمشی ناشی از فشار سیال قرار دارد، شکست مته حفاری که تحت بارگذاری پیچشی، فشاری و خمشی قرار دارد و یا سازه‌های ترک‌دار هواپیما که تحت بارگذاری سیال و بارهای خمشی و کششی قرار دارند. بررسی شکست تجربی روی سازه‌های واقعی، اغلب بسیار پیچیده و هزینه‌بر است؛ بنابراین غالباً پژوهشگران، آزمایش‌های خود را روی نمونه‌های آزمایشگاهی اجرا می‌کنند. این نمونه‌ها، باید به صورت مناسب طراحی شود تا همان شرایط تنش و کرنش ترک در سازه‌های واقعی را فراهم کند. برای انجام آزمون‌های مود ترکیبی شکست، نمونه‌های مختلفی پیشنهاد شده است. از این نمونه‌ها، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: ورق مستطیلی با ترک مورب تحت بارگذاری کششی [۱۱ و ۱۲]، نمونه دیسک برزلی ترک‌دار [۱۳ و ۱۴]، نمونه کششی-برشی فشرده [۱۵] و نمونه خمشی نیمه دایروی ترک‌دار [۱۶]. برخی از این نمونه‌ها، تنها ترکیب‌های محدودی از مود اول و مود دوم را فراهم می‌کنند و برخی دیگر، احتیاج به فیکسچرهای پیچیده دارند. نمونه آزمون بررسی شده در این

\mathbf{a}_j ، \mathbf{b}_k^l درجات آزادی غنی‌شده (به ترتیب در گره‌های المان‌های برش‌خورده و گره‌های المان نوک ترک) هستند. (r, θ) مختصات قطبی محلی در نوک ترک است. براساس آنچه در مورد روش المان محدود توسعه‌یافته گفته شد، در حل مسائل با این روش، دو گام اساسی در نظر گرفته می‌شود:

گام اول: در ابتدا به منظور شبکه‌بندی، مرز ناپیوستگی از مسأله حذف شده و شبکه‌بندی بدون توجه به ناپیوستگی موجود و تنها براساس هندسه خارجی مسأله صورت می‌گیرد. گام دوم: پس از تعیین شبکه‌بندی مسأله، مرز ناپیوستگی با شبکه انتخاب‌شده در نظر گرفته می‌شود. سپس در المان‌هایی که توسط مرز ناپیوستگی قطع شده و میدان در آنها ناپیوسته است، با کمک روش تقسیم‌بندی واحد و توسط توابع گفته‌شده، غنی‌سازی صورت می‌گیرد. به نحوی که تقریب جدید، میدان ناپیوسته هریک از این المان‌ها را به درستی مدل کنند.

بدیهی است که موقعیت گره‌ها نسبت به مرز ناپیوستگی، باید در هر مرحله از محاسبات تعیین شود. با استفاده از این اطلاعات، می‌توان المان‌هایی که توسط مرز ناپیوستگی قطع می‌شوند را تشخیص داده و غنی‌سازی مورد نظر را انجام داد. برای مش‌بندی مدل‌ها از المان‌های چهارضلعی درجه یک (با توابع شکل لاگرانژی) استفاده شده است.

۳- گسسته‌سازی معادلات تعادل

برای یک جسم در حال تعادل استاتیکی، شکل ضعیف معادله تعادل (اصل کار مجازی)، به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Gamma \quad (6)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش، \mathbf{b} نیروی جسمی و $\bar{\mathbf{t}}$ بردار تنش خارجی هستند. با جاگذاری تقریب تغییر مکان در روش المان محدود توسعه‌یافته در شکل ضعیف معادله تعادل، رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (7)$$

که \mathbf{K} ماتریس سختی، \mathbf{u}^h بردار درجات آزادی گرهی (شامل درجات آزادی کلاسیک و غنی‌شده) و \mathbf{f} بردار نیروی خارجی است. برای هر المان، ماتریس سختی و نیرو به صورت رابطه (۸) است:

تقریب استاندارد، میدان ناپیوسته موردنظر به دست می‌آید. اضافه‌کردن این تابع ناپیوسته با استفاده از روش تقسیم‌بندی واحد انجام می‌گیرد. عموماً برای توابع شکل در قسمت غنی‌شده از همان توابع قسمت استاندارد استفاده می‌شود:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in S} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J \in S^{enr}} N_J(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J \quad (3)$$

که S^{enr} مجموعه گره‌های غنی‌شده است. $\Psi(\mathbf{x})$ توابع غنی‌سازی یا توابع اضافی \mathbf{a}_j و مجهولات اضافی هستند.

غنی‌سازی در روش المان محدود توسعه‌یافته، به صورت موضعی انجام می‌گیرد؛ یعنی غنی‌سازی در هر المان به صورت مستقل و تنها با توجه به وضعیت مرز ناپیوستگی درون همان المان انجام می‌شود. برای غنی‌سازی گره‌هایی که ترک تکیه‌گاه آنها را قطع می‌کند و همچنین تکیه‌گاه آنها نوک ترک را در برنارد، از تابع هویساید به منظور غنی‌سازی تقریب جابجایی استاندارد استفاده می‌شود. برای گره‌هایی که تکیه‌گاه آنها نوک ترک را در بردارد، چنانچه نوک ترک داخل المان قرارگیرد، باید از توابع انشعاب برای غنی‌سازی این گره‌ها استفاده شود تا ناپیوستگی جابجایی در نزدیک نوک ترک به خوبی مدل گردد. این توابع، با استفاده از حل‌های تحلیلی برای حالت‌های خاص ترک بدست آمده‌اند.

ماده در نظر گرفته شده در تحلیل‌های انجام‌شده، ماده الاستیک خطی است. مسائل به صورت دوبعدی (تنش صفحه‌ای) مدل گردیده‌اند. با توجه به موارد فوق برای مدل‌سازی به روش المان محدود توسعه‌یافته، میدان جابجایی به صورت رابطه (۴) در نظر گرفته شده است:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j + \sum_{k \in K_1} N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 F_l^1(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k^{l1} \right) + \sum_{k \in K_2} N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 F_l^2(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k^{l2} \right) \quad (4)$$

که $H(\mathbf{x})$ تابع هویساید (تابع غنی‌ساز در گره‌های المان‌های کاملاً برش‌خورده) است. توابع غنی‌ساز گره‌های نزدیک نوک ترک به صورت رابطه (۵) است:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

متفاوت است. المانی که چهار گره آن با توابع هویساید غنی شود، اندازه ماتریس سفتی المان ۱۶×۱۶ است و المانی که چهار گره آن با توابع هویساید غنی شود، اندازه ماتریس سفتی المان ۴۰×۴۰ است. این یکی از ویژگی‌های روش المان محدود توسعه‌یافته است که اندازه ماتریس المان‌ها یکسان نبوده، با توجه به گره‌هایی که غنی می‌شوند، اجزای ماتریس سفتی در طی رشد ترک تغییر می‌کند.

۴- انتگرال گیری در المان‌های غنی شده

یکی از مسائل مهم و پیچیده در روش المان محدود توسعه‌یافته، انتگرال گیری در المان‌های غنی شده‌است. برای انتگرال گیری عددی در المان‌های استاندارد، معمولاً از روش انتگرال گیری گاوسی^۱ استفاده می‌شود. با استفاده از تعداد نقاط گاوس مناسب (نقاط انتگرال گیری)، این روش برای توابع چندجمله‌ای دقیق است. در توابع چندجمله‌ای از درجه n برای اینکه انتگرال گیری دقیق باشد، باید تعداد نقاط گاوس بیشتر یا مساوی $\frac{n+1}{2}$ باشد. در این مسئله با توجه به اینکه توابع شکل المان‌های استاندارد از نوع خطی است، تعداد نقاط گاوس در هر ضلع برابر ۲ در نظر گرفته شده است (۴ نقطه گاوس در هر المان چهارضلعی استاندارد).

از آنجا که در روش المان محدود توسعه‌یافته، ترک کاملاً به‌طور دلخواه می‌تواند از داخل المان عبور کند، روش استاندارد فوق، برای انتگرال گیری میدان‌های ناپیوسته در المان‌های غنی شده مناسب نیست. در المان‌هایی که کاملاً توسط ترک قطع شده و با تابع هویساید غنی شده‌اند، انتگرال گیری عددی باید به طرز صحیح، سهم هر طرف ناپیوستگی را در شکل ضعیف معادلات محاسبه نماید. چنانچه از روش استاندارد انتگرال گیری عددی در المان‌های غنی شده با توابع ناپیوسته هویساید استفاده شود، موده‌های منفرد نادرست در سیستم معادلات ظاهر می‌شود. برای انتگرال گیری صحیح، باید انتگرال گیری در چندضلعی‌های دو سوی ترک به طور جداگانه انجام شود. با توجه به اینکه انتگرال گیری در چندضلعی‌ها (بیش از ۴ ضلع) پیچیده بوده، تا کنون فرمول‌بندی واحدی برای آن ارائه نشده است. روش مرسوم، این است که برای انتگرال گیری عددی در این

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{uu} & \mathbf{K}_{ij}^{ua} & \mathbf{K}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{K}_{ij}^{au} & \mathbf{K}_{ij}^{aa} & \mathbf{K}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{K}_{ij}^{bu} & \mathbf{K}_{ij}^{ba} & \mathbf{K}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$\mathbf{f}_i^e = \left\{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b_1} \quad \mathbf{f}_i^{b_2} \quad \mathbf{f}_i^{b_3} \quad \mathbf{f}_i^{b_4} \right\}^T \quad (۹)$$

بردار درجات آزادی گرهی و اجزاء ماتریس سختی و بردار نیرو به صورت رابطه (۱۰-۱۴) است:

$$\mathbf{u}^h = \{u \quad a \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4\}^T \quad (۱۰)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega \quad (r,s=u,a,b) \quad (۱۱)$$

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{\Gamma_i} N_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i \mathbf{b} d\Omega \quad (۱۲)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{\Gamma_i} N_i H \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i H \mathbf{b} d\Omega \quad (۱۳)$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha} = \int_{\Gamma_i} N_i F_\alpha \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i F_\alpha \mathbf{b} d\Omega \quad (۱۴)$$

u درجات آزادی کلاسیک و a, b درجات آزادی غنی شده هستند. \mathbf{D} تانسور ضرایب الاستیک است. اجزای این ماتریس برای حالت تنش صفحه‌ای در مرجع [۳] مشخص شده است. ماتریس‌های $\mathbf{B}_i^r, r=u, a, b$ ، به صورت روابط (۱۵-۱۸) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$\mathbf{B}_i^b = [\mathbf{B}_i^{b_1} \quad \mathbf{B}_i^{b_2} \quad \mathbf{B}_i^{b_3} \quad \mathbf{B}_i^{b_4}] \quad (۱۷)$$

$$\mathbf{B}_i^{b\alpha} = \begin{bmatrix} (N_i F_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i F_\alpha)_{,y} \\ (N_i F_\alpha)_{,y} & (N_i F_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

هریک از ماتریس‌های فوق، ابتدا باید برای هر المان محاسبه شده و سپس برای کل المان‌ها تجمیع گردد. برای یک المان چهارضلعی درجه یک استاندارد، با توجه به رابطه ۱۱، اندازه ماتریس سفتی المان ۸×۸ است. برای المان‌هایی که دارای گره‌های غنی شده هستند، بسته به اینکه تعداد گره‌های غنی شده چه تعداد باشد، اندازه ماتریس سفتی

^۱Gaussian Quadrature

دسترس است. در این کار از روش مرجع [۱۸] استفاده شده که بر مبنای تقسیم یک چندضلعی محدب به چند زیرمثلث انجام می‌شود. (مطابق شکل ۱) [۱۸].

المان‌های غنی‌شده، المان‌های فوق به زیرمثلث‌هایی منطبق بر ترک، تقسیم شده و انتگرال‌گیری روی این زیرمثلث‌ها انجام می‌شود. (مطابق شکل ۱) [۱۸].

۵- محاسبه ضرایب شدت تنش و تحلیل رشد ترک

برای محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی، از روش انتگرال تعاملی^۱ [۱۹] استفاده شده است. در این روش، میدان‌های کمکی به میدان‌های حقیقی تنش، کرنش و جابجایی افزوده می‌شود. در حالت‌هایی که این میدان‌های کمکی به طریق مناسب انتخاب شوند، امکان استخراج ضرایب شدت تنش مود اول و مود دوم به صورت جداگانه فراهم می‌شود. برای کاهش خطا و افزایش دقت در محاسبه انتگرال‌های کانتوری در روش المان محدود توصیه می‌شود. این انتگرال‌ها، به صورت ناحیه‌ای معادل^۲ درآمده و محاسبه گردند. انتگرال تعاملی به شکل ناحیه‌ای به صورت رابطه (۱۹) است:

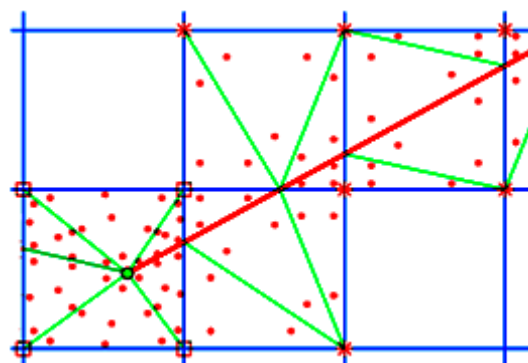
$$I^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (19)$$

W انرژی کرنشی و A ناحیه انتگرال‌گیری است. $q(x)$ یک تابع وزن هموار است که روی یک مسیر دربردارنده نوک ترک مقدار ۱ و روی یک کانتور بیرونی مقدار صفر را می‌گیرد. با استفاده از انتگرال تعاملی، ضرایب شدت تنش مود اول و مود دوم به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} K_I^{(1)} = \frac{2}{E} I^{(1, Mode I)} \\ K_{II}^{(1)} = \frac{2}{E} I^{(1, Mode II)} \end{cases} \quad (20)$$

E برحسب مدول یانگ ماده E و ضریب پواسون ν ، به صورت $E' = E/(1-\nu^2)$ برای حالت کرنش صفحه‌ای، تعریف می‌شود. جزئیات این روش، در مرجع [۲۰] آمده است.

برای انجام محاسبات عددی انتگرال فوق، ناحیه A ، مجموعه‌ای از المان‌های اطراف نوک ترک در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور، مرجع [۲] پیشنهاد کرده که ابتدا



شکل ۱- تقسیم المان‌های غنی‌شده به زیر بخش‌های مثلثی جهت انتگرال‌گیری عددی

همچنین در المان‌های نوک ترک (غنی‌شده با توابع انشعاب)، با توجه به اینکه انتگرال‌گیری عددی از توابع منفرد صورت می‌گیرد، باید تعداد نقاط گاوس مخصوصاً حول نوک ترک، افزایش یابد. برای این منظور، المان‌های حاوی نوک ترک، حول نوک ترک به زیرمثلث‌هایی تقسیم شده، انتگرال‌گیری عددی روی این زیرمثلث‌ها انجام می‌شود (مطابق شکل ۱)؛ همچنین با توجه به اینکه برخی از گره‌های المان‌های مجاور نوک ترک نیز با توابع منفرد، غنی‌سازی شده است، به نظر می‌رسد برای انتگرال‌گیری دقیق‌تر در این المان‌ها، نسبت به المان‌های استاندارد، باید تعداد نقاط گاوس افزایش یابد. در این المان‌ها، تعداد نقاط گاوس مناسب به عنوان یک پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اینکه تعداد نقاط گاوس مناسب در المان‌های غنی‌شده چه تعداد باشد، در قسمت‌های بعد به طور دقیق مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

باید توجه داشت که تقسیم المان‌های غنی‌شده به زیرمثلث‌ها، فقط جهت انتگرال‌گیری عددی انجام می‌شود و هیچ‌گونه درجه آزادی اضافی به مسأله اضافه نمی‌کند. همچنین مکان گره‌های مسأله و در نتیجه المان‌بندی، در تمام تحلیل ثابت است.

تقسیم یک چندضلعی به چند زیرمثلث، یک امر روتین در مسائل عددی است. برای این امر، روش‌های مختلفی در

¹Interaction integral method
²equivalent domain form

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta_c) = \frac{K^{eq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (23)$$

$$K^{eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - K_{II} \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \sin(\theta_c) \quad (24)$$

در هر گام، برای شروع رشد ترک در حالت مود ترکیبی، باید ضریب شدت تنش مؤثر به ضریب شدت تنش بحرانی یا همان چقرگی شکست ماده، برسد؛ بنابراین برای شروع رشد، رابطه (۲۵) باید برقرار باشد:

$$K^{eq} \geq K_{IC} \quad (25)$$

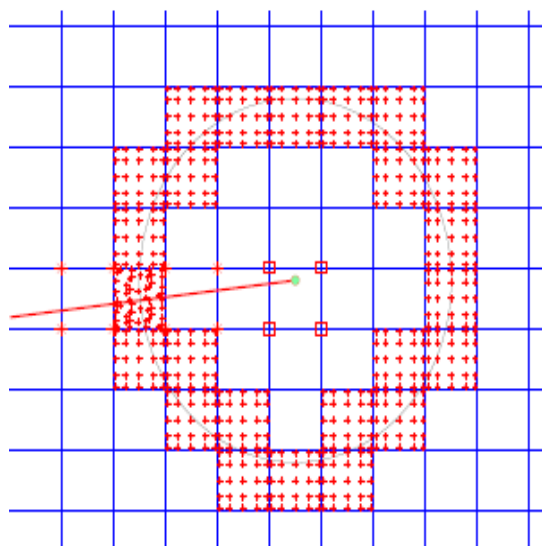
۶- معرفی نمونه "ورق مربعی با بارگذاری قطری"

تحت بارگذاری مود ترکیبی

در اغلب مسائل واقعی مهندسی، رشد ترک در حالت مود ترکیبی رخ می‌دهد. بررسی تجربی شکست در قطعات واقعی، بسیار سخت و هزینه‌بر است. اغلب محققان، آزمون‌های تجربی را روی نمونه‌های آزمایشگاهی انجام می‌دهند. در سال ۲۰۰۹، آیت الهی و همکارش [۱۷] برای بررسی رشد ترک در مود ترکیبی، نمونه‌ای با نام "ورق مربعی با بارگذاری قطری"^۱ ارائه دادند. (شکل ۳).

از مزایای این نمونه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: این نمونه، گستره کاملی از ترکیب مودهای اول و دوم شکست را جهت آزمون فراهم می‌کند؛ همچنین این نمونه، علاوه بر استفاده در مود اول شکست خالص و آزمون‌های مود ترکیبی شکست، توانایی ایجاد مود شکست دوم خالص را دارد، در حالی که برخی دیگر از نمونه‌های آزمون‌های مود ترکیبی شکست، توانایی ایجاد مود دوم خالص را ندارند؛ همچنین این نمونه، احتیاج به قید و بند بارگذاری کمکی ندارد و مستقیماً می‌تواند به پین‌های بارگذاری دستگاه متصل شود؛ در حالی که برخی نمونه‌های مورد استفاده در بارگذاری مود ترکیبی مانند، نمونه کششی-برشی فشرده^۲ [۲۱]، نیاز به قید و بند بارگذاری پیچیده‌ای دارد.

طول مشخصه یک المان نوک ترک (جذر مساحت المان) محاسبه شده و سپس ناحیه A به صورت المان‌هایی انتخاب می‌شوند که حداقل یک گره در فاصله‌ای معین از نوک ترک دارند. در انجام محاسبات ما، فاصله فوق برابر ۳ برابر طول مشخصه المان در نظر گرفته شده است. (مطابق شکل ۲)



شکل ۲- انتخاب المان‌های اطراف ترک برای محاسبه شکل ناحیه‌ای انتگرال تعاملی

معیار حداکثر تنش مماسی به عنوان معیار شروع و رشد ترک در نظر گرفته شده است. در حالت بارگذاری مود ترکیبی، با صرف‌نظر از ترم‌های غیرمفرد، تنش مماسی در اطراف نوک ترک به صورت رابطه (۲۱) است [۲۰]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (21)$$

بر اساس معیار حداکثر تنش مماسی، رشد ترک در راستایی رخ می‌دهد که تنش مماسی، بیشینه باشد. با مشتق‌گرفتن از رابطه بالا و مساوی صفر قرار دادن آن، رابطه (۲۲) برای زاویه رشد ترک در هر گام حاصل می‌شود:

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{-2K_{II} / K_I}{1 + \sqrt{1 + 8(K_{II} / K_I)^2}} \right] \quad (22)$$

همچنین براساس این معیار، می‌توان رابطه (۲۳-۲۴) را بین ضریب شدت تنش مؤثر مود ترکیبی و تنش مماسی در نظر گرفت:

¹Diagonally loaded square plate (DLSP)

²Compact tension-shear (CTS) specimen

جدول ۲- مشخصات خواص مکانیکی نمونه آزمون ورق

مربعی با بارگذاری قطری [۱۷]

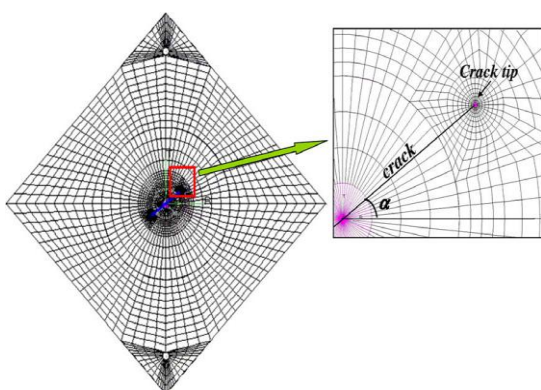
مدول یانگ E (GPa)	ضریب پواسون ν	چقرمگی شکست K_{IC} (MPa√m)
۲/۹۴	۰/۳۸	۱/۳۳

در پژوهش فوق، برای تعیین ضرایب شدت تنش در نمونه فوق، روابط ابتکاری (۲۶) معرفی شده است:

$$K_I = \frac{P}{wt} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} Y_I\left(\frac{a}{w}, \alpha\right)$$

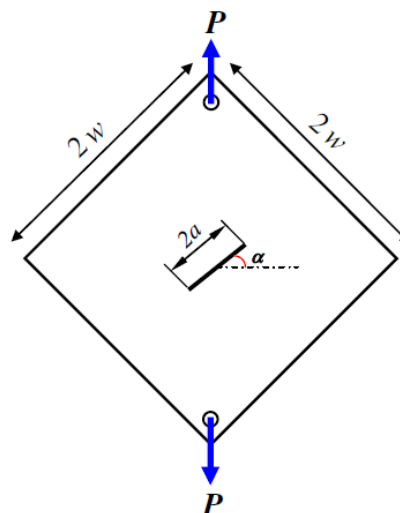
$$K_{II} = \frac{P}{wt} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} Y_{II}\left(\frac{a}{w}, \alpha\right) \quad (26)$$

در پژوهش فوق، برای تعیین ضرایب هندسی Y_I و Y_{II} ، تحلیل‌های المان محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. در این تحلیل‌ها، بار وارد بر قطعه ثابت و برابر ۰.۰ نیوتن در نظر گرفته شده است؛ سپس برای مقادیر مختلف طول ترک و همچنین زاویه قرارگیری ترک، با استفاده از مدل المان محدود در نرم‌افزار آباکوس، ضرایب شدت تنش محاسبه گردیده است. پس از آن با استفاده از روابط ۲۶، ضرایب هندسی Y_I و Y_{II} برای هر مدل تعیین شده، در نهایت تابعیت این ضرایب به صورت نموداری مشخص شده است. در این مرجع، مدل المان محدود، دارای ۲۷۵۰ گره بوده، از المان تنش-صفحه‌ای ۸ گرهی برای مدل‌سازی استفاده شده است (شکل ۴).



شکل ۴- مدل المان محدود نمونه در نرم‌افزار آباکوس [۱۷]

با توجه به زاویه قرارگیری ترک در نمونه و نسبت طول



شکل ۳ نمونه "ورق مربعی با بارگذاری قطری" برای بررسی رشد ترک در مود ترکیبی

۷- چگونگی آزمون‌های تجربی و تحلیل المان

محدود

آیت الهی و همکارش، آزمون‌های مختلفی را روی نمونه فوق از جنس polymethyl methacrylate (PMMA) (یک ماده پلیمری ترد) انجام دادند. روش آزمون‌های فوق، بدین صورت بوده است که به ازای زوایای مختلف قرارگیری ترک در نمونه (α)، با استفاده از بارگذاری از نوع کنترل جابجایی^۱، ترک به آرامی تحت بارگذاری قرار گرفته است (بار شبه استاتیکی). جابجایی اعمالی افزایش یافته تا ترک شروع به رشد کند. در این لحظه، نیروی عکس‌العمل به عنوان "بار بحرانی شکست قطعه"^۲ ثبت شده است. در این آزمون‌ها، همچنین، چگونگی مسیر رشد ترک تصویربرداری و ثبت گردیده است. مشخصات هندسی قطعه و خواص مکانیکی ماده مورد استفاده در جداول ۱ و ۲ فراهم گردیده است.

جدول ۱- مشخصات هندسی نمونه آزمون ورق مربعی با

بارگذاری قطری [۱۷]

عرض ورق $2w$ (mm)	طول ترک $2a$ (mm)	ضخامت ورق t (mm)	نرخ بارگذاری (mm/min)
۱۵۰	۴۵	۵	۱

^۱Displacement control

^۲Critical fracture load (P_{cr})

در هر جهت نمونه به صورت منظم استفاده شده است. باید توجه داشت که نسبت به شبیه‌سازی المان محدود مرجع [۱۷]، پژوهش حاضر از امتیازات زیر برخوردار است: شبیه‌سازی مرجع فوق تنها در بار ثابت انجام شده و برای هر یک از نمونه‌های مختلف، جداگانه مش‌بندی انجام شده، ضرایب شدت تنش در یک بار ثابت محاسبه شده است؛ همچنین فرایند رشد ترک مدل‌سازی نشده است. در حالی که در پژوهش حاضر، کل فرایند بارگذاری آزمون‌های انجام شده، شبیه‌سازی شده و بارگذاری به صورت جابجایی کنترل در نظر گرفته شده است. فرایند بارگذاری از قبل از شکست قطعه، لحظه شکست و رشد ترک در قطعه، شبیه‌سازی شده است. ویژگی دیگر پژوهش حاضر، این است که برای تمام نمونه‌های مختلف و همه تحلیل‌ها (از جمله رشد ترک در نمونه‌های مختلف)، از یک مش‌بندی ثابت استفاده شده است (شکل ۱۰)؛ همچنین مدل مش‌بندی شده دارای ۱۲۲۵ گره است که در مقایسه با مدل المان محدود مرجع [۱۷] (۲۷۵۰ گره)، تعداد المان بسیار کمتری دارد؛ بنابراین با توجه به موارد گفته‌شده، هزینه محاسباتی تحلیل‌های عددی انجام شده نسبت به تحلیل المان محدود مرجع [۱۷]، بسیار کمتر است.

۸-۱- انتخاب نقاط گأوس مناسب در المان‌های

غنی‌شده

برای تحلیل مسأله به روش المان محدود توسعه‌یافته از المان‌های چهارضلعی درجه یک استفاده شده است. بر این اساس، برای انتگرال‌گیری در المان‌های استاندارد از تعداد 2×2 نقطه گأوس استفاده شده است. همان‌گونه که در بخش ۴ ذکر شد، برای انتگرال‌گیری عددی در المان‌های غنی‌شده، باید این المان‌ها به زیرممثلث‌هایی تقسیم شود. اینکه تعداد نقاط گأوس مناسب در زیرممثلث‌ها چه تعداد باشد، در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ همچنین تعداد نقاط گأوس مناسب در المان‌های مجاور المان نوک ترک، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

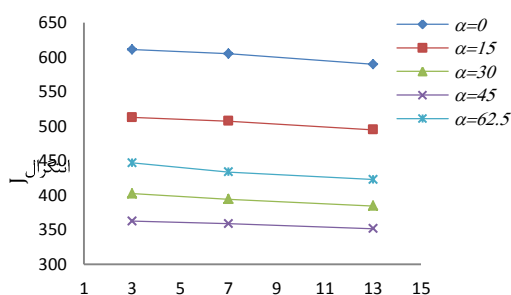
ترک به عرض ورق، مود بارگذاری می‌تواند، مود اول، مود دوم و یا مود ترکیبی باشد. طبق گزارش مرجع [۱۷]، برای نسبت طول ترک به عرض ورق برابر $0/3$ (ورق مورد آزمایش)، زاویه قرارگیری ترک که در آن مود دوم خالص ایجاد می‌شود، برابر $62/5$ درجه است. مود اول خالص نیز، در زاویه صفر درجه بوجود می‌آید. آزمون‌های تجربی برای زوایای 0 ، 15 ، 30 ، 45 و $62/5$ درجه انجام شده است. در هریک از زوایای فوق، چهار عدد نمونه، مورد آزمون قرار گرفته، مجموعاً نتایج ۲۴ نمونه آزمون، فراهم گردیده است. در هریک از آزمون‌ها، بار شکست قطعه ثبت شده و سپس با استفاده از نمودارهای ضرایب هندسی (تعیین شده با استفاده از تحلیل‌های المان محدود برای بار ثابت) و روابط ۲۶، ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در لحظه شکست، تعیین گردیده است.

۸- نتایج تحلیل المان محدود توسعه‌یافته

به منظور مقایسه با نتایج تجربی، مدل‌سازی با روش المان محدود توسعه‌یافته انجام شده و نتایج تحلیل‌های عددی با نتایج آزمون مقایسه گردیده است. برای شبیه‌سازی با روش المان محدود توسعه‌یافته، در هر گام بارگذاری، ابتدا با استفاده از روش انتگرال تعاملی، ضرایب شدت تنش برای مودهای اول و دوم تعیین می‌شود. سپس با استفاده از رابطه (۱۹)، ضریب شدت تنش مؤثر محاسبه می‌گردد؛ سپس در صورتی که ضریب شدت تنش مؤثر به چقرمگی شکست ماده برسد، ترک شروع به رشد خواهد کرد. در غیر این صورت، بار (جابجایی اعمالی) به آرامی افزوده می‌شود؛ هنگامی که برای اولین مرتبه، ضریب شدت تنش مؤثر به چقرمگی شکست ماده برسد، نیروی عکس‌العمل به عنوان بار شکست بحرانی قطعه P_{cr} در محل اعمال جابجایی ثبت می‌شود. از این گام به بعد، مقدار رشد ترک و زاویه رشد ترک در هر مرحله براساس روابط ۲۲ تا ۲۵ تعیین می‌شود و با توجه به معیار شکست، ترک رشد داده می‌شود. در هر گام بارگذاری، روش فوق تکرار می‌شود. بدین ترتیب، مسیر کامل رشد ترک بدست می‌آید. برای تحلیل این مسأله به روش المان محدود توسعه‌یافته، کد کامپیوتری در نرم‌افزار Matlab توسعه داده شده است. ساختار برنامه کامپیوتری فوق، در شکل ۵ ترسیم گردیده است.

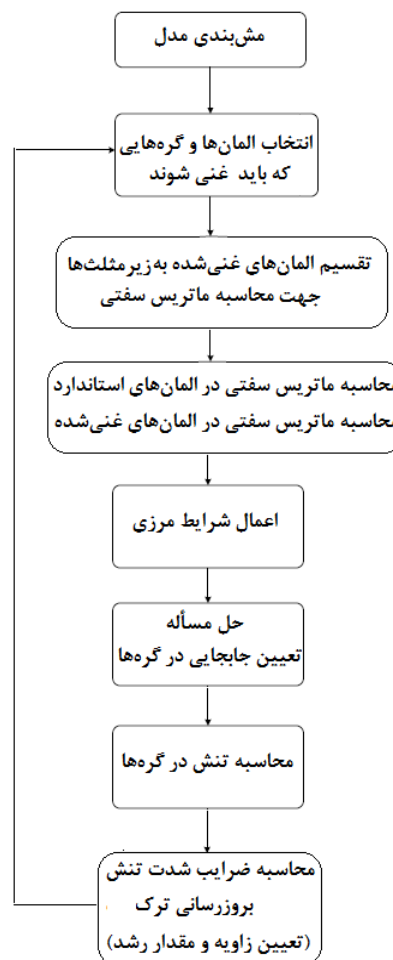
برای مش‌بندی مدل المان محدود توسعه‌یافته از ۳۵ گره

(غنی‌شده با توابع انشعاب) و المان‌های مجاور المان نوک ترک. برای بررسی پارامتری اثر تعداد نقاط گاوس، سه متغیر معرفی می‌شود: تعداد نقاط گاوس در زیرمثلث‌های المان‌های غنی‌شده با تابع هویساید (nH)، تعداد نقاط گاوس در زیرمثلث‌های المان‌های غنی‌شده با توابع انشعاب (nF) و تعداد نقاط گاوس در المان‌های مجاور المان نوک ترک (nN). برای تعیین تعداد نقاط گاوس بهینه در مورد انواع مختلف المان‌های غنی‌شده، مقدار انتگرال J در لحظه شکست نمونه برحسب هر یک از متغیرهای فوق در زوایای مختلف قرارگیری ترک ترسیم می‌شود. همانطور که در شکل ۶ دیده می‌شود، مقادیر انتگرال J در نمونه‌های مختلف با افزایش تعداد نقاط گاوس از سه عدد در زیرمثلث‌های المان‌های غنی‌شده با تابع هویساید (nH)، حداکثر دو تا سه در صد تغییر می‌کند؛ بنابراین برای انتگرال‌گیری در این زیرمثلث‌ها از سه نقطه گاوس استفاده خواهد شد.



شکل ۶- انتگرال J بر حسب تعداد نقاط گاوس در زیرمثلث‌های المان‌های غنی‌شده با هویساید (nH)

شکل ۵- ساختار برنامه کامپیوتری جهت حل مسأله



شکل ۵- ساختار برنامه کامپیوتری جهت حل مسأله

همانگونه که از شکل ۷ مشخص است، مقادیر انتگرال J در نمونه‌های مختلف، با افزایش تعداد نقاط گاوس از سه عدد به هفت عدد تا هشت درصد تغییر می‌کند؛ اما با افزودن بیشتر نقاط گاوس، مقادیر فوق تغییر چندانی نمی‌کند؛ بنابراین برای انتگرال‌گیری در این زیرمثلث‌ها، از هفت نقطه گاوس استفاده خواهد شد.

چنانچه تعداد نقاط گاوس به اندازه کافی نباشد، انتگرال‌گیری‌های عددی از دقت کافی برخوردار نخواهد بود. از طرف دیگر، با انتخاب تعداد نقاط گاوس زیاد، هزینه محاسباتی مسأله به شدت افزایش می‌یابد؛ بنابراین انتخاب تعداد نقاط گاوس بهینه، از اهمیت بالایی برخوردار است. در نواحی مثلثی، نقاط گاوس با استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوسی مشخص می‌شود. برای انتگرال‌گیری عددی بر طبق این روش، می‌توان از ۳، ۷ یا ۱۳ نقطه استفاده کرد. [۲۳].

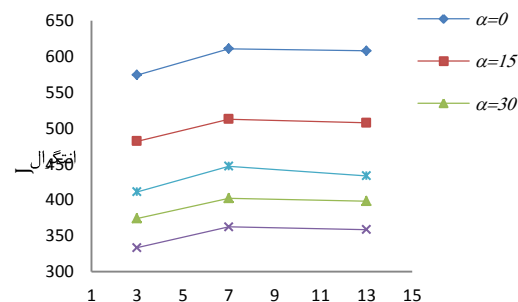
در این مسأله با سه دسته از المان‌های غنی‌شده مواجه هستیم: المان‌هایی که کاملاً توسط ترک قطع شده‌اند (غنی‌شده توسط توابع هویساید)، المان‌های حاوی نوک ترک

جدول ۳- بار بحرانی شکست قطعه (P_{cr}) حاصل از آزمون‌ها و تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته*

زاویه ترک نمونه	آزمون تجربی	میانگین آزمون تجربی	تحلیل المان محدود توسعه یافته	درصد اختلاف
.	۲۵۵۰	۲۳۰۷	۲۲۷۰	۱/۶
۱۵	۲۱۲۵	۲۱۳۳	۲۱۰۷	۱/۲
۳۰	۲۰۴۵	۲۰۸۲	۲۰۰۲	۳/۸
۴۵	۲۴۰۰	۲۳۴۲	۲۱۳۱	۹/۰
۶۲/۵	۳۱۸۷	۳۱۹۲	۳۲۲۳	۱/۰

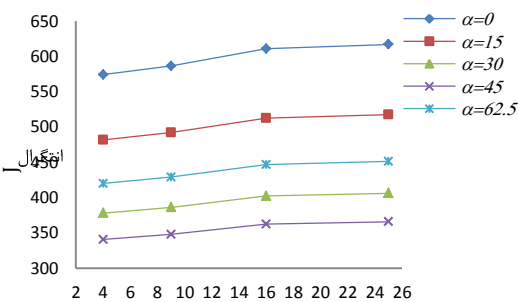
*. بارها بر حسب N می‌باشد

در جدول ۴، نتایج ضرایب شدت تنش موده‌های اول و دوم در لحظه شکست قطعات حاصل از آزمون‌ها و تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته ارائه شده‌اند. برای استخراج نتایج آزمون‌ها، بار شکست قطعه ثبت شده و سپس با استفاده از رابطه ۲۶، ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در لحظه شکست، تعیین گردیده است. مقایسه نتایج آزمون با نتایج تحلیل عددی المان محدود توسعه یافته، نشان می‌دهد نتایج عموماً کمتر از ده درصد اختلاف دارند. نتایج شبیه‌سازی ضریب شدت تنش مود دوم در نمونه آزمون مود دوم خالص (زاویه قرار گیری ترک ۶۲/۵ درجه)، بیشترین اختلاف را با نتایج آزمون دارد.



شکل ۷- انتگرال J بر حسب تعداد نقاط گاوس در زیرمثلث‌های المان‌های غنی شده با توابع انشعاب (nF)

با توجه به شکل ۸، بنظر می‌رسد استفاده از تعداد 4×4 نقطه گاوس در المان‌های مجاور المان نوک ترک، مناسب باشد.

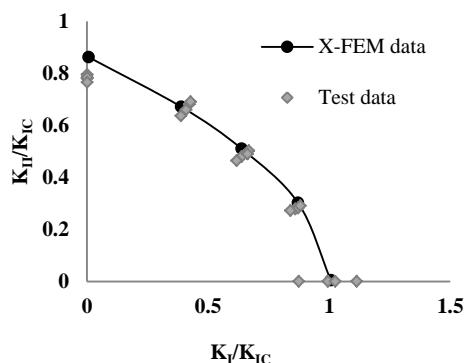


شکل ۸- انتگرال J بر حسب تعداد نقاط گاوس در المان‌های مجاور المان رأس ترک (nN)

نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسأله به روش المان محدود توسعه یافته استخراج و همراه با نتایج آزمون‌های تجربی نمونه فوق، در جداول ۳ و ۴ ارائه شده‌اند.

در جدول ۳، نتایج بار شکست بحرانی قطعه (P_{cr}) حاصل از آزمون‌ها و تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته ارائه شده‌اند. مقایسه نتایج تحلیل عددی با میانگین نتایج آزمون تجربی در زوایای مختلف قرارگیری ترک، نشان می‌دهد که تقریباً در تمام موارد، کمتر از پنج درصد اختلاف وجود دارد. بیشترین اختلاف نتایج آزمون با تحلیل عددی در زاویه ۴۵ درجه مشاهده می‌شود که در حدود نه درصد است.

۸-۲- بحث و بررسی نتایج



شکل ۹- مقایسه نتایج ضرایب شدت تنش مود ترکیبی برای برای آزمون‌های تجربی و تحلیل المان محدود توسعه یافته

بیشترین اختلاف بین نتایج آزمون با نتایج شبیه‌سازی المان محدود توسعه یافته، در حالت مود دوم خالص، وجود دارد. (در حدود ده درصد). بر طبق گزارش مرجع [۱۷]، این اختلاف ناشی از عبارت غیرمنفرد تنش مماسی (T-stress) است. این عبارت، در حالتی که مود دوم غالب باشد، در رشد ترک تأثیر دارد. همان‌طور که قبلاً بیان شد، در تحلیل رشد ترک به روش المان محدود توسعه یافته از معیار رشد حداکثر تنش مماسی استفاده شده است. با استفاده از معیاری که این عبارت را در نظر بگیرد، مانند معیار حداکثر تنش مماسی بهبود یافته [۲۴]، این اختلاف کمتر می‌شود.

مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف قرارگیری ترک در نمونه (α) ، با استفاده از تحلیل المان محدود توسعه یافته تعیین گردیده است. این نتایج، در شکل ۱۰ ارائه شده است. همچنین در مرجع [۱۷]، مسیر رشد ترک در آزمون‌های تجربی تصویربرداری شده و برای زوایای مختلف قرارگیری ترک، مسیرهای رشد ترک در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. همان‌طور که از شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشخص است، زوایای مختلف، مسیرهای رشد ترک از لحاظ کیفی مشابهت خوبی دارند. برای مقایسه کمی مسیر رشد ترک بین نتایج آزمون و تحلیل عددی، در شکل ۱۲، برای زوایای قرارگیری ترک در نمونه، $\alpha = 15^\circ$ ، 45° ، مسیرهای رشد ترک روی هم ترسیم شده‌اند. تطابق خوبی بین مسیر رشد ترک در نتایج آزمون و تحلیل عددی وجود دارد. به نظر می‌رسد هرچه اثر مود دوم بیشتر می‌شود، نتایج مسیر رشد ترک با استفاده از تحلیل عددی کمی از نتایج تجربی فاصله می‌گیرد که این امر، به دلیل اثر عبارت تنش T است.

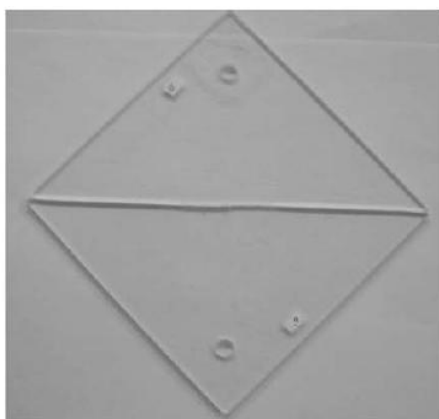
جدول ۴- ضرایب شدت تنش در لحظه شکست نمونه حاصل از آزمون‌ها و تحلیل‌های المان محدود توسعه یافته**

زاویه ترک نمونه	مود اول (آزمون)	مود اول (تحلیل)	درصد اختلاف	مود دوم (آزمون)	مود دوم (تحلیل)	درصد اختلاف
	۱/۴۸۲			.		
	۱/۱۶۲			۰/۰۰۴		
	۱/۳۲۳	۱/۳۴۰	۰/۶	.		
	۱/۳۶۳			.		
	۱/۱۴۴			۰/۳۷۰		
۱۵	۱/۱۶۰	۱/۱۶۰	۱/۰	۰/۳۷۶	۰/۴۰۱	۶/۸
	۱/۱۱۷			۰/۳۶۲		
	۱/۱۷۱			۰/۳۸۷		
	۰/۸۴۹			۰/۶۳۹		
۳۰	۰/۸۲۱	۰/۸۵۰	۱/۲	۰/۶۱۸	۰/۶۷۸	۵/۰
	۰/۸۸۹			۰/۶۶۸		
	۰/۸۸۲			۰/۶۵۱		
	۰/۵۶۱			۰/۹۰۵		
۴۵	۰/۵۴۳	۰/۵۱۷	۵/۹	۰/۸۷۷	۰/۸۹۳	۰/۷
	۰/۵۶۹			۰/۹۱۸		
	۰/۵۱۶			۰/۸۴۶		
	.			۱/۰۳۸		
۶۲/۵	.	۰/۰۱۱		۱/۰۵۸	۱/۱۴۶	۹/۳
	.			۱/۰۴۲		
	.			۱/۰۱۹		

** ضرایب شدت تنش بر حسب $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ می‌باشند.

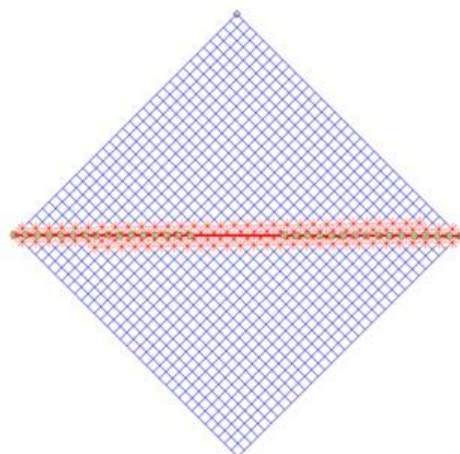
همچنین نتایج فوق، به صورت نموداری در شکل ۹ ترسیم گردیده است. در این شکل، نتایج ضرایب شدت تنش مود دوم بدون بعد بر حسب ضرایب شدت تنش مود اول بدون بعد در حالات مختلف و برای آزمون‌های تجربی و تحلیل‌های عددی ارائه شده است.

از جدول ۴ و شکل ۹، مشخص است که نتایج تحلیل عددی المان محدود توسعه یافته، به نتایج آزمون بسیار نزدیک است.

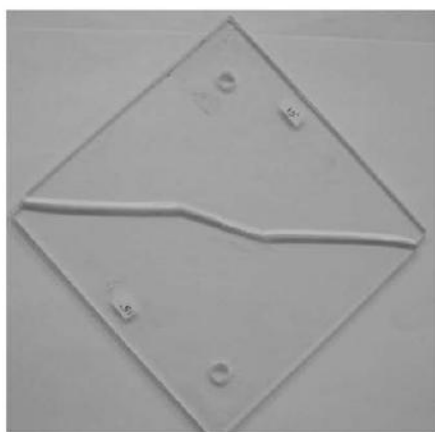


$\alpha = 0^\circ$ (pure mode I)

(الف)

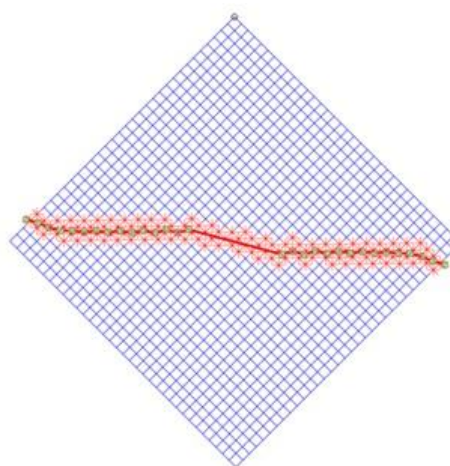


(الف)

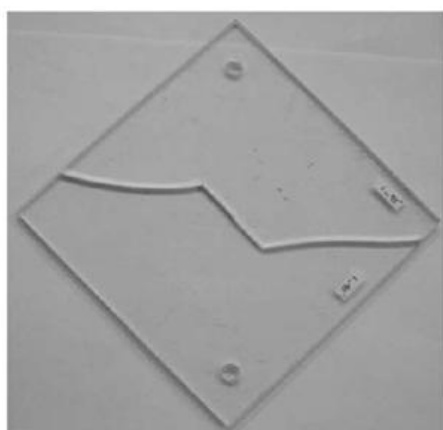


$\alpha = 15^\circ$

(ب)

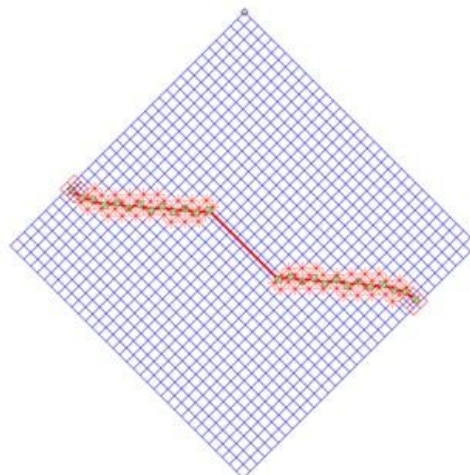


(ب)



$\alpha = 45^\circ$

(ج)



(ج)

شکل ۱۱- مسیر رشد ترک با استفاده از آزمون‌های تجربی (زوایای ترک در نمونه، الف: $\alpha = 0^\circ$ ، ب: $\alpha = 15^\circ$ ، ج: $\alpha = 45^\circ$)

[۱۷]

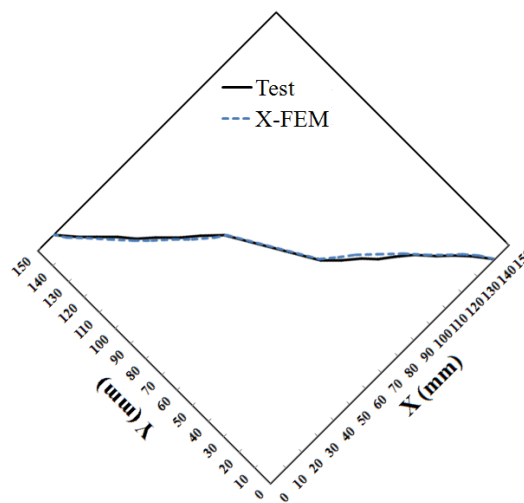
شکل ۱۰- مسیر رشد ترک با استفاده از تحلیل المان محدود توسعه یافته (زوایای ترک در نمونه، الف: $\alpha = 0^\circ$ ، ب: $\alpha = 15^\circ$ ، ج: $\alpha = 45^\circ$)

شده است. هیچ‌گونه فرضیاتی در مقدار و زاویه رشد ترک در نظر گرفته نشده است. فرایند کامل بارگذاری و رشد ترک برای نمونه‌های مختلف، شبیه‌سازی شده است. برای شبیه‌سازی آزمون‌های مختلف تجربی، از یک مدل با مش‌بندی ثابت استفاده شده است که نسبت به مدل‌های المان محدود، تعداد المان بسیار کمتری دارد. برای تحلیل المان محدود، باید برای هر نمونه، مدل جدید با مش‌بندی خاص ایجاد گردد و تحلیل رشد ترک، مستلزم استفاده از روش‌های پرهزینه مانند، مش‌بندی مجدد است؛ بنابراین هزینه‌های محاسباتی به شدت کاهش یافته است.

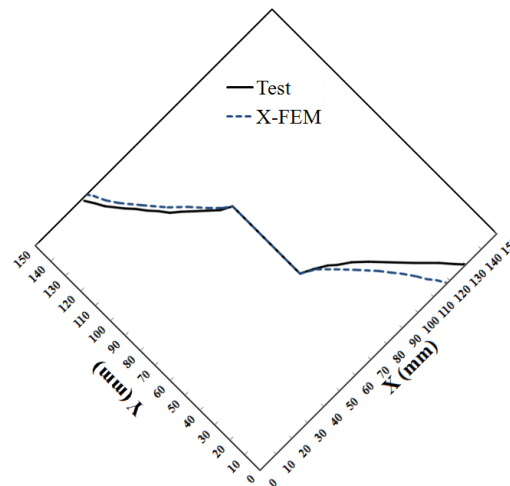
همچنین انتگرال‌گیری عددی در المان‌های غنی‌شده مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از تأثیر تعداد نقاط گاوس در این المان‌ها بر پارامتر انتگرال J در لحظه شکست برای نمونه‌های مختلف، تعداد نقاط گاوس بهینه در المان‌های غنی‌شده، تعیین گردید. تعداد نقاط گاوس در زیرمشل‌های المان‌های غنی‌شده با تابع هویساید سه عدد، تعداد نقاط گاوس در زیرمشل‌های المان‌های غنی‌شده با توابع انشعاب هفت عدد و تعداد نقاط گاوس در المان‌های مجاور المان نوک ترک در هر ضلع چهار عدد تعیین شد.

نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده با آزمون‌های تجربی مقایسه گردیده است. از معیار حداکثر تنش مماسی برای رشد ترک استفاده شده و برای استخراج ضرایب شدت تنش، روش انتگرال تعاملی بکاربرده شده است. این شبیه‌سازی برای زوایای مختلف قرارگیری ترک 0° ، 15° ، 30° ، 45° و $62/5^\circ$ درجه انجام شده است. مقایسه نتایج شبیه‌سازی به روش المان محدود توسعه‌یافته با میانگین داده‌های آزمون‌های تجربی، نشان می‌دهد بار بحرانی و ضرایب شدت تنش در لحظه شکست قطعات، کمتر از ده درصد اختلاف دارند. این امر، دقت شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. بیشترین اختلاف بین نتایج آزمون با نتایج شبیه‌سازی المان محدود توسعه‌یافته، در حالت مود دوم خالص (زاویه $62/5^\circ$ درجه) وجود دارد که در حدود ده درصد است. این اختلاف، ناشی از عبارت غیرمفرد تنش مماسی (Γ -stress) است.

برای زوایای قرارگیری ترک در نمونه، 15° ، 45° ، مسیرهای رشد ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته شبیه‌سازی شده، با نتایج آزمون تجربی مقایسه شده است. تطابق خوبی بین مسیر رشد ترک در آزمون‌های تجربی و



الف) $\alpha = 15^\circ$



ب) $\alpha = 45^\circ$

شکل ۱۲- مقایسه مسیر رشد ترک در آزمون‌های تجربی و تحلیل المان محدود توسعه‌یافته (زوایای قرارگیری ترک در نمونه، الف: 15° ، ب: 45°)

۹- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش، ابتدا رشد ترک در حالت مود ترکیبی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته، بررسی گردیده و روابط مربوط ارائه گردید؛ سپس برای نمونه "ورق مربعی با بارگذاری قطری" رشد ترک تحت بارگذاری مود ترکیبی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته شبیه‌سازی شده است. مدل‌سازی انجام شده، در هر مرحله از تحلیل، با استفاده از معیارهای شکست، زاویه و مقدار رشد ترک تعیین

- [11] Williams J G, Ewing P D (1972) Fracture under complex stress—the angled crack problem. *Int J Fracture* 8(4): 441-446.
- [12] Yukio U, Kazuo I, Tetsuya Y, Mitsuru A (1983) Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads. *Eng Fract Mech* 18(6): 1131-1158.
- [13] Awaji H, Sato S (1978) Combined mode fracture toughness measurement by the disk test. *J Eng Mat* 100, 175.
- [14] Chang S H, Lee C I, Jeon S (2002) Measurement of rock fracture toughness under modes I and II and mixed-mode conditions by using disc-type specimens. *Eng Geol* 66(1): 79-97.
- [15] Richard H A, Benitz K (1983) A loading device for the creation of mixed mode in fracture mechanics. *Int J Fracture* 22(2): 55-58.
- [16] Lim I L, Johnston I W, Choi S K, Boland J N (1994) Fracture testing of a soft rock with semi-circular specimens under three-point bending. Part 2-mixed-mode. *Int J RockMech Min* 31(3): 199-212.
- [17] Ayatollahi M R, Aliha M R M (2009) Analysis of a new specimen for mixed mode fracture tests on brittle materials. *Eng Fract Mech* 76(11): 1563-1573.
- [18] Barber C B, Dobkin D P, Huhdanpaa H (1996). The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM T Math Software* 22(4): 469-483.
- [19] Yau J F, Wang S S, Corten H T (1980) A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J Appl Mech* 47(2): 335-341.
- [20] Dolbow J, Moës N, Belytschko T (2000) Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elem Anal Des* 36(3): 235-260.
- [21] Erdogan F, Sih G C (1963) On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J Basic Eng* 85(4): 519-525.
- [22] Arcan M, Hashin Z, Volosnin A (1978) A method to produce uniform plane-stress states with application to fibre-reinforced materials. *Exp Mech* 18(4): 141-146
- [23] Bang, H, Kwon Y W (2000) The finite element method using MATLAB. *Mechanical Engineering Series: CRC Press*.
- [24] Ayatollahi M R, Aliha M R M (2005) Cracked Brazilian disc specimen subjected to mode II deformation. *Eng Fract Mech* 72(4): 493-503.

تحلیل‌های المان محدود توسعه‌یافته مشاهده می‌شود. در زاویه ۴۵ درجه، نتایج مسیر رشد ترک با استفاده از تحلیل عددی کمی از نتایج تجربی فاصله می‌گیرد. علت این مورد، در نظر نگرفتن اثر عبارت غیرمنفرد تنش مماسی (T-stress) در معیار حداکثر تنش مماسی می‌باشد. هرچه اثر مود دوم بیشتر باشد، این تنش بیشتر می‌شود.

۱۰- مراجع

- [1] Belytschko T, Black T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Meth Engng* 45(5): 601-620.
- [2] Moës N, Dolbow J, Belytschko T (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Meth Engng* 46(1): 131-150.
- [3] Belytschko T, Moës N, Usui S, Parimi C (2001) Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Numer Meth Engng* 50(4): 993-1013.
- [4] Dolbow J, Moës N, Belytschko T (2000) Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *Int J Solids Struct* 37(48): 7161-7183.
- [5] Daux C, Moës N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T (2000) Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int J Numer Meth Engng* 48: 1741-1760.
- [6] Liu X Y, Xiao Q Z, Karahaloo B L (2004) XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *Int J Numer Meth Engng* 59(8): 1103-1118.
- [7] Chessa J, Belytschko T (2003) An extended finite element method for two-phase fluids. *J Appl Mech* 70(1): 10-17.
- [8] Grégoire D, Maigre H, Rethore J, Combescure A (2007) Dynamic crack propagation under mixed-mode loading—comparison between experiments and X-FEM simulations. *Int J Solids Struct* 44(20): 6517-6534.
- [9] Sabsabi M, Giner E, Fuenmayor F J (2011) Experimental fatigue testing of a fretting complete contact and numerical life correlation using X-FEM. *Int J of Fatigue* 33(6): 811-822.
- [10] Yan Y, Park S H (2008) An extended finite element method for modeling near-interfacial crack propagation in a layered structure. *Int J Solids Struct* 45(17): 4756-4765.