مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۴/ دوره ۵/ شماره ۱/ صفحه ۱-۱۱

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

استفاده از یک روش دقیق فرم بسته برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم ایزوتروپیک چندلایه

حمزه صالحی‌پور[۱]،روح‌اله حسینی[۲*]

[۱]دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

[۲]دانشجوی دکتری ، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۸/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۱/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰

چکیده

در این مقاله یک حل دقیق فرم بسته برای ارتعاشات آزاد خارج صفحه‌ای ورق‌های ضخیم مستطیلی همگن و ایزوتروپیک چندلایه با شرایط مرزی مفصل ساده بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی ارائه شده است. از تعدادی میدان جابه‌جایی برای حل معادلات استفاده شده است. میدان‌های جابه‌جایی درنظر گرفته شده طوری می‌باشند که شرایط مرزی مفصل ساده را بر روی پایه‌های ورق برقرار می‌کنند. در ادامه حل، با جایگذاری میدان‌های جابه‌جایی فرض شده در معادلات الاستیسیته سه‌بعدی حرکت و ساده‌سازی نتایج تعدادی معادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آید. با حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده و برقراری شرایط مرزی بر روی صفحات بالا و پایین ورق و صفحات بین لایه‌ها فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای خارج صفحه-ای به‌دست می‌آیند. برای بررسی صحت، دقت و توانایی روش حاضر تعدادی نتیجه عددی برای ورق‌های مربعی و مستطیلی تک-لایه و دولایه ارائه شده است که با نتایج موجود در مقالات و نتایج به‌دست آمده از حل سه‌بعدی اجزاء محدود مقایسه شده‌اند.

کلیدواژگان : حل دقیق فرم بسته، تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی، فرکانس طبیعی، مدهای خارج صفحه‌ای

Dynamic Response of Curved Sandwich Beam with a Soft Flexible Core Subjected to Radial Low Velocity Impact

H. Salehipour[1], R. Hosseini[2]

[1]Ph.D. student, Mechanical Engineering Department, Isfahan University of Technology

[2] Ph.D. student, Mechanical Engineering Department, University of Tehran

Abstract

In this paper, an exact closed-form solution is presented for out-of-plane free vibration of thick homogeneous and isotropic multilayered rectangular plates with simply supported boundary conditions based on the linear three-dimensional elasticity theory. The solution procedure is on the basis of using of some proposed displacement fields. Proposed displacement fields satisfied simply supported boundary conditions on the edges of the plate. On the continuation of the solution, by replacing the proposed displacement fields into the three-dimensional elasticity equations of motion and simplifying the results some independent ordinary differential equations are obtained. The natural frequencies are extracted by satisfying the boundary conditions on the surfaces of the plate and surfaces between the layers. In order to establish the accuracy and stability of the proposed solution, several numerical results for one layered and two layered square and rectangular plates are presented and compared with corresponding results in the literatures and obtained results of 3-D finite element method.

Keywords: exact closed-form solution, linear three-dimensional elasticity theory, natural frequency, out-of-plane modes

۱- مقدمه

ورق‌های مستطیلی همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه و چندلایه یکی از سازه‌های پرکاربرد صنعتی می‌باشند که در حوزه‌های مختلف صنعتی از جمله صنایع فضایی، مکانیکی، عمرانی، دریایی و هسته‌ای کاربرد دارند. در ورق‌های چندلایه می‌توان با انتخاب مواد مناسب برای هر کدام از لایه‌ها به ویژگی‌های مکانیکی بهتری نسبت به ورق‌های تک‌لایه دست یافت. از آنجایی که در موارد مختلفی ورق‌ها متحمل بارهای مکانیکی می‌شوند، بررسی ارتعاشات آن‌ها اجتناب ناپذیر می‌شود و مهمترین بخش در بررسی ارتعاشات ورق، به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ورق می‌باشد.

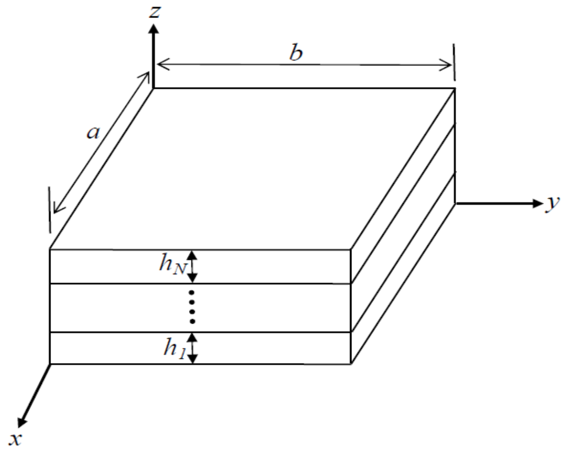
در سال‌های گذشته مطالعات اندکی برای تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیلی همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه و چندلایه بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی نسبت به سایر تئوری‌های دوبعدی انجام شده است. بر اساس تحقیقات گذشته این تئوری نسبت به سایر تئوری‌های دوبعدی برای تحلیل رفتارهای مکانیکی ورق‌های ضخیم کارآمدتر و دقیقتر می‌باشد. در ادامه مروری بر تحقیقات گذشته انجام می‌دهیم که بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی و برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه و چندلایه صورت گرفته‌اند. در سال ۱۹۷۰میلادی سِرینیوِس و همکاران [۱] یک حل دقیق با استفاده از روش فضای حالت برای حل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه و چندلایه با پایه‌های مفصل ساده ارائه کردند. آن‌ها [۲] همچنین در همان سال با استفاده از روشی مشابه ارتعاشات آزاد و خمش ورق‌ها را بررسی کردند. لِوینسون [۳] در سال ۱۹۸۵ ارتعاشات آزاد خارج صفحه‌ای ورق‌های تک لایه با شرایط مرزی مفصل ساده را مورد مطالعه قرار داد و یک حل فرم بسته برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارائه کرد. در این بررسی مدها به دو دسته خمشی و تنفسی تقسیم شدند. در سال ۱۹۹۵ روش ریتز توسط فِردریکسِن [۴] برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای خمشی ورق‌های چندلایه با شرایط مرزی پایه‌های آزاد به‌کار برده شد. یِ [۵] در سال ۱۹۹۷ بر مبنای یک حل بازگشتی و با استفاده از روش لاگرانژ ارتعاشات آزاد ورق‌های لایه‌ای با پایه‌های گیردار را بررسی کرد. باترا و اِیمانی [۶] در سال ۲۰۰۳ به بررسی فرکانس‌های گم شده در تحقیقات پیشین پرداختند و آن‌ها را به‌دست آوردند. آن‌ها در این مطالعه فرض کردند که مواد به‌کار رفته در ورق تراکم پذیر می‌باشند. آن‌ها [۷] همچنین در سال ۲۰۰۷ یک حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد ورق‌های همگن و ایزوتروپیک تراکم ناپذیر ارائه کردند و در این تحقیق نیز فرکانس‌های گم شده در تحقیقات پیشین را نیز به‌دست آوردند. چِئونگ و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۵ روش ریتز را برای مطالعه ارتعاشات آزاد ورق‌های همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه به‌کار بردند. آن‌ها مطالعه خود را برای چندین حالت مختلف شرایط مرزی انجام دادند. ناگینو وهمکاران [۹] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از روش ریتز و ارائه یک حل نیمه تحلیلی به محاسبه فرکانس‌های طبیعی ورق‌های ایزوتروپیک با هر نوع شرایط مرزی پرداختند و آن‌ها را با دقت خوبی به‌دست آوردند. اخیراً نیز در سال ۲۰۱۱ مِسینا [۱۰] تاثیر شرایط مرزی متفاوت را بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های تک‌لایه و چندلایه بررسی کردند.

علاوه بر ورق‌های ایزوتروپیک، تعدادی حل تحلیلی و نیمه‌تحلیلی بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی برای ورق‌های غیر ایزوتروپیک چندلایه نیز انجام شده است. در سال ۱۹۷۰ سِرینیوِس و رائو[۱۱] یک تحلیل دقیق برای رفتارهای استاتیکی و ارتعاشی ورق‌های ارتوتروپیک چندلایه ارائه کردند. ویتریک[۱۲] در سال ۱۹۸۷ یک حل دقیق تحلیلی برای خمش و ارتعاشات آزاد ورق‌های ارتوتروپیک با پایه‌های مفصل ساده با استفاده از سری‌های مثلثاتی ارائه کرد. علاوه بر دو مورد فوق به کارهای انجام شده توسط پِن[۱۳]، دینگ و همکاران[۱۴] می توان اشاره کرد که به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۲، ۲۰۰۱ بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی همگن چندلایه اما غیر ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند.

در این بررسی، بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی و با استفاده از بسط دادن روشی که لِوینسون[۳] برای تحلیل ارتعاشات آزاد خارج صفحه‌ای ورق‌های تک لایه به‌کار برد، یک حل دقیق فرم بسته برای ارتعاشات آزاد خارج صفحه‌ای ورق‌های همگن و ایزوتروپیک چندلایه به‌دست می‌آوریم. مزیت حل ارائه شده نسبت به سایر حل‌های انجام شده برای ورق‌های چندلایه علاوه بر فرم بسته بودن روش حل، استفاده از میدان‌های جابه‌جایی ویژه‌ای می‌باشد که باعث کاهش معادلات حرکت از سه معادله مستقل به دو معادله مستقل می‌شوند.

۱- معادلات الاستیسیته سه‌بعدی حرکت

ورق مستطیلی همگن N لایه با طول a، عرض b نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که ضخامت لایه‌های آن از پایین به بالا به‌ترتیب h_1، ...، h_N می‌باشد.



شکل ۱ هندسه ورق چند لایه

معادلات الاستیسیته سه‌بعدی حرکت برای هر کدام از لایه‌های همگن ورق بالا به‌صورت زیر می‌باشند:

$$G_j \Delta u_j + \frac{G_j}{1-2\nu_j}\frac{\partial e_j}{\partial x} = \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$
$$G_j \Delta v_j + \frac{G_j}{1-2\nu_j}\frac{\partial e_j}{\partial y} = \rho_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}$$
$$G_j \Delta w_j + \frac{G_j}{1-2\nu_j}\frac{\partial e_j}{\partial z} = \rho_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}$$
$$(j=1,\ldots,N) \quad (۱)$$

در معادله بالا G_j، ρ_j و ν_j $(j=1,\ldots,N)$ به‌ترتیب مدول برشی، چگالی و ضریب پواسون لایه j می‌باشند. u_j، v_j و w_j نیز به‌ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی لایه j در جهت‌های x، y و z می‌باشند. همچنین در رابطه‌های بالا، عملگرهای Δ و e_j به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad (۲)$$

$$e_j = \partial u_j/\partial x + \partial v_j/\partial y + \partial w_j/\partial z \quad (۳)$$

۲- روش حل

در این قسمت برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای خارج صفحه‌ای از میدان‌های جابه‌جایی متفاوت اما مشابه برای هر کدام از لایه‌ها استفاده می‌کنیم. در این میدان‌های جابه‌جایی فرض می‌شود مولفه‌های جابه‌جایی به‌صورت هارمونیکی با زمان تغییر می کنند:

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_j(z)\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x} \\ g_j(z)\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y} \\ f_j(z) W(x,y) \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$
$$(j=1,\ldots,N) \quad (۴)$$

در معادلات بالا ω فرکانس طبیعی، t واحد زمان، $i=\sqrt{-1}$ و $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,\ldots,N)$ توابعی از z می‌باشند. شرایط مرزی مفصل ساده بر روی پایه‌های ورق به‌صورت زیر می‌باشند:

$$x=0,a; \quad (\sigma_x)_j = 0, v_j = 0, w_j = 0$$
$$y=0,b; \quad (\sigma_y)_j = 0, u_j = 0, w_j = 0$$
$$(j=1,\ldots,N) \quad (۵)$$

به‌منظور برقراری شرایط مرزی بالا بر روی پایه‌های ورق تابع $W(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)$$
$$\alpha_m = m\pi/a \ , \quad \beta_n = n\pi/b \quad (۶)$$

در رابطه بالا m و n نیم‌موجهای هارمونیکی در جهت‌های x و y می‌باشند. با جایگذاری میدان‌های جابه‌جایی فوق در معادلات حرکت و ساده‌سازی آن‌ها، تنها دو معادله مستقل یکی در جهت z و دیگری در یکی از جهت‌های x یا y برای هر کدام از لایه‌ها به‌دست می‌آید، زیرا به دلیل ویژه بودن میدان‌های جابه‌جایی بالا معادلات به‌دست آمده برای هر کدام از لایه‌ها در جهات صفحه‌ای x و y یکسان می‌باشند. این معادلات به‌صورت زیر می‌باشند:

$$G_j g_j''(z) - \left(G_j\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\frac{2-2\nu_j}{1-2\nu_j}\right)g_j(z) + \rho_j\omega^2 g_j(z) - \frac{G_j}{1-2\nu_j}f_j'(z)=0 \quad (j=1,...,N) \qquad (۷)$$

$$G_j f_j''(z) - \frac{1-2\nu_j}{2-2\nu_j}\left(G_j\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)-\rho_j\omega^2\right)f_j(z) + \frac{G_j\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)}{2-2\nu_j}g_j'(z)=0 \quad (j=1,...,N) \qquad (۸)$$

برای حل معادلات بالا $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,...,N)$ را متناسب با مقدار نمایی $\exp(\beta_j z)$ در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب برای هر کدام از لایه‌ها یک معادله مشخصه درجه چهار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta_j^4 - \left(2\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)-\frac{3-4\nu_j}{2-2\nu_j}\frac{\rho_j\omega^2}{G_j}\right)\beta_j^2 + \left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)^2 - \frac{3-4\nu_j}{2-2\nu_j}\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\frac{\rho_j\omega^2}{G_j} + \frac{1-2\nu_j}{2-2\nu_j}\frac{\rho_j^2\omega^4}{G_j^2}=0 \quad (j=1,...,N) \qquad (۹)$$

ریشه‌های معادله مشخصه هر کدام از لایه‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix}\beta_{1j}\\ \beta_{2j}\end{Bmatrix}=\pm\sqrt{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)-\left(\rho_j/G_j\right)\omega^2}$$
$$\begin{Bmatrix}\beta_{3j}\\ \beta_{4j}\end{Bmatrix}=\pm\sqrt{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)-\frac{1-2\nu_j}{2-2\nu_j}\frac{\rho_j}{G_j}\omega^2} \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۰)$$

هنگامی که مقدار فرکانس ω از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند، سه محدوده مختلف برای ریشه‌های هر کدام از N معادله مشخصه بالا می‌تواند وجود داشته باشد. برای مقادیری از ω که در رابطه زیر صدق می‌کنند ریشه‌های معادله مشخصه همگی مقادیری حقیقی دارند:

$$\omega < \sqrt{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)}\Big/\sqrt{\rho_j/G_j} \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۱)$$

در این حالت توابع $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,...,N)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$g_j(z)=L_{1j}\cosh(\beta_{1j}z)+L_{2j}\sinh(\beta_{1j}z)+L_{3j}\cosh(\beta_{3j}z)+L_{4j}\sinh(\beta_{3j}z) \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۲)$$

$$f_j(z)=K_{1j}\cosh(\beta_{1j}z)+K_{2j}\sinh(\beta_{1j}z)+K_{3j}\cosh(\beta_{3j}z)+K_{4j}\sinh(\beta_{3j}z) \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۳)$$

در حالت دوم β_{1j} و β_{2j} موهومی و β_{3j} و β_{4j} حقیقی می‌باشند. این حالت برای مقادیری زیر از ω برقرار است:

$$\sqrt{\frac{G_j\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)}{\rho_j}} < \omega < \sqrt{\frac{2\left(1-\nu_j\right)G_j}{\left(1-2\nu_j\right)\rho_j}} \times \sqrt{\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)} \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۴)$$

در این حالت توابع $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,...,N)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$g_j(z)=L_{1j}\cos\left(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z\right)+L_{2j}\sin\left(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z\right)+L_{3j}\cosh(\beta_{3j}z)+L_{4j}\sinh(\beta_{3j}z) \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۵)$$

$$f_j(z)=K_{1j}\cos\left(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z\right)+K_{2j}\sin\left(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z\right)+K_{3j}\cosh(\beta_{3j}z)+K_{4j}\sinh(\beta_{3j}z) \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۶)$$

حالت سوم و پایانی برای محدوده ω زیر می‌باشد:

$$\omega > \sqrt{\frac{2\left(1-\nu_j\right)G_j\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)}{\left(1-2\nu_j\right)\rho_j}} \quad (j=1,...,N) \qquad (۱۷)$$

در این حالت ریشه‌ها همگی به‌صورت موهومی می‌باشند و لذا توابع $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,...,N)$ به صورت زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned} g_j(z) &= L_{1j}\cos(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z)+L_{2j}\sin(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z) \\ &+L_{3j}\cos(\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|}z)+L_{4j}\sin(\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|}z) \\ & (j=1,...,N) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} f_j(z) &= K_{1j}\cos(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z) \\ &+K_{2j}\sin(\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}z)+K_{3j}\cosh(\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|}z) \\ &+K_{4j}\sinh(\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|}z) \qquad (j=1,...,N) \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

در هر حالت هشت ثابت L_{ij} و K_{ij} $(1,...,4)$ $i=$ برای هر کدام از مقادیر j وجود دارد، اما معادله مشخصه‌ها معادلاتی مرتبه چهار می‌باشند. لذا باید تنها چهار ثابت مستقل وجود داشته باشد. با جایگذاری $g_j(z)$ و $f_j(z)$ $j=(1,...,N)$ در هر حالت، در یکی از روابط (۷) یا (۸) چهار رابطه وابستگی بین ثابت‌های L_{ij} و K_{ij} برای هر کدام از مقادیر j بوجود می‌آید. برای حالت اول ثابت‌های L_{ij} بر حسب ثابت‌های K_{ij} به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} L_{1j} &= -\beta_{1j}K_{2j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{2j} &= -\beta_{1j}K_{1j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{3j} &= -K_{4j}/\beta_{3j} \\ L_{4j} &= -K_{3j}/\beta_{3j} \\ & (j=1,...,N) \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در حالت دوم ثوابت L_{ij} بر حسب ثابت‌های K_{ij} به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} L_{1j} &= -\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}K_{2j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{2j} &= \sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}K_{1j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{3j} &= -K_{4j}/\beta_{3j} \\ L_{4j} &= -K_{3j}/\beta_{3j} \\ & (j=1,...,N) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

و در حالت سوم:

$$\begin{aligned} L_{1j} &= -\sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}K_{2j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{2j} &= \sqrt{\left|\beta_{1j}^2\right|}K_{1j}\Big/\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right) \\ L_{3j} &= K_{4j}\Big/\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|} \\ L_{4j} &= -K_{3j}\Big/\sqrt{\left|\beta_{3j}^2\right|} \\ & (j=1,...,N) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با توجه به آنکه سه حالت مختلف برای ریشه‌های معادله مشخصه هر کدام از لایه‌ها وجود دارد، لذا برای یک ورق N لایه در مجموع $۳N$ حالت مختلف برای ریشه‌های معادلات مشخصه همه لایه‌ها وجود دارد. برای به‌دست آوردن فرکانس-های طبیعی باید شرایط مرزی را بر روی صفحات بالا و پایین ورق و صفحات بین لایه‌ها برقرار کنیم. در حالت ارتعاش آزاد باید تنش‌های برشی τ_{xz} و τ_{yz} و تنش نرمال σ_{zz} بر روی صفحات بالا و پایین ورق مساوی صفر باشند:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{zz}\right)_N\Big|_{z=h} &= \left(\tau_{xz}\right)_N\Big|_{z=h} = \left(\tau_{yz}\right)_N\Big|_{z=h} = 0 \\ \left(\sigma_{zz}\right)_1\Big|_{z=0} &= \left(\tau_{xz}\right)_1\Big|_{z=0} = \left(\tau_{yz}\right)_1\Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

در معادلات (۲۳) اندیس‌های 1 و N به‌ترتیب لایه‌های پایینی و بالایی را مشخص می‌کنند و مقدار h نیز ضخامت کل ورق می‌باشد. با استفاده از میدان‌های جابه‌جایی تعریف شده صفرشدن تنش‌های فوق بر روی صفحات بالا و پایین ورق فقط منجر به چهار معادله مستقل زیر می شود:

$$\left[(1-\nu_N)f_N' + \nu_N\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)g_N\right]\Big|_{z=h}=0$$
$$\left[(1-\nu_1)f_1' + \nu_1\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)g_1\right]\Big|_{z=0}=0$$
$$\left[g_N' - f_N\right]\Big|_{z=h}=\left[g_1' - f_1\right]\Big|_{z=0}=0 \tag{۲۴}$$

علاوه بر برقراری شرایط مرزی بر روی صفحات بالا و پایین ورق، باید شرایط پیوستگی نیز در صفحات بین لایه‌ها برقرار باشد. شرایط پیوستگی تنش و جابه‌جایی در صفحه بین لایه‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\left[(\sigma_{zz})_r-(\sigma_{zz})_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$\left[(\tau_{xz})_r-(\tau_{xz})_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$\left[(\tau_{yz})_r-(\tau_{yz})_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$(r=2,\ldots,N) \tag{۲۵}$$

$$\left[u_r-u_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$\left[v_r-v_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$\left[w_r-w_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0 \qquad (r=2,\ldots,N) \tag{۲۶}$$

در رابطه‌های بالا اندیس‌های r و r-1 مربوط به لایه‌های r و r-1 می‌باشند. با استفاده از میدان‌های جابه‌جایی تعریف شده از معادلات (۲۵) و (۲۶) فقط چهار معادله مستقل برای هر مقدار $r=(2,\ldots,N)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2G_r}{1-2\nu_r}(1-\nu_r)f_r'+\\ \dfrac{2G_r\nu_r}{1-2\nu_r}\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)g_r-\\ \dfrac{2G_{r-1}}{1-2\nu_{r-1}}(1-\nu_{r-1})f_{r-1}'-\\ \dfrac{2G_{r-1}\nu_{r-1}}{1-2\nu_{r-1}}\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\right)g_{r-1}\end{array}\right]\Bigg|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$(r=2,\ldots,N) \tag{۲۷}$$

$$\left[\begin{array}{l}G_r\left(g_r'-f_r\right)-\\ G_{r-1}\left(g_{r-1}'-f_{r-1}\right)\end{array}\right]\Bigg|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$(r=2,\ldots,N) \tag{۲۸}$$

$$\left[g_r-g_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0$$
$$\left[f_r-f_{r-1}\right]\Big|_{z=\sum_{k=1}^{r-1}h_k}=0 \qquad (r=2,\ldots,N) \tag{۲۹}$$

معادلات (۲۴) و (۲۷-۲۹) ، در مجموع ۴N معادله مستقل بر حسب ۴N ثابت مستقل می‌باشند. برای وجود حل غیر بدیهی (حل غیر صفر) باید دترمینان ماتریس ضرایب مساوی صفر باشد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای خارج صفحه‌ای به‌دست می‌آیند.

۳- نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن توانایی و دقت روش فوق در به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی نتایج عددی ارائه شده است. در جدول ۱ برای یک ورق مربعی همگن و ایزوتروپیک تک‌لایه پنج پارامتر فرکانس خارج صفحه‌ای برای زوج صحیح (۱،۱) دو نسبت طول به ضخامت ۱۰ و ۱۰^۰/۵ محاسبه شده و با نتایج ارائه شده در مراجع [۱۵،۱۶] مقایسه شده‌اند. مقدار پارامتر فرکانس به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\omega}=\omega a^2\sqrt{\rho/E}\,/h \tag{۳۰}$$

در رابطه بالا E مدول الاستیسیته می‌باشد. سایر پارامترهای استفاده شده در رابطه بالا در بخش‌های قبلی معرفی شده‌اند. نتایج به‌دست آمده از روش فوق همخوانی خوبی با نتایج مراجع [۱۵،۱۶] به‌خصوص حل دقیق چن [۱۶] برای هر دو نسبت طول به ضخامت دارد.

در جدول ۲ برای یک ورق دولایه مربعی با نسبت طول به ضخامت ۱۰ و یک ورق دولایه مستطیلی با نسبت اضلاع دو به یک و نسبت طول کوچکتر به ضخامت ۱۰ فرکانس‌های مربوط به شش مد اول خارج صفحه‌ای ورق محاسبه شده و با نتایج بدست آمده از حل سه‌بعدی اجزاء محدود مقایسه شده‌اند.

جدول ۱ مقایسه پنج پارامتر فرکانس مدهای خارج صفحه‌ای زوج صحیح (۱،۱) یک ورق مربعی همگن و ایزوتروپیک

مد	۱	۲	۳	۴	۵
۱۰= طول به ضخامت					
روش ارائه شده	۵/۷۷۶۹۱	۴۶/۵۰۲۵	۲۰۱/۳۳۸	۳۵۷/۴۱۹	۳۹۹/۷۷۳
[۱۵]	۵/۷۷۶۹	۴۶/۵۰۳	۲۰۱/۳۴	۳۵۷/۴۲	۳۹۹/۷۷
[۱۶]	۵/۷۷۶۹	۴۶/۵۰۳	۲۰۱/۳۴	۳۵۷/۴۲	۳۹۹/۷۷
$۱۰^{۰/۵}$= طول به ضخامت					
روش ارائه شده	۴/۶۵۸۱۵	۱۴/۴۶۲۷	۲۴/۸۲۹۸	۳۳/۹۸۲۵	۴۴/۵۴۳۶
[۱۵]	۴/۶۵۸۲	۱۴/۴۶۳	۲۴/۸۳۰	۳۳/۹۸۲	۴۴/۵۴۴
[۱۶]	۴/۶۵۸۲	۱۴/۴۶۳	۲۴/۸۳۰	۳۳/۹۸۳	۴۴/۵۴۴

در این جدول برای هر کدام از حالت‌های ورق مربعی و یا مستطیلی، نتایج برای سه مقدار متفاوت نسبت ضخامت لایه بالا به ضخامت کل ورق ۰/۵، ۰/۳ و ۰/۱ ارائه شده‌اند. جنس لایه پایینی از آلومینیوم (Al) با مدول الاستیسیته ۷۰ گیگا پاسکال و چگالی ۲۷۰۲ کیلوگرم بر متر مکعب و جنس لایه بالایی از آلومینا (Al_2O_3) با مدول الاستیسیته ۳۸۰ گیگا پاسکال و چگالی ۳۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب می‌باشد. ضریب پواسون در کل ورق برابر ۰/۳ فرض شده است و واحد فرکانس‌های به‌دست آمده رادیان بر ثانیه می‌باشد. در جدول ۳ مشابه جدول ۲ برای ورق مربعی دولایه با نسبت طول به ضخامت ۵ و ورق دولایه مستطیلی با نسبت اضلاع دو به یک و نسبت ضلع کوچکتر به ضخامت ۵ فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه شده و با نتایج حاصل از حل سه‌بعدی اجزاء محدود مقایسه شده‌اند. با جایگزین کردن اکسید زیرکونیوم (ZrO_2) با مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگا پاسکال و چگالی ۵۷۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب به‌جای آلومینا در لایه بالا دوباره فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرده‌ایم که در جداول ۴ و ۵ ارائه شده‌اند.

همانگونه که مشاهده می‌شود مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش فوق با نتایج حل سه‌بعدی اجزاء محدود صحت و دقت روش فوق را تایید می‌کند. اختلاف نتایج به دست آمده از روش فوق با نتایج اجزاء محدود در تمامی موارد کمتر از ۰/۰۱ درصد می‌باشد. برای ورق‌های مربعی به دلیل تقارن ورق، فرکانس‌های به‌دست آمده برای زوج‌های (m, n) با فرکانس‌های به دست آمده برای زوج‌های (n, m) یکسان می‌باشند. همچنین فرکانس‌های مربوط به زوج‌های ($m,۲n$) برای ورق‌های مستطیلی و فرکانس‌های مربوط به زوج‌های (m, n) ورق مربعی متناظر یکسان می‌باشند که علت آن نسبت اضلاع دو به یک مستطیل می‌باشد. با مقایسه جداول با یکدیگر مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت ورق فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند.

با توجه به رابطه (۳۰) برای فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده (پارامتر فرکانس) ورق‌های تک‌لایه، نسبت الاستیسیته به چگالی (E/ρ) یک ماده معرف خواص ارتعاشی آن ماده می‌باشد که با افزایش آن مقادیر فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابند. مقدار E/ρ برای آلومینا بیشتر از اکسید زیرکونیوم می‌باشد. بنابراین همانگونه که مشاهده می‌شود باید انتظار داشته باشیم که با جایگزین کردن اکسید زیرکونیوم بجای آلومینا مقدار فرکانس طبیعی کاهش یابد. مقدار E/ρ برای آلومینیوم کمتر از اکسید زیرکونیوم می‌باشد. بنابراین همچنین باید انتظار داشته باشیم در جداول ۴ و ۵ با کاهش ضخامت لایه بالایی، فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد. اما همانگونه که مشاهده می‌شود اینگونه نیست و در بعضی حالت‌ها فرکانس طبیعی افزایش و در بعضی حالت‌ها کاهش می‌یابد. بنابراین در مورد ورق‌های چندلایه نمی‌توان همان نتیجه ورق‌های تک‌لایه را گرفت. در ورق‌های چندلایه علاوه بر مقدار E/ρ هر کدام از لایه‌ها، مقدار ضخامت لایه‌ها و جایگاه هر کدام از لایه‌ها در هندسه ورق نیز بر مقدار فرکانس طبیعی تأثیر دارد.

جدول ۲ شش فرکانس طبیعی اول مدهای خارج صفحه‌ای ورق‌های دولایه مربعی و مستطیلی ساخته شده از آلومینیوم و آلومینیوم اکسید با نسبت ضلع کوچکتر به ضخامت ۱۰

	ورق مربعی				ورق مستطیلی			
روش حل	مد	اول	دوم	سوم	مد	اول	دوم	سوم
حل ارائه شده	۱	۱۲۲/۲۹۴	۱۲۱/۰۹۵	۱۱۸/۴۶۶	۱	۷۷/۲۹۱۹	۷۶/۹۹۵۰	۷۵/۴۱۷۳
اجزاء محدود	(۱،۱)	۱۲۲/۲۹	۱۲۱/۰۹	۱۱۸/۴۷	(۱،۱)	۷۷/۲۹۲	۷۶/۹۹۵	۷۵/۴۱۸
حل ارائه شده	۲	۲۹۳/۴۸۱	۲۸۴/۶۹۹	۲۷۷/۲۰۴	۲	۱۲۲/۲۹۴	۱۲۱/۰۹۵	۱۱۸/۴۶۶
اجزاء محدود	(۲،۱)	۲۹۳/۴۸	۲۸۴/۷۰	۲۷۷/۲۱	(۲،۱)	۱۲۲/۲۹	۱۲۱/۱۰	۱۱۸/۴۷
حل ارائه شده	۳	۲۹۳/۴۸۱	۲۸۴/۶۹۹	۲۷۷/۲۰۴	۳	۱۹۵/۲۳۶	۱۹۱/۵۵۹	۱۸۷/۰۲۲
اجزاء محدود	(۱،۲)	۲۹۳/۴۸	۲۸۴/۷۰	۲۷۷/۲۱	(۳،۱)	۱۹۵/۲۴	۱۹۱/۵۶	۱۸۷/۰۲
حل ارائه شده	۴	۴۵۲/۹۵۱	۴۳۲/۲۲۳	۴۱۸/۹۹۹	۴	۲۵۱/۸۹۴	۲۴۵/۵۰۴	۲۳۹/۳۱۵
اجزاء محدود	(۲،۲)	۴۵۲/۹۶	۴۳۲/۲۳	۴۱۸/۰۰	(۱،۲)	۲۵۱/۹۲	۲۴۵/۵۳	۲۳۹/۳۴
حل ارائه شده	۵	۵۵۳/۹۳۹	۵۲۳/۶۶۳	۵۰۶/۲۳۰	۵	۲۹۳/۴۸۱	۲۸۴/۶۹۹	۲۷۷/۲۰۴
اجزاء محدود	(۳،۱)	۵۵۳/۹۸	۵۲۳/۷۰	۵۰۶/۲۶	(۲،۲)	۲۹۳/۵۰	۲۸۴/۷۲	۲۷۷/۲۲
حل ارائه شده	۶	۵۵۳/۹۳۹	۵۲۳/۶۶۳	۵۰۶/۲۳۰	۶	۳۶۱/۱۹۷	۳۴۷/۸۵۳	۳۳۸/۰۶۳
اجزاء محدود	(۱،۳)	۵۵۳/۹۸	۵۲۳/۷۰	۵۰۶/۲۶	(۳،۲)	۳۶۱/۲۲	۳۴۷/۸۷	۳۳۸/۰۸

جدول ۳ شش فرکانس طبیعی اول خارج صفحه‌ای ورق‌های دولایه مربعی و مستطیلی ساخته شده از آلومینیوم و آلومینا با نسبت ضلع کوچکتر به ضخامت ۵

	ورق مربعی				ورق مستطیلی			
روش حل	مد	اول	دوم	سوم	مد	اول	دوم	سوم
حل ارائه شده	۱	۲۲۶/۴۷۶	۲۱۶/۱۱۲	۲۰۹/۵۰۰	۱	۱۴۶/۷۴۰	۱۴۲/۳۵۰	۱۳۸/۶۰۲
اجزاء محدود	(۱،۱)	۲۲۶/۴۸	۲۱۶/۱۱	۲۰۹/۵۰	(۱،۱)	۱۴۶/۷۴	۱۴۲/۳۵	۱۳۸/۶۰
حل ارائه شده	۲	۵۰۵/۶۷۲	۴۶۱/۷۰۳	۴۴۰/۷۳۰	۲	۲۲۶/۴۷۶	۲۱۶/۱۱۲	۲۰۹/۵۰۰
اجزاء محدود	(۲،۱)	۵۰۵/۶۸	۴۶۱/۷۱	۴۴۰/۷۳	(۲،۱)	۲۲۶/۴۸	۲۱۶/۱۱	۲۰۹/۵۰
حل ارائه شده	۳	۵۰۵/۶۷۲	۴۶۱/۷۰۳	۴۴۰/۷۳۰	۳	۳۴۹/۳۵۵	۳۲۶/۲۴۶	۳۱۴/۱۲۸
اجزاء محدود	(۱،۲)	۵۰۵/۶۸	۴۶۱/۷۱	۴۴۰/۷۳	(۳،۱)	۳۴۹/۳۶	۳۲۶/۲۵	۳۱۴/۱۳
حل ارائه شده	۴	۷۴۳/۹۸۶	۶۶۱/۳۸۰	۶۲۳/۰۷۶	۴	۴۴۰/۵۸۸	۴۰۵/۸۳۷	۳۸۸/۷۹۹
اجزاء محدود	(۲،۲)	۷۴۳/۹۹	۶۶۱/۳۸	۶۲۳/۰۸	(۱،۲)	۴۴۰/۶۲	۴۰۵/۸۷	۳۸۸/۸۳
حل ارائه شده	۵	۸۸۷/۸۱۷	۷۷۹/۲۲۱	۷۲۸/۳۲۶	۵	۵۰۵/۶۷۲	۴۶۱/۷۰۳	۴۴۰/۷۳۰
اجزاء محدود	(۳،۱)	۸۸۷/۸۷	۷۷۹/۲۶	۷۲۸/۳۶	(۲،۲)	۵۰۵/۷۰	۴۶۱/۷۳	۴۴۰/۷۵
حل ارائه شده	۶	۸۸۷/۸۱۷	۷۷۹/۲۲۱	۷۲۸/۳۲۶	۶	۶۰۸/۸۲۲	۵۴۸/۹۵۸	۵۲۱/۰۳۹
اجزاء محدود	(۱،۳)	۸۸۷/۸۷	۷۷۹/۲۶	۷۲۸/۳۶	(۳،۲)	۶۰۸/۸۵	۵۴۸/۹۸	۵۲۱/۰۶

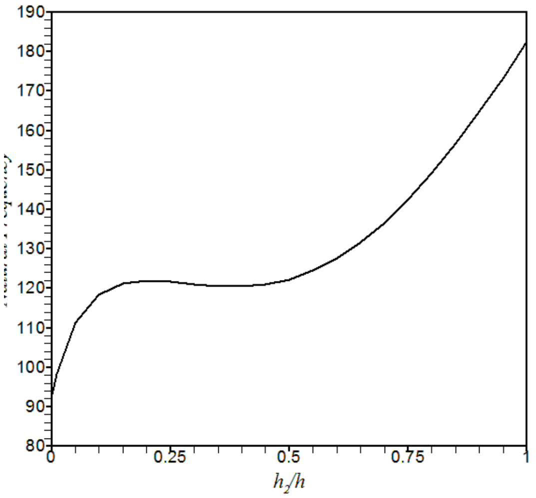
جدول ۴ شش فرکانس طبیعی اول مدهای خارج صفحه‌ای ورق‌های دولایه مربعی و مستطیلی ساخته شده از آلومینیوم و منیزیم اکسید با نسبت ضلع کوچکتر به ضخامت ۱۰

روش حل	ورق مربعی				ورق مستطیلی			
	مد	اول	دوم	سوم	مد	اول	دوم	سوم
حل ارائه شده	۱	۹۴/۲۶۵۴	۱۰۰/۲۲۱	۱۰۲/۸۰۸	۱	۵۹/۶۰۶۳	۶۳/۶۰۴۰	۶۵/۲۴۶۸
اجزاء محدود	(۱،۱)	۹۴/۲۶۵	۱۰۰/۲۲	۱۰۲/۸۱	(۱،۱)	۵۹/۶۰۷	۶۳/۶۰۴	۶۵/۲۴۷
حل ارائه شده	۲	۲۲۵/۷۰۷	۲۳۶/۹۶۵	۲۴۳/۰۶۳	۲	۹۴/۲۶۵۴	۱۰۰/۲۲۱	۱۰۲/۸۰۸
اجزاء محدود	(۲،۱)	۲۲۵/۷۱	۲۳۶/۹۷	۲۴۳/۰۷	(۲،۱)	۹۴/۲۶۶	۱۰۰/۲۲	۱۰۲/۸۱
حل ارائه شده	۳	۲۲۵/۷۰۷	۲۳۶/۹۶۵	۲۴۳/۰۶۳	۳	۱۵۰/۳۵۶	۱۵۸/۹۶۲	۱۶۳/۰۶۲
اجزاء محدود	(۱،۲)	۲۲۵/۷۱	۲۳۶/۹۷	۲۴۳/۰۷	(۳،۱)	۱۹۵/۲۴	۱۵۸/۹۶	۱۶۳/۰۶
حل ارائه شده	۴	۳۴۷/۴۵۳	۳۶۱/۰۹۶	۳۷۰/۳۳۸	۴	۱۹۳/۸۴۱	۲۰۴/۰۹۷	۲۰۹/۳۵۵
اجزاء محدود	(۲،۲)	۳۴۷/۴۶	۳۶۱/۱۰	۳۷۰/۳۴	(۱،۲)	۱۹۳/۸۶	۲۰۴/۱۲	۲۰۹/۳۷
حل ارائه شده	۵	۴۲۴/۱۵۱	۴۳۸/۲۵۴	۴۴۹/۴۱۹	۵	۲۲۵/۷۰۷	۲۳۶/۹۶۵	۲۴۳/۰۶۳
اجزاء محدود	(۳،۱)	۴۲۴/۱۸	۴۳۸/۲۹	۴۴۹/۴۵	(۲،۲)	۲۲۵/۷۲	۲۳۶/۹۸	۲۴۳/۰۸
حل ارائه شده	۶	۴۲۴/۱۵۱	۴۳۸/۲۵۴	۴۴۹/۴۱۹	۶	۲۷۷/۴۹۴	۲۹۰/۰۳۴	۲۹۷/۴۸۳
اجزاء محدود	(۱،۳)	۴۲۴/۱۸	۴۳۸/۲۹	۴۴۹/۴۵	(۳،۲)	۲۷۷/۵۱	۲۹۰/۰۵	۲۹۷/۵۰

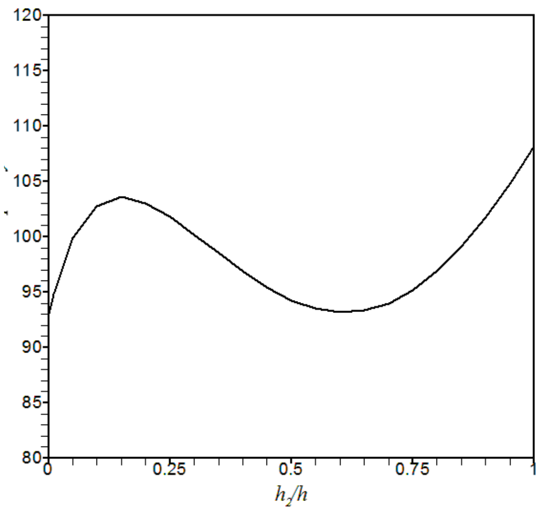
جدول ۵ شش فرکانس طبیعی اول مدهای خارج صفحه‌ای ورق‌های دولایه مربعی و مستطیلی ساخته شده از آلومینیوم و منیزیم اکسید با نسبت ضلع کوچکتر به ضخامت ۵

روش حل	ورق مربعی				ورق مستطیلی			
	مد	اول	دوم	سوم	مد	اول	دوم	سوم
حل ارائه شده	۱	۱۷۳/۷۲۶	۱۸۰/۵۴۸	۱۸۵/۱۶۹	۱	۱۱۲/۸۵۳	۱۱۸/۴۸۳	۱۲۱/۵۳۲
اجزاء محدود	(۱،۱)	۱۷۳/۷۳	۱۸۰/۵۵	۱۸۵/۱۷	(۱،۱)	۱۱۲/۸۵	۱۱۸/۴۸	۱۲۱/۵۳
حل ارائه شده	۲	۳۸۳/۶۴۴	۳۸۷/۸۸۸	۳۹۷/۴۴۱	۲	۱۷۳/۷۲۶	۱۸۰/۵۴۸	۱۸۵/۱۶۹
اجزاء محدود	(۲،۱)	۳۸۳/۶۵	۳۸۷/۸۹	۳۹۷/۴۵	(۲،۱)	۱۷۳/۷۳	۱۸۰/۵۵	۱۸۵/۱۷
حل ارائه شده	۳	۳۸۳/۶۴۴	۳۸۷/۸۸۸	۳۹۷/۴۴۱	۳	۲۶۶/۷۶۰	۲۷۳/۵۴۲	۲۸۰/۴۵۳
اجزاء محدود	(۱،۲)	۳۸۳/۶۵	۳۸۷/۸۹	۳۹۷/۴۵	(۳،۱)	۲۶۶/۷۶	۲۷۳/۵۵	۲۸۰/۴۶
حل ارائه شده	۴	۵۵۸/۷۳۹	۵۵۵/۳۶۳	۵۶۸/۲۶۱	۴	۳۳۵/۱۸۰	۳۴۰/۷۶۹	۳۴۹/۲۶۱
اجزاء محدود	(۲،۲)	۵۵۸/۷۴	۵۵۵/۳۷	۵۶۸/۲۶	(۱،۲)	۳۳۵/۲۱	۳۴۰/۷۹	۳۴۹/۲۹
حل ارائه شده	۵	۶۶۲/۸۰۲	۶۵۳/۲۷۰	۶۶۷/۷۲۸	۵	۳۸۳/۶۴۴	۳۸۷/۸۸۸	۳۹۷/۴۴۱
اجزاء محدود	(۳،۱)	۶۶۲/۸۴	۶۵۳/۳۱	۶۶۷/۷۶	(۲،۲)	۳۸۳/۶۶	۳۸۷/۹۱	۳۹۷/۴۶
حل ارائه شده	۶	۶۶۲/۸۰۲	۶۵۳/۲۷۰	۶۶۷/۷۲۸	۶	۴۵۹/۸۷۲	۴۶۱/۲۸۴	۴۷۲/۳۹۴
اجزاء محدود	(۱،۳)	۶۶۲/۸۴	۶۵۳/۳۱	۶۶۷/۷۶	(۳،۲)	۴۵۹/۸۹	۴۶۱/۳۰	۴۷۲/۴۱

در نمودارهای شکل‌های ۲ و ۳ تغییرات فرکانس طبیعی اول یک ورق مربعی دولایه با طول واحد و ضخامت ۰/۱ نسبت به h_2/h رسم شده است که h_2 ضخامت لایه بالایی می باشد. در هر دو نمودار ، جنس لایه‌های پایینی از آلومینیوم و جنس لایه‌های بالایی به‌ترتیب از آلومینا و اکسید زیرکونیوم فرض شده‌اند.



شکل ۲ تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی اول در برابر ضخامت نسبی لایه آلومینیوم اکسید



شکل ۳ تغییرات پارامتر فرکانس طبیعی اول در برابر ضخامت نسبی لایه منیزیم اکسید

هر کدام از نمودارهای بالا از دو محدوده صعودی و یک محدوده نزولی تشکیل شده‌اند. در نمودار شکل ۲ برخلاف نمودار شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی در محدوده نزولی نسبت به تغییرات فرکانس در کل محدوده تغییرات h_2/h بسیار کوچک می‌باشد که دلیل آن را می‌توان به مقایسه مقدار E/ρ برای آلومینا و اکسید زیرکونیوم نسبت داد. بنابراین حتی می‌توان انتظار داشت با تغییرات مقدار E/ρ لایه بالایی به یک روند کاملاً صعودی یا نزولی در نمودارهای بالا دست یافت.

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به ارائه یک حل دقیق فرم بسته برای ارتعاشات آزاد خارج صفحه‌ای ورق‌های همگن و ایزوتروپیک چندلایه مستطیلی با پایه‌های مفصل ساده بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی خطی پرداخته شد. برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از تعدادی میدان جابه‌جایی برای بیان مولفه‌های جابه‌جایی‌های ورق استفاده گردید. میدان‌های جابه‌جایی فوق باعث کاهش سه معادله الاستیسیته حرکت به دو معادله مستقل دیفرانسیلی ساده کوپل شده گردیدند که این امر موجب کاهش سه معادله مستقل به دو معادله مستقل در به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در پایان برای بررسی صحت و دقت روش استفاده شده نتایج عددی ارائه شدند و همچنین تأثیر مقدار ضخامت لایه‌های ورق‌های دولایه بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش فوق با نتایج حل سه‌بعدی اجزاء محدود صحت و دقت روش فوق را تایید می‌کند. اختلاف نتایج به دست آمده از روش فوق با نتایج اجزاء محدود در تمامی موارد کمتر از ۰/۰۱ درصد می‌باشد.

۵- مراجع

[1] Srinivas, S., Joga Rao, C.V., and Rao, A.K.; "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates" Journal of Sound and Vibration; Vol.12, No.2, 1970, pp 187–199.

[2] Srinivas, S., Joga Rao, C.V., and Rao, A.K.; "Some results from an exact analysis of thick laminated in vibration and buckling" Journal of Applied Mechanics; Vol.37, No.3, 1970, pp 868–870.

[3] Levinson, M.; "Free vibrations of a simply-supported, rectangular plate: an exact elasticity solution" Journal of Sound and Vibration; Vol.98, No.2, 1985, pp 289–298.

[4] Frederiksen, P.S., 1995. "Single-layer Plate theories applied to the flexural vibration of completely free thick laminates" Journal of Sound and Vibration; Vol.186, No.5, 1995 pp 473–759.

[5] Ye, J.Q.; "a Three-dimensional free vibration analysis of cross-ply laminated rectangular plates with clamped edges" Journal of Applied Mechanics; Vol.140, No., 1997, pp 383–392.

[6] Batra, R.C., Aimmanee, S.; "Missing frequencies in previous exact solution of free vibration of simply supported rectangular plates" Journal of Sound and Vibration; Vol.265, No., 2003, pp 887–896.

[7] Aimmanee, S., Batra, R.C.; "Analytical solution for vibration of an incompressible isotropic linear elastic rectangular plate, and frequencies missed in previous solutions" Journal of Sound and Vibration; Vol.302, No.3, 2007, pp 613–620.

[8] Cheung, Y.K., Lo, S.H., and Au, F.T.K., 2005. "Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates with mixed boundary conditions" Journal of Applied Mechanics; Vol.72, No.2, 2005, pp 227–237.

[9] Nagino, H., Mikami, T., and Mizusawa, T.; "Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method" Journal of Sound and Vibration; Vol.317, No(1-2), 2008, pp 329–353.

[10] Messina, A.; "Influence of the edge-boundary conditions on three-dimensional free vibrations of isotropic and cross-ply multilayered rectangular plates" Composite Structures; Vol.93, No.8, 2011, pp 2135–2151.

[11] Srinivas, S., Joga Rao, C.V.; "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates" International Journal of Solids and Structures; Vol.6, No., 1970, pp 1463–1481.

[12] Wittrick, W.H.; "Analytical, three dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory" International Journal of Solids and Structures; Vol.23, No.4, 1987, pp 441–464.

[13] Pan, E., 1992. "Vibration of a transversely isotropic, simply-supported and layered rectangular plate" Journal of Elasticity; Vol.27, No.2, 1992, pp 167-181.

[14] Ding, H.J., Chen, W.Q., Xu, R.Q.; "On the bending, vibration and stability of laminated rectangular plates with transversely isotropic layers" Applied Mathematics and Mechanics; Vol.22, No.1, 2001, pp.

[15] Vel, S.S., Batra, R.C.; "Three-dimensional exact solution for vibration of functionally graded rectangular plates" Journal of Sound and Vibration; Vol.272, No., 2004, pp 703–730.

[16] Lu, C.F., Lim, C.W., Kou, K.P.; "Exact solutions for 3D free vibration of functionally graded thick plates on elastic foundations" Composite Structures, Vol.16, No., 2009, pp 576–584.