



# مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

## حل مسأله معکوس شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک

سید احسان حاجی آقامحمدزرباف<sup>۱\*</sup>، تقی شجاعی<sup>۲</sup>، رضا معدولیت<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

<sup>۳</sup> دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۹/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۳۰

### چکیده

در یک مسأله معکوس، هدف آن است تا به کمک اطلاعات مشاهده شده از یک سیستم، به مدل مناسبی از آن دست پیدا کرد، به نحوی که مدل مذکور، علاوه بر توانایی بازتولید اطلاعات اندازه‌گیری شده در دسترس از سیستم، توانایی پیشگویی رفتار سیستم در شرایط کاری را نیز، با دقت قابل قبولی داشته باشد. در این تحقیق، یک تیر غیریکنواخت با خواص جرمی و سفتی متغیر در طول به عنوان سازه مورد بررسی فرض شده است. معادله حاکم بر تیر بصورت تحلیلی حل شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مدهای مربوط به سه مود اول خمشی تیر استخراج خواهند شد. در ادامه، از مفهوم مسأله معکوس استفاده شده و به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک، به شناسایی پارامترهای سفتی و جرمی مدل اجزاء محدود تیر مذکور پرداخته شده است. در بررسی اثر تعداد سطوح مقطع مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت بر دقت نتایج، مشاهده شد که مدل اجزاء محدود با تعداد سطوح مقطع بیشتر، توانایی بیشتری در بازتولید رفتار دینامیکی یک تیر غیریکنواخت را دارد. از آنجا که ماهواره‌برها از جمله پرکاربردترین سازه‌های مورد استفاده در صنعت هوافضا بوده و یکی از روش‌های مرسوم در مدل‌سازی سازه‌ی ماهواره‌برها، استفاده از مدل تیر غیریکنواخت می‌باشد، با استفاده از روند استفاده شده در این مقاله، می‌توان مدل اجزاء محدود مربوط به یک سازه واقعی ماهواره‌بر را به‌روزرسانی کرد.

**کلمات کلیدی:** مسأله معکوس؛ شناسایی پارامترهای سیستم؛ الگوریتم ژنتیک؛ تیر غیریکنواخت

## Solving the inverse problem of identification of FE model parameters of a non-uniform beam using genetic algorithms

Seyed Ehsan Haji Agha Mohammad Zarbaf<sup>1,\*</sup>, Taghi Shojaei<sup>2</sup>, Reza Madoliat<sup>3</sup>

<sup>1</sup> MSc, Mech. Eng., Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

<sup>3</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

### Abstract

In an inverse problem, it is desired to construct the model of a system, using the observable characteristics of the system under consideration, so that it can predict the behavior of the system as accurately as possible. In this study, a non-uniform beam is assumed as the structure whose FE model is desired to be updated. The first three natural frequencies and mode shapes of the non-uniform beam are derived analytically and are assumed as the pseudo experimentally-obtained dynamic characteristics of the structure. Then, the mentioned dynamic characteristics are used to solve the inverse problem of identification of finite element model parameters of the non-uniform beam using genetic algorithms. Investigating the effect of the number of cross-sections of the finite element model of a non-uniform beam on the accuracy of the results, it is observed that the more cross-sections the finite element model has, the more capable it is in predicting the dynamic behavior of a non-uniform beam.

**Keywords:** Inverse problem; System parameter identification; Genetic algorithms; Non-uniform beam

## ۱- مقدمه

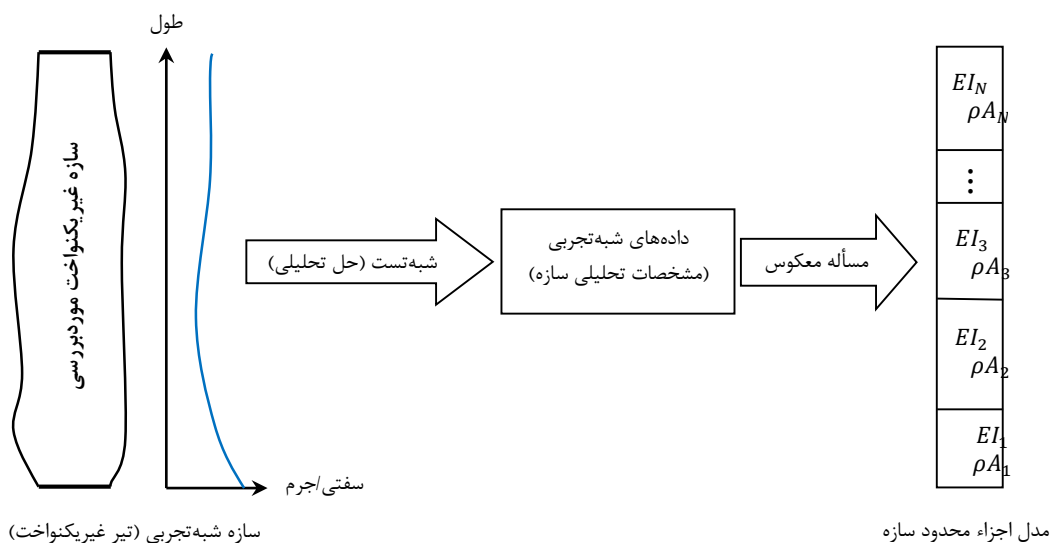
در بسیاری از مسائل مهندسی، ایجاد یک مدل دقیق از سازه‌ی مورد بررسی، به نحوی که بتواند رفتار سازه را در شرایط مختلف کاری با دقت مناسبی پیش‌بینی کند، از اهمیت بالایی برخوردار است. به منظور دستیابی به این هدف، از مشخصات قابل اندازه‌گیری سازه استفاده شده و پارامترهای مدل سازه به نحوی به‌روزرسانی می‌شوند تا مدل مذکور، ویژگی‌های اندازه‌گیری شده از سازه را با دقت مطلوبی بازتولید کند. به عبارت دیگر، در اینگونه از مسائل مهندسی، هدف آن است تا از مشاهدات انجام شده از یک سازه، به مدل تحلیلی/عددی آن سازه دست پیدا کرد. به مسائلی با چنین ویژگی، مسائل معکوس<sup>۱</sup> گفته می‌شود. از جمله حوزه‌های پرکاربرد مسائل معکوس، می‌توان به استفاده از مفهوم مسأله معکوس در شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود سازه‌های صنعت هوافضا اشاره کرد. به عنوان مثال، دان<sup>۲</sup> به کمک الگوریتم ژنتیک و با استفاده از توابع پاسخ فرکانسی تجربی اندازه‌گیری شده از سازه‌ی دم یک هواپیما، به تعیین پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود دم هواپیمای مذکور پرداخت [۱]. وی در تحقیقی مشابه، از توابع پاسخ فرکانسی شبه تجربی بدست آمده از مدل اجزاء محدود دقیق سازه مذکور استفاده کرده و با استفاده از الگوریتم ژنتیک، به تعیین پارامترهای مدل ساده‌تری از دم هواپیما پرداخت [۲].

[۳]. تریوایلو<sup>۳</sup> و همکاران، با استفاده از روش شبکه عصبی مصنوعی<sup>۴</sup>، به شناسایی خواص جرمی و سفتی مدل اجزاء محدود بال یک هواپیما با استفاده از نتایج تجربی بدست آمده از آزمون‌های استاتیکی و دینامیکی انجام شده بر روی بال پرداختند [۴]. آن‌ها در ادامه از روش الگوریتم ژنتیک استفاده کرده و پارامترهای مدل اجزاء محدود بال هواپیما را به نحوی تعیین کردند که اختلاف بین رفتار دینامیکی و استاتیکی مدل با رفتار اندازه‌گیری شده بال کمینه شود [۵].

ماهوره‌برها از جمله پرکاربردترین سازه‌های مورد استفاده در صنعت هوافضا بوده و تعیین دقیق پارامترهای مدل این سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از روش‌های

مرسوم در مدل‌سازی سازه‌ی ماهواره‌برها، استفاده از مدل تیر غیریکنواخت می‌باشد [۶-۱۰]. از این رو، در این مقاله هدف آن است تا با استفاده از روند تحقیقات انجام گرفته در حوزه تعیین پارامترهای مدل اجزاء محدود سازه‌های مورد استفاده در صنعت هوافضا [۱-۵]، به شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود سازه‌ی یک ماهواره‌بر پرداخته شود. در این مسیر، از راهکار مورد استفاده در مراجع [۲، ۳] بهره گرفته شده است. به بیان دیگر، در این تحقیق، سازه‌ی ماهواره‌بر با یک تیر تحلیلی غیریکنواخت با خواص جرمی و سفتی متغیر در طول شبیه‌سازی شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوط به سه مود اول خمشی آن بصورت تحلیلی استخراج خواهند شد. در ادامه، از این نتایج به عنوان داده‌های شبه تجربی<sup>۵</sup> استفاده خواهد شد و پارامترهای مدل اجزاء محدود تیر مذکور به نحوی شناسایی خواهند شد تا مشخصات دینامیکی مدل اجزاء محدود، بیشترین نزدیکی را به مشخصات دینامیکی تحلیلی تیر غیریکنواخت داشته باشند. روند کار در این مقاله در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مسیر، به منظور شناسایی پارامترهایی از مدل اجزاء محدود که تولیدکننده‌ی نزدیک‌ترین مشخصات دینامیکی به مشخصات دینامیکی تحلیلی تیر غیریکنواخت باشند، از الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک استفاده خواهد شد. تحقیقات زیادی راجع به کاربردهای الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک در مسائل مختلف مهندسی به انجام رسیده است. توصیه می‌شود جهت آشنایی بیشتر با این روش و حوزه کاربرد آن در علوم مختلف به مراجع [۱۱-۱۳] رجوع شود. به این ترتیب، بخش‌های این مقاله به ترتیبی که در ادامه به آن اشاره شده‌است می‌باشند. در بخش ۲ به حل تحلیلی یک تیر غیریکنواخت با خواص جرمی و سفتی متغیر در طول پرداخته می‌شود. در بخش ۳، روابط بدست آمده در بخش ۲، در مورد یک مثال عددی به کار گرفته خواهند شد و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوط به سه مود اول خمشی مثال عددی استخراج می‌شوند. در بخش ۴، از نتایج بخش ۳ به عنوان داده‌های شبه تجربی استفاده شده و به کمک الگوریتم ژنتیک، به شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود تیر مذکور پرداخته خواهد شد.

<sup>1</sup> Inverse Problems<sup>2</sup> Dunn<sup>3</sup> Trivailo<sup>4</sup> Artificial Neural Network<sup>5</sup> Pseudo Experimental Data



شکل ۱- روند استفاده از مشخصات دینامیکی تحلیلی تیر غیر یکنواخت در شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود آن

## ۲- حل تحلیلی تیر غیر یکنواخت با خواص سفتی و جرمی متغیر در طول

معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات تیر عبارتست از:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ k(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q(x, t) \quad (1)$$

که در آن  $x$  مختصات در راستای طول تیر،  $y$  مختصات در راستای عمود بر طول تیر،  $k(x)$  سفتی جانبی تیر،  $m(x)$  جرم واحد طول تیر،  $c(x)$  استهلاک تیر و  $q(x, t)$  نیروی جانبی وارد بر تیر است. تیر مورد بررسی در این تحقیق، یک تیر با شرایط مرزی ساده<sup>۱</sup> در دو سر است. به این ترتیب، با فرض طول  $L$  برای تیر، تغییر مکان و ممان در دو انتهای تیر برابر با صفر است:

$$y(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

$$y(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5)$$

<sup>۱</sup> Simply Support

جواب معادله (۱) در غیاب نیروی خارجی،  $q(x, t) = 0$  به فرم رابطه (۶) فرض می‌شود:

$$y(x, t) = w(x) e^{i\omega t} \quad (6)$$

در رابطه (۶)،  $w(x)$  شکل مود و  $\omega$  فرکانس ارتعاش تیر است. با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه‌ی (۱)، معادله دیفرانسیل جزئی (۱) به یک معادله دیفرانسیل ساده به فرم معادله (۷) در خواهد آمد.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ k(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - [m(x)\omega^2 - ic(x)\omega] w(x) = 0 \quad (7)$$

معادله (۷) یک معادله دیفرانسیل ساده مرتبه ۴ با ضرایب متغیر بوده و حل آن به نوع ضرایب متغیر آن که بیانگر خواص جرمی، سفتی و استهلاک تیر هستند بستگی دارد. در این تحلیل، نوع توزیع خواص جرمی، استهلاک و سفتی در طول تیر به فرم چندجمله‌ای فرض شده‌اند و از روابط (۸) تا (۱۰) تبعیت می‌کنند.

$$k(x) = k_0(1 + \alpha x)^{n+2} \quad (8)$$

$$m(x) = m_0(1 + \alpha x)^n \quad (9)$$

$$c(x) = c_0(1 + \alpha x)^n \quad (10)$$

که در روابط (۸) تا (۱۰)،  $n$  و  $\alpha$  پارامترهای بی‌بعدی هستند که به کمک آن‌ها می‌توان نحوه‌ی توزیع جرم، سفتی و استهلاک در طول تیر را تعیین کرد. به علاوه،  $k_0$  و  $m_0$  و  $c_0$

$$Z_1(\xi) = B_1 J_n(\eta\xi) + B_2 Y_n(\eta\xi) \quad (23)$$

در رابطه (۲۳)،  $J_n$  و  $Y_n$  به ترتیب عبارتند از توابع نوع اول و دوم بسل مرتبه  $n$ . با توجه به روابط (۱۷) تا (۲۳)، تابع  $w_1$  بصورت رابطه (۲۴) بدست می‌آید.

$$w_1(x) = (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} [B_1 J_n(\eta\xi) + B_2 Y_n(\eta\xi)] \quad (24)$$

به طور مشابه، تابع  $w_2$  بشکل رابطه (۲۵) بدست می‌آید:

$$w_2(x) = (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} [B_3 I_n(\eta\xi) + B_4 K_n(\eta\xi)] \quad (25)$$

که در رابطه (۲۵)،  $I_n$  و  $K_n$  به ترتیب عبارتند از توابع نوع اول و دوم بسل اصلاح‌شده‌ی مرتبه  $n$ . به این ترتیب، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۴) برابر است با:

$$w(x) = (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} [B_1 J_n(\eta\xi) + B_2 Y_n(\eta\xi) + B_3 I_n(\eta\xi) + B_4 K_n(\eta\xi)] \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶) در چهار شرط مرزی (۲) تا (۵)، و بازنویسی معادلات به فرم ماتریسی، خواهیم داشت:

$$[A]_{4 \times 4} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

المان‌های ماتریس ضرایب  $A$  در رابطه (۲۷)، در پیوست الف آورده شده‌اند. با توجه به رابطه (۲۷)، معادله مشخصه تیر غیریکنواخت مورد بررسی از رابطه (۲۸) بدست خواهد آمد.

$$\det(A) = 0 \quad (28)$$

رابطه (۲۸) یک معادله غیرخطی بر حسب  $\eta$  است. رابطه بین ریشه  $\eta$  از معادله (۲۸)،  $\eta_r$  و فرکانس طبیعی مربوط به مود  $r$ ام تیر غیریکنواخت مورد بررسی،  $\omega_{dr}$ ، عبارتست از [۱۴]:

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - d^2} \quad (29)$$

که در رابطه (۲۹) داریم:

$$\omega_r = \frac{\alpha^2 \eta_r^2}{4} \sqrt{k_0 / m_0} \quad (30)$$

$$d = \frac{c_0}{c_c} \quad (31)$$

$$c_c = \frac{\alpha^2 \eta_r^2}{4} \sqrt{k_0 m_0} \quad (32)$$

### ۳- مثال عددی تیر غیریکنواخت با توزیع سفتی و جرمی چندجمله‌ای

مشخصه سفتی، جرم و استهلاک تیر در نقطه  $x=0$  هستند. با جایگذاری روابط (۸) تا (۱۰) در رابطه (۷)، این رابطه به فرم رابطه (۱۱) درخواهد آمد.

$$(1 + \alpha x)^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 2\alpha(n + 2)(1 + \alpha x) \frac{d^3 y}{dx^3} + \alpha^2(n + 2)(n + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - \theta^4 w(x) = 0 \quad (11)$$

که در آن داریم:

$$\theta^4 = \frac{m_0 \omega^2 - i c_0 \omega}{k_0} \quad (12)$$

با تعریف عملگر  $\Delta$  به فرم رابطه (۱۳) [۱۴] و اعمال آن در رابطه (۱۱)، رابطه (۱۱) به فرم رابطه (۱۴) درمی‌آید.

$$\Delta = \alpha(n + 1) \frac{d}{dx} + (1 + \alpha x) \frac{d^2}{dx^2} \quad (13)$$

$$(\Delta + \theta^2)(\Delta - \theta^2)w(x) = 0 \quad (14)$$

جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل (۱۴) بصورت مجموع جواب‌های خصوصی  $w_1$  و  $w_2$  خواهد بود:

$$(1 + \alpha x) \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha(n + 1) \frac{dw_1}{dx} + \theta^2 w_1(x) = 0 \quad (15)$$

$$(1 + \alpha x) \frac{d^2 w_2}{dx^2} + \alpha(n + 1) \frac{dw_2}{dx} - \theta^2 w_2(x) = 0 \quad (16)$$

به منظور حل کردن معادله (۱۵)، دو تابع  $\xi$  و  $Z_1$  به فرم روابط (۱۷) و (۱۸) در نظر گرفته می‌شوند [۱۴]:

$$\xi(x) = (1 + \alpha x)^\mu \quad (17)$$

$$Z_1(\xi) = \xi^{-\nu} w_1(x) \quad (18)$$

که در روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\mu = \frac{1}{2} \quad (19)$$

$$\nu = -n \quad (20)$$

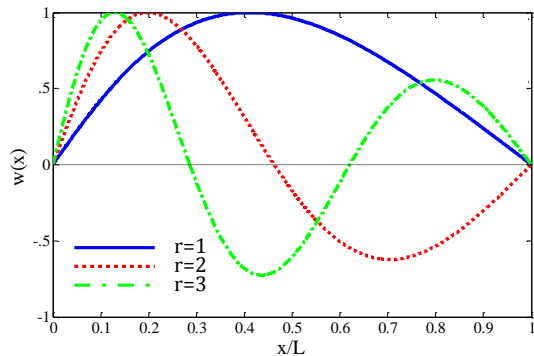
با معرفی روابط (۱۷) و (۱۸)، معادله دیفرانسیل (۱۵) را می‌توان به فرم معادله (۲۱) بازنویسی کرد.

$$\frac{d^2 Z_1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dZ_1}{d\xi} + \left( \eta^2 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) Z_1(\xi) = 0 \quad (21)$$

که در آن داریم:

$$\eta = \frac{2\theta}{\alpha} \quad (22)$$

معادله (۲۱) یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه  $n$  با پارامتر  $\eta$  بوده و جواب عمومی به فرم رابطه (۲۳) می‌باشد.



شکل ۳- شکل مودهای مربوط به مودهای  $r=1,2,3$  تیر  
شکل ۲

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی سه مود اول خمشی تیر

شکل ۲

شماره مود (r)	$\eta_r$	$\omega_r$ (Hz)
۱	۴/۲۶۷۶	۰/۵۹۳۹
۲	۸/۶۵۱۷	۲/۳۶۷۰
۳	۱۲/۹۳۹۱	۵/۲۹۴۳

#### ۴- شناسایی پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء

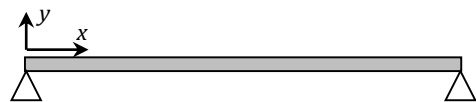
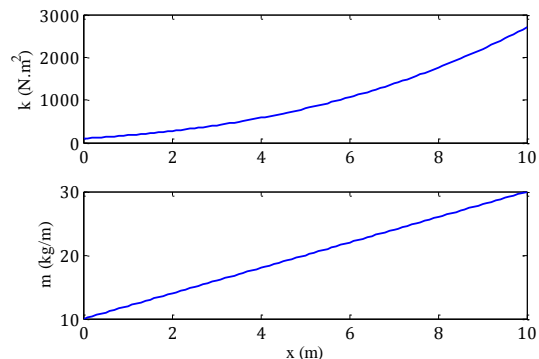
##### محدود تیر غیریکنواخت

در این بخش، تیر غیر یکنواخت بررسی شده در بخش قبل توسط مدل اجزاء محدود یک تیر اویلر-برنولی با ۶۰ المان شبیه‌سازی می‌شود. هدف از این کار آن است تا پارامترهای سفتی و جرم مدل مذکور، با استفاده از مشخصات دینامیکی تیر غیریکنواخت شکل ۲ و به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک شناسایی شوند. در مرحله اول، تیر مدل شده به روش اجزاء محدود، یکنواخت فرض می‌شود. به این ترتیب، با تعریف تابع هدفی<sup>۱</sup> مناسب در الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک به نحوی که با کمینه شدن آن، مشخصات دینامیکی مدل اجزاء محدود به مشخصات دینامیکی بدست آمده در بخش قبل نزدیک شوند، پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود شناسایی خواهند شد. نکته‌ای که باید به آن توجه شود آن است که در این مرحله، به علت یکنواخت بودن مدل اجزاء محدود تیر، تغییر در پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود، تغییری در بردارهای شکل مود آن ایجاد نخواهد کرد. در نتیجه، در این مرحله، سعی تابع هدف تنها

در این بخش، با استفاده از روابط ارائه شده در بخش قبل، یک تیر غیریکنواخت با خواص جرمی و سفتی متغیر در طول بصورت تحلیلی بررسی شده و مشخصات دینامیکی آن بصورت تحلیلی استخراج خواهد شد. تیر مورد بررسی، در دو انتهای خود دارای شرایط مرزی ساده بوده و توزیع سفتی، جرم و استهلاک در طول آن، از روابط (۸)، (۹) و (۱۰) تبعیت می‌کند. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر مورد بررسی در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است، در این تحلیل، بدون آنکه از عمومیت مسأله کاسته شود، فرض شده است که تیر فاقد استهلاک است. به این ترتیب، خواص جرمی و سفتی تیر مورد بررسی بصورت آنچه در شکل ۲ نشان داده شده است، در طول تیر تغییر می‌کند. به علاوه، شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی سه مود اول خمشی تیر غیریکنواخت مورد بررسی، در شکل ۳ و جدول ۲ ارائه شده‌اند.

##### جدول ۱- مشخصات هندسی و مکانیکی تیر مورد بررسی

L (m)	$m_0$ (kg/m)	$k_0$ (N.m <sup>2</sup> )	$c_0$	$\alpha$	n
۱۰	۱۰	۱۰۰	۰	۰/۲	۱



شکل ۲- نمای شماتیک تیر ناهمگن مورد بررسی و توزیع جرم و سفتی در طول آن

در بخش آینده، با استفاده از مشخصات دینامیکی تیر غیریکنواخت بدست آمده در این بخش، به حل مسأله‌ی معکوس شناسایی پارامترهای سفتی و جرمی مدل اجزاء محدود تیر نمایش داده شده در شکل ۲، به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک پرداخته خواهد شد.

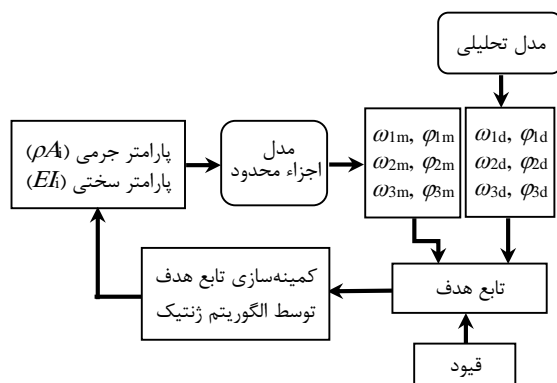
<sup>1</sup> Objective Function

که در رابطه (۳۴)،  $\varphi_i$  بردار شکل مود مربوط به مود  $A_m$  است. لازم به ذکر است که حین شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود یک سازه، با اعمال برخی قیود بدست‌آمده از مشاهدات و اندازه‌گیری‌های تجربی به پارامترهای مدل اجزاء محدود، می‌توان دقت پارامترهای شناسایی‌شده را افزایش داد. در این مقاله، مشاهده در افزایش سفتی جانبی و جرم واحد طول تیر با افزایش در مختصات  $x$  از جمله قیودی است که در تعیین پارامترهای سفتی و جرمی مدل اجزاء محدود تیر لحاظ شده است. به علاوه، برابر بودن جرم کلی تیر تحلیلی با جرم مدل اجزاء محدود آن، از دیگر قیود لحاظ شده حین شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود می‌باشد. این قیود باعث می‌شوند تا نه تنها الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک به جواب‌های مناسب‌تری همگرا شود، بلکه با ایجاد رابطه بین پارامترهای بهینه‌سازی، از تعداد پارامترهای مستقل کاسته شده و از حجم محاسبات کم شود. قیود و الگوریتم استفاده‌شده در این مقاله جهت شناسایی پارامترهای مدل اجزای محدود تیر غیریکنواخت شکل ۲ به ترتیب در جدول ۳ و شکل ۴ نمایش داده شده‌اند.

**جدول ۳- قیود استفاده‌شده در شناسایی پارامترهای مدل**

اجزاء محدود تیر با تعداد سطوح مقطع  $N=1,2,3,4$

N	قیود سفتی	قیود جرمی
۱	-	-
۲	$EI_1 < EI_2$	$\rho A_1 + \rho A_2 = 40$ $\rho A_1 < \rho A_2$
۳	$EI_1 < EI_2 < EI_3$	$\rho A_1 + \rho A_2 + \rho A_3 = 60$ $\rho A_1 < \rho A_2 < \rho A_3$
۴	$EI_1 < EI_2 < EI_3 < EI_4$	$\rho A_1 + \rho A_2 + \rho A_3 + \rho A_4 = 80$ $\rho A_1 < \rho A_2 < \rho A_3 < \rho A_4$



**شکل ۴- الگوریتم شناسایی پارامترهای جرمی و سفتی مدل اجزاء محدود تیر به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک**

در نزدیک کردن ۳ فرکانس طبیعی بدست آمده از مدل تحلیلی و اجزاء محدود تیر غیریکنواخت مورد بررسی است. به این ترتیب، تابع هدف  $J$  در رابطه با شناسایی پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود تیر یکنواخت به فرم رابطه (۳۳) انتخاب می‌شود.

$$J = \left| \frac{\omega_{1m} - \omega_{1d}}{\omega_{1d}} \right| + \left| \frac{\omega_{2m} - \omega_{2d}}{\omega_{2d}} \right| + \left| \frac{\omega_{2m} - \omega_{2d}}{\omega_{2d}} \right| \quad (33)$$

که در رابطه (۳۳)، زیرنویس‌های  $m$  و  $d$  به ترتیب مربوط به مقادیر بدست‌آمده از مدل اجزاء محدود و مدل تحلیلی هستند. در مقابل، با افزایش تعداد سطوح مقطع تیر مدل شده به روش اجزاء محدود از یک سطح مقطع، یا همان تیر یکنواخت، به بیش از یک سطح مقطع، این امکان فراهم خواهد شد تا معیار تطابق بین شکل مودهای بدست آمده از مدل اجزاء محدود و مدل تحلیلی نیز در تابع هدف لحاظ شود. به این ترتیب، سعی الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک بر این خواهد بود تا پارامترهای سفتی و جرمی تیر اجزاء محدود را به نحوی شناسایی کند تا نه تنها فرکانس‌های بدست آمده از دو مدل بیشترین نزدیکی را به هم داشته باشند، بلکه تطابق بین شکل مودهای تحلیلی و بدست‌آمده از مدل اجزاء محدود نیز بیشینه شود. در این مقاله، از معیار  $MAC^1$  برای سنجش میزان انطباق بردارهای شکل مود بدست آمده از دو مدل تحلیلی و اجزاء محدود استفاده شده است. مقدار  $MAC$  در حالت انطباق کامل دو بردار شکل مود برابر با ۱ بوده و هر چه دو بردار شکل مود انطباق کم‌تری داشته باشند، این معیار به صفر نزدیک خواهد شد. ویژگی‌ها و کاربردهای این معیار بصورت مبسوط در مراجع [۱۵-۱۷] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به این ترتیب، تابع جهت شناسایی پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت با بیش از یک سطح مقطع به فرم رابطه (۳۴) انتخاب می‌شود.

$$J = \left| \frac{\omega_{1m} - \omega_{1d}}{\omega_{1d}} \right| + \left| \frac{\omega_{2m} - \omega_{2d}}{\omega_{2d}} \right| + \left| \frac{\omega_{2m} - \omega_{2d}}{\omega_{2d}} \right| + \frac{MAC(\varphi_{1m}, \varphi_{1d})}{1} + \frac{MAC(\varphi_{2m}, \varphi_{2d})}{1} + \frac{MAC(\varphi_{3m}, \varphi_{3d})}{1} \quad (34)$$

<sup>1</sup> Modal Assurance Criterion

محدود در بازتولید مشخصات دینامیکی مدل تحلیلی تیر غیریکنواخت است. به این ترتیب، همان‌طور که انتظار می‌رود، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد سطوح مقطع مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت، این مدل در شبیه‌سازی رفتار دینامیکی تیر غیریکنواخت شکل ۲ با دقت بیشتری عمل می‌کند. شکل‌های ۵، ۶ و ۷ افزایش دقت شکل‌مدهای بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر بر اثر افزایش تعداد سطوح مقطع مدل را نمایش می‌دهند. لازم به ذکر است که در شکل‌های ۵، ۶ و ۷، پارامترهای سفتی و جرم مدل اجزاء محدود تیر با تعداد سطح مقطع  $N$ ، از ردیفی از جدول ۴ انتخاب شده‌اند که در آن، مقدار کم‌ترین تابع هدف  $J_{min}$  کمینه بوده و توسط بالانویس\* مشخص شده‌اند.

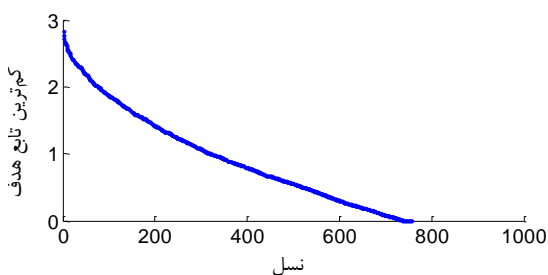
فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت با تعداد سطوح مقطع  $N=1,2,3,4$ ، تحت پارامترهای سفتی و جرم گزارش شده در سطرهایی از جدول ۴ که در آن‌ها کم‌ترین تابع هدف  $J_{min}$  کمینه است، در جدول ۵ ارائه شده‌اند.

در ادامه، الگوریتم نشان‌داده‌شده در شکل ۴ برای هر یک از مدل‌های اجزاء محدود تیر با تعداد سطوح مقطع  $N=1,2,3,4$  پنج بار اجرا خواهد شد. از میان پارامترهای بدست آمده از پنج بار اجرای الگوریتم نشان‌داده‌شده در شکل ۴، پارامترهای جرمی و سفتی مربوط به کم‌ترین تابع هدف، به عنوان پارامترهای مدل اجزاء محدود انتخاب می‌شوند. نتایج حاصل از پنج بار اجرای الگوریتم شکل ۴ برای مدل‌های اجزاء محدود تیر با تعداد سطوح مقطع  $N=1,2,3,4$  در جدول ۴ ارائه شده‌اند. از آنجا که تابع هدف استفاده شده در به‌روزرسانی پارامترهای سفتی و جرم مدل‌های اجزاء محدود تیر با بیش از یک سطح مقطع یکسان و برابر در رابطه (۳۴) بوده است، مقایسه مقادیر کم‌ترین تابع هدف مربوط به مدل‌های اجزاء محدود با تعداد سطوح مقطع  $N=2,3,4$  امکان‌پذیر است. به این ترتیب، مشاهده می‌شود که با افزایش در تعداد سطوح مقطع مدل اجزاء محدود، مقدار کم‌ترین تابع هدف، کاهش پیدا می‌کند. از طرفی، با توجه به رابطه (۳۴)، مشاهده می‌شود که تابع هدف، بیانگر اختلاف بین مشخصات دینامیکی بدست آمده از دو مدل تحلیلی و اجزاء محدود بوده و کاهش مقدار آن، نشان‌دهنده افزایش دقت مدل اجزاء

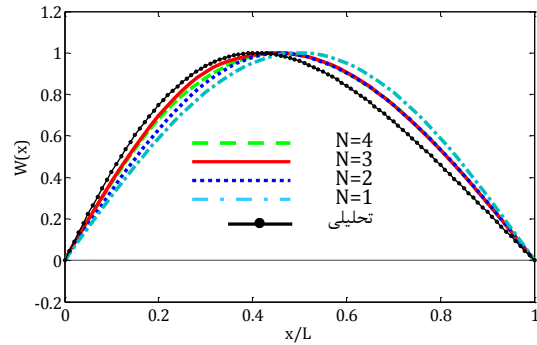
جدول ۴ نتایج حاصل از پنج بار اجرای الگوریتم شکل ۴ برای مدل‌های اجزاء محدود تیر با تعداد سطوح مقطع  $N=1,2,3,4$

$J_{min}$	$m_i$ (kg/m)				$EI_i$ (N·m <sup>2</sup> )				N
	i=4	i=3	i=2	i=1	i=4	i=3	i=2	i=1	
۰/۰۰۷۸۹۹۸	-	-	-	۱۰	-	-	-	۲۵۹/۴۶۹	۱
۰/۰۰۷۸۸۴۵	-	-	-	۱۰/۰۱۲	-	-	-	۲۵۹/۸۹۹	
۰/۰۰۷۸۸۶۰	-	-	-	۱۰/۰۰۴	-	-	-	۲۵۹/۶۳۱	
۰/۰۰۷۸۸۲۶*	-	-	-	۱۰/۰۱۱	-	-	-	۲۵۹/۸۶۳	
۰/۰۰۷۸۸۶۲	-	-	-	۱۰/۰۱۷	-	-	-	۳۶۰/۰۸۴	
۳/۱۹۱۶	-	-	۲۰/۰۰۰۳	۱۹/۹۹۹۷	-	-	۹۱۳/۷۷۱۱	۵۷۶/۷۳۵۱	۲
۳/۱۸۶۴*	-	-	۲۰/۰۱۴۵	۱۹/۹۸۴۵	-	-	۹۲۲/۳۵۰۷	۵۶۸/۶۳۱۷	
۳/۱۸۶۴	-	-	۲۰/۰۱۴۵	۱۹/۹۸۴۵	-	-	۹۲۲/۳۵۰۷	۵۶۸/۶۳۱۷	
۳/۱۸۶۴	-	-	۲۰/۰۱۴۵	۱۹/۹۸۴۵	-	-	۹۲۲/۳۵۰۷	۵۶۸/۶۳۱۷	
۳/۱۸۶۴	-	-	۲۰/۰۱۴۵	۱۹/۹۸۴۵	-	-	۹۲۲/۳۵۰۷	۵۶۸/۶۳۱۷	
۳/۱۷۴۸	-	۲۰/۳۹۶۰	۱۹/۷۰۷۶	۱۹/۸۹۶۴	-	۹۶۲/۳۳۳۲	۷۶۴/۴۵۴۶	۴۹۹/۱۰۷۵	۳
۳/۱۳۴۹*	-	۲۲/۱۳۴۰	۲۱/۲۱۳۴	۱۶/۶۵۲۶	-	۱۰۸۵/۲۳۷	۸۸۹/۹۳۸۲	۳۹۴/۱۷۸۲	
۳/۱۴۱۰	-	۲۲/۰۷۳۷	۲۱/۲۶۲۰	۱۶/۶۶۴۳	-	۱۰۵۸/۱۷۰	۸۸۶/۹۳۸۱	۳۹۹/۹۲۷۶	
۳/۲۰۳۳	-	۲۲/۲۳۴۶	۲۱/۱۰۳۳	۱۶/۶۶۲۲	-	۹۱۹/۲۸۴۳	۸۱۴/۹۹۴۹	۴۸۵/۷۲۰۶	
۳/۱۵۲۵	-	۲۲/۰۴۱۸	۲۱/۲۹۷۶	۱۶/۶۶۰۶	-	۱۰۱۴/۰۶۲	۸۸۱/۴۲۰۲	۴۱۱/۱۳۸۰	
۳/۱۱۲۹	۲۲/۵۹۶۶	۲۲/۵۹۲۹	۱۹/۸۲۵۶	۱۴/۹۸۵۰	۱۰۳۶/۴۳۱	۹۵۰/۷۳۹۳	۶۹۳/۷۲۱۶	۳۸۰/۸۲۳۲	۴
۳/۰۹۱۸*	۲۲/۵۱۷۶	۲۲/۵۰۶۸	۱۹/۹۸۷۷	۱۴/۹۸۷۹	۱۰۸۹/۳۰۱	۹۸۳/۳۲۳۹	۶۹۲/۴۷۹۰	۳۵۷/۶۵۶۹	
۳/۱۰۱۳	۲۲/۵۴۵۵	۲۲/۴۶۹۵	۱۹/۹۹۴۲	۱۴/۹۹۰۸	۱۰۷۱/۸۸۶	۹۵۵/۷۳۸۹	۷۰۱/۵۰۱۲	۳۶۴/۱۴۹۰	
۳/۱۱۸۷	۲۲/۵۵۶۴	۲۲/۴۸۳۱	۱۹/۹۶۳۳	۱۴/۹۹۷۲	۱۰۳۴/۱۲۹	۹۲۱/۸۱۵۳	۷۱۲/۸۴۸۰	۳۷۹/۶۳۰۳	
۳/۱۰۰۳	۲۲/۵۱۶۷	۲۲/۵۰۱۳	۱۹/۹۹۰۳	۱۴/۹۹۱۷	۱۰۷۶/۸۸۵	۹۵۳/۹۸۱۹	۷۰۶/۱۶۱۸	۳۶۰/۶۲۹۸	

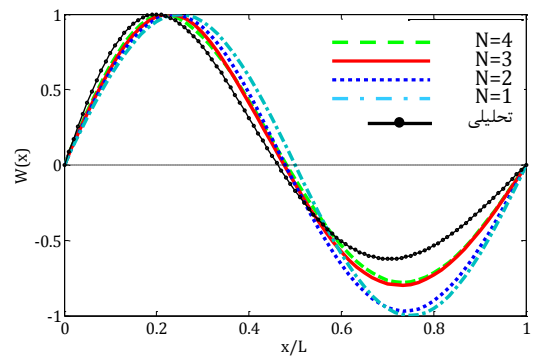
هر نسل مقدار ۱۵۰ انتخاب گردید و بیشینه تعداد نسل‌های تولید شده برای تیر اجزاء محدود با تعداد سطوح مقطع ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب ۱۰۰۰، ۲۱۰۰، ۲۶۰۰ و ۳۲۰۰ بوده است. مقادیر سایر پارامترهای الگوریتم ژنتیک استفاده شده در این تحلیل، پیش فرض نرم افزار متلب هستند. به این ترتیب، به عنوان مثال، الگوریتم ژنتیک در مورد تیر با تعداد سطح مقطع ۳، آنقدر به تولید نسل پرداخته و در تولید جمعیت نسل بعدی از افراد با شرایط مطلوب در نسل جاری استفاده می‌کند تا اختلاف بین کمترین مقادیر تابع هدف دو نسل متوالی از حد معینی کم‌تر شود. تحت این شرایط، الگوریتم ژنتیک، افرادی از آخرین نسل که تولید کننده‌ی مقدار کمینه‌ی تابع هدف هستند را به عنوان پارامترهای مطلوب معرفی می‌کند. در غیر اینصورت و در شرایطی که در محدوده‌ی تعداد نسل‌های تعیین شده، که برای تیر با سه سطح مقطع ۲۶۰۰ نسل است، اختلاف بین کمترین مقادیر تابع هدف دو نسل متوالی از حد پیش فرض نرم افزار کم‌تر نشود، الگوریتم ژنتیک افرادی از نسل ۲۶۰۰ که تولید کننده‌ی کمترین تابع هدف در این نسل هستند را به عنوان پارامترهای مطلوب معرفی می‌کند. در تحلیل حاضر، بیشینه تعداد نسل‌های تولید شده برای تعداد سطوح مقطع مختلف به نحوی تعیین شده است تا کاهش اختلاف بین مقادیر کمینه تابع هدف در دو نسل متوالی از حد مطلوب، باعث توقف الگوریتم شود و نه تجاوز تعداد نسل‌ها از بیشینه تعداد نسل‌های مجاز. به این ترتیب، می‌توان مطمئن بود که الگوریتم بر اثر رسیدن به یک همگرایی متوقف شده است. روند کاهش کمترین مقدار تابع هدف با افزایش تعداد نسل‌ها برای تیر اجزاء محدود با تعداد سطوح مقطع ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب در شکل‌های ۸ تا ۱۱ نمایش داده شده است.



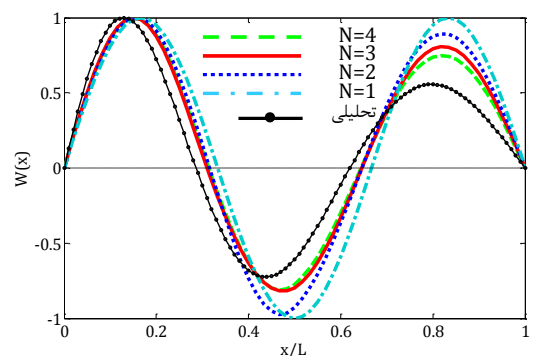
شکل ۸- کمترین مقدار تابع هدف در هر نسل برای مدل اجزاء محدود تیر یکنواخت



شکل ۵- شکل مود اول تحلیلی و بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیر یکنواخت با تعداد سطح مقطع‌های N=1,2,3,4



شکل ۶- شکل مود دوم تحلیلی و بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیر یکنواخت با تعداد سطح مقطع‌های N=1,2,3,4



شکل ۷- شکل مود سوم تحلیلی و بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیر یکنواخت با تعداد سطح مقطع‌های N=1,2,3,4

در این‌جا، لازم به ذکر است که مقادیر گزارش شده در جدول ۴ با استفاده از ابزار الگوریتم ژنتیک موجود در نرم افزار متلب بدست آمده‌اند. در تحلیل انجام شده، تعداد جمعیت در



با توجه به فرکانس‌های طبیعی گزارش شده در جدول ۵، مشاهده می‌شود که روند افزایش دقت در فرکانس‌های بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت بر اثر افزایش تعداد سطوح مقطع تیر، مشابه با آنچه در مورد شکل موده‌های بدست آمده از مدل اجزاء محدود مشاهده گردید نبوده و در برخی موارد، دقت فرکانس بدست آمده از مدل اجزاء محدود با افزایش تعداد سطح مقطع، کاهش می‌یابد. با این وجود، با مقایسه مقادیر کمینه تابع  $J_{min}$  در جدول ۴، مشاهده می‌شود که افزایش تعداد سطوح مقطع در مدل اجزاء محدود تیر با بیش از یک سطح مقطع، باعث کاهش مقدار کمینه‌ی تابع  $J_{min}$  می‌شود. به عبارت دیگر، افزایش تعداد سطوح مقطع مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت، باعث افزایش دقت مدل اجزاء محدود در بازتولید مشخصات دینامیکی تیر غیریکنواخت شکل ۲ می‌شود.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، به حل مسأله‌ی معکوس شناسایی پارامترهای مدل اجزاء محدود یک تیر غیریکنواخت به کمک الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک پرداخته شد. در ابتدا، فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های مربوط به سه مود اول خمشی یک تیر غیریکنواخت با توزیع جرمی و سفتی با فرم توانی در طول، به روش تحلیلی استخراج گردید. در ادامه، از مشخصات دینامیکی بدست آمده به عنوان داده‌های شبه‌تجربی استفاده شد و پارامترهای مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت موردبررسی به نحوی شناسایی شدند که رفتار دینامیکی مدل اجزاء محدود بیشترین نزدیکی را به رفتار تیر غیریکنواخت موردبررسی داشته باشد. در این مسیر، از الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک به منظور کمینه کردن تابع هدف تعریف شده استفاده گردید. با مقایسه نتایج بدست آمده، مشاهده گردید که با افزایش تعداد سطوح مقطع مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت، دقت مدل اجزاء محدود در بازتولید مشخصات دینامیکی تحلیلی تیر غیریکنواخت افزایش می‌یابد.

### ۶- پیوست الف

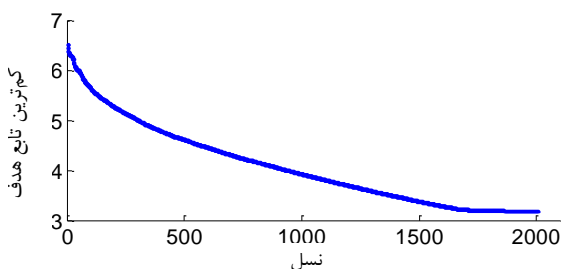
المان‌های ماتریس ضرایب A در رابطه (۲۷) عبارتند از:

$$a_{11} = J_n(\eta) \quad (۳۵)$$

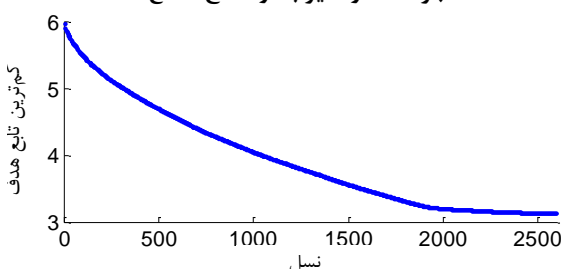
$$a_{12} = Y_n(\eta) \quad (۳۶)$$

$$a_{13} = I_n(\eta) \quad (۳۷)$$

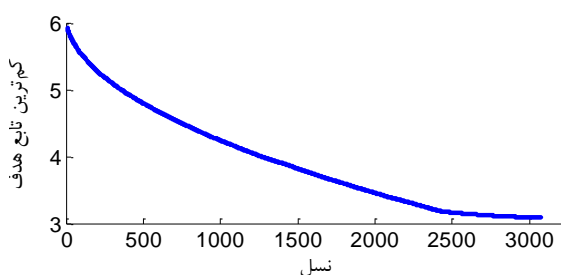
$$a_{14} = K_n(\eta) \quad (۳۸)$$



شکل ۹- کم‌ترین مقدار تابع هدف در هر نسل برای مدل اجزاء محدود تیر با دو سطح مقطع



شکل ۱۰- کم‌ترین مقدار تابع هدف در هر نسل برای مدل اجزاء محدود تیر با سه سطح مقطع



شکل ۱۱- کم‌ترین مقدار تابع هدف در هر نسل برای مدل اجزاء محدود تیر با چهار سطح مقطع

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از مدل اجزاء محدود تیر غیریکنواخت با تعداد سطوح مقطع

فرکانس (Hz)	تعداد سطح مقطع			
	N=4	N=3	N=2	N=1
$\omega_{1m}$	۰/۵۹۳۰	۰/۵۹۲۹	۰/۵۸۵۸	۰/۵۹۲۰
$\omega_{2m}$	۲/۳۵۴۸	۲/۳۲۸۱	۲/۳۹۵۹	۲/۳۶۸۰
$\omega_{3m}$	۵/۲۹۳۹	۵/۴۲۲۵	۵/۲۹۴۳	۵/۳۲۸۰
خطا (%)				
$(\omega_{1m} - \omega_{1d}) / \omega_{1d}$	۰/۰	۰/۰	۱/۲	۰/۱
$(\omega_{2m} - \omega_{2d}) / \omega_{2d}$	۰/۵	۱/۶	۱/۲	۰/۰
$(\omega_{3m} - \omega_{3d}) / \omega_{3d}$	۰/۰	۲/۴	۰/۰	۰/۶

۷- مراجع

[1] Dunn SA (1997) Modified genetic algorithm for the identification of aircraft structures. *J Aircraft* 34(2): 251-253.

[2] Dunn SA (1998) Optimisation of the structural dynamic finite element model for a complete aircraft. 21<sup>st</sup> Congress of the Int Council of the Aeronautical Sciences. Melbourne, Australia.

[3] Dunn SA (1999) Technique for unique optimization of dynamic finite element models. *J Aircraft* 36(6): 919-925.

[4] Trivailo PM, et al. (2006) Inverse problem of aircraft structural parameter estimation: application of neural networks. *Inverse Probl Sci Eng* 14(4): 351-363.

[5] Trivailo PM, et al. (2006) Inverse problem of aircraft structural parameter identification: application of genetic algorithms compared with artificial neural networks. *Inverse Probl Sci Eng* 14(4): 337-350.

[6] Wu JJ (1975) On the stability of a free-free beam under axial thrust subjected to directional control. *J Sound Vib* 43(1): 45-52.

[7] Joshi A, Suryanarayan S (1989) Unified analytical solution for various boundary conditions for the coupled flexural-torsional vibration of beams subjected to axial loads and end moments. *J Sound Vib* 129(2): 313-326.

[8] Joshi A (1995) Free vibration characteristics of variable mass rockets having large axial thrust/acceleration. *J Sound Vib* 187(4): 727-736.

[9] Kirillov ON, Seyranian AP (1998) Optimization of stability of a flexible missile under follower thrust. Proceedings of the 7<sup>th</sup> AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, St. Louis, MO, U.S.A., 2063-2073.

[10] Wu L, Xie C, and Yang C (2012) Aeroelastic Stability of a Slender Missile with Constant Thrust. *Procedia Eng* 31: 128-135.

[11] Srinivas M, Patnaik LM (1994) Genetic algorithms: A survey. *Computer* 27(6): 17-26.

[12] Herrera F, Lozano M, Verdegay JL (1998) Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis. *Artificial intelligence review* 12(4): 265-319.

[13] Malhotra R, Singh N, Singh Y (2011) Genetic algorithms: Concepts, design for optimization of process controllers. *Comput Inf Sci* 4(2): 39-54.

[14] Taha MH, Abohadima S (2008) Mathematical model for vibrations of non-uniform flexural beams. *Engineering Mechanics* 15(1): 3-11.

[15] Rigner L (1998) Modal assurance criteria value for two orthogonal modal vectors. 16<sup>th</sup> Int Modal Analysis Conference, Santa Barbara, California, 1320-1325.

[16] Allemang RJ (2003) The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and Vib* 37(8): 14-23.

[17] Pastor M, Binda M, Harčarik T (2012) Modal assurance criterion. *Procedia Eng* 48: 543-548.

$$a_{21} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} J_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(J_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(J_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=0} \quad (39)$$

$$a_{22} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} Y_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(Y_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(Y_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=0} \quad (40)$$

$$a_{23} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} I_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(I_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(I_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=0} \quad (41)$$

$$a_{24} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} K_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(K_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(K_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=0} \quad (42)$$

$$a_{31} = \left[ (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} J_n(\eta\xi) \right]_{x=L} \quad (43)$$

$$a_{32} = \left[ (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} Y_n(\eta\xi) \right]_{x=L} \quad (44)$$

$$a_{33} = \left[ (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} I_n(\eta\xi) \right]_{x=L} \quad (45)$$

$$a_{34} = \left[ (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} K_n(\eta\xi) \right]_{x=L} \quad (46)$$

$$a_{41} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} J_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(J_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(J_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=L} \quad (47)$$

$$a_{42} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} Y_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(Y_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(Y_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=L} \quad (48)$$

$$a_{43} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} I_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(I_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(I_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=L} \quad (49)$$

$$a_{44} = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \alpha^2 (1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} K_n(\eta\xi) \right] \\ -n\alpha(1 + \alpha x)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{d(K_n(\eta\xi))}{dx} \\ + (1 + \alpha x)^{-\frac{n}{2}} \frac{d^2(K_n(\eta\xi))}{dx^2} \end{array} \right]_{x=L} \quad (50)$$