



آنالیز ارتعاشات آزاد و واداشته‌ی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی

وحید سروستان^۱، حمیدرضا میردامادی^{۲*} و مصطفی غیور^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۲ دانشیار، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۳ استاد، دانشگاه صنعتی اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۱/۲۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۲/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۵/۲۷

چکیده

در این مقاله، فرمول‌بندی روش المان محدود طیفی و حل آن برای آنالیز ارتعاشات آزاد و واداشته‌ی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار بیان می‌شود. فرمول بندی الگوریتم المان محدود طیفی، در بردارنده استخراج معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای حرکت، میدان جابه‌جایی طیفی، تابع‌های شکل دینامیکی و ماتریس سختی دینامیکی است. تابع‌های شکل دینامیکی در حوزه فرکانس، از حل دقیق معادله‌های موج حاکم بر سیستم به دست می‌آیند. تیر ترک‌دار به دو بخش یا دو تیر جداگانه تقسیم می‌شود که با یک فنر پیچشی به هم متصل می‌شوند و بر این اساس، ماتریس سختی دینامیکی در حوزه فرکانس برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار به دست می‌آید. با در نظر گرفتن ارتعاش آزاد تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار برای شرط‌های مرزی گوناگون به دست می‌آیند. در روش المان محدود طیفی، امکان پذیر است که کل طول تیر با دو المان طیفی مدل‌سازی شود، در حالی که در روش المان محدود کلاسیک، برای دستیابی به دقت مناسب، این امکان میسر نیست. دقت پاسخ‌های به دست آمده از روش المان محدود طیفی، با دقت پاسخ‌های روش المان محدود کلاسیک یا حل‌های تحلیلی مقایسه می‌شوند. نتیجه‌های حاصل از روش المان محدود طیفی، نشانگر برتری این روش در کاهش تعداد المان‌ها و افزایش دقت، در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک است.

کلمات کلیدی: روش المان محدود طیفی؛ تیر ترک دار؛ تئوری اویلر-برنولی؛ تابع شکل دینامیکی؛ ماتریس سختی دینامیکی.

Free and Force Vibration Analysis of Cracked Euler-Bernoulli Beam with Spectral Finite Element Method

V. Sarvestan¹, H.R. Mirdamadi^{2,*} and M. Ghayour²

¹ M.Sc., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran

³ Prof., Mech. Eng., Isfahan University of Technology., Isfahan, Iran

Abstract

In this article, a spectral finite element (SFE) formulation and its solution are described for free and force vibrations of cracked Euler-Bernoulli beam. The formulation based on SFE algorithm includes deriving partial differential equations of motion, spectral displacement field, dynamic shape functions, and dynamic stiffness matrix. Frequency-domain dynamic shape functions are derived from an exact solution of governing wave equations. The cracked beam with an open crack is modeled as two segments connected by a massless rotational spring at the crack position and frequency-domain dynamic stiffness matrix for cracked Euler-Bernoulli beam is extracted. By considering free vibration of the cracked beam, its natural frequencies are derived for different boundary conditions. In the SFE model, It is possible to represent the whole length of beam only by two spectral elements, while it may not be possible to do that in finite element (FE) model, for reaching the same order of accuracy. The accuracy of results obtained from SFE formulation is compared with that of either FE method or analytical formulations. The SFE results display remarkable superiority with respect to those of FE, for reducing the number of elements as well as increasing numerical accuracy.

Keywords: Spectral Finite Element Method; Cracked Beam; Euler-Bernoulli Theory; Dynamic Shape Function; Dynamic Stiffness Matrix.

۱- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های ترک‌دار، با بهره‌گیری از روش‌های گوناگون تحلیلی، عددی و تجربی، بارها مورد مطالعه قرار گرفته است. زمانی که در یک سازه ترکی ایجاد می‌شود، سختی آن کاهش می‌یابد و در نتیجه‌ی آن، فرکانس‌های طبیعی سازه نیز کاهش خواهند یافت. از طرفی، پژوهش‌های بسیاری در این حوزه، روی تیرهای ترک‌دار با در نظر گرفتن شرایط مرزی گوناگون صورت گرفته است. دیماراگوناس^۱ [۱]، در پژوهشی به مرور رفتار دینامیکی سازه‌های ترک‌دار پرداخت. چوندروس^۲ [۲]، نظریه‌ای کامل برای بررسی ارتعاشی تیر ترک‌دار بیان کرد و به بررسی ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار پرداخت. محمود و زید [۳] با روش آنالیز مودال، پاسخ تیر ترک‌دار با شرایط مرزی دو سر لولا را به دست آوردند. آنان نشان دادند که حضور ترک، سبب افزایش جابه‌جایی‌ها و تغییر در الگوی پاسخ تیر می‌شود و افزایش در عمق ترک، بر این تاثیر می‌افزاید. نحوی^۳ و جباری [۴]، با بهره‌گیری از روش المان محدود کلاسیک^۴ و هم‌چنین روش تجربی، به بررسی شناسایی ترک در سازه پرداختند. لویا^۵ و همکاران [۵]، فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکوی ترک‌دار با شرایط مرزی لولا را برای ارتعاشات عرضی آن به دست آوردند. آنان تیر را به صورت دو بخش که با دو فنر بدون جرم، یکی کششی و دیگری پیچشی، به هم متصلند مدل کردند. برخلاف این‌که بارگذاری دینامیکی می‌تواند سبب باز و بسته شدن ترک شود، در این پژوهش، ترک همواره باز در نظر گرفته می‌شود. روش المان محدود کلاسیک، شناخته شده‌ترین روش عددی در تحلیل دینامیکی سازه‌هاست. این روش، به دلیل توانمندی بالای آن در برنامه نویسی کامپیوتری، در شاخه‌های گوناگون مهندسی کاربرد فراوانی یافته است. روش المان محدود کلاسیک، بر پایه بخش‌بندی سازه به المان‌های متعدد و استخراج ماتریس‌های سختی و جرم، استوار است.

وو^۶ و همکاران [۶] از این روش برای بررسی پدیده‌ی گذر بار بهره بردند. اندرسون^۷ و همکاران [۷]، از روش المان محدود کلاسیک در سازه‌های دو بعدی بهره گرفتند. باید اشاره داشت که دقت این روش، تا جایی است که طول موج از طول هر المان بزرگ‌تر باشد. با افزایش فرکانس، طول موج کاهش یافته و در نتیجه، برای افزایش دقت روش المان محدود کلاسیک، باید اندازه‌ی المان‌ها، کوچک و کوچک‌تر شود. هم-چنین، روش المان محدود کلاسیک به استخراج ماتریس‌های سختی و جرم منجر می‌شود که این ماتریس‌ها، از تابع‌های شکل استاتیکی به دست می‌آیند؛ در نتیجه، این تابع‌ها، بدون تغییر و مستقل از فرکانس هستند؛ بنابراین، در روش المان محدود کلاسیک، در فرکانس‌های بالا، باید اندازه المان‌ها کوچک و در نتیجه، تعداد آن‌ها افزایش یابد تا دقت بیشتر شود که این از نقص‌های عمده این روش به شمار می‌آید. بخش‌بندی سازه به المان‌های بسیار ریز، سبب افزایش تعداد درجه‌های آزادی سیستم شده، در نتیجه، زمان و هزینه انجام محاسبات نیز افزایش می‌یابد؛ بنابراین، بسیاری از پژوهشگران به فکر یافتن جایگزین‌های مناسب برای این روش افتادند.

روش المان محدود طیفی^۸، بر پایه‌ی تبدیل فوریه‌ی سریع^۹، از جمله روش‌های نوین برای جایگزینی روش المان محدود کلاسیک است. این روش، در دو دهه‌ی اخیر، در بررسی دینامیکی رفتار سازه‌ها، مورد توجه و استقبال پژوهشگران قرار گرفته است. روشی که می‌تواند پاسخ‌های دقیق و مناسب را، حتی برای مساله‌های بارگذاری در فرکانس بالا، ارایه کند. به طور کلی، روش المان محدود طیفی، به حل معادله حاکم بر سیستم در حوزه‌ی فرکانس می‌پردازد. این روند حل، به صورت دقیق صورت می‌گیرد (در صورت وجود) و برای نگاشت معادله‌ها، از حوزه‌ی زمان، به حوزه‌ی فرکانس، تبدیل فوریه‌ی سریع به کار گرفته می‌شود. همان‌گونه که اشاره شد، حل دقیق معادله‌های پاره‌ای حاکم بر سازه، اساس کار روش المان محدود طیفی است و بر این اساس، فرمول بندی برای المان‌های طیفی انجام می‌شود. تکیه‌ی این روش بر حل دقیق، سبب می‌شود، بر خلاف روش

¹ Dimarogonas² Chondros³ Nahvi⁴ Finite element method (FEM)⁵ Loya⁶ Wu⁷ Anderson⁸ Spectral finite element method (SFEM)⁹ Fast Fourier transform (FFT)

دویل و فاریس^۷ [۱۰]، روش المان محدود طیفی را، جهت آنالیز انتشار امواج در سازه‌های همسان‌گرد نیز معرفی کردند. ماهاپاترا و گوپالاکریشنان^۸ [۱۱]، یک مدل المان محدود طیفی برای آنالیز انتشار موج درهم درگیر محوری-خمشی-برشی، در تیرهای مرکب لایه لایه ضخیم، ارائه کردند و ماتریس سختی دینامیکی یا ماتریس المان طیفی دقیق را برای آن به دست آوردند. لی^۹ و همکاران [۱۲]، روش المان طیفی نوین بر مبنای الگوریتم تبدیل فوریه سریع، برای پاسخ دینامیکی واداشته‌ی سیستم‌های دینامیکی خطی گسسته، با شرایط آغازین ناصفر، ارائه دادند. چاکرابورتی^{۱۰} و گوپالاکریشنان [۱۳]، روش المان محدود طیفی را برای آنالیز رفتار انتشار موج در یک تیر با عمل کرد درجه بندی شده، زیر بارگذاری ضربه‌ای فرکانس بالا، به کار گرفتند. وینود^{۱۱} و همکاران [۱۴]، به بررسی ارتعاشی تیر چرخان اولر-برنولی، با سطح مقطع ثابت و متغیر با روش المان محدود طیفی پرداخته، و برای به دست آوردن عددهای موج، از فرض‌های ساده کننده‌ای بهره گرفتند.

در پژوهش حاضر، ابتدا با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی، به بررسی ارتعاشات آزاد و واداشته‌ی تیر اولر-برنولی پرداخته و پس از آن، با در نظر گرفتن رابطه‌های مربوط به ترک همواره باز در تیر، ماتریس سختی دینامیکی تیر ترک‌دار، براساس ماتریس سختی دینامیکی تیر سالم، به دست می‌آید. فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار، با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی، برای شرط‌های مرزی دو سر لولا و دو سر گیر دار به دست می‌آید. به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، منجر به مساله‌ی مقدار ویژه‌ی غیر جبری خواهد شد که برای محاسبه این فرکانس‌ها، از روش عددی دو نیم کردن^{۱۲} بهره برده می‌شود. پس از آن، با در نظر گرفتن نیروی ثابت، پاسخ تیر ترک‌دار در شرط مرزی دو سر لولا حاصل می‌شود. تاثیر وجود ترک در تیر و هم‌چنین عمق و محل ترک در تیر ترک‌دار نیز بررسی می‌شود. به طور کلی، بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی (با در نظر گرفتن تنها

المان محدود کلاسیک، این روش نیاز چندانی به بخش‌بندی سازه به المان‌های ریز نداشته باشد. در نتیجه، دستیابی به پاسخ‌های دقیق، تنها با یک یا دو المان نیز امکان پذیر می‌شود.

روش المان محدود طیفی برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها کاربرد دارد. برخلاف روش المان محدود کلاسیک که در آن از تابع‌های شکل استاتیکی بهره برده می‌شود، تابع‌های شکل دینامیکی^۱، از حل دقیق معادله‌های حاکم بر سازه به دست می‌آیند. این تابع‌ها، وابسته به فرکانس بوده، بنابراین می‌توانند در فرکانس‌های بالا، رفتار دینامیکی دقیق سازه را بیان کنند. ماتریس سختی دینامیکی^۲ نیز بر پایه‌ی تابع‌های شکل دینامیکی ساخته می‌شود. این ماتریس به طور هم‌زمان، در بردارنده‌ی ویژگی‌های جرم و سختی المان است. از طرفی در روش المان محدود طیفی، پاسخ دینامیکی، برهم‌نهی تعداد کران‌داری از موده‌های موج در چندین فرکانس گسسته، بر پایه‌ی تئوری تبدیل فوریه گسسته فرض می‌شود. در نتیجه، محاسبه‌ی ماتریس سختی دینامیکی باید برای همه فرکانس‌های گسسته، تا بالاترین فرکانس مورد نظر تکرار شود.

در روش المان محدود کلاسیک، وجود فرض‌هایی مانند تابع‌های شکل استاتیکی، از دقت پاسخ‌ها می‌کاهد. هم‌چنین، عدم نیاز به در نظر گرفتن تعداد المان زیاد، سبب از بین رفتن خطاهای مربوط به بخش‌بندی سازه می‌شود و زمان و هزینه‌ی محاسبات نیز کاهش می‌یابد. پس از بررسی رابطه‌ها در حوزه‌ی فرکانس، با بهره‌گیری از وارون تبدیل فوریه سریع^۳، پاسخ‌ها در حوزه‌ی زمان، بازسازی می‌شوند.

نارایانان و بسکاس^۴ [۸]، برای نخستین بار، مفاهیم اساسی روش المان محدود طیفی را بیان نمودند. دیویل^۵ [۹]، نخستین بار از این روش در بررسی پدیده‌ی انتشار موج^۶ موج^۶ در سازه‌ها بهره برد. بهره‌گیری از الگوریتم تبدیل فوریه سریع، در پژوهش وی مورد توجه قرار گرفت. سپس،

⁷ Farris

⁸ Mahapatra, Gopalakrishnan

⁹ Lee

¹⁰ Chacaborty

¹¹ Vinod

¹² Bisection method

¹ Dynamic shape function

² Dynamic stiffness matrix (DSM)

³ Inverse fast Fourier transform (IFFT)

⁴ Narayanan, Beskos

⁵ Doyle

⁶ Wave propagation

اویلر-برنولی، جمله‌ی $F(x, i\omega)$ از معادله‌ی (۵) کنار گذاشته شده و رابطه‌ی (۶) حاصل می‌شود:

$$EIW''''(x, i\omega) - \omega^2 \rho AW(x, i\omega) = 0 \quad (6)$$

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل بالا، به شکل رابطه (۷) فرض می‌شود:

$$W(x) = ae^{-ik(i\omega)x} \quad (7)$$

جایگذاری رابطه‌ی (۷) در معادله‌ی (۶)، به رابطه (۸) منجر می‌شود، که به آن، رابطه‌ی پراکندگی^۱ گفته می‌شود:

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (8)$$

در این رابطه، k_F نشانگر عدد موج^۲ برای تیر اویلر-برنولی است و به این صورت بیان می‌شود:

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (9)$$

معادله‌ی (۸)، چهار ریشه دارد که به این شکل نمایش داده می‌شوند:

$$k_1 = -k_2 = k_F, \quad k_3 = -k_4 = ik_F \quad (10)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن رابطه‌ی جابه‌جایی عرضی تیر اویلر-برنولی به این شکل خواهد بود:

$$W(x; i\omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{+ik_F x} + a_4 e^{+k_F x} = \mathbf{e}(x, i\omega) \mathbf{a} \quad (11)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\mathbf{e}(x, i\omega) = [e^{-ik_F x} e^{-k_F x} e^{+ik_F x} e^{+k_F x}] \quad (12)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1 a_2 a_3 a_4\}^T$$

بردار جابه‌جایی‌های گرهی برای المان تیر اویلر-برنولی به طول l_e ، به صورت زیر، به میدان جابه‌جایی در حوزه فرکانس مرتبط است:

$$\mathbf{d}(i\omega) = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W(l_e) \\ W'(l_e) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

بردار نیروهای گرهی برای المان تیر اویلر-برنولی نیز طبق رابطه‌ی (۱۴)، به نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی وابسته است. با در نظر گرفتن شکل ۱ و بر اساس قانون علامت در مقاومت مصالح:

دو المان) برای به‌دست آوردن ماتریس سختی دینامیکی تیر ترک‌دار (به روش ذکر شده در این پژوهش)، بررسی ارتعاش آزاد و به‌دست آوردن فرکانس‌های تیر ترک‌دار و هم‌چنین، بررسی تاثیر پارامترهای مربوط به ترک، بر پاسخ دینامیکی این تیر، از نوآوری‌های این پژوهش به شمار می‌آیند. دقت بالای پاسخ‌ها (در مقایسه با روش‌های تحلیلی یا نیمه تحلیلی موجود) و بهره‌گیری از تعداد المان‌های بسیار کم، از برتری-های روش المان محدود طیفی، نسبت به سایر روش‌ها، به خصوص، روش المان محدود کلاسیک است.

۲- بررسی روش المان محدود طیفی در تیر اویلر-برنولی سالم

معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر ارتعاش تیر اویلر-برنولی، به این صورت بیان می‌شود [۱۵]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

در این رابطه، $w(x, t)$ بیانگر جابه‌جایی عرضی تیر، E مدول الاستیسته، I گشتاور اینرسی سطح، A سطح مقطع تیر، ρ چگالی جرمی تیر بوده و $f(x, t)$ نشانگر نیرو (۷)، پاسخ عمومی برای وی خارجی دلخواهی است که بر تیر وارد می‌شود. گشتاور خمشی و نیروی برشی در تیر اویلر-برنولی، به این شکل خواهند بود:

$$M(x, t) = EI w''(x, t) \quad (2)$$

$$Q(x, t) = -EI w'''(x, t) \quad (3)$$

اکنون فرض می‌شود، جابه‌جایی عرضی تیر، با بیان طیفی زیر، از حوزه زمان به حوزه‌ی فرکانس نگاشته شود:

$$w(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; i\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

که در این رابطه، $W_n(x; \omega_n)$ ضریب‌های طیفی یا همان ضریب‌های فوریه برای جابه‌جایی عرضی تیر هستند. اکنون با جایگذاری معادله‌ی (۴) در رابطه‌ی (۱) و برای یک فرکانس خاص، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مساله، به صورت زیر، به حوزه‌ی فرکانس نگاشته می‌شود:

$$EIW''''(x, i\omega) - \omega^2 \rho AW(x, i\omega) - F(x, i\omega) = 0 \quad (5)$$

که در آن، $F(x, i\omega)$ ضریب‌های فوریه برای نیروهای خارجی وارد بر تیر هستند. اکنون برای بیان ارتعاش آزاد تیر

¹ Dispersion relation

² Wave number

$$\int_0^{l_e} EIW''''(x) \delta W dx = \int_0^{l_e} EIW''(x) \delta W''(x) dx - Q\delta W|_0^{l_e} - M\delta W'|_0^{l_e} \quad (20)$$

به این ترتیب، با در نظر گرفتن رابطه‌های (۱۳) و (۱۴)، رابطه‌ی (۱۹) به شکل رابطه (۲۱) بیان می‌شود:

$$\int_0^{l_e} EIW'''' \delta W dx = \int_0^{l_e} EIW'' \delta W'' dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c \quad (21)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه‌ی (۲۱) در رابطه‌ی (۱۹)، فرم ضعیف، به شکل رابطه (۲۲) خواهد شد:

$$\int_0^{l_e} EIW'' \delta W'' dx - \omega^2 \int_0^{l_e} \rho AW \delta W dx - \int_0^{l_e} F(x) \delta W dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c = 0 \quad (22)$$

و در نهایت، با جایگذاری رابطه‌ی (۱۷)، در رابطه‌ی (۲۲)، رابطه‌ی (۲۳) حاصل خواهد شد:

$$\delta \mathbf{d}^T \left[\left(\int_0^{l_e} EIN_B''^T N_B'' dx - \omega^2 \int_0^{l_e} \rho AN_B^T N_B dx \right) \mathbf{d} - (\mathbf{f}_c + \mathbf{f}_d) \right] = 0 \quad (23)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\mathbf{f}_d(i\omega) = \int_0^{l_e} F(x; i\omega) N_B^T(x; i\omega) dx \quad (24)$$

در این رابطه، $\mathbf{f}_d(i\omega)$ بیانگر بردار نیروی گره‌ی به ازای نیروی خارجی است. از طرفی، چون $\delta \mathbf{d}^T$ مقدار دلخواهی از تغییرات جابه‌جایی است، پس:

$$S_B(i\omega) \mathbf{d}(i\omega) = \mathbf{f}_c(i\omega) + \mathbf{f}_d(i\omega) \quad (25)$$

بنابراین، ماتریس سختی دینامیکی برای تیر اویلر-برنولی، از رابطه‌ی بالا به‌دست آمده در رابطه (۲۶) نمایش داده می‌شود:

$$S_B(i\omega) = \int_0^{l_e} [EIN_B''^T N_B'' - \omega^2 \rho AN_B^T N_B] dx \quad (26)$$

اکنون با داشتن ماتریس سختی دینامیکی تیر اویلر-برنولی سالم، می‌توان ماتریس سختی دینامیکی تیر ترک‌دار را به‌دست آورد.

۳- درآوری ماتریس سختی دینامیکی تیر اویلر برنولی ترک‌دار

شکل ۲، تیر اویلر-برنولی ترک‌دار را نشان می‌دهد که در این تیر، ترک همواره باز در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین، برای مدل‌سازی ترک، مدل فنر پیچشی بدون جرم، به‌کار می‌رود. در این مدل، تیر به دو بخش سالم تقسیم می‌شود که در محل ترک، با بهره‌گیری از یک فنر پیچشی بدون جرم، به

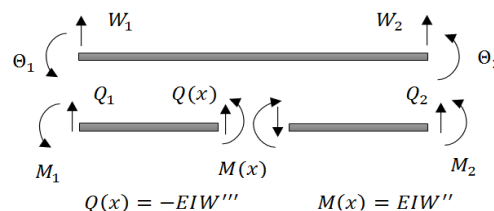
$$\mathbf{f}_c(i\omega) = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(l_e) \\ M(l_e) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۱) در سمت راست رابطه‌ی (۱۳)، رابطه‌ی ۱۵ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{d}(i\omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}(0; i\omega) \\ \mathbf{e}'(0; i\omega) \\ \mathbf{e}(l_e; i\omega) \\ \mathbf{e}'(l_e; i\omega) \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \Psi_B(i\omega) \mathbf{a} \quad (15)$$

که در این رابطه:

$$\Psi_B(i\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F l_e} & e^{-k_F l_e} & e^{+ik_F l_e} & e^{+k_F l_e} \\ -ik_F e^{-ik_F l_e} & -k_F e^{-k_F l_e} & ik_F e^{+ik_F l_e} & k_F e^{+k_F l_e} \end{bmatrix} \quad (16)$$



شکل ۱- قرارداد علامت برای المان طیفی تیر اویلر-برنولی

اکنون با جایگذاری رابطه‌ی (۱۵) در رابطه‌ی (۱۱)، بردار ثابت \mathbf{a} را می‌توان حذف کرده، جابه‌جایی عرضی تیر اویلر-برنولی را به این صورت بیان داشت:

$$W(x) = N_B(x, i\omega) \mathbf{d}(i\omega) \quad (17)$$

که در این رابطه، $N_B(x, i\omega)$ تابع شکل دینامیکی تیر اویلر-برنولی است و از رابطه‌ی (۱۸) به‌دست می‌آید:

$$N_B(x, i\omega) = \mathbf{e}(x, i\omega) \Psi_B^{-1}(i\omega) \quad (18)$$

پس از به‌دست آمدن تابع شکل دینامیکی تیر اویلر-برنولی، روند محاسبه برای ایجاد ماتریس سختی دینامیکی، ادامه می‌یابد؛ بنابراین، فرم ضعیف^۱ رابطه‌ی (۵)، در نظر گرفته می‌شود:

$$\int_0^{l_e} (EIW''''(x) - \omega^2 \rho AW(x) - F(x)) \delta W dx \quad (19)$$

که در آن، δW مقدار دلخواهی از تغییرات W است. با در نظر گرفتن انتگرال جزء به جزء، روی جمله‌ی اول، رابطه‌ی (۱۹) به‌صورت رابطه (۲۰) است:

¹ Weak form

که در این رابطه:

$$D = \frac{h}{EI} C_\theta \quad (۳۶)$$

در رابطه‌های بالا، W_2^- و W_2^+ جابه‌جایی‌های عرضی، θ_2^- و θ_2^+ زاویه‌های پیچش، $Q_1^{(2)}$ و $Q_2^{(1)}$ نیروهای برشی و $M_1^{(2)}$ و $M_2^{(1)}$ گشتاورهای خمشی، درست قبل و بعد از محل ترک هستند.

اکنون اگر فرض شود، ماتریس سختی دینامیکی از رابطه (۲۶) به دست می‌آید، آن‌گاه می‌توان آن را به صورت رابطه (۳۷) نمایش داد:

$$S_B(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

از طرفی، بردارهای نیروی داخلی و جابه‌جایی گرهی در بیان طیفی، برای المان‌های قبل و بعد از ترک به صورت رابطه (۳۸) نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{for the left element} \rightarrow \\ \mathbf{d} &= \{W_1^- \quad \theta_1^- \quad W_2^- \quad \theta_2^-\}^T \\ \mathbf{f}_c &= \{Q_1^{(1)} \quad M_1^{(1)} \quad Q_2^{(1)} \quad M_2^{(1)}\}^T \quad (۳۸) \\ \text{for the right element} \rightarrow \\ \mathbf{d} &= \{W_2^+ \quad \theta_2^+ \quad W_3 \quad \theta_3\}^T \\ \mathbf{f}_c &= \{Q_1^{(2)} \quad M_1^{(2)} \quad Q_2^{(2)} \quad M_2^{(2)}\}^T \end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن ارتعاش آزاد و جایگذاری رابطه‌های (۳۷) و (۳۸) در رابطه (۲۵)، برای المان‌های قبل و بعد از ترک، رابطه (۳۹) به دست می‌آید:

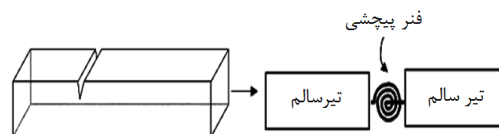
$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1^- \\ \theta_1^- \\ W_2^+ \\ \theta_2^+ - DM_1^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^{(1)} \\ -M_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (۳۹)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2^+ \\ \theta_2^+ \\ W_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q_1^{(2)} \\ -M_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \\ M_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

بنابراین، با در نظر گرفتن المان اول در رابطه (۳۹)، رابطه (۴۰) به دست می‌آید:

یک‌دیگر متصل می‌شوند. در واقع این فنر که نشان دهنده ناپیوستگی در زاویه‌ی پیچش است، مدلی برای ترک همواره باز به شمار می‌آید.

در مدل‌سازی ترک با فنر پیچشی، در محل ترک، نیروی برشی، گشتاور خمشی و جابه‌جایی عرضی تیر، بدون تغییر باقی می‌مانند و تنها زاویه‌ی پیچش، ناپیوسته است. این موضوع، بیان رابطه‌های سازگاری در محل ترک است که در بیان طیفی، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۱۶]:



شکل ۲ - مدل فنر پیچشی در تیر اویلر-برنولی ترک‌دار

$$W(x_i^-) = W(x_i^+) \quad (۲۷)$$

$$EIW'''(x_i^-) = EIW'''(x_i^+) \quad (۲۸)$$

$$EIW''''(x_i^-) = EIW''''(x_i^+) \quad (۲۹)$$

$$W'(x_i^+) - W'(x_i^-) = C_\theta h W'(x_i^+) \quad (۳۰)$$

که در این رابطه‌ها، x_i نشان‌دهنده‌ی محل ترک بوده، x_i^- درست قبل از ترک و x_i^+ درست بعد از ترک را نمایش می‌دهد. h ارتفاع تیر و ε عمق ترک است. نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر، $\lambda = (\varepsilon/h)$ بوده و C_θ تابعی از این نسبت است. C_θ براساس مرجع [۱۷] و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$C_\theta = 2 \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 \times (5.93 - 19.69\lambda + 37.14\lambda^2 - 35.84\lambda^3 + 13.12\lambda^4) \quad (۳۱)$$

اکنون فرض می‌شود، تیر اویلر-برنولی ترک‌دار، به دو المان طیفی بخش‌بندی شود. شکل ۳، نشان دهنده‌ی این دو المان است. بنابراین، با در نظر گرفتن این شکل، رابطه‌های سازگاری برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار به صورت زیر بیان خواهند شد:

$$Q_1^{(2)} = Q_2^{(1)} \quad (۳۲)$$

$$M_1^{(2)} = M_2^{(1)} \quad (۳۳)$$

$$W_2^- = W_2^+ \quad (۳۴)$$

$$\theta_2^- = \theta_2^+ - DM_1^{(2)} \quad (۳۵)$$

$$\frac{D}{\mu} \begin{bmatrix} S_{14}S_{41} & S_{14}S_{42} & S_{14}S_{43} & S_{14}S_{44} \\ S_{24}S_{41} & S_{24}S_{42} & S_{24}S_{43} & S_{24}S_{44} \\ S_{34}S_{41} & S_{34}S_{42} & S_{34}S_{43} & S_{34}S_{44} \\ S_{44}S_{41} & S_{44}S_{42} & S_{44}S_{43} & S_{44}S_{44} \end{bmatrix}$$

اکنون با در نظر گرفتن رابطه‌های (۳۹) و (۴۳) و سرهم بندی ماتریس‌های المان‌های اول و دوم، ماتریس سختی تیر ترک‌دار یا $[S_{as}]$ به دست می‌آید.

$$[S_{as}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} + S_{11} & S_{34} + S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} + S_{21} & S_{44} + S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ 0 & 0 & S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (۴۵)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}' & S_{12}' & S_{13}' & S_{14}' & 0 & 0 \\ S_{21}' & S_{22}' & S_{23}' & S_{24}' & 0 & 0 \\ S_{31}' & S_{32}' & S_{33}' & S_{34}' & 0 & 0 \\ S_{41}' & S_{42}' & S_{43}' & S_{44}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هم‌چنین، برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار، رابطه‌ی (۴۶) در نظر گرفته می‌شود:

$$\det [S_{as}] = 0 \quad (۴۶)$$

مساله‌ی مقدار ویژه‌ی بالا، غیر جبری بوده و برای محاسبه‌ی این فرکانس‌ها، از روش عددی دو نیم کردن بهره برده می‌شود. به این صورت که فرکانس به عنوان یک ورودی وارد معادله‌ی غیر جبری حاصل از رابطه‌ی (۴۶) شده و به ازای آن مقادیری از فرکانس که جواب معادله صفر شود، فرکانس‌های معادل که همان فرکانس‌های طبیعی هستند، به دست خواهند آمد.

۴- ماتریس‌های سختی و جرم تیر در روش المان

محدود کلاسیک

براساس مرجع [۱۸]، ماتریس‌های سختی و جرم برای المان تیر اوپلر-برنولی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$[K^e] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

$$[M^e] = \frac{\rho Al_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} S_{11}W_1 + S_{12}\theta_1 + S_{13}W_2^+ + S_{14}\theta_2^+ - S_{14}DM_1^{(2)} = -Q_1^{(1)} \\ S_{21}W_1 + S_{22}\theta_1 + S_{23}W_2^+ + S_{24}\theta_2^+ - S_{24}DM_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \\ S_{31}W_1 + S_{32}\theta_1 + S_{33}W_2^+ + S_{34}\theta_2^+ - S_{34}DM_1^{(2)} = Q_2^{(1)} \\ S_{41}W_1 + S_{42}\theta_1 + S_{43}W_2^+ + S_{44}\theta_2^+ - S_{44}DM_1^{(2)} = M_2^{(1)} \end{cases} \quad (۴۰)$$

اکنون با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۳۳) و خط چهارم رابطه‌ی (۳۹)، گشتاور خمشی در محل ترک به دست می‌آید:

$$M_1^{(2)} = M_2^{(1)} = \frac{S_{41}W_1 + S_{42}\theta_1 + S_{43}W_2^+ + S_{44}\theta_2^+}{[1 + DS_{44}]} \quad (۴۱)$$

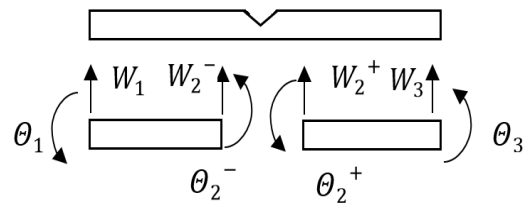
با تعریف رابطه‌ی (۴۲):

$$1 + DS_{44} = \mu \quad (۴۲)$$

و با جایگذاری رابطه‌ی (۴۱) در رابطه‌ی (۴۰)، ماتریس سختی دینامیکی برای المان اول تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار به دست می‌آید:

$$[S_{cr}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (۴۳)$$

$$-\frac{D}{\mu} \begin{bmatrix} S_{14}S_{41} & S_{14}S_{42} & S_{14}S_{43} & S_{14}S_{44} \\ S_{24}S_{41} & S_{24}S_{42} & S_{24}S_{43} & S_{24}S_{44} \\ S_{34}S_{41} & S_{34}S_{42} & S_{34}S_{43} & S_{34}S_{44} \\ S_{44}S_{41} & S_{44}S_{42} & S_{44}S_{43} & S_{44}S_{44} \end{bmatrix}$$



شکل ۳ - قرارداد علامت در المان‌های طیفی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار

وجود ترک، سبب کاهش سختی سازه می‌شود. این موضوع، در رابطه‌ی (۴۳) نیز قابل مشاهده است. در این رابطه، با تفاضل یک ماتریس از ماتریس سختی دینامیکی تیر سالم، ماتریس سختی المان اول تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار به دست آمده است. ماتریس تفاضلی به این صورت قابل بیان است:

$$[S'] = \begin{bmatrix} S_{11}' & S_{12}' & S_{13}' & S_{14}' \\ S_{21}' & S_{22}' & S_{23}' & S_{24}' \\ S_{31}' & S_{32}' & S_{33}' & S_{34}' \\ S_{41}' & S_{42}' & S_{43}' & S_{44}' \end{bmatrix} = \quad (۴۴)$$

به‌دست آمده از روش المان محدود طیفی تنها با دو المان، مطابقت بسیار خوبی با پاسخ‌های به‌دست آمده از روش ماتریس انتقال دارند که در جدول‌ها با نام حل تحلیلی، نام-گذاری شده‌اند. از سوی دیگر، از جدول‌ها چنین نتیجه می‌شود که در فرکانس‌های پایین، در روش المان محدود کلاسیک، با افزایش تعداد المان‌ها به بیش از چهل المان، پاسخ‌ها به نتیجه‌های به‌دست آمده از روش‌های المان محدود طیفی و ماتریس انتقال نزدیک می‌شوند؛ اما در فرکانس‌های بالاتر (همانند فرکانس پنجاهم)، تعداد چهل المان نیز پاسخ مناسبی را ارائه نمی‌کند و باید این تعداد همچنان افزایش یابد.

جدول ۱ - فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا (عمق ترک ۵ سانتی متر و در وسط تیر قرار دارد)

فرکانس-های طبیعی (هرتز)	تحلیلی سالم	تحلیلی تیر ترک‌دار	المان محدود طیفی (۲ المان)	المان محدود کلاسیک (۴۰ المان)
یکم	۲/۳۴۴	۲/۲۶۷	۲/۲۶۷	۲/۲۶۷
دوم	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵
سوم	۲۱/۰۹۴	۲۰/۴۴۳	۲۰/۴۴۳	۲۰/۴۵۱
چهارم	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۲
پنجم	۵۸/۵۹۵	۵۶/۸۷۳	۵۶/۸۷۳	۵۶/۸۹۶
ششم	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۸۱
هفتم	۱۱۴/۸۴۸	۱۱۱/۶۲۹	۱۱۱/۶۲۹	۱۱۱/۸۵۲
هشتم	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۲۱
نهم	۱۸۹/۸۵۱	۱۸۴/۷۷۱	۱۸۴/۷۷۱	۱۸۵/۱۲۳
دهم	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۴۴۳
...
...
پنجاهم	۵۸۵۹/۸۹۵	۵۸۵۹/۸۹۵	۵۸۵۹/۸۹۵	۶۶۱۶/۰۳۶

شکل ۴، نشانگر نرخ همگرایی یا درصد خطای نسبی اندازه‌ی فرکانس طبیعی اول برای تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا و ترک ۵ سانتی‌متری در میانه‌ی تیر به ازای تعداد المان‌های گوناگون در روش المان محدود طیفی است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، درصد خطای نسبی با افزایش تعداد المان‌ها از ۲ به ۸ المان، حدوداً از مقدار ۰/۰۰۱ درصد به ۰/۰۰۰۲ درصد کاهش می‌یابد. درصد خطای نسبی از تفاضل مقادیرهای به‌دست آمده از روش المان‌های محدود طیفی و روش ماتریس انتقال، تقسیم شده بر مقدار به‌دست آمده از روش ماتریس انتقال، ضرب در ۱۰۰ به‌دست آمده

همانند روندی که در بخش ۳ به آن اشاره شد، با در نظر گرفتن ماتریس سختی المان تیر از رابطه‌ی (۴۷)، ماتریس سختی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار، به دست آمده و در محاسبه‌های مربوط به روش المان محدود کلاسیک به کار می‌رود.

۵- مثال‌های عددی

۵-۱- ارتعاش آزاد

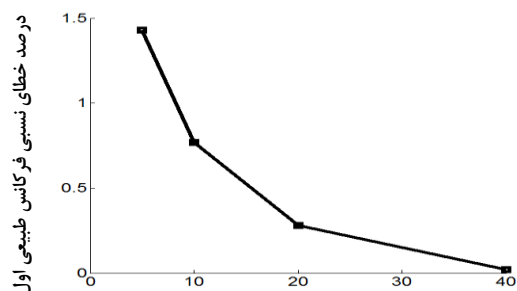
در این بخش، به بررسی ارتعاش آزاد تیر اویلر-برنولی ترک‌دار پرداخته و فرکانس‌های طبیعی آن، برای شرط‌های مرزی دو سر لولا و دو سر گیردار، به‌دست می‌آیند. هم‌چنین، در شرط مرزی دو سر لولا، محل ترک نیز تغییر یافته، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار برای این دو موقعیت نیز به‌دست می‌آیند. تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با طول ۱۰ متر و سطح مقطعی با عرض ۰/۱ متر و ضخامت ۰/۱ متر را در نظر بگیرید. چگالی جرمی این تیر، ۷۸۶۰ کیلوگرم بر متر مکعب بوده، مدول الاستیسیته برای تیر، ۲۱۰ گیگا پاسکال است. ترک باز، در میانه‌ی تیر و با اندازه‌ی ۵ سانتی متر که برابر نصف ضخامت تیر است، در نظر گرفته می‌شود. فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار، برای دو شرط مرزی دو سر لولا و دو سر گیردار، از روش‌های ماتریس انتقال [۱۶]، المان محدود طیفی و المان محدود کلاسیک به‌دست می‌آیند. جدول ۱، مجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا را نمایش می‌دهد و جدول ۲، نشان‌دهنده‌ی این مجموعه از فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار، با شرط مرزی دو سر گیردار است. همان‌گونه که از جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود، وجود شرط مرزی دو سر گیردار، سختی سازه را افزایش می‌دهد و این موضوع، دلیل افزایش فرکانس‌های طبیعی تیر، نسبت به شرط مرزی دو سر لولا است. در جدول ۱، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار و تیر سالم با هم مقایسه شده‌اند. وجود ترک در میانه‌ی تیر، سبب تغییر در فرکانس‌های فرد شده، تقریباً بر فرکانس‌های زوج بی‌اثر است. فرکانس‌های زوج، فرکانس‌های پادمتقارن تیر هستند که در آن‌ها، یک گره از شکل موده‌های پادمتقارن تیر، در میانه‌ی تیر است که ترک نیز در آن‌جا واقع شده‌است. از ویژگی‌های یک گره، می‌توان به صفر بودن انحنای تیر در آن اشاره کرد که وجود آن، برای اثربخشی ترک روی تیر لازم است؛ بنابراین، فرکانس‌های زوج بی‌تغییر باقی می‌مانند. از طرفی مشاهده می‌شود، پاسخ‌های

همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، درصد خطای نسبی با افزایش تعداد المان‌ها از ۴ به ۴۰ المان، حدوداً از مقدار ۱/۴۷ درصد به ۰/۰۲ درصد کاهش می‌یابد.

البته باید اشاره داشت که درصد خطا، نسبت به روش المان محدود طیفی، مقدار بسیار بزرگتری بوده؛ بنابراین، افزایش تعداد المان‌ها برای به دست آوردن پاسخ مناسب‌تر و دقیق‌تر، توصیه می‌شود.

نرخ همگرایی پاسخ‌ها برای فرکانس‌های بالاتر، در روش المان محدود طیفی، تفاوت چندانی با فرکانس پایه ندارد که در شکل ۴ رسم گردید. این موضوع، به خاطر بهره‌گیری از تابع‌های شکل دینامیکی است که از حل دقیق معادله دیفرانسیل دینامیکی حاکم بر تیر به دست می‌آیند. این نرخ همگرایی، در روش المان محدود کلاسیک برای فرکانس‌های بالاتر، کاهش چشمگیری می‌یابد. به همین دلیل با افزایش تعداد المان‌های کلاسیک، با نرخ کندتری دقت پاسخ‌ها افزایش می‌یابد. بهره‌گیری از تابع‌های شکل استاتیکی، توانایی روش المان محدود کلاسیک در فرکانس‌های بالاتر را به شدت کاهش می‌دهد.

در جدول ۳، در شرط مرزی دو سر لولا، محل ترک تغییر کرده و در یک سوم ابتدایی تیر قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۳ در می‌یابیم که اگر ترک در یک سوم طول تیر واقع شود، مضارب سه از فرکانس‌های طبیعی، نسبت به اندازه‌های سالم، تقریباً بدون تغییر هستند و سایر فرکانس‌ها کاهش می‌یابند. به خوبی مشاهده می‌شود، دقت روش المان محدود طیفی، در مقایسه با روش المان محدود کلاسیک بسیار بیشتر است.



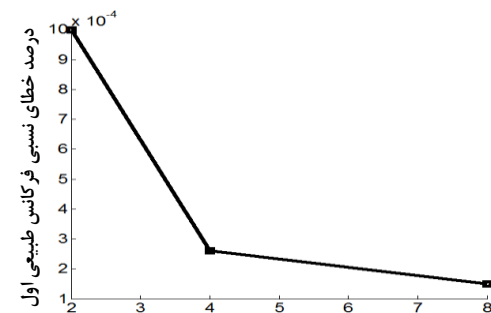
شکل ۴ - نرخ همگرایی (درصد خطا) اندازه‌ی فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا و ترک ۵ سانتی‌متری در میانه‌ی تیر به ازای تعداد گوناگون المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک

شکل ۵ نیز، نشانگر نرخ همگرایی یا درصد خطای نسبی اندازه‌ی فرکانس طبیعی اول برای تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا و ترک ۵ سانتی‌متری در میانه‌ی تیر به ازای تعداد گوناگون المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک است.

است. البته ذکر این نکته ضروری است که درصد خطای نسبی، مقدار بسیار کوچکی است، به گونه‌ای که اندازه‌ی درصد خطا هنگام در نظر گرفتن تنها دو المان، حدوداً ۰/۰۰۱ درصد است. به این ترتیب، دقت پاسخ‌ها با در نظر گرفتن دو المان بسیار مناسب است.

جدول ۲ - فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر گیردار (عمق ترک ۵ سانتی‌متر و در وسط تیر قرار دارد)

فرکانس‌های طبیعی (هرتز)	المان محدود کلاسیک (۴۰ المان)	المان محدود طیفی (۲ المان)	تحلیلی تیر ترک‌دار	تحلیلی تیر سالم
یکم	۵/۱۸۸	۵/۱۸۸	۵/۱۸۸	۵/۳۱۳
دوم	۱۴/۶۴۶	۱۴/۶۴۶	۱۴/۶۴۶	۱۴/۶۴۶
سوم	۲۷/۸۳۴	۲۷/۸۲۵	۲۷/۸۲۵	۲۸/۷۱۲
چهارم	۴۷/۴۶۴	۴۷/۴۶۳	۴۷/۴۶۳	۴۷/۴۶۳
پنجم	۶۸/۸۷۴	۶۸/۸۴۲	۶۸/۸۴۲	۷۰/۹۰۱
ششم	۹۹/۰۳۲	۹۹/۰۲۷	۹۹/۰۲۷	۹۹/۰۲۷
هفتم	۱۲۸/۵۸۲	۱۲۸/۱۸۸	۱۲۸/۱۸۸	۱۳۱/۸۴۱
هشتم	۱۶۹/۳۶۴	۱۶۹/۳۴۲	۱۶۹/۳۴۲	۱۶۹/۳۴۲
نهم	۲۰۶/۶۴۵	۲۰۵/۹۳۶	۲۰۵/۹۳۶	۲۱۱/۵۳۱
دهم	۲۵۸/۵۰۷	۲۵۸/۴۰۸	۲۵۸/۴۰۸	۲۵۸/۴۰۸
...
...
پنجاهم	۶۷۴۸/۷۲۶	۵۹۷۷/۴۹۲	۵۹۷۷/۴۷۵	۵۹۷۷/۴۷۵



شکل ۴ - نرخ همگرایی (درصد خطا) اندازه‌ی فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا و ترک ۵ سانتی‌متری در میانه‌ی تیر به ازای تعداد گوناگون المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک

شکل ۵ نیز، نشانگر نرخ همگرایی یا درصد خطای نسبی اندازه‌ی فرکانس طبیعی اول برای تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا و ترک ۵ سانتی‌متری در میانه‌ی تیر به ازای تعداد گوناگون المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک است.

جدول ۳ - فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا (عمق ترک ۵ سانتی متر و در یک سوم ابتدایی تیر قرار دارد)

فرکانس-های طبیعی (هرتز)	تجزیه تیر سالم	تجزیه تیر ترک‌دار	المان طیفی	المان محدود کلاسیک (۴۰ المان)
یکم	۲/۳۴۴	۲/۲۸۵	۲/۲۸۵	۲/۲۸۶
دوم	۹/۳۷۵	۹/۱۵۷	۹/۱۵۷	۹/۱۸۱
سوم	۲۱/۰۹۴	۲۱/۰۹۴	۲۱/۰۹۴	۲۱/۰۹۷
چهارم	۳۷/۵۰۱	۳۶/۶۰۶	۳۶/۶۰۶	۳۶/۸۰۲
پنجم	۵۸/۵۹۵	۵۷/۳۷۸	۵۷/۳۷۸	۵۷/۷۳۲
ششم	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۸۲
هفتم	۱۱۴/۸۴۸	۱۱۲/۲۱۹	۱۱۲/۲۱۹	۱۱۲/۶۲۲
هشتم	۱۵۰/۰۰۵	۱۴۷/۲۱۱	۱۴۷/۲۱۱	۱۴۸/۰۱۱
نهم	۱۸۹/۸۵۱	۱۸۹/۸۵۱	۱۸۹/۸۵۱	۱۹۰/۴۵۲
دهم	۲۳۴/۳۸۴	۲۲۹/۲۳۷	۲۲۹/۲۳۷	۲۳۱/۲۵۱
...
...
پنجاهم	۵۸۵۹/۸۹۵	۵۸۲۵/۶۴۰	۵۸۲۵/۶۴۰	۶۵۵۹/۸۱۰

جدول ۴ - فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با شرط مرزی دو سر لولا (عمق ترک ۳.۵ سانتی متر و در وسط تیر قرار دارد)

فرکانس-های طبیعی (هرتز)	تجزیه تیر سالم	تجزیه تیر ترک‌دار	المان طیفی	المان محدود کلاسیک (۴۰ المان)
یکم	۲/۳۴۴	۲/۳۱۴	۲/۳۱۴	۲/۳۱۴
دوم	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵	۹/۳۷۵
سوم	۲۱/۰۹۴	۲۰/۸۳۰	۲۰/۸۳۰	۲۰/۸۳۴
چهارم	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۱	۳۷/۵۰۲
پنجم	۵۸/۵۹۵	۵۷/۸۷۶	۵۷/۸۷۶	۵۷/۸۹۸
ششم	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۷۸	۸۴/۳۸۱
هفتم	۱۱۴/۸۴۸	۱۱۳/۴۶۴	۱۱۳/۴۶۴	۱۱۳/۴۸۲
هشتم	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۰۵	۱۵۰/۰۲۱
نهم	۱۸۹/۸۵۱	۱۸۷/۶۰۷	۱۸۷/۶۰۷	۱۸۸/۲۱۲
دهم	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۳۸۴	۲۳۴/۴۴۳
...
...
پنجاهم	۵۸۵۹/۸۹۵	۵۸۵۹/۸۹۵	۵۸۵۹/۸۹۵	۶۵۶۴/۱۱۴

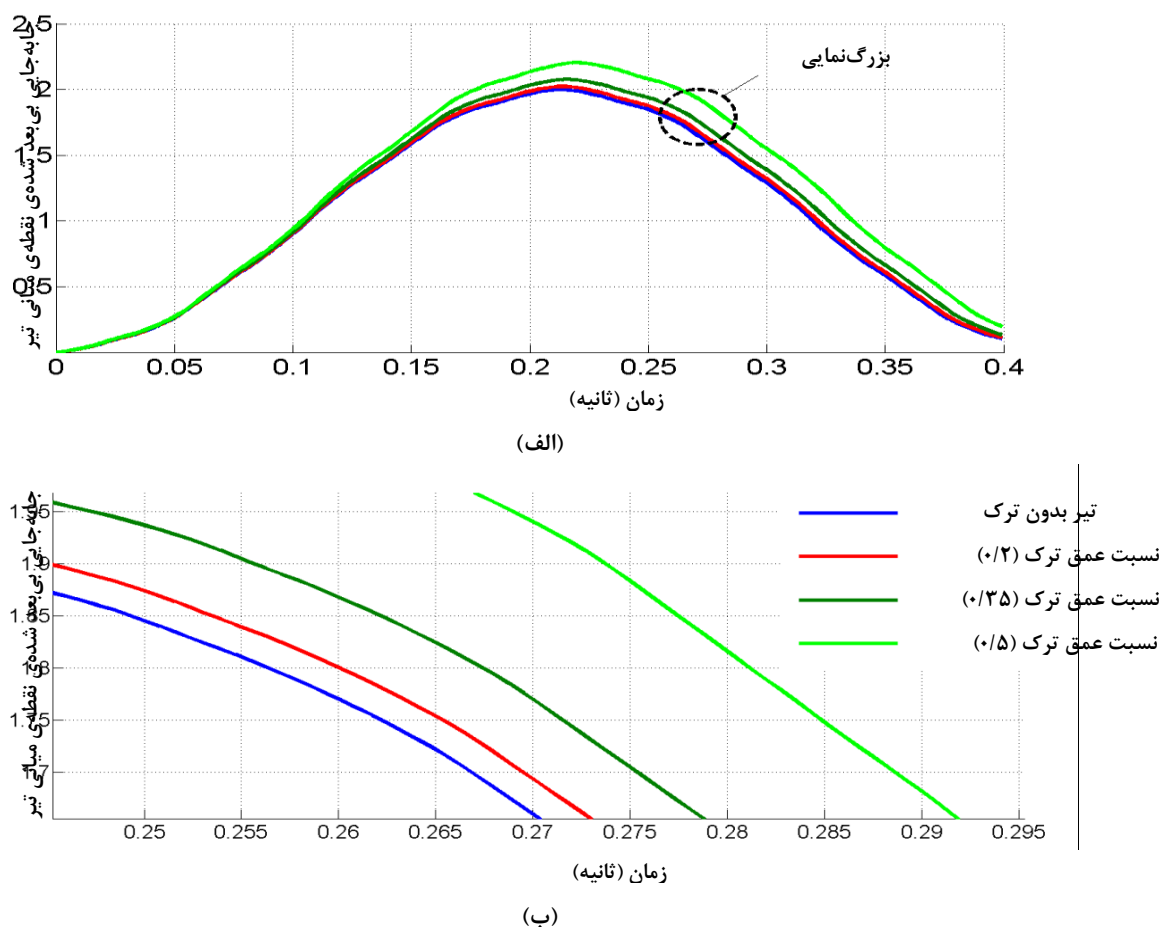
داده شده است. ترک در میانه‌ی تیر قرار دارد و نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر به ترتیب، ۰/۲، ۰/۳۵ و ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. پاسخ از روش المان محدود طیفی و تنها با دو المان به دست آمده است. از طرفی، وجود ترک در تیر، انعطاف پذیری محلی را ایجاد می‌کند که این انعطاف پذیری به دلیل تغییری است که در انرژی کرنشی تیر حول ناحیه‌ی ترک اتفاق می‌افتد. بر اساس شکل ۶-ب، وجود ترک و افزایش عمق آن، سبب کاهش سختی تیر شده؛ در نتیجه، پاسخ آن را افزایش می‌دهد. پاسخ‌ها بر مقدار $(F_{0L}^3/48EI)$ تقسیم شده و به این ترتیب، بی‌بعد شده‌اند. این مقدار، بیشینه‌ی جابه‌جایی استاتیکی تیر هنگام اعمال نیروی ثابت در وسط تیر است.

در شکل ۷-الف، پاسخ نقطه‌ی میانی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار، برای نسبت‌های عمق ترک ۰/۲ و ۰/۵، به نیروی ثابت ۱۰۰۰ نیوتن در مرکز آن، از روش‌های المان محدود طیفی و المان محدود کلاسیک به دست آمده است. از طرفی، شکل ۷-ب، نشان دهنده‌ی مطابقت خوب پاسخ به دست آمده از روش المان محدود طیفی با ۲ المان، در مقایسه با حل ماتریس انتقال و روش المان محدود کلاسیک با ۳۰ و ۶۰ المان است.

روش المان محدود طیفی، تنها با دو المان پاسخ‌های دقیق و مناسب را ارائه می‌کند، در حالی که افزایش تعداد المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک، تنها راه افزایش دقت این روش است. هر چند این موضوع، سبب افزایش محاسبه‌ها می‌شود. در جدول ۴، برای شرط مرزی دو سر لولا، عمق ترک کاهش یافته است. این موضوع، سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی نسبت به جدول ۱ می‌شود. همانند جدول ۱، فرکانس‌های زوج، ثابت باقی می‌مانند و تنها فرکانس‌های فرد کاهش می‌یابند.

۵-۲- ارتعاش واداشته

در این بخش، به بررسی ارتعاش واداشته‌ی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار پرداخته می‌شود. تیر اویلر-برنولی ترک‌دار، با شرط مرزی دو سر لولا و با طول ۱۰ متر و سطح مقطعی با عرض ۰/۱ متر و ضخامت ۰/۱ متر را در نظر بگیرید. چگالی جرمی این تیر، ۷۸۶۰ کیلوگرم بر متر مکعب بوده، مدول الاستیسیته برای تیر، ۲۱۰ گیگا پاسکال است. نیروی ثابت با دامنه‌ی ۱۰۰۰ نیوتن، در مرکز تیر وارد می‌شود. در شکل ۶-الف، پاسخ تیرهای سالم و ترک‌دار، به این نیروی ثابت نشان



شکل ۶ - (الف) پاسخ بی‌بعد شده نقطه‌ی میانی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار دو سر لولا با مشخصات بیان شده در بخش ۵-۲ به نیروی ثابت ۱۰۰۰ نیوتنی در مرکز آن و مقایسه‌ی تفاوت پاسخ، به ازای عمق‌های گوناگون ترک، با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی با دو المان. (ب) بزرگ‌نمایی بخشی از شکل (الف) و مقایسه‌ی پاسخ به‌دست آمده برای عمق‌های گوناگون ترک در تیر

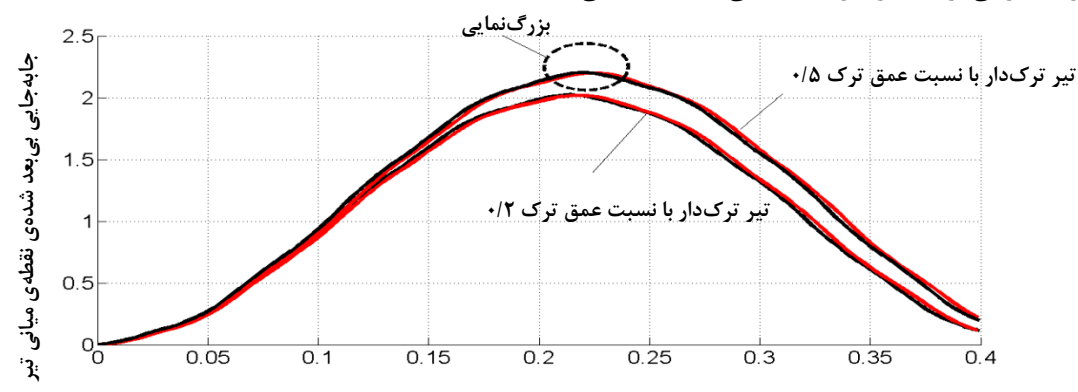
شکل ۸، به دلیل انعطاف پذیری محلی ناشی از وجود ترک، هر چه این انعطاف پذیری در مکانی نزدیک‌تر به نقطه‌ی میانی تیر قرار گیرد، تاثیر آن بر کاهش سختی تیر و افزایش پاسخ نقطه‌ی میانی آن، بیشتر خواهد شد. مسلماً با دور شدن محل ترک، تاثیر آن بر پاسخ نقطه‌ی میانی تیر نیز کاهش می‌یابد. آن‌چه از شکل‌های ۶ تا ۸ برمی‌آید، دقت بالای روش المان محدود طیفی است. روشی که تنها با در نظر گرفتن دو المان، قبل و بعد از ترک، پاسخ مناسب را ارائه می‌کند؛ در حالی که روش المان محدود کلاسیک، تنها با افزایش تعداد المان‌ها، قادر به افزایش دقت خود است. دقت بالای پاسخ‌های به‌دست

آن‌چه در شکل ۷-ب مشاهده می‌شود، این است که، هر چه تعداد المان‌ها در روش المان محدود کلاسیک افزایش پیدا کند، پاسخ‌ها دقیق‌تر و به پاسخ‌های حاصل از روش المان محدود طیفی نزدیک‌تر می‌شوند.

شکل ۸، نمایش‌دهنده‌ی تاثیر محل ترک بر پاسخ نقطه-میانی تیر ترک‌دار است. پاسخ‌ها با بهره‌گیری از روش المان محدود طیفی و با دو المان به‌دست آمده‌اند. در این شکل، با جابه‌جا کردن محل ترک، در یک هشتم، یک چهارم و میانه-ی تیر، پاسخ نقطه‌ی میانی تیر ترک‌دار به‌دست آمده است. نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی نیز، بر مرکز تیر وارد می‌شود. براساس

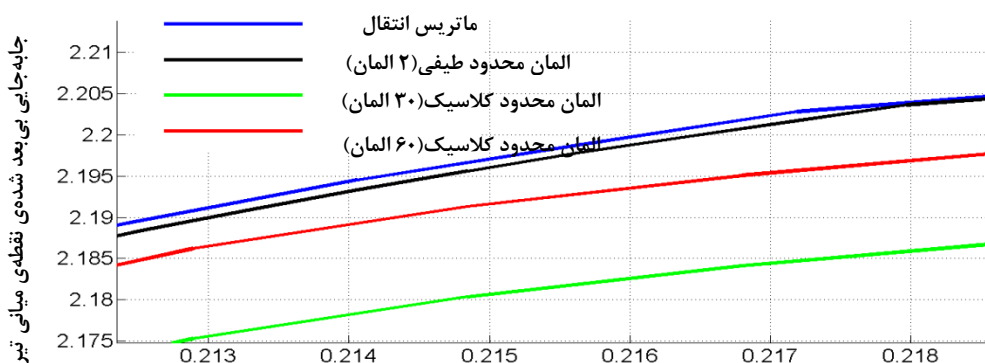
بهره برده، نتیجه‌های به‌دست آمده از سایر روش‌ها، هرچه به پاسخ‌های روش المان محدود طیفی نزدیک‌تر گردند، ارزش و اعتبار آن روش نیز، افزایش یابد.

آمده از روش المان محدود طیفی، سبب می‌شود از آن به عنوان یک مرجع قابل اتکا، برای درستی سنجی پاسخ‌های سایر روش‌ها بهره برد. به عبارت دیگر، در تعیین اعتبار یا درستی روش‌های نوین، از روش المان محدود طیفی به عنوان جایگزینی برای سایر حل‌های تحلیلی یا نیمه تحلیلی



زمان (ثانیه)

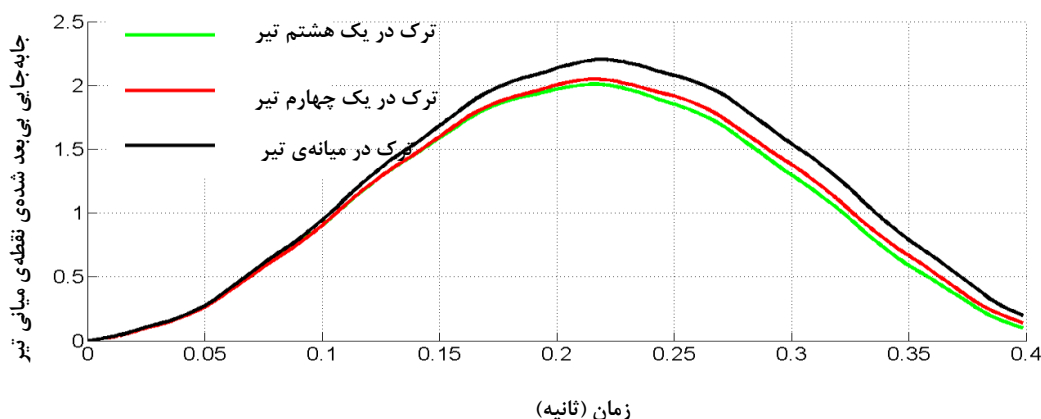
(الف)



زمان (ثانیه)

(ب)

شکل ۷ - (الف) پاسخ بی بعد شده نقطه‌ی میانی تیر اویلر - برنولی ترک‌دار دو سر لولا با مشخصات بیان شده در بخش ۵-۲، به نیروی ثابت ۱۰۰۰ نیوتنی در مرکز آن برای نسبت‌های عمق ترک ۰/۲ و ۰/۵ (ب) بزرگ‌نمایی بخشی از شکل (الف) و مقایسه‌ی پاسخ به‌دست آمده از روش‌های ماتریس انتقال، المان محدود طیفی و کلاسیک



شکل ۸ - پاسخ بی بعد شده‌ی نقطه‌ی میانی تیر اوپلر- برنولی ترک‌دار با مشخصات بیان شده در بخش ۵-۲، به روش المان محدود طیفی با ۲ المان، برای موقعیت‌های گوناگون ترک در تیر

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با در نظر گرفتن رابطه‌های موجود برای تیر اوپلر-برنولی، روش المان محدود طیفی، معرفی گردید. پس از بررسی رابطه‌های تیر اوپلر-برنولی سالم، ماتریس سختی دینامیکی، برای تیر ترک‌دار به دست آمد. ترک از نوع همواره باز و مدل آن، مدل فنر پیچشی بدون جرم برگزیده شد. در بررسی ارتعاش آزاد و محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار، روش المان محدود طیفی با دو المان دقت بسیار بالایی را ارائه داد، در حالی که روش المان محدود کلاسیک، از این دقت به دور بود. کاهش تعداد درجه‌های آزادی تیر و در نتیجه‌ی آن، کاهش زمان و اندازه‌ی محاسبه‌ها از برتری‌های روش المان محدود طیفی بود. در مجموع، باید اشاره داشت که روش المان محدود طیفی در بررسی:

- سازه‌های یک‌بعدی مانند تیرها که حل دقیق معادله‌های موج (معادله‌های دیفرانسیلی) حاکم بر آن‌ها در دسترس باشد و

- مسایل خطی و تغییر ناپذیر با زمان،

نسبت به روش المان محدود کلاسیک برتری داشته، بهتر است از این روش استفاده شود.

اما در بررسی:

- سازه‌های پیچیده‌تر که حل دقیق معادله موج در آن‌ها سخت تر شده و یا از طریق حل‌های تحلیلی غیر ممکن است و
 - مسایل غیرخطی و متغیر با زمان،
- نسبت به روش المان محدود کلاسیک ضعیف‌تر بوده، در عمل بهتر است از روش المان محدود کلاسیک استفاده شود. از طرفی، مثال‌های عددی نشان داد:
- ۱- حضور ترک در تیر نسبت به حالت بدون ترک، سبب افزایش پاسخ نقطه‌ی میانی تیر می‌شود.
 - ۲- افزایش عمق ترک، پاسخ نقطه‌ی میانی تیر را افزایش می‌دهد.
 - ۳- با نزدیک شدن ترک به میانه‌ی تیر، پاسخ نقطه‌ی میانی آن، بیشتر می‌شود.
- این نتایج از روش‌های المان محدود کلاسیک و طیفی به دست آمد، با این تفاوت که دقت روش المان محدود طیفی بسیار بیشتر و تعداد المان‌ها کمتر بود.

- [5] Loya JA, Rubio L, Fernández-Sáez J (2006) Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *J Sound Vib* 290: 640–653.
- [6] Wu JJ, Whittaker AR, Cartmell MP (2000) The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads. *Comput Struct* 78: 789–799.
- [7] Anderson L, Nielsen SRK, Krenk S (2007) Numerical methods for analysis of structure and ground vibration from moving loads. *Comput Struct* 85: 43–58.
- [8] Narayanan GV, Beskos DE (1978) Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast Fourier transform. *Comput Struct* 9: 145-150.
- [9] Doyle JF (1997) *Wave propagation in structures*. 2 edn. Springer-Verlag, New York.
- [10] JF Doyle, TN Farris (1990) A spectrally formulated finite element for flexural wave propagation in beams. *IJAEM* 5: 13-23.
- [11] Mahapatra DR, Gopalakrishnan S (2003) A spectral finite element model for analysis of axial-flexural-shear coupled wave propagation in laminated composite beams. *Compos Struct* 59: 67-88.
- [12] Lee U, Kim S, Cho J, (2005) Dynamic analysis of the linear discrete dynamic systems subjected to the initial conditions by using an FFT-based spectral analysis method. *J Sound Vib* 288: 293-306.
- [13] Chacraborty A, Gopalakrishnan S (2005) A spectral finite element for axial-flexural-shear coupled wave propagation analysis in lengthwise graded beam. *Comput Mech* 36: 1-12.
- [14] Vinod KG, Gopalakrishnan S, Ganguli R (2007) Free vibration and wave propagation analysis of uniform and tapered rotating beams using spectrally formulated finite elements. *Int J Mech Sci* 44: 5875-5893.
- [15] Rao SS (2007) *Vibration of continuous system*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [16] Lin HP (2004) Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply-supported beams with a crack. *Eng Struct* 26: 427–436.
- [17] Ariaei A, Ziaei-Rad S, Ghayour M (2010) Repair of a cracked Timoshenko beam subjected to a moving mass using piezoelectric patches. *Int J Mech Sci* 52: 1074-1091.
- [18] Meirovitch L (1986) *Elements of Vibration Analysis*. 2 edn. Mc Graw-Hill, United States of America.

۷- فهرست نمادها

b	عرض تیر (m)
C_θ	تابع وابسته به نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر
$d(i\omega)$	برای فنر پیچشی بردار جابه‌جایی‌های گرهی در بیان طیفی (m, rad)
$F(x, i\omega)$	بیان طیفی نیروی خارجی (N)
$f_c(i\omega)$	بردار نیروهای داخلی گرهی (N, Nm)
$f_d(i\omega)$	بردار نیروهای خارجی گرهی (N, Nm)
F_0	اندازه‌ی نیروی ثابت (N)
h	ضخامت یا ارتفاع تیر (m)
k	عدد موج (rad/m)
L	طول تیر (m)
l_e	طول المان طیفی (m)
$M(x, t)$	گشتاور خمشی (Nm)
N	تعداد نقاط به‌کار رفته در تبدیل فوریه
$N_B(x, i\omega)$	بردار تابع شکل دینامیکی تیر اویلر-برنولی
$Q(x, t)$	نیروی برشی (N)
$S_B(i\omega)$	ماتریس سختی دینامیکی تیر اویلر-برنولی
t	زمان (s)
$w(x, t)$	جابه‌جایی عرضی (m)
$W_n(x; i\omega_n)$	بیان طیفی جابه‌جایی عرضی (m)
x	مختصه‌ی مکان (m)
x_i	موقعیت ترک در طول تیر (m)
ε	عمق ترک (m)
λ	نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر (m/m)
ω	فرکانس نمونه برداری (rad/s)

۸- مراجع

- [1] Dimarogonas AD (1996) Vibration of cracked structures: A state of the art review. *Eng Fract Mech* 55: 831–857.
- [2] Chondros TG, Dimarogonas AD, Yao J (1998) A continuous cracked beam vibration theory. *J Sound Vib* 215: 17–34.
- [3] Mahmoud MA, Zaid M (2002) Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass. *J Sound Vib* 256: 591–603.
- [4] Nahvi H, Jabbari M (2005) Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *Int J Mech Sci* 47: 1477–1497.