



## روش شبکه‌بولتزمان حرارتی مرتبه دوم در انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌های غیرمربعی

محسن نظری<sup>1\*</sup>، محمدحسن کیهانی<sup>2</sup> و حسنی شکری<sup>3</sup>

<sup>1</sup> استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

<sup>2</sup> استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

<sup>3</sup> دانشجوی دکترا، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

تاریخ دریافت: 1392/02/12؛ تاریخ بازنگری: 1392/09/08؛ تاریخ پذیرش: 1393/09/19

### چکیده

در این مقاله، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد دوبعدی در محفظه‌های غیرمربعی بسته، به شکل‌های مثلث، دوزنقه، ربع دایره و نیم‌دایره با استفاده از روش بولتزمان شبکه‌ای مرتبه دوم حرارتی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. در تمام شبیه‌سازی‌ها سیال عامل هوا، با عدد پرانتل 0/71 در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد هنگامی که الگوی جریان دو سلولی است شاهد یک نقطه اکسترمم در روند تغییرات عدد ناسلت محلی در محل جدایش دو سلول چرخشی هستیم. در الگوی جریان تک سلولی، بسته به چگونگی شرایط مرزی، روند تغییرات عدد ناسلت محلی تغییر خواهد کرد و در برخی از حالات شاهد نقاط کمینه برای عدد ناسلت محلی هستیم. نتایج بدست آمده از روش بولتزمان شبکه‌ای، با نتایج و داده‌های موجود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است و نتایج نشان می‌دهند که روش بولتزمان شبکه‌ای حرارتی مرتبه دوم به خوبی قادر به شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌هایی با دیواره مایل و منحنی است. بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در چنین هندسه‌هایی و به ویژه با روش بولتزمان شبکه‌ای مرتبه دوم برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است و کاربرد فراوانی در خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی دارد.

**کلمات کلیدی:** انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد؛ محفظه غیر مربعی؛ روش بولتزمان شبکه‌ای؛ عدد ناسلت موضعی.

## Natural convection in non-square cavities using second order lattice Boltzmann method

M. Nazari<sup>1,\*</sup>, M.H. Kayhani<sup>2</sup> and H. Shokri<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., University of Shahrood, Shahrood, Iran

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., University of Shahrood, Shahrood, Iran

<sup>3</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., University of Shahrood, Shahrood, Iran

### Abstract

In this paper, two dimensional natural convection heat transfer in non-square cavities such as Triangle, Trapezoid, Quadrant-Circle and Semi-Circular are investigated via Lattice Boltzmann method. The Prandtl number is taken as 0.71 that corresponds to that of air. The results show that, when the flow pattern consists of two rotating cell, there is a extremum point in the variations of the local Nusselt number. In the case of single cell pattern, according to the boundary conditions, the variations of the local Nusselt number are changed. The obtained results of the lattice Boltzmann method are validated with those presented in the literature and show that the lattice Boltzmann method can simulate the heat transfer and flow pattern in the complex cavities. Analysis of heat transfer in such geometries especially by using the second order boundary conditions on the curved surfaces is the main novelty of the present work and it has many applications in the electronic cooling.

**Keywords:** Natural convection heat transfer; Non-square cavity; Lattice Boltzmann method; Nusselt number.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: 02332392204، فکس: 02733300258

آدرس پست الکترونیک: mnazari@shahroodut.ac.ir

## 1- مقدمه

پدیده انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد از دیرباز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. بیشترین حجم مطالعات در این زمینه مربوط به محفظه‌های به شکل مربع و یا مستطیل می‌باشد [1 و 2]. این نوع محفظه‌ها از هندسه‌ای به مراتب ساده‌تر از آنچه عملاً در طبیعت و صنعت به چشم می‌خورد برخوردارند. در واقع کاربرد انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در هندسه‌های پیچیده‌تری است. از جمله می‌توان به کاربرد در مهندسی خورشیدی، ساختمان‌سازی و سیستم‌های عایق حرارتی، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، سیستم خشک کردن، مطالعات ژئوفیزیک و غیره پرداخت. بنابراین در دهه‌های مطالعه پدیده جابه‌جایی آزاد در هندسه‌های غیر مربعی مورد توجه قرار گرفت. محفظه به شکل مثلث یکی از هندسه‌هایی است که توجه زیادی را به خود جلب کرده است. آسان<sup>1</sup> و ناملی<sup>2</sup> [3] به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در سقف یک خانه که در حالت دوبعدی به صورت مثلث متساوی‌الساقین است، در شرایط یک روز تابستانی پرداختند. از سوی دیگر، کواکا<sup>3</sup> و همکارانش [4] انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در سقف یک خانه را در شرایط اقلیمی سرد به روش تفاضل محدود و به صورت دو بعدی مورد بررسی قرار دادند. همچنین باساک<sup>4</sup> و همکارانش [5] به بررسی پدیده انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه با نسبت ارتفاع به پهنای یک، به روش المان محدود پرداختند. نتایج آنها نشان داد که تاثیر عدد رایلی بر روی روند انتقال حرارت در محفظه بسیار بیشتر از عدد پرانتل است. از جمله مطالعات دیگر انجام شده در زمینه انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه مثلثی، می‌توان به مراجع [6-8] اشاره کرد. همچنین برخی مطالعات دهه اخیر، محفظه‌های به شکل دوزنقه را مورد بررسی قرار داده‌اند. ناتاراجان<sup>5</sup> و همکارانش [9] به بررسی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌ای به شکل دوزنقه به روش المان محدود پرداختند. علاوه بر این، باساک و همکارانش [10] محفظه

دوزنقه‌ای قبل را برای زوایای  $\varphi$  برابر صفر، 30 و 45 درجه با روش المان محدود و براساس مفهوم خطوط گرما شبیه‌سازی کردند. از دیگر هندسه‌های مورد توجه می‌توان به محفظه‌های دایره دایروی اشاره کرد. به عنوان نمونه، چن<sup>6</sup> و چنگ<sup>7</sup> [11 و 12] به بررسی جریان در محفظه‌ای به شکل کمائی از دایره به روش حجم محدود پرداختند. آنها همچنین نتایج به دست آمده از روش عددی خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. در تمام مطالعاتی که تاکنون بیان شد از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود برای حل معادلات ناویراستوکس و شبیه‌سازی جریان در این محفظه‌ها استفاده شده است. در سالهای اخیر روش بولتزن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی و قابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است. با وجود مزایای روش بولتزن شبکه‌ای و کاربرد فراوان آن، تاکنون کمتر در شبیه‌سازی جریان و خصوصاً انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی استفاده شده است. منیر<sup>8</sup> و همکارانش [13] به شبیه‌سازی جریان پایا و تراکم‌ناپذیر در محفظه‌ی به شکل مثلث با درب متحرک به کمک روش بولتزن شبکه‌ای پرداختند. هر چند در کار آنها اشاره‌ای به چگونگی مواجهه با مرز مایل در روش بولتزن شبکه‌ای نشد اما نتایج آنها برای اعداد رینولدز 100 تا 2500 در محفظه‌های به شکل مثلث قائم‌الزاویه، تطابق مناسب نتایج روش بولتزن شبکه‌ای برای این نوع محفظه با نتایج حاصل از سایر روش‌های مرسوم را نشان می‌دهد. همچنین ژانگ<sup>9</sup> و همکارانش [14] جریان در داخل محفظه-ای به شکل دوزنقه که دیواره‌ی بالایی آن با سرعت ثابت حرکت می‌کرد را به روش بولتزن شبکه‌ای شبیه‌سازی کردند. مهمترین قسمت شبیه‌سازی جریان در محفظه‌های

<sup>1</sup> Asan<sup>2</sup> Namli<sup>3</sup> Koca<sup>4</sup> Basak<sup>5</sup> Natarajan<sup>6</sup> Chen<sup>7</sup> Cheng<sup>8</sup> Munir<sup>9</sup> Zhang

مدل بولتزمن شبکه‌ای از روش گاز شبکه‌ای منشا گرفته است. روش گاز شبکه‌ای ارائه دهنده مدلی از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه منظم است. معادله بولتزمن شبکه‌ای اولیه در سال 1988 توسط مک نامارا<sup>4</sup> و زانتی<sup>5</sup> [20] برای پاسخگویی به یکی از مشکلات اصلی روش گاز شبکه‌ای ایجاد شد و آن مشکل اغتشاشات آماری بود. اندکی بعد آشکار شد که بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند اغلب مشکلات دیگر روش گاز شبکه‌ای را نیز به طور طبیعی برطرف کند. بنابراین روش بولتزمن شبکه‌ای به سرعت به یک موضوع مستقل تحقیقاتی تبدیل شد و معایب باقیمانده روش گاز شبکه‌ای یک به یک برطرف گردید. در این روش همانند روش های گاز شبکه‌ای، ذرات مجازی در روی یک شبکه منظم برخورد داده می‌شوند. ولی این بار به جای مشخص نمودن آرایش ذرات مجازی، احتمال حضور این ذرات در مسیرهای مختلف معرفی و استفاده می‌شود، یعنی این سوال مطرح می‌شود که احتمال حضور یک ذره اطراف موقعیت  $x$  در زمان  $t$  چقدر است.  $f_{\alpha}(\vec{x}, t)$  چگالی احتمال و یا بطور ساده‌تر تابع توزیع نامیده می‌شود. مدل‌های بولتزمن شبکه‌ای برای تحلیل جریان و انتقال حرارت را می‌توان به دو دسته جداگانه تقسیم نمود، در دسته اول که به مدل چند سرعت معروف است، تابع توزیع تعادلی چگالی با یک ترم اضافی سرعت برای به دست آوردن معادله انرژی و توزیع تعادلی دما استفاده می‌شود [21 و 22]. دسته دوم شامل مدل‌های چندگانه توزیع تعادلی می‌باشد که در آن علاوه بر تابع توزیع تعادلی چگالی، تابع توزیع دیگری برای دما نیز ارائه شده است [23 و 24]. در این مطالعه ما از مدل دوم استفاده خواهیم نمود، این مدل محدودیت‌های مدل اول را ندارد و پایداری حل را نیز بهبود می‌بخشد. اگر تابع توزیع دما را با  $g$  نشان دهیم،  $g_{\alpha}(\vec{x}, t)$  نشان دهنده‌ی احتمال انرژی ذره در مکان  $\vec{x}$  و زمان  $t$  در جهت  $\alpha$  است.

## 2-1- معادله شبکه بولتزمن برای تحلیل جریان

با استفاده از معادله بولتزمن، تغییرات تابع توزیع احتمال  $f$  به صورت زیر قابل بیان است [25]:

غیرمربعی اعمال شرایط مرزی سرعت و دما بر روی مرزهای مایل و منحنی است. فیلیپوا و هانل<sup>1</sup> [15] با استفاده از برونمایی خطی مدلی را برای اعمال شرایط مرزی سرعت ارائه کردند. می<sup>2</sup> و همکارانش [16-18] این مدل را بهبود بخشیده و محدودیت‌ها آن را نیز برطرف کردند. برای اعمال شرط مرزی دما بر روی مرزهای منحنی، یان و زو<sup>3</sup> [19] برای اولین بار مدلی ارائه کردند که دارای دقت مرتبه دوم است و تطابق خوبی با نتایج عددی و آزمایشگاهی موجود دارد.

در این مطالعه، با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای و با کمک مدل بهبود یافته می و همکارانش [17] برای اعمال شرط مرزی سرعت و مدل یان و زو [19] برای اعمال شرط مرزی دما به شبیه‌سازی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی و برای سیال عامل هوا با عدد پراتل  $0.71$  می‌پردازیم و به این ترتیب توانایی روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی هر نوع هندسه‌ای اثبات خواهد شد. نوآوری مقاله حاضر استفاده از مرزهای منحنی در هندسه‌های مختلف و مدل‌سازی جابه‌جایی آزاد مساله با روش شبکه بولتزمن مرتبه دوم می‌باشد. بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در قسمت 2، معادلات حاکم بر مسئله، به روش بولتزمن شبکه‌ای، به تفصیل گزارش شده و توابع توزیع احتمال برای حل جریان و انتقال حرارت بیان شده است. در قسمت 3، ابتدا نتایج بدست‌آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای، با نتایج منتشرشده در این زمینه، مقایسه شده و سپس به طور کامل به تحلیل جریان و انتقال حرارت در محفظه‌های غیرمربعی مختلف پرداخته شده است. هر چند که مطالعات فراوانی در مورد انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه بسته انجام شده است، اما بررسی این پدیده در هندسه‌های غیر مربعی مختلف و به روش بولتزمن شبکه‌ای برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## 2-2 مدل بولتزمن شبکه‌ای

<sup>1</sup> Fillipova and Hannel

<sup>2</sup> Mei

<sup>3</sup> Yan and Zu

<sup>8</sup> McNamara

<sup>9</sup> Zanetti

وارد بر سیال است که برای اعمال آن، ترم زیر به سمت راست معادله (1) اضافه خواهد شد [26]:

$$F_\alpha = \omega_\alpha \vec{F} \cdot \frac{\vec{e}_\alpha}{c_s^2} \quad (5)$$

که با تقریب بوزینسک داریم:

$$\vec{F} = \rho \vec{g}_r \beta \Delta T \quad (6)$$

$\vec{g}_r, \beta$  و  $\Delta T$  به ترتیب نشان دهنده ضریب انبساط حجمی، شتاب جاذبه و اختلاف دما می‌باشد.

و در نهایت چگالی و سرعت ماکروسکوپی بوسیله معادلات زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^9 f_\alpha \quad (7)$$

$$\vec{\rho u} = \sum_{\alpha=1}^9 \vec{e}_\alpha f_\alpha \quad (8)$$

با استفاده از آنالیز چاپمن-انسکوک می‌توان نشان داد که معادلات ناویر-استوکس از معادلات بولتزمن شبکه‌ای قابل استخراج هستند [25]:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (10)$$

قابل ذکر است که معادلات بالا بدون در نظر گرفتن نیروی خارجیت. ویسکوزیته شبکه به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\nu = (\tau_v - 0.5)c^2 / 3 \quad (11)$$

با توجه به اینکه ویسکوزیته منفی از نظر فیزیکی بی-معناست، بنابراین همواره زمان آرامش سرعت، باید از 0/5 بیشتر باشد. در این پژوهش، تمام شبیه‌سازی تمام شبیه-سازی ها زمان آرامش سرعت برابر 0/56 در نظر گرفته شده است.

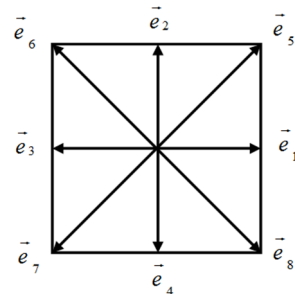
## 2-2- معادله شبکه بولتزمن برای تحلیل دما

تغییرات تابع توزیع دما با استفاده از معادله بولتزمن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - g_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_c} [g_\alpha(\vec{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)]. \quad (12)$$

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)]. \quad (1)$$

که در این معادله  $f_\alpha^{eq}$  نشان دهنده تابع توزیع تعادلی و  $\tau_v$  زمان آرامش و  $\vec{e}_\alpha$  بردار سرعت ذرات در جهت  $\alpha$  است. در مدل شبکه بولتزمن دو بعدی و نه سرعتی (شکل 1) داریم:



شکل 1- مجموعه سرعت های مجزا در مدل 9سرعتی دو بعدی  $D_2Q_9$

$$f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = \omega_\alpha \rho [1 + \frac{3}{c^2} (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u}) + \frac{9}{2c^2} (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2} u^2]. \quad (2)$$

$$\omega_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha=9 \\ ([\cos((\alpha-1)\pi/2), (\sin((\alpha-1)\pi/2)]c & \alpha=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}([\cos((\alpha-5)\pi/2+\pi/4), (\sin((\alpha-5)\pi/2+\pi/4)]c & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (3)$$

در معادله بالا  $C = \frac{\delta x}{\delta t}$  است که در آن  $\delta t$  و  $\delta x$  به ترتیب نشان دهنده گام مکانی و زمانی شبکه هستند. همچنین  $\omega_\alpha$  تابع وزنی است که در مدل  $D_2Q_9$  برابر است با:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha=9 \\ 1/9 & \alpha=1,2,3,4 \\ 1/36 & \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (4)$$

معادلاتی که تاکنون اشاره شد بدون در نظر گرفتن نیروی خارجی وارد برسیال است، در صورت وجود، این ترم باید در معادلات منظور شود. در بررسی انتقال حرارت جابه-جایی آزاد درون سیال، نیروی شناوری تنها نیروی خارجی

در این معادلات  $\tilde{f}_\alpha$  و  $\tilde{g}_\alpha$  به ترتیب نشان دهنده توابع توزیع چگالی و دما پس از برخورد هستند. لازم به ذکر است در مسائل انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی ترم نیرو (معادله 6) به سمت راست معادله 17 اضافه خواهد شد.

مرحله جاری شدن: این مرحله بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاور حرکت می‌کنند.

$$f_\alpha(\bar{x} + \bar{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = \tilde{f}_\alpha(\bar{x}, t) \quad (19)$$

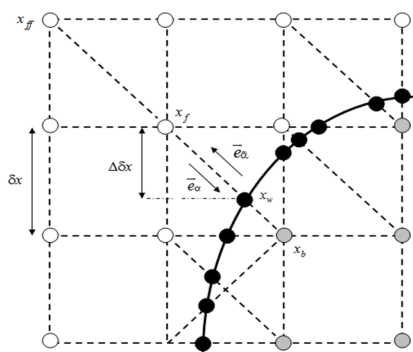
$$g_\alpha(\bar{x} + \bar{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = \tilde{g}_\alpha(\bar{x}, t) \quad (20)$$

### 2-3- اعمال شرایط مرزی

شکل 2 نشان دهنده دیوار مایلی است که ناحیه‌ی جامد و سیال را از هم جدا می‌کند. دایره‌های سیاه نشان دهنده محل برخورد مرز با شبکه بندی ( $x_w$ ), دایره‌های توخالی گره‌های سیال ( $x_f$ ) و دایره‌های خاکستری نشان دهنده گره‌های جامد ( $x_b$ ) می‌باشند. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، برای اعمال مرحله جاری شدن روی گره  $x_f$ ، به  $\tilde{f}_\alpha(x_b, t)$  و  $\tilde{g}_\alpha(x_b, t)$  نیاز است.

اگر  $\Delta$  کسری از طول بین گره‌های سیال و جامد باشد که در داخل سیال واقع شده است، در این صورت داریم:

$$\Delta = \frac{|x_f - x_w|}{|x_f - x_b|} \quad (21)$$



شکل 2- نمایش دیوار مایل روی شبکه بندی

در معادله بالا  $\tau_c$  زمان آرامش بی‌بعد انرژی است. همچنین  $g_\alpha^{eq}$  تابع توزیع تعادلی دماست و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_\alpha^{eq}(\bar{x}, t) = \omega_\alpha T [1 + \frac{3}{c^2} (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u})]. \quad (13)$$

و در نهایت مقدار ماکروسکوپی دما به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$T = \sum_{\alpha=1}^9 g_\alpha \quad (14)$$

همچنین معادله ماکروسکوپی دما با استفاده از بسط چاپمن انسکوگ به صورت زیر استخراج خواهد شد [23]:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{T}) = \gamma \nabla^2 \bar{T} \quad (15)$$

به این ترتیب ضریب پخش شبکه به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\alpha = (\tau_c - 0.5)c^2 / 3 \quad (16)$$

مشابه زمان آرامش سرعت، با توجه به اینکه ضریب پخش منفی از نظر فیزیکی بی‌معناست، بنابراین همواره زمان آرامش انرژی نیز، باید از 0/5 بیشتر باشد. در این پژوهش برای این پارامتر مقدار 0/58 در نظر گرفته شده است.

در روش بولتزمن شبکه‌ای معادلات (1) و (2) در دو مرحله اجرا می‌شوند: مرحله برخورد<sup>1</sup> و مرحله جاری شدن<sup>2</sup>. مرحله برخورد: مرحله برخورد از یک زمان بی‌نهایت کوچک قبل از برخورد شروع شده و تا یک زمان بی‌نهایت کوچک پس از برخورد را در بر می‌گیرد و می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\tilde{f}_\alpha(\bar{x}, t) = f_\alpha(\bar{x}, t) - \frac{1}{\tau_v} [f_\alpha(\bar{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (17)$$

$$\tilde{g}_\alpha(\bar{x}, t) = g_\alpha(\bar{x}, t) - \frac{1}{\tau_c} [g_\alpha(\bar{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\bar{x}, t)] \quad (18)$$

<sup>1</sup> Collision.

<sup>2</sup> Streaming

در معادلات بالا اگر  $\Delta \geq 0.75$  خواهیم داشت:

$$g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_b, t) = g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_f, t),$$

$$\vec{u}_b^* = [\vec{u}_w + (\Delta - 1)\vec{u}_f] / \Delta \quad (27)$$

$$T_b^* = [T_w + (\Delta - 1)T_f] / \Delta$$

و برای  $\Delta < 0.75$  داریم:

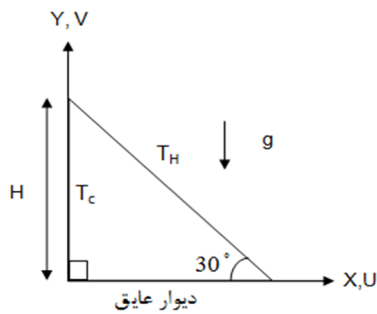
$$g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_b, t) = \Delta g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_f, t) + (1 - \Delta)g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_{ff}, t),$$

$$\vec{u}_b^* = [\vec{u}_w + (\Delta - 1)\vec{u}_f] + (1 - \Delta)[2\vec{u}_w + (\Delta - 1)\vec{u}_{ff}] / (1 + \Delta),$$

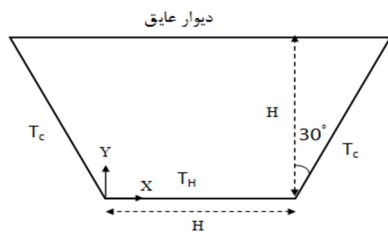
$$T_b^* = [T_w + (\Delta - 1)T_f] + (1 - \Delta)[2T_w + (\Delta - 1)T_{ff}] / (1 + \Delta).$$

### 3- تحلیل عددی

در این مقاله جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه‌های بسته نشان داده شده در شکل 3 و برای سیال عامل هوا با عدد پرانتل 0/71 بررسی خواهد شد. تحلیل انتقال حرارت در هندسه‌های نشان داده شده اهمیت زیادی در خنک‌کاری سیستم‌های الکترونیکی و یا خورشیدی دارد.



شکل 3- الف - هندسه محفظه به شکل مثلث



شکل 3- ب - هندسه محفظه به شکل دوزنقه

برای تعیین تابع پس از برخورد  $\vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_b, t)$  می‌توان از اطلاعات گره‌های سیال مجاور مرز استفاده کرد و خواهیم داشت [17]:

$$\vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_b, t) = \vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_f, t) - \chi[\vec{f}_{\alpha}(\vec{x}_f, t) - f_{\alpha}^{(eq)}(\vec{x}_f, t)] + \omega_{\alpha} \rho(x_f, t) \frac{3}{c^2} e_{\alpha} \cdot [\chi(\vec{u}_{bf} - \vec{u}_f) - 2\vec{u}_w]. \quad (22)$$

که در آن فاکتور وزنی است که به  $\Delta$  بستگی دارد.  $\vec{u}_f = \vec{u}(x_f, t)$ ,  $\vec{x}_{ff} = \vec{x}_f + \vec{e}_{\alpha} \delta t$  و  $\vec{e}_{\alpha} = -\vec{e}_{\alpha}$  سیال مجاور مرز و  $\vec{u}_w = \vec{u}(x_w, t)$  سرعت دیوار مرزی و  $\vec{u}_{bf}$  معرف یک سرعت مجازی است. می و همکارانش [17] برای اعمال شرایط مرزی سرعت با دقت مرتبه دوم روابط زیر را برای محاسبه فاکتور وزنی و سرعت مجازی پیشنهاد کردند.

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_{ff} = (\vec{x}_{ff}, t),$$

$$\chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 2)}, \text{ if } 0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \quad (23)$$

$$\vec{u}_{bf} = \frac{1}{2\Delta}(2\Delta - 3)\vec{u}_f + \frac{3}{2\Delta}\vec{u}_w,$$

$$\chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 1/2)}, \text{ if } \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 1 \quad (24)$$

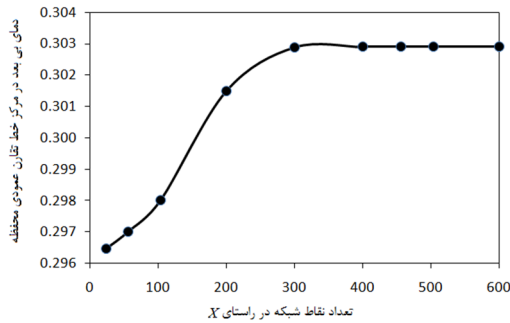
برای اعمال شرایط مرزی دما با دقت مرتبه دوم در روش بولتزمن شبکه‌ای، یان و زو [19] روابطی را ارائه دادند که در ادامه شرح داده خواهد شد.

اگر  $g_{\alpha}(\vec{x}_b, t)$  را به دو بخش تعادلی و غیر تعادلی تقسیم کنیم، تابع پس از برخورد به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\vec{g}_{\alpha}(\vec{x}_b, t) = g_{\alpha}^{(eq)}(\vec{x}_b, t) + (1 - \frac{1}{\tau_c})g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}_b, t) \quad (25)$$

که در آن:

$$g_{\alpha}^{(eq)}(\vec{x}, t) = \omega_{\alpha} T [1 + \frac{3}{c^2}(\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{u})]. \quad (26)$$

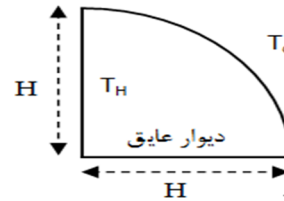


شکل 4- مطالعه شبکه برای شکل 3-د

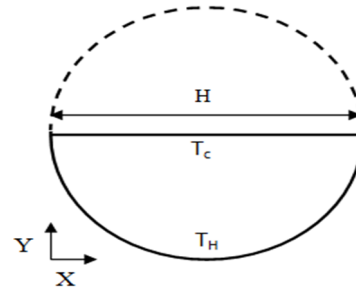
هر هندسه همین پارامتر، یعنی دما، در برابر تعداد تکرار رسم خواهد شد و محاسبات تا رسیدن به یک عدد ثابت ادامه خواهد یافت. در مساله حاضر بزرگی سرعت در شبکه بولتزمن از مرتبه  $(g\beta\Delta TM)^{0.5}$  است. که  $M$  تعداد نقاط شبکه می‌باشد. بنابراین پارامترهای  $\alpha$  و  $\nu$ ، به گونه‌ای انتخاب می‌شود که عدد ماخ تا حد امکان کوچک باشد، کوچک بودن عدد ماخ به معنای کم شدن خطای تراکم‌پذیری است. در این مطالعه عدد ماخ کمتر از  $0/1$  در نظر گرفته شده که به این ترتیب زمان‌های آرامش نیز در محدوده مجاز قرار خواهند گرفت.

**4 - نتایج**

در این بخش ابتدا به مقایسه نتایج حاصل از این مطالعه یعنی روش شبکه بولتزمن با نتایج منتشر شده در این زمینه خواهیم پرداخت. باساک و همکارانش [5] به شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم-الزاویه با نسبت ارتفاع به قاعده برابر یک، به کمک روش المان محدود پرداختند. شکل 5 نشان‌دهنده مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در شرایطی مشابه شکل 3-الف یعنی در حالتی که دیوار قائم در دمای ثابت سرد و دیوار مایل گرم می‌شود، بین مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط باساک و همکارانش [5] است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود انطباق خوبی بین نتایج حاصل از روش بولتزمن شبکه‌ای و مرجع [5] وجود دارد. این بدان معناست که روش بولتزمن شبکه‌ای به خوبی قادر به شبیه‌سازی مرز-های مایل می‌باشد.



شکل 3-ج - هندسه محفظه به شکل ربع دایره



شکل 3-د - هندسه محفظه به شکل نیم دایره

پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (29)$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}; \quad x^* = \frac{X}{H}; \quad y^* = \frac{Y}{H}$$

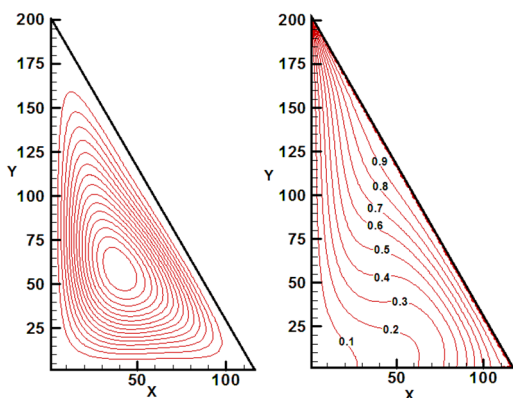
که در آن  $Ra$  عدد رابلی،  $Pr$  عدد پرانتل و  $\theta$  دمای بی‌بعد است. عدد ناسلت محلی در هر نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu_{Local} = \frac{\partial\theta}{\partial n} \quad (30)$$

که  $n$  نشان‌دهنده جهت عمود بر سطح مورد نظر است.

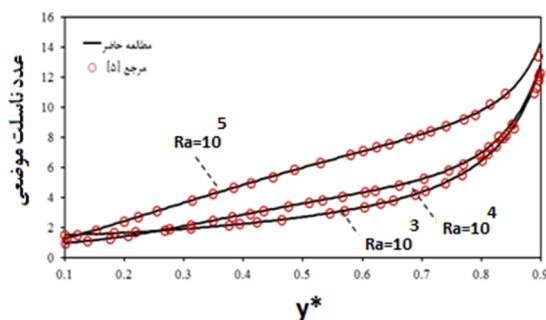
تعداد نقاط شبکه برای شبیه‌سازی هر هندسه در شکل نشان‌دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما نمایش داده خواهد شد. برای اطمینان از استقلال نتایج از شبکه انتخاب شده، دما در مرکز هر محفظه به صورت تابعی از اندازه شبکه ثبت می‌شود و این کار تا جایی که تغییرات این پارامتر در برابر اندازه شبکه کوچک باشد ادامه خواهد یافت. به عنوان نمونه، این روند برای محفظه‌ی شکل 3-د، در شکل 4 نمایش داده شده است. برای اطمینان از همگرایی حل عددی، برای

اکنون پس از اطمینان از توانایی روش بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌ی با مرز منحنی، می‌توان با اطمینان به شبیه‌سازی مسئله مطرح شده در بخش 3 پرداخت. شکل 7 خطوط جریان و خطوط هم‌دما را برای محفظه نشان داده شده در شکل 3-الف و در عدد رایلی  $10^5$  نشان می‌دهد. همانطور که از شکل قابل ملاحظه است شبکه در نظر گرفته شده به گونه‌ایست که تعداد گره‌ها در راستای ارتفاع برابر 200 گره خواهد بود و در راستای افقی براساس زاویه مابین دیوار مایل و افقی یعنی 60 درجه تعیین می‌شود.



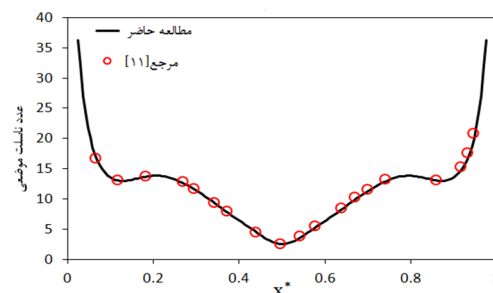
شکل 7- خطوط جریان (سمت چپ) و خطوط هم‌دما (سمت راست) برای محفظه شکل 3-الف در عدد رایلی  $10^5$

همانطور که در شکل 3-الف نمایش داده شده دیوار قائم در دمای ثابت سرد و دیوار مایل در دمای ثابت گرم نگهداری می‌شود یعنی برای دیوار قائم داریم:  $\theta = 0$  و برای دیوار مایل  $\theta = 1$  است. الگوی جریان در این حالت شامل یک سلول پادساعتگرد خواهد بود و سیالی که در مجاورت دیوار مایل گرم شده، در نتیجه کاهش چگالی در راستای این دیوار بالا می‌رود و در مجاورت دیوار قائم سرد در نتیجه افزایش چگالی به سمت پایین حرکت می‌کند. در این عدد رایلی، شیوه غالب انتقال حرارت در محفظه شیوه جابه‌جایی است، یعنی نیروی شناوری بر نیروی ویسکوزیته غالب بوده و به همین دلیل خطوط هم‌دما یک‌نواخت و هموار نیستند. از شیب دما در مجاورت دیوار قائم می‌توان به این نتیجه رسید که عدد ناسلت موضعی در جهت  $y$  روند افزایشی خواهد داشت و کمترین عدد ناسلت موضعی در پایین‌ترین نقطه



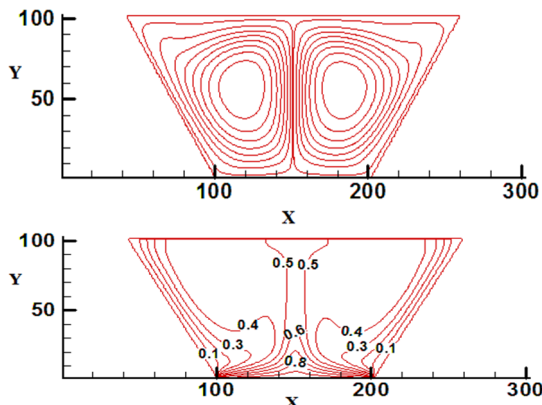
شکل 5- مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین حاصل از مطالعه حاضر با نتایج منتشر شده توسط مرجع [5]

همچنین برای اطمینان بیشتر به مقایسه بین نتایج حاصل از روش شبکه بولتزمن و نتایج منتشر شده توسط چن و چنگ [11] خواهیم پرداخت. چن و چنگ انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌ای به شکل کمانی از دایره را مورد بررسی قرار دادند. ابعاد این کمان به گونه‌ای است که در آن  $r/H = (1/3)^{0.5}$  خواهد بود. که در آن  $r$  شعاع دایره اولیه و  $H$  اندازه قاعده کمان است. شرایط مرزی این محفظه مشابه شکل 3-د می‌باشد. آنها از روش حجم محدود برای شبیه‌سازی مسئله استفاده نموده و علاوه بر آن به مقایسه نتایج خود با نتایج آزمایشگاهی پرداختند. شکل 6 نشان دهنده مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی کمان در عدد گراشیف  $10^6$  می‌باشد و نشان‌دهنده صحت برنامه نوشته شده و توانایی روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی محفظه‌های با دیواره منحنی است.



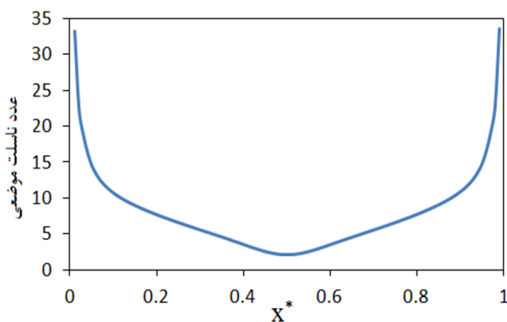
شکل 6- مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار صاف محفظه به شکل کمان جدا شده از دایره به دست آمده از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط چن و چنگ [11] در عدد گراشیف  $10^6$





شکل 9- خطوط جریان (شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه شکل 3-ب در عدد رایلی  $10^5$

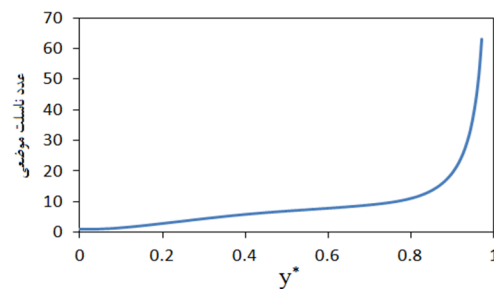
وسط این دیوار کمینه خواهد بود، تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی گرم در شکل 10 نمایش داده شده است. کارائی حرارتی این شکل با شکل نیم دایره (در قسمت‌های پیش رو، شکل‌های 13 و 14) قابل مقایسه است و اثر مرز منحنی بر عدد ناسلت نشان داده خواهد شد.



شکل 10- تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی گرم در محفظه دوزنقه‌ای در عدد رایلی  $10^5$

شکل 11 خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای محفظه شکل 3-ج را نشان می‌دهد. الگوی جریان مشابه شکل 7، یک سلولی خواهد بود. با این تفاوت که به علت عکس بودن شرایط مرزی، جهت چرخش سلول نیز عکس خواهد بود و برای این محفظه ساعتگرد است. شیب دما در مجاورت دیوار قائم نشان دهنده یک نقطه کمینه برای تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار است. در واقع سیال گرم بالا رونده در راستای دیوار قائم در مسیر خود با جریان سیال سرد پایین

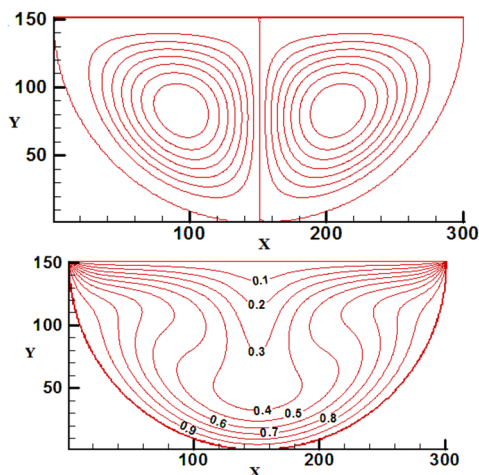
محفظه و بیشترین مقدار برای این پارامتر، در بالاترین نقطه آن انتظار می‌رود. شکل 8 تغییرات عدد ناسلت موضعی را بر روی دیوار قائم در عدد رایلی  $10^5$  نشان می‌دهد. نکته قابل ملاحظه اینجاست که با تغییر دیواره‌های سرد و گرم (تغییر شرایط مرزی) شاهد یک نقطه کمینه در عدد ناسلت محلی روی دیوار قائم خواهیم بود و دلیل آن می‌تواند تقابل لایه مرزی حرارتی روی دو دیواره سرد و گرم (لایه‌های سیال در حال حرکت روی دو دیواره) باشد.



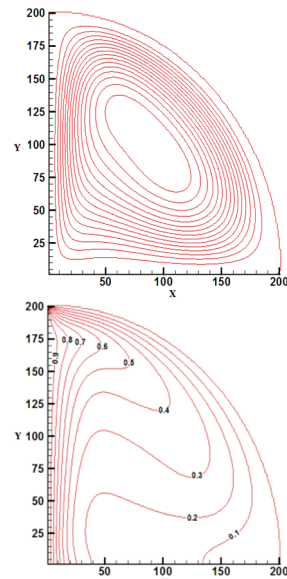
شکل 8- تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در محفظه مثلثی در عدد رایلی  $10^5$

خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای محفظه شکل 3-ب و در عدد رایلی  $10^5$  در شکل 9 نمایش داده شده است. ساق‌های دوزنقه در دمای ثابت در حال سرد شدن و دیوار پایین محفظه در دمای ثابت در حال گرم شدن است. سیالی که در مجاورت ساق‌ها سرد شده و با افزایش چگالی مواجه می‌شود به سمت پایین حرکت کرده و در مجاورت دیوار افقی پایین گرم شده و در نتیجه کاهش چگالی تا وسط دیوار به سمت بالا حرکت می‌کند، بنابراین دو سلول در محفظه مشاهده می‌شود. سلول سمت راست ساعتگرد و سلول سمت چپ پادساعتگرد خواهد بود. فیزیک مساله مشابه سیستم‌های گرمایش از کف است. شکل خطوط هم‌دما در محفظه نشان می‌دهد که نیروی شناوری کاملاً بر نیروی ویسکوز غلبه کرده و انتقال حرارت جابه‌جایی در محفظه حاکم است. خطوط هم‌دمای  $\theta$  برابر 0/1 تا 0/5 به صورت متقارن و در مجاورت دیوارهای مایل و خطوط هم‌دمای 0/6 تا 0/9 به صورت منحنی‌های متقارن و در مجاورت دیوار افقی گرم شکل می‌گیرد. شیب دما در مجاورت دیوار افقی گرم نشان می‌دهد عدد ناسلت موضعی در گوشه‌های این دیوار حداکثر و در

می‌کند و در مجاورت دیوار منحنی به دو بخش تقسیم شده و به سمت بالا حرکت می‌کند، بنابراین گردابه سمت راست پاد ساعتگرد و گردابه سمت چپ ساعتگرد خواهد بود. شیب دما در مجاورت دیوار صاف نشان می‌دهد که ناسلت موضعی در مرکز این دیوار به حداقل می‌رسد و در دو انتهایی آن حداکثر خواهد بود. تغییرات ناسلت موضعی بر روی این دیوار در شکل 14 نمایش داده شده است. در این شکل علاوه بر عدد رایلی  $10^5$ ، نتایج این تغییرات در اعداد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  نیز نشان داده شده است. با توجه به تقارن هندسه و شرایط مرزی، وجود نقطه اکسترمم در روند تغییرات ناسلت موضعی در وسط دیوار افقی گرم قابل پیش‌بینی خواهد بود. با زیاد شدن فاصله دو دیوار در این نقطه نسبت به نقاط مجاور قطعاً این نقطه، نقطه کمینه خواهد بود. با افزایش عدد رایلی، شاهد افزایش ناسلت موضعی بخصوص در نقاط نزدیک دو انتهای دیوار هستیم. در عدد رایلی پایین، شیوه غالب انتقال حرارت، شیوه هدایت خواهد بود و همانطور که از شکل 14 قابل مشاهده است، در بخش اعظمی از دیوار (فاصله  $0/2$  تا  $0/8$ ) مقدار عدد ناسلت موضعی تقریباً ثابت است. بنابراین انتظار می‌رود که خطوط هم‌دما به صورت یکنواخت در محفظه ظاهر شود و در عدد رایلی  $10^6$ ، شیب این روند تا نقطه کمینه تندتر از حالت رایلی  $10^5$  است، که نشان دهنده قوی‌تر شدن شیوه غالب انتقال حرارت یعنی جابه‌جایی آزاد خواهد بود.

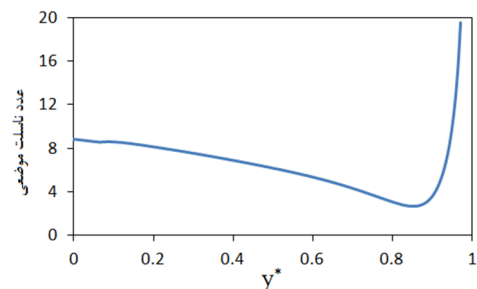


شکل 13- خطوط جریان (شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه شکل 3-د در عدد رایلی  $10^5$



شکل 11- خطوط جریان (شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه شکل 3-ج در عدد رایلی  $10^5$

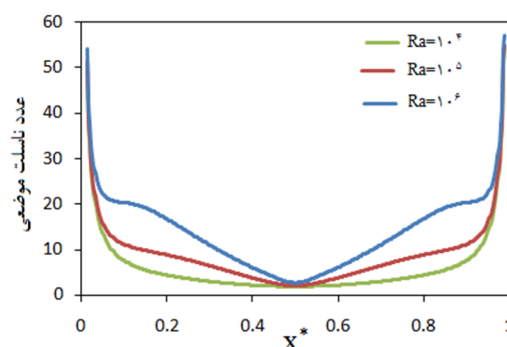
رونده مواجه می‌شود و در نقطه‌ای که این اختلاط صورت می‌گیرد تغییر روند ناسلت موضعی را خواهیم داشت. شکل 12 نشان دهنده این تغییرات است. با تغییر شرایط مرزی دو دیواره سرد و گرم، این نقطه کمینه در ناسلت محلی از بین رفته و شاهد یک نمودار یکنوا در عدد ناسلت محلی هستیم.



شکل 12- تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در محفظه به شکل ربع دایره در عدد رایلی  $10^5$

خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای محفظه شکل 3-د در عدد رایلی  $10^5$  در شکل 13 نشان داده شده است. در این حالت الگوی جریان مشابه شکل 9 دو سلولی است اما جهت گردش گردابه‌ها عکس شکل 9 خواهد بود. در این مورد سیالی که در مجاورت دیوار صاف سرد با افزایش چگالی مواجه می‌شود، در وسط این دیوار به سمت پایین حرکت

- heat transfer in a vertical square enclosure. J Electron Packaging 113(3): 268–274.
- [2] Basak T, Roy S, Balakrishnan AR (2003) Effect of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity. Int J Heat Mass Tran 32: 4525–4535.
- [3] Asan H, Namli L (2000) Laminar natural convection in a pitched roof of triangle cross-section: summer day boundary conditions. Energy Buildings 33: 69–73.
- [4] Koca A, Oztop HF, Varol Y (2008) Numerical analysis of natural convection in shed roofs with eave of buildings for cold climates. Comput Math Appl 56: 3165–3174.
- [5] Basak T, Roy S, Thirumalesha Ch (2007) Finite element analysis of natural convection in a triangular enclosure: Effects of various thermal boundary conditions. Chem Eng Sci 62: 2623–2640.
- [6] Joudi KA, Hussein IA, Farhan AA (2004) Computational model for a prism shaped storage cross section. Energ Convers Manage 45: 337–342.
- [7] Kent EF, Asmaz E, Ozerbay S (2007) Laminar natural convection in right triangular enclosures. Int J Heat Mass Tran 44: 187–200.
- [8] Kaluri RS, Anandalakshmi A, Basak T (2010) Bejan's heatline analysis of natural convection in right-angled triangular enclosures: Effects of aspect-ratio and thermal boundary conditions. Int J Therm Sci 49: 1576–1592.
- [9] Natarajan E, Basak T, Roy S (2008) Natural convection flows in a trapezoidal enclosure with uniform and non-uniform heating of bottom wall. Int J Heat Mass Tran 51: 747–756.
- [10] Basak T, Roy S, Pop I (2009) Heat flow analysis for natural convection within trapezoidal enclosures based on heatline concept. Int. J Heat Mass Tran 52: 2471–2483.
- [11] Chen ChL, Cheng ChH (2002) Buoyancy- induced flow and convective heat transfer in an inclined arc-shape enclosure. Int J Heat Fluid FI 23: 823–830.
- [12] Chen ChL, Cheng ChH (2012) Numerical prediction of natural convection with liquid fluids contained in an inclined arc-shaped enclosure. Int Commun Heat Mass 39: 209–215.
- [13] Munir FA, Sidik ChAN, Azmi MIM, Zin MRM (2011) Application of lattice Boltzmann method in predicting flow of shear driven cavities. J Mech Eng Tech 3(2): 55–70.
- [14] Zhang T, Shi B, Chai Zh (2010) Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in trapezoidal cavities. Comput Fluids 39: 1977–1989.
- [15] Filippova O, Hanel D (1998) Grid refinement for lattice-BGK models. J Comput Phys 47: 219–228.



شکل 14- تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی گرم در محفظه به شکل نیم‌دایره در عدد رایلی  $10^5$

## 5- نتیجه گیری

در این مطالعه، جریان سیال و انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در محفظه‌های به شکل مثلث، دوزنقه، ربع دایره و نیم دایره برای سیال عامل هوا با عدد پرانتل  $0/71$  به روش شبکه بولتزمن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزمن به خوبی قادر به شبیه‌سازی هر نوع محفظه‌ای با هندسه‌های پیچیده است. در تحلیل انجام شده، مکانیزم غالب انتقال حرارت در تمام محفظه‌های در نظر گرفته شده، مکانیزم جابه‌جایی است. شرایط مرزی، تعیین کننده الگوی جریان و جهت گردش گردابه‌ها در محفظه‌ها خواهد بود. در حالتی که الگوی جریان دوسلولی است (محفظه به شکل دوزنقه و نیم دایره)، عدد ناسلت موضعی دارای نقطه اکسترمم در محل جدانشدن دوسلول خواهد بود. اما در حالتی که الگوی جریان تک سلولی است (محفظه به شکل ربع دایره و مثلث) اگر شرایط مرزی به گونه‌ای باشد که لایه سیال گرم بالارونده و لایه سیال سرد پایین‌رونده باهم تقابل نکنند، تغییرات عدد ناسلت محلی روندی ثابت و یکنوا خواهد داشت و در غیر اینصورت در محل تقابل این دو لایه سیال متحرک در محفظه، شاهد تغییر روند در عدد ناسلت محلی (نقطه کمینه) هستیم. در کارهای آینده مولفین به دنبال بهینه‌سازی انتقال حرارت در محفظه‌های بسته با تغییر شکل هندسی مرز هستند.

## مراجع

- [1] Refai AG, Yovanovich MM (1991) Influence of discrete heat source location on natural convection

- [16] Mei R, Luo LSh, Shyy W (2000) An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method. *J Comput Phys* 155: 307–330.
- [17] Mei R, Yu D, Shyy W, Luo LSh (2002) Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. *Phys Rev E* 65: 1/041203–14/041203.
- [18] Mei R, Shyy W, Yu D, Luo LSh (2002) Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary. *J Comput Phys* 161: 680–699.
- [19] Yan YY, Zu YQ (2008) Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder-A LBM approach. *Int J Heat Mass Tran* 51: 2519–2536.
- [20] McNamara G, Zanetti G (1998) Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys Rev Lett* 61: 2332–2335.
- [21] Alexander FJ, Chen S, Sterling JD (1993) Lattice Boltzmann thermo hydrodynamics. *Phys Rev E* 47: 2249–2252.
- [22] Teixeira C, Chen H, Freed DM (2000) Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation. *comput Phys Commun* 129: 207–226.
- [23] Guo Z, Shi B, Zheng C (2002) A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equation. *Int J Numer Meth Fl* 39: 325–342.
- [24] Barrios G, Rechtman R, Rojas J, Tovar R (2005) The lattice Boltzmann equation for natural convection in a two-dimensional cavity with a partially heated wall. *J Fluid Mech* 522: 91–100.
- [25] Yu D, Mei R, Lue LS, Shyy W (2003) flow computations with the method of lattice Boltzmann equation. *Prog Aerosp Sci* 39: 329–367
- [26] Barania H, Soleimani S, Ganji DD (2011) Lattice Boltzmann simulation of natural convection around a horizontal elliptic cylinder a square enclosure. *Int Commun Heat Mass Trans* 38(2): 1436–1442.