مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۳/ دوره ۱۴/ شماره ۶/ صفحه ۹۱-۱۰۶

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: **10.22044/jsfm.2025.14062.3829**

مسئله اندرکنش سیال-سازه در چهارچوب توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه با استفاده از رویکرد یکپارچه در حالت دوبعدی

محمدعلی جهانگیری[۱]، رضا عطار نژاد[۲،*]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدگان فنی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران

[۲] استاد، دانشکدگان فنی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۱/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۳۰

چکیده

روش تقسیم‌بندی‌شده برای حل مسائل اندرکنش سیال-سازه مستعد بروز ناپایداری‌های عددی هستند که می‌توانند منجر به عدم همگرایی در فرایند حل شوند. برای غلبه بر این چالش‌ها، استفاده از تکنیک‌های پایدارسازی و کاهش گام زمانی ضروری است. با این حال، این رویکردها به طور قابل توجهی هزینه‌های محاسباتی را افزایش می‌دهد. در این پژوهش به منظور تحلیل مسائل اندرکنش سیال-سازه فرمول‌بندی یکپارچه‌ای در چهارچوب توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه به‌منظور ردیابی مرزهای متحرک ارائه شده است. بدین منظور، معادلات ناویه-استوکس در حالت ناپایدار برای سیال و معادله الاستیسیته خطی برای سازه به‌صورت یکپارچه با جفت‌سازی قوی حل شده‌اند. با مقایسه عملکرد رویکرد پیشنهادی با روش تقسیم‌بندی‌شده مشخص گردید که میانگین زمان تحلیل هر گام در روش تقسیم‌بندی‌شده ۵۱ ثانیه و در روش پیشنهادی ۷ ثانیه به‌طول انجامید، که بیانگر برتری رویکرد ارائه شده در کاهش زمان محاسبات می‌باشد. رویکرد ارائه شده با حذف اثرات جرم افزوده دقت حل را افزایش داده و از نوسانات ناگهانی موجود در رویکرد تقسیم‌بندی شده جلوگیری می‌نماید. همچنین با بررسی اثر وابستگی مش مشخص گردید افزایش تعداد درجات آزادی از ۸۵۴۵۲ به ۱۱۴۱۰۲۷، باعث افزایش تنها دو درصدی فشار و جابجایی می‌شود که نشان‌دهنده وابستگی ناچیز حل مسئله به اندازه مش است.

کلمات کلیدی: اندرکنش سیال-سازه؛ معادلات ناویه-استوکس؛ معادله الاستیسیته خطی؛ توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE)؛ فرمول‌بندی یکپارچه.

Fluid-Structure Interaction problem in the framework of Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description using a Monolithic approach in 2D

M.A. Jahangiri[1], R. Attarnejad[2,*]

[1] M.S.c. Student, College of Engineering, School of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

[2] Prof., College of Engineering, School of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract

The partitioned approach for solving fluid-structure interaction problems is prone to numerical instabilities, often leading to a lack of convergence. Overcoming these challenges requires stabilization techniques and reduced time steps, significantly increasing computational costs. In this study, a monolithic formulation within the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) framework is proposed for analyzing fluid-structure interaction problems, enabling efficient tracking of moving boundaries. The Navier-Stokes equations for unsteady fluid flow and the linear elasticity equations for the structure are solved in a strongly coupled manner. Comparison with the partitioned approach revealed that the average computational time per step in the partitioned method was 51 seconds, while the proposed approach required only 7 seconds, demonstrating its computational efficiency. Furthermore, the proposed method eliminates the added mass effect, enhances solution accuracy, and prevents sudden oscillations observed in the partitioned approach.

Additionally, mesh dependency analysis showed that increasing the degrees of freedom from 85,452 to 1,141,027 resulted in only a 2% increase in pressure and displacement, indicating minimal sensitivity to mesh size. This highlights the robustness and efficiency of the proposed method in solving fluid-structure interaction problems.

Keywords: Fluid-Structure Interaction; Navier-Stokes Equation; Linear Elasticity; Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE); Monolithic approach

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۱۶۶۴۰۳۸۰۸؛ فکس: ۰۲۱۶۶۴۰۳۸۰۸

آدرس پست الکترونیک: attarnjd@ut.ac.ir

۱- مقدمه

مسائل چندفیزیکی مانند اندرکنش سیال-سازه، از موضوعات مهم با کاربردهای گسترده در علوم مهندسی هستند.

بال‌های در معرض باد هواپیما در مهندسی هوا فضا[۱, ۲]، توصیف جریان خون در مهندسی مکانیک زیستی[۳]، جریان باد در توربین‌های بادی[۴]، سیال روان کننده بین بلبرینگ ها و چرخ‌دنده ها در صنایع خودروسازی[۵] و اندرکنش امواج آب و سازه ها، از جمله: پایه پل، سد، موج‌شکن، سازه‌های حفاظت از سواحل، بدنه شناورها و ...، در مهندسی سواحل، بنادر و سازه های دریایی[۶, ۷] تنها مثال هایی از اهمیت این موضوع می‌باشند.

مشکلات ذاتی موجود در مسئله اندرکنش سیال–سازه، منجربه شکل‌گیری روش‌های عددی متنوعی شده است که بر اساس نحوه تعامل بین معادلات سیال و سازه می‌توان آن‌ها را به روش‌های تقسیم‌بندی شده[1] و یکپارچه[2] دسته‌بندی کرد[۸]. در صورتی که جفت کردن معادلات سیال و سازه به‌طور ضمنی[3] در هر گام زمانی در یک دستگاه معادلات منحصر به‌فرد صورت پذیرد در این حالت رویکرد حل مسئله تبدیل به الگوریتم‌های یکپارچه می شود. لذا دامنه‌های سیال و سازه به‌عنوان یک محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شود[۹]. پایداری حل این رویکرد به مراتب بیشتر از رویکرد تقسیم‌بندی شده بوده و همچنین از دقت و سرعت بالاتری نیز برخوردار است[۱۰].

استفاده از رویکرد تقسیم‌بندی‌شده، در بیشتر نرم‌افزارهای مدل‌سازی مهندسی[۱۱]، به دلیل پیچیدگی کمتر در گسسته‌سازی مجزای دامنه‌های سیال و سازه و به‌تبع آن فرمول‌بندی معادلات حاکم در مقایسه با رویکرد یکپارچه، رایج‌تر است[۱۲].

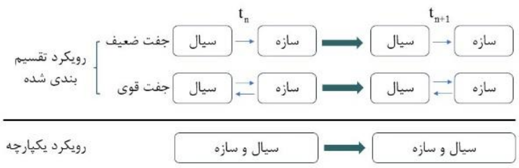
در رویکرد تقسیم‌بندی شده، مسئله اندرکنش سیال-سازه به زیرمسئله‌های جداگانه‌ای برای دامنه‌های سیال و سازه تقسیم می‌شود. سپس دامنه‌های سیال و سازه به‌عنوان دو میدان محاسباتی مجزا با مش‌های جداگانه مدل‌سازی شده و به‌صورت مجزا تحلیل عددی می‌شوند. در ادامه شرایط مرزی ناشی از اندرکنش سیال با سازه به‌صورت صریح[4] بین حل‌گرها منتقل می‌شود[۱۳].

از معایب این روش می‌توان به رفتار نیروهای مرزی اشاره کرد که می‌تواند منجر به ناپایداری عددی و واگرایی حل شود. لذا به‌منظور پایداری حل و همگرایی با دقت مناسب به تعداد تکرارهای نسبتا زیادی نیاز دارد[۱۴].

تفاوت رویکردهای حل مسائل اندرکنش سیال-سازه در شکل ۱ نشان داده شده است. روش‌های تقسیم‌بندی شده با توجه به جفت یک‌طرفه یا دوطرفه بودن به‌ترتیب به روش‌های جفت ضعیف و قوی تقسیم می‌شوند.

در روش جفت ضعیف تنها تاثیر سیال بر سازه در نظر گرفته می‌شود این روش اگر چه از هزینه محاسباتی کمتری برخوردار است اما به دلیل دقت کمتر نسبت به روش جفت قوی، کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد. همچنین در روش جفت قوی با توجه به دو طرفه بودن تعامل می‌تواند باعث بوجود آمدن ناپایداری-های عددی ناشی از اثر جرم افزوده شود که می‌بایست در تحلیل لحاظ گرد[۱۵].

اثر جرم افزوده در رویکرد جفت قوی زمانی رخ می‌دهد که چگالی سیال نزدیک به چگالی سازه یا از آن بزرگتر باشد. به-عنوان مثال مسائل مکانیک زیستی که در آن سیال، خون و سازه، رگ بدن در نظر گرفته می‌شود[۱۶].

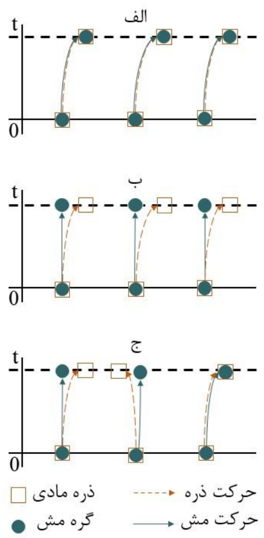


شکل ۱- مقایسه انواع رویکردهای حل مسئله اندرکنش سیال–سازه

در پژوهش بوگارز و همکاران [۱۷] ضمن اذعان به قوی‌تر و کارامدتر بودن رویکردهای یکپارچه به مقایسه دو روش تقسیم‌بندی شده شبه نیوتنی[5] به‌منظور حل مسئله اندرکنش سیال-سازه پرداخته شد، در پژوهش ایشان نتایج مربوط به مسائل جریان در حضور یک مانع الاستیک در شرایط خاص

1 Staggered approach
2 Monolithic approach
3 Implicit
4 Explicit
5 Quasi-Newton

مطرح گردید. همچنین در پژوهش‌های دگروت و همکاران [۱۳] و کوتلر و همکاران [۱۸] بیان گردید که اغلب، روش‌های یکپارچه کارآمدتر از روش‌های تقسیم‌بندی شده می‌باشند.
همچنین بیان گردید که با اتخاذ یک روش یکپارچه می‌توان ناپایداری‌های عددی ناشی از اثر جرم افزوده را که در طرح‌های تقسیم‌بندی شده وجود دارد حل و فصل نمود چرا که معادلات سیال و سازه در رویکرد یکپارچه در هرگام زمانی در یک دستگاه معادلات حل خواهد شد.
نادیده گرفتن اثر جرم افزوده در رویکرد تقسیم‌بندی شده منجر به عدم دقت در پیش‌بینی رفتار سیستم می‌شود این پدیده مخصوصا در تغییر شکل‌های بزرگ بیشتر به چشم می‌آید[۱۴, ۱۹, ۲۰].
توصیف حرکت با استفاده از دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری صورت می‌پذیرد[۲۱]. در دیدگاه لاگرانژی (مادی)، گره‌های مش از موقعیت ذرات ماده پیروی می‌کنند. ایراد این رویکرد مربوط به ناپایداری در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ است[۲۲].
همچنین در دیدگاه اویلری (فضایی)، موقعیت گره‌های مش در زمان ثابت است. مزیت اصلی این رویکرد این است که می‌تواند تغییر شکل‌های بزرگ را بدون حرکت شبکه مش کنترل نماید. ایراد این رویکرد ظهور ترم‌های همرفتی به‌عنوان منابع ناپایداری عددی می‌باشد[۲۳].
قره‌باغی و شیرزاد[۲۴] با حل هم‌زمان معادلات دوبعدی میانگین رینولدز ناویر-استوکس و معادله حرکت استوانه، جابه‌جایی و سرعت استوانه را تحت ارتعاشات ناشی از گردابه بررسی کردند. نتایج نشان داد که با افزایش عدد رینولدز، شدت جریان گردابه‌ها بیشتر شده و فرکانس غالب جریان افزایش می‌یابد[۲۵]. در ادامه، برای توسعه این پژوهش، آنها تأکید کردند که در نظر گرفتن غیرخطی بودن تکیه‌گاه‌ها برای پیش‌بینی دقیق‌تر پاسخ‌های دینامیکی سازه‌های دریایی ضروری است[۲۶].
پژوهشگران بسیاری در ادبیات مهندسی، تکنیک‌های مختلفی را برای افزایش دقت حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) در دامنه‌های متحرک پیشنهاد کرده‌اند. محبوب‌ترین تکنیک، فرمول‌بندی لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) است که در اوایل دهه هشتاد توسط هیوز و همکاران [۲۷] و دونیا و همکاران [۲۸] پیشنهاد شد. این روش بر اساس تشکیل یک نگاشت مناسب (دلخواه) از پیکربندی مرجع ثابت سیال به دامنه متحرک فعلی است. لاگرانژی-اویلری دلخواه[1] یک توصیف میانی و کلی‌تر است که همزمان از مزایای رویکردهای اویلری و لاگرانژی بهره می‌برد. در این توصیف، مطابق شکل ۲ موقعیت گره‌های شبکه مش می‌تواند ثابت باقی مانده یا مطابق با الگوی مشخصی که مستقل از حرکت ذرات مواد است تغییر کند. پس از هر گام زمانی، شبکه مش به‌روزرسانی می‌شود و نتایج با استفاده از پیکربندی جدید، محاسبه می‌گردد.
در اکثر روش‌های حل مسائل اندرکنش سیال-سازه از رویکرد مش منطبق[2] استفاده می‌شود. روش‌های مش منطبق به خوبی با رویکرد یکپارچه، سازگار است. کاربرد این رویکرد به‌طور عمده در روش‌های شبکه‌بندی منطبق بر هندسه جسم[3] می‌باشد[۲۹].

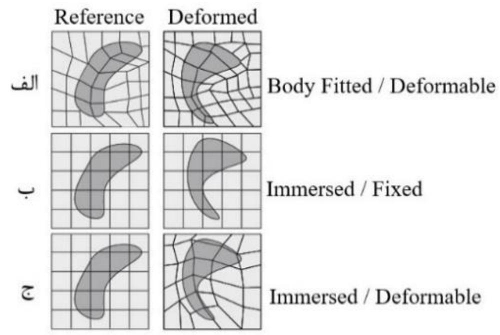


شکل ۲- انواع توصیف حرکت الف) دیدگاه لاگرانژی ب) دیدگاه اویلری ج) دیدگاه لاگرانژی-اویلری دلخواه

یک جنبه مهم از مدل‌های عددی اندرکنش سیال-سازه ردیابی تغییر شکل مرز سیال-سازه است[۲۹]. در شکل ۳ توصیف شماتیک سه روش عمده برای مدل‌سازی مسائل اندرکنش سیال-سازه نشان داده شده است[۲۹]. از این میان روش

[1] Arbitrary Eulerian-Lagrangian
[2] Adaptive mesh
[3] Body-Fitted mesh

لاگرانژی-اویلری دلخواه بر روی یک شبکه‌بندی جسم منطبق و تغییر شکل دهنده بیشترین کاربرد را دارد که در شکل ۳-الف نشان داده شده است. روش‌های مش متحرک، حرکت مرز مشترک را ردیابی کرده و به‌راحتی می‌توانند با روش‌های اجزای محدود مرسوم ترکیب شوند. از آنجا که این روش‌ها اصلاح شبکه را در امتداد مرز سیال-سازه حفظ می‌کنند، لذا اجازه می‌دهند که شرایط جفت شدن سیال و سازه را با دقت بالا اعمال کنند. با این حال، در استفاده از روش‌های ردیابی مرز نیاز به بازسازی مجدد شبکه‌بندی دامنه سیال، برای تغییر شکل‌های بزرگ سازه‌ای می‌باشد، در غیر این صورت استفاده از آن به تغییر شکل‌های کوچک محدود می‌شود[۳۰]. بررسی جامع‌تری از سایر روش‌ها در مرجع [۲۹] یافت می‌شود.



شکل ۳- انواع مش در مسئله اندرکنش سیال-سازه

رون و تورک [۳۱] به ارائه یک روش یکپارچه برای حل مسئله اندرکنش سیال-سازه وابسته به زمان با در نظر گرفتن جریان آرام تراکم ناپذیر در تعامل با سازه الاستیک با شرط رفتار خطی در یک مختصات لاگرانژی-اویلری دلخواه پرداختند.

پژوهشگران بسیاری به حل مسئله تیر عمودی در یک کانال تحت جریان سیال پرداخته‌اند در این بین بایجس و کدینا[۳۲] ، رزاق و همکاران[۳۳] ، نمر و همکاران [۳۴] با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ به حل مسئله اندرکنش سیال-سازه پرداختند. همچنین بستینگ و همکاران [۳۵] با ارائه یک روش لاگرانژی-اویلری دلخواه توسعه یافته به مقایسه انواع روش‌های تقسیم‌بندی شده و شرایط پایداری آن پرداختند.

در این پژوهش با استفاده از رویکرد یکپارچه به حل مسئله اندرکنش سیال-سازه در چارچوب توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه با در نظر گرفتن سیال نیوتنی و تراکم ناپذیر[۱] تحت شرایط جریان آرام[۲] در حالت ناپایدار[۳] در تعامل با سازه الاستیک با شرط رفتار خطی پرداخته خواهد شد. در این پژوهش، برخلاف تحقیقات پیشین، از شبکه‌بندی منطبق بر هندسه جسم استفاده شده است که نیاز به بازسازی شبکه‌بندی در هر تکرار را برطرف کرده و شرایط پایدارتری برای شبیه‌سازی مسائل اندرکنش سیال-سازه فراهم می‌کند. همچنین، این مطالعه با تمرکز بر مقایسه عملکرد دو روش تقسیم‌بندی و یکپارچه، به جنبه‌ای پرداخته که در تحقیقات گذشته کمتر مورد توجه قرار گرفته است. رویکرد ارائه‌شده با استفاده از محیط برنامه‌نویسی FEniCS، که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی به کار می‌رود، معادلات حاکم بر سیال و سازه را به‌صورت همزمان و در قالب یک سیستم واحد با استفاده از حل‌گر مستقیم حل کرده است. این روش علاوه بر کاهش پیچیدگی عددی و هزینه‌های محاسباتی، امکان پیاده‌سازی ساده‌تر و سریع‌تر را نیز فراهم می‌آورد.

ادامه این پژوهش به‌صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ ابتدا به بیان معادلات حاکم بر مسئله اندرکنش سیال-سازه در حالت شکل قوی پرداخته می‌شود، در بخش ۳ با بیان نگاشت ALE زمینه استخراج شکل ضعیف معادلات با گسسته سازی فضایی و زمانی معادلات بخش ۴ فراهم می‌شود. در بخش ۵ ابتدا به صحت‌سنجی کد رایانه‌ای موجود پرداخته و در ادامه به بیان و بررسی همه جانبه یک مسئله جامع پرداخته خواهد شد. همچنین در انتها نتیجه‌گیری از پژوهش حاضر ارائه می‌شود.

۲- استخراج معادلات

۲-۱- معادلات ناویه-استوکس

برای یک سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر معادلات ناویه-استوکس در دیدگاه اویلری با صرف‌نظر کردن از نیروهای حجمی طبق قانون بقای جرم و تکانه به‌صورت زیر خواهد بود:

[1] Incompressible
[2] Laminar
[3] Unsteady state

$$\rho_f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}+(\mathbf{v}_f\cdot\nabla)\mathbf{v}_f\right) = -\nabla p+\mu_f\nabla^2\mathbf{v}_f \quad \text{in } \Omega_t^f \tag{۱}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \quad \text{in } \Omega_t^f \tag{۲}$$

که در آن پارامترهای ρ_f، μ_f، $\mathbf{v}_f$ و p به ترتیب چگالی، ویسکوزیته دینامیکی، بردار سرعت و فشار سیال می‌باشد. سمت راست معادله با فرض نیوتنی بودن سیال حاصل شده است و رابطه (۲) به‌عنوان شرط تراکم ناپذیری در نظر گرفته می‌شود[۳۶]. همچنین ویسکوزیته سینماتیکی به‌صورت $\nu_f=\mu_f/\rho_f$ بیان می‌شود.

۲-۲- معادلات الاستیسیته خطی

معادله الاستیسیته عمومی در یک دامنه متحرک با صرف نظر کردن از نیروهای حجمی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\nabla\cdot\sigma_s(u) \quad \text{in } \Omega^s \tag{۳}$$

که در آن ρ_s و u_s به‌ترتیب چگالی و جابجایی سازه بوده و تانسور تنش σ_s به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_s=2\mu_s\epsilon(u)+\lambda\nabla.\left(\epsilon(u)\right)I \tag{۴}$$

که در آن λ و μ_s به‌عنوان ضرایب لامه شناخته می‌شوند. همچنین تانسور کرنش سازه با فرض تغییرشکل‌های کوچک به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\epsilon=\frac{1}{2}\left(\nabla u+(\nabla u)^T\right) \tag{۵}$$

با مقایسه روابط (۱) و (۳) می‌توان بیان کرد که تانسور تنش برای یک محیط الاستیسیته خطی بسیار شبیه به تانسور تنش توصیف کننده جریان یک سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر است، با این تفاوت که در آن هیچ فشار سیالی وجود ندارد و تنش با جابجایی کل u به جای سرعت مرتبط است. لذا با توجه به وابستگی رابطه (۳) به زمان، با جایگزین نمودن u با $\frac{\partial u}{\partial t}=\mathbf{v}_s$ به‌منظور در نظر گرفتن سرعت سازه خواهیم داشت:

$$u=u^0+\int_0^t \mathbf{v}_s d\tau \tag{۶}$$

همچنین بر این اساس تانسور تنش ارائه شده در رابطه (۴) به‌صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\sigma_s(\mathbf{v}_s)=2\mu_s\epsilon\left(\int_0^t \mathbf{v}_s d\tau\right) + \lambda\nabla.\left(\epsilon\left(\int_0^t \mathbf{v}_s d\tau\right)\right)I \tag{۷}$$

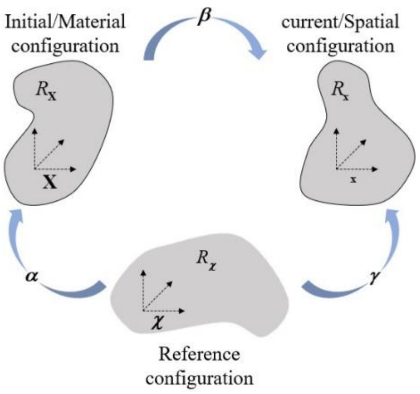
و رابطه (۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho_s\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}+\rho_s(\mathbf{v}_s.\nabla)\mathbf{v}_s-\nabla\cdot\sigma_s(\mathbf{v}_s)= \nabla\cdot\sigma_s(u) \quad \text{in } \Omega^s \tag{۸}$$

که به‌عنوان رابطه تعادل تکانه خطی[۱] نیز شناخته می‌شود.

۳- توصیف نگاشت لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE):

مطابق شکل ۴ در توصیف نگاشت لاگرانژی-اویلری دلخواه علاوه بر پیکربندی اولیه (مادی) و فعلی (فضایی) نیاز به یک پیکربندی مرجع می‌باشد که نه به نقاط مادی متصل بوده و نه کاملا در فضا ثابت باشد.



شکل ۴- توصیف پیکربندی‌های مختلف

به‌منظور انتقال نقاط بین پیکربندی‌های مختلف از نگاشت یک به یک و به‌منظور انتقال سرعت و به‌تبع آن نرخ کرنش بین

[۱] Balance of linear momentum

پیکربندی‌های مختلف، از گرادیان تغییر شکل به‌صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\beta(\mathbf{X},t)=(\mathbf{x},t)\mapsto\frac{\partial\beta}{\partial(\mathbf{X},t)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} & \mathbf{v}\\ 0^T & 1\end{pmatrix} \qquad (۹)$$

رابطه (۹) بیانگر نگاشت از پیکربندی اولیه به پیکربندی فعلی می‌باشد. همچنین با توجه به یک به یک بودن نگاشت، می‌توان حرکت در جهت معکوس را مطابق با $(\mathbf{X},t)=\alpha^{-1}(\mathbf{x},t)$ بدست آورد. به‌طور مشابه برای سایر پیکربندی‌های موجود در شکل ۴ خواهیم داشت:

$$\gamma(\chi,t)=(\mathbf{x},t)\mapsto\frac{\partial\gamma}{\partial(\chi,t)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\chi} & \mathbf{w}\\ 0^T & 1\end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$\alpha^{-1}(\mathbf{X},t)=(\chi,t)\mapsto\frac{\partial\alpha^{-1}}{\partial(\mathbf{X},t)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{X}} & \hat{\mathbf{v}}\\ 0^T & 1\end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

که در آن $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\hat{\mathbf{v}}$ به‌ترتیب بیانگر سرعت مادی[1]، سرعت مش[2] و سرعت ذره[3] در دامنه مرجع می‌باشد. در ادامه با استفاده از مفهوم مشتق توابع ترکیبی $\beta=\gamma\circ\alpha^{-1}$ رابطه‌ی بین سرعت در پیکربندی‌های مختلف به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial(\mathbf{X},t)}(\mathbf{X},t)\\ =\frac{\partial\gamma}{\partial(\chi,t)}\left(\alpha^{-1}(\mathbf{X},\mathbf{t})\right)\frac{\partial\alpha^{-1}}{\partial(\mathbf{X},t)}(\mathbf{X},t)\\ =\frac{\partial\gamma}{\partial(\chi,t)}(\chi,t)\frac{\partial\alpha^{-1}}{\partial(\mathbf{X},t)}(\mathbf{X},t)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

یا در فرم ماتریسی به‌صورت:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} & \mathbf{v}\\ 0^T & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\chi} & \mathbf{w}\\ 0^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{X}} & \hat{\mathbf{v}}\\ 0^T & 1\end{pmatrix} \qquad (۱۳)$$

با ساده‌سازی رابطه (۱۳) معادله زیر برای یافتن سرعت مادی در ارتباط با تمام سرعت‌ها در پیکربندی‌های مختلف به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\chi}\cdot\hat{\mathbf{v}}+\mathbf{w} \qquad (۱۴)$$

سپس سرعت همرفتی[4] که بیان‌گر سرعت نسبی بین ماده و مش است مطابق با رابطه (۱۵) قابل بیان خواهد بود:

$$\mathbf{c}\coloneqq\mathbf{v}-\mathbf{w}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\chi}\cdot\hat{\mathbf{v}} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\mathbf{c}$ سرعت همرفتی می‌باشد.

در ادامه با در نظر گرفتن کمیت دلخواه و اسکالر Q که به‌ترتیب برای پیکربندی‌های فضایی، مرجع و مادی به‌صورت $Q(x,t)$، $Q^*(\chi,t)$ و $Q^{**}(X,t)$ معرفی می‌شود، به بیان ارتباط مشتقات زمانی در پیکربندی‌های مختلف پرداخته می‌شود. به‌منظور بیان تغییرات یک کمیت فیزیکی در پیکربندی مادی نسبت به پیکربندی فضایی خواهیم داشت:

$$Q^{**}(\mathbf{X},t)=Q(\beta(\mathbf{X},t),t)=Q\circ\beta \qquad (۱۶)$$

با محاسبه گرادیان Q^{**} رابطه شناخته شده بین مشتقات زمانی مادی و فضایی حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial Q^{**}}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial\mathbf{x}}.\mathbf{v} \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial Q}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)Q \qquad (۱۷)$$

رابطه فوق بیان می‌کند که نرخ تغییرات یک کمیت در پیکربندی اولیه با نرخ تغییرات آن در پیکربندی فعلی به علاوه یک ترم همرفتی (مربوط به حرکت نسبی پیکربندی‌های مادی و فضایی) برابر است.

به‌منظور بیان معادلات تعادل در چهارچوب ALE نیاز است تا مشتقات زمانی مادی و مرجع به یکدیگر مرتبط باشند. بدین منظور برای بیان تغییرات یک کمیت فیزیکی در پیکربندی مادی نسبت به پیکربندی مرجع خواهیم داشت[۳۷]:

$$Q^{**}(\mathbf{X},t)=Q^*(\alpha^{-1}(\mathbf{X},t),t)=Q^*\circ\alpha^{-1} \qquad (۱۸)$$

[1] Material velocity
[2] Mesh velocity
[3] Particle velocity
[4] Convective velocity

همچنین مشابه با رابطه (۱۶) با محاسبه گرادیان Q^* رابطه بین مشتقات زمانی مادی و مرجع حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial Q^{**}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{\partial Q^*}{\partial \chi}.\hat{\mathbf{v}} \tag{۱۹}$$

با توجه به این موضوع که در کارهای محاسباتی استفاده از پیکربندی‌های مادی یا فضایی بسیار راحت‌تر می‌باشد همچنین با در نظر گرفتن اینکه روابط ساختاری در سیالات به‌طور طبیعی در پیکربندی فضایی بیان می‌شود لذا با بهره-مندی از رابطه (۱۵)، رابطه (۱۹) در پیکربندی فضایی به‌صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{c}\cdot\nabla)Q \tag{۲۰}$$

رابطه فوق به‌عنوان رابطه بنیادی ALE شناخته شده است که بیان می‌کند نرخ تغییرات کمیت فیزیکی Q با نرخ تغییرات آن در پیکربندی مرجع به علاوه ترم همرفتی مرتبط با حرکت نسبی بین پیکربندی مادی و مرجع برابر می‌باشد[۳۸]. همانطور که پیش‌تر نیز بیان گردید، مزیت روش ALE این است که همزمان از مزایای رویکردهای اویلری و لاگرانژی بهره می‌برد. بدین صورت که با انتخاب $\alpha = I$ (که در آن I ماتریس همانی یا ماتریس یکه می‌باشد) رابطه (۱۱) به $\mathbf{X} \equiv \chi$ خلاصه می‌شود. در این حالت دیدگاه لاگرانژی بیان می‌کند که سرعت‌های ماده و مش برهم منطبق‌اند و سرعت همرفتی $\mathbf{c}$ صفر خواهد بود از طرف دیگر با انتخاب $\gamma = I$ رابطه (۱۰) به $\mathbf{x} \equiv \chi$ خلاصه شده و دیدگاه اویلری بیان می‌کند که سرعت مش صفر بوده و سرعت همرفتی $\mathbf{c}$ دقیقا برابر با سرعت ماده می‌باشد.

یک راه مناسب به‌منظور نگاشت ALE برای جابجایی و به روزرسانی مش همچنین جلوگیری از اعوجاج المان‌ها در دامنه سیال حل معادله پواسون (لاپلاس) می‌باشد. این رویکرد برای اولین بار توسط وینسلو در سال ۱۹۶۳ معرفی شد[۳۹].

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega^f \tag{۲۱}$$

در مسائل اندرکنش سیال-سازه که در چارچوب ALE تنظیم شده اند، w به‌عنوان سرعت مش محاسباتی در نظر گرفته شود. در این حالت امکان تعامل مابین توصیفات لاگرانژی و اویلری حرکت از طریق فرمول‌بندی ALE فراهم خواهد شد[۴۰]. باید توجه داشت که مرز سیال-سازه رفتاری مشابه با دامنه جامد خواهد داشت همچنین در دامنه جامد، مش با سرعت $\mathbf{v}_s$ حرکت می‌کند بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{v}_s \quad \text{in } \Omega^s \tag{۲۲}$$

۴- استخراج شکل ضعیف معادلات حاکم بر مسئله FSI:

برای حل معادلات ۲،۱ و ۲۱ در دامنه سیال همچنین معادلات ۸ و ۲۲ در سازه توسط روش عددی اجزای‌محدود که به‌عنوان فرم قوی[۱] معادلات شناخته می‌شود؛ می‌بایست از فرم ضعیف[۲] آن‌ها استفاده نمود. در حالت شکل قوی، معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله به‌صورت دقیق تعریف می‌شود. برای حل معادلات شکل قوی و بیان شکل ضعیف آن، معادلات در یک تابع آزمایشی[۳] در فضای مشخص ضرب شده و روی دامنه انتگرال‌گیری می‌شوند. در این حالت معادلات برای حل توسط روش‌های عددی همانند اجزای محدود گسسته می-شوند. معادلات شکل ضعیف از این نظر مهم هستند که با استفاده از آن‌ها، چهارچوب راحت‌تری برای تقریب و محاسبات روش‌های عددی، مانند تحلیل اجزای محدود فراهم می‌کند.

۴-۱-گسسته‌سازی فضایی

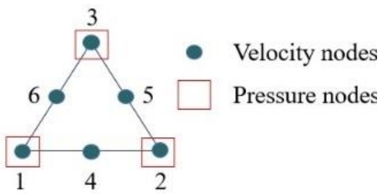
به‌منظور گسسته‌سازی معادلات ناویه-استوکس از روش پیشنهادی تیلور و هود استفاده شده است. گسسته‌سازی ارائه شده توسط تیلور و هود [۴۱] شامل چند جمله‌ای‌های درجه دوم برای تقریب مولفه‌های سرعت و چند جمله‌ای‌های خطی برای تقریب فشار است. این نوع عناصر اغلب به‌عنوان عناصر تیلور هود (Taylor-Hood) یا به اختصار P2-P1 شناخته می شوند. در پژوهش شه و همکاران [۴۲] نشان داده شده است که برخی از فضاهای اجزای محدود برای معادلات ناویه-استوکس یا حتی برای معادله ساده‌تر استوکس پایدار نیستند.

[1] Strong form
[2] Weak form
[3] Test function

مثال اصلی یک جفت ناپایدار فضاهای اجزای محدود، استفاده از چندجمله‌ای مرتبه اول پیوسته تکه‌ای برای سرعت و فشار است. استفاده از یک جفت فضای ناپایدار معمولاً منجر به حلی با نوسانات کاذب (ناخواسته، غیر فیزیکی) در حل فشار می‌شود.

مطابق شکل ۵، انتخاب عناصر P2 برای سرعت و عناصر P1 برای فشار در زمینه معادلات ناویه-استوکس، منجر به بهبود دقت، پایداری و هزینه‌های محاسباتی می‌شود[۴۳].

بدین منظور با در نظر گرفتن دامنه به‌صورت $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ از فضاهای L^2 و H^1، تعریف شده توسط سوبولف[1] به‌صورت روابط ۲۳ استفاده شده است[۳۸]. توابعی که مربع آن‌ها انتگرال‌پذیر باشند در فضای L^2، همچنین توابعی که مربع و مربع مشتقات



شکل ۵- توصیف المان تیلور–هود (P2-P1) در مش مثلثی

آن‌ها انتگرال‌پذیر باشند در فضای H^1 تعریف می‌شوند پاسخ انتگرال برای چنین توابعی می‌بایست محدود باشد.

از آنجایی که سه تابع مجهول (سرعت و فشار سیال و جابجایی سازه) در معادلات وجود دارد، به سه تابع حدسی[2] با توابع آزمایشی مختص خود در فضای ترکیبی اجزای‌محدود[3] به‌صورت زیر نیاز است:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset \left(\mathrm{H}^1(\Omega^f)\right)^d \\
&p \in \mathbf{P} \subset \left(\mathrm{L}^2(\Omega^f)\right)^d \\
&\mathbf{w} \in \mathbf{W} \subset \left(\mathrm{H}^1(\Omega^s)\right)^d \\
&(\varphi, \eta, \psi) \in \mathbf{V} \times \mathbf{P} \times \mathbf{W}
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

که در آن (φ, η, ψ) توابع آزمایشی و$(\mathbf{v}, p, \mathbf{w})$ توابع حدسی در فضای ترکیبی $\mathbf{V} \times \mathbf{P} \times \mathbf{W}$ می‌باشد. در ادامه معادلات با استفاده توابع آزمایشی و حدسی بازنویسی خواهد شد[۴۴].

$$
\begin{aligned}
&\rho_f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}, \varphi\right)_{\Omega_t^f} + \rho_f\left((c).\nabla \mathbf{v}_f, \varphi\right)_{\Omega_t^f} \\
&-(p, \nabla.\varphi) + 2\mu_f\left(\varepsilon(\mathbf{v}_f), \nabla\varphi\right)_{\Omega_t^f} \\
&+(\nabla.\mathbf{v}_f, \eta)_{\Omega_t^f} \\
&+\rho_s\left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}, \varphi\right)_{\Omega_s} + \rho_s\left((\mathbf{v}_s.\nabla)\mathbf{v}_s, \varphi\right)_{\Omega_s} \\
&+2\mu_s\left(\varepsilon\left(\int_0^t \mathbf{v}_s d\tau\right), \varepsilon(\varphi)\right)_{\Omega_s} \\
&+\lambda_s\left(\nabla.\left(\int_0^t \mathbf{v}_s d\tau\right), \nabla.\varphi\right)_{\Omega_s} \\
&-2\mu_s\left(\varepsilon(u), \varepsilon(\varphi)\right)_{\Omega_s} - \lambda_s(\nabla.u, \nabla.\varphi)_{\Omega_s} \\
&+\frac{1}{\delta}(\mathbf{v}_s, \psi)_{\Omega_s} - \frac{1}{\delta}(\mathbf{w}_s, \psi)_{\Omega_s}
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

۴-۲- گسسته‌سازی زمانی

به‌منظور دست‌یابی به شکل ضعیف معادلات از یک طرح زمانی اویلری پس‌رو[4] به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)^{n+1} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \\
&u^{n+1} = u^n + \Delta t \mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

در نهایت شکل ضعیف معادلات به‌صورت رابطه ۲۶ حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho_f}{\Delta t}\left({\mathbf{v}_f}^{n+1}, \varphi\right)_{\Omega_t^f} \\
&+\rho_f\left(\left(\left({\mathbf{v}_f}^{n+1} - \mathbf{w}_f\right).\nabla\right){\mathbf{v}_f}^{0}, \varphi\right)_{\Omega_t^f} \\
&-(p, \nabla.\varphi)_{\Omega_t^f} + 2\mu_f\left(\varepsilon\left({\mathbf{v}_f}^{n+1}\right), \nabla\varphi\right)_{\Omega_t^f} \\
&= \frac{\rho_f}{\Delta t}\left({\mathbf{v}_f}^{n}, \varphi\right)_{\Omega_t^f}
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

$$
-\left(\nabla.{\mathbf{v}_f}^{n+1}, \eta\right)_{\Omega_t^f} = 0
\tag{۲۷}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta t\left(\nabla \mathbf{w}_f, \nabla\psi\right)_{\Omega_f} \\
&= -\left(\nabla u^n, \nabla\psi\right)_{\Omega_f}
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

روابط (۲۸-۲۶) روابط حاکم بر دامنه سیال در نظر گرفته شده است همچنین روابط (۲۹) و (۳۰) روابط حاکم بر دامنه سازه خواهد بود.

[1] Sobolev
[2] Trial function
[3] Mixed finite element space
[4] Backward-Euler

$$\frac{\rho_s}{\Delta t}(\mathbf{v}_s{}^{n+1},\varphi)_{\Omega_s} +\rho_s\big((\mathbf{v}_s{}^{n+1}.\nabla)\mathbf{v}_s{}^0,\varphi\big)_{\Omega_s} +\Delta t 2\mu_s\big(\varepsilon(\mathbf{v}_s{}^{n+1}),\varepsilon(\varphi)\big)_{\Omega_s} +\Delta t\lambda_s(\nabla.\mathbf{v}_s{}^{n+1},\nabla.\varphi)_{\Omega_s} =\frac{\rho_s}{\Delta t}(\mathbf{v}_s{}^n,\varphi)_{\Omega_s}-2\mu_s\big(\varepsilon(u^n),\varepsilon(\varphi)\big)_{\Omega_s} -\lambda_s(\nabla.u^n,\nabla.\varphi)_{\Omega_s} \tag{۲۹}$$

$$\frac{1}{\delta}(\mathbf{v}_s{}^{n+1},\psi)_{\Omega_s}-\frac{1}{\delta}(\mathbf{w}_s,\psi)_{\Omega_s}=0 \tag{۳۰}$$

برای تنظیم حل‌گر در FEniCS با جمع نمودن عبارت‌های موجود در رابطه (۳۰-۲۶) یک فرم دوخطی[1] به‌صورت $a(\mathbf{v},p,\mathbf{w},\varphi,\eta,\psi)$ و یک فرم خطی به‌صورت $L(\varphi,\eta,\psi)$ حاصل می‌شود[۴۵]:

$$A=a(\mathbf{v},p,\mathbf{w},\varphi,\eta,\psi) \quad B=L(\varphi,\eta,\psi) \tag{۳۱}$$

شکل ضعیف حاصله منجر به یک سیستم معادلات خطی به شکل ماتریس زیر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، دو مثال با هدف نشان دادن کارایی پژوهش حاضر ارائه شده است. مسئله اول به‌منظور صحت سنجی و مسئله دوم به‌منظور بررسی جامع‌تر مسئله اندرکنش سیال-سازه ارائه شده است.

۵-۱- صحت سنجی

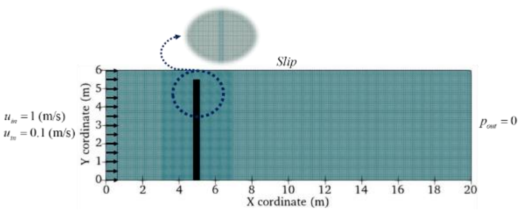
به‌منظور صحت‌سنجی کد رایانه‌ای موجود، مسئله اندرکنش سیال-سازه با مشخصات مصالح، هندسه و شرایط مرزی به‌ترتیب مطابق با جدول ۱ و شکل ۶ مشابه با مرجع[۱۷] مفروض می‌باشد.

جدول ۱- مشخصات مصالح مسئله صحت‌سنجی

خواص سیال			خواص سازه		
$\rho_f (kg/m^3)$	$v_f (m^2/s)$	$\mu_f (kg/m.s)$	$\rho_s (kg/m^3)$	v_s	$E (N/m^2)$
1	1	1	1000	0.3	2.7e+7

[1] Bilinear

دامنه سیال مستطیلی به مساحت ۶×۲۰ متر مربع در نظر گرفته شده است که درون آن سازه‌ای به مساحت ۰/۲×۵/۵ متر مربع و به فاصله ۴/۹ متر از مبداء مختصات منطبق بر محور افقی، واقع می‌باشد.

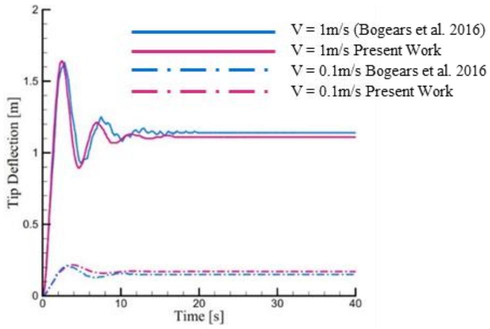


شکل ۶- هندسه و شرایط مرزی مسئله صحت سنجی

در این بخش با در نظر گرفتن مزایای رویکرد یکپارچه مورد استفاده در پژوهش حاضر، به مقایسه آن با رویکرد تقسیم‌بندی شده[۱۷]، پرداخته می‌شود.

مسئله موجود به‌طور کلی از ۳۵۴۱۹۷ درجه آزادی تشکیل شده است که در آن تعداد المان‌های سازه ۳۵۲۰ و المان‌های دامنه سیال برابر با ۳۷۸۳۲ می‌باشد. کل مدت زمان حرکت سیال و نیز گام زمانی افزایشی این مثال به‌صورت [۰:۰/۱:۴۰] در نظر گرفته شده است.

نمودار جابجایی-زمان انتهای آزاد سازه در سرعت‌های ورودی ۱ m/s و ۰/۱ m/s مطابق با شکل ۷ بدست آمده است.



شکل ۷- نمودار جابجایی-زمان انتهای آزاد سازه

در ابتدای اعمال بار، جابجایی نقطه به سرعت افزایش می یابد. این افزایش ناگهانی جابجایی، نشان دهنده پاسخ اولیه سازه به بارگذاری است. پس از افزایش اولیه، جابجایی نقطه با نوساناتی همراه است.

پس از گذشت زمان کافی، نوسانات به طور کامل فروکش کرده و جابجایی نقطه به یک مقدار ثابت می رسد. این مقدار ثابت، جابجایی نهایی یا پایدار نقطه نامیده می شود.

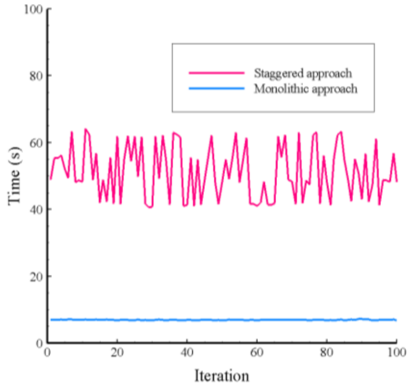
در تحلیل مسائل اندرکنش سیال-سازه، عدد رینولدز Re یک پارامتر بی‌بعد است که مشخص‌کننده نوع جریان در یک سیال می‌باشد. عدد رینولدز به صورت نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز تعریف می‌شود و مطابق با رابطه زیر محاسبه می گردد[۴۶]:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_{\max} L}{\mu} \quad (۳۳)$$

که در آن که در آن $U_{\max}$ بیشینه سرعت موجود، L ارتفاع مانع، ρ چگالی سیال و μ ویسکوزیته دینامیکی سیال می‌باشد. مقدار بیشینه سرعت برای سرعت‌های ورودی ۱ m/s و m/s ۰/۱ به ترتیب برابر ۱۲/۷۳ m/s و ۱/۴۵ m/s بدست آمده است که منتج به اعداد رینولدز ۷۰ و ۸ می‌شود. این مقادیر نشان دهنده رژیم جریان آرام در هر دو حالت هستند و امکان تحلیل پایداری و دقت نتایج در شرایط مختلف جریان را فراهم می کنند.

مطابق شکل ۷، برای هر دو رویکرد (رویکرد تقسیم‌بندی شده و رویکرد یکپارچه در پژوهش حاضر) در حالت ناپایدار با توجه به کافی بودن زمان، خیز راس تیر به نتایج حالت پایدار[1] همگرا می‌شود. همچنین اتخاذ رویکرد یکپارچه در پژوهش حاضر نسبت به رویکرد تقسیم‌بندی شده، در سرعت ۱ m/s منجربه پاسخ‌هایی به مراتب هموار تر شده است. وجود اثرات جرم افزوده موجود در رویکرد تقسیم‌بندی شده منجر به نوسانات غیر معمول شده است.

شکل ۸ نمودار تعداد تکرار بر حسب زمان محاسباتی برای مسئله ۵-۱ با سرعت ورودی ۱ m/s را نمایش می‌دهد. محور افقی بیانگر تعداد دفعاتی است که معادلات حل شده‌اند تا به یک جواب همگرا برسند و محور عمودی زمان محاسباتی هر تکرار را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد. به‌طور میانگین هر گام از تحلیل در رویکرد تقسیم‌بندی شده ۵۱ ثانیه و هر گام از تحلیل در رویکرد یکپارچه ۷ ثانیه به‌طول انجامیده است. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، زمان محاسباتی هر تکرار در رویکرد تقسیم‌بندی شده بسیار بیشتر از روش یکپارچه است. دلیل این امر آن است که در هر تکرار، معادلات باید چندین بار حل شوند تا به یک جواب همگرا برسند اما در مقابل در رویکرد یکپارچه در هر تکرار، تنها یک سیستم معادلات می‌بایست حل شود.



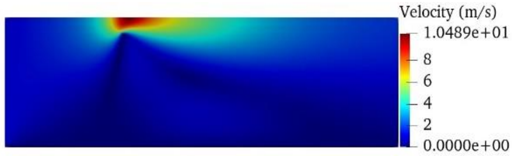
شکل ۸- نمودار تعداد تکرار بر حسب زمان محاسباتی

این برتری رویکرد یکپارچه به دلیل نحوه حل همزمان معادلات حاکم بر سیال و سازه در روش یکپارچه است که از تبادل اطلاعات مکرر بین حلگرهای مستقل سیال و سازه جلوگیری کرده و باعث کاهش هزینه محاسباتی در هر تکرار می‌شود[۴۷, ۴۸].

مقدار جابجایی بیشینه انتهای آزاد سازه در پژوهش حاضر و پژوهش مرجع برای سرعت ورودی ۱ m/s به‌ترتیب برابر با ۱/۶۳ و ۱/۶۲ متر بدست آمده است. همچنین جابجایی حالت پایدار در پژوهش حاضر ۱/۱۱۲۸ متر و برای پژوهش مرجع ۱/۱۴ متر می‌باشد. به‌طور مشابه برای سرعت ورودی ۰/۱ m/s در پژوهش حاضر جابجایی بیشینه انتهای آزاد سازه ۰/۲۳۲ متر و در حالت پایدار ۰/۱۹۶۶۹ متر بدست آمده است. این مقادیر برای پژوهش مرجع به ترتیب برابر با ۰/۲۱۷ متر و ۰/۱۷ متر می‌باشد.

در ادامه کانتورهای سرعت، فشار و جابجایی با در نظر گرفتن سرعت‌های ورودی ۱ m/s و ۰/۱ m/s به‌ترتیب در اشکال ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. شکل ۹ الف و ب به‌ترتیب نشان-دهنده سرعت و فشار، در حالت پایدار برای سرعت ورودی ۱ m/s می‌باشد که مقادیر بیشینه آنها در حالت پایدار به‌ترتیب ۱۰/۴۹ m/s و ۱۴۲ پاسکال بدست آمده است.

[1] Steady state



الف

ب

ج

شکل ۹- الف) کانتور سرعت ب) کانتور فشار ج) کانتور جابجایی

الف

ب

ج

شکل ۱۰- الف) کانتور سرعت ب) کانتور فشار ج) کانتور جابجایی

به‌طور مشابه برای سرعت ورودی ۰/۱ m/s در شکل ۱۰ الف و ب بیشینه سرعت و فشار در حالت پایدار به‌ترتیب ۱/۵۲ m/s و ۲۷ پاسکال بدست آمده است.

نواحی با رنگ قرمز نمایانگر بیشترین جابجایی سازه هستند که معمولاً در نقاطی که سازه تحت بیشترین نیرو قرار دارد، دیده می‌شوند.

رنگ قرمز در کانتور جریان سیال نشان‌دهنده بیشترین سرعت جریان است که اغلب در اطراف مناطق با تغییرات ناگهانی در هندسه یا شرایط مرزی رخ می‌دهد. در مقابل، نواحی آبی رنگ بیانگر کمترین سرعت جریان هستند و معمولاً در مناطق دور از موانع یا نواحی با فشار بالا مشاهده می‌شوند. تغییر ناگهانی رنگ در کانتور سرعت، بیانگر گرادیان بالای سرعت است و معمولاً در نواحی با نیروهای برشی زیاد رخ می‌دهد.

در کانتور فشار، نواحی قرمز رنگ نشان‌دهنده بیشترین فشار سیال هستند که معمولاً در محل‌هایی که سیال متراکم شده یا با یک مانع برخورد کرده است، مشاهده می‌شوند. در مقابل، نواحی آبی رنگ نمایانگر کمترین فشار در سیال هستند و اغلب در مناطق با انبساط سیال یا سرعت بالا رخ می‌دهند. تغییرات ناگهانی رنگ در کانتور فشار نیز نشانگر تغییرات شدید فشار است که معمولاً در مناطقی با گرادیان سرعت بالا رخ می‌دهد.

۵-۲- مسئله دوم

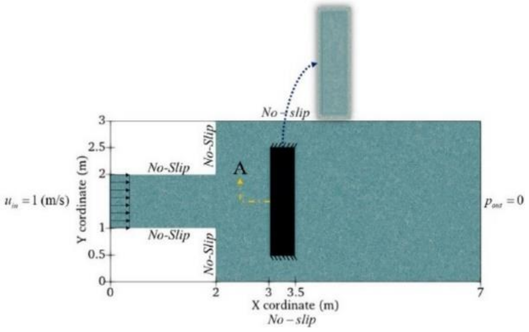
در این بخش به بررسی جامع‌تر مسئله‌ای با مشخصات مصالح، هندسه و شرایط مرزی به‌ترتیب مطابق با جدول ۲ و شکل ۱۱ پرداخته می‌شود.

جدول ۲- مشخصات مصالح مسئله دوم

خواص سیال			خواص سازه		
$\rho_f (kg/m^3)$	$\nu_f (m^2/s)$	$\mu_f (kg/m.s)$	$\rho_s (kg/m^3)$	ν_s	$E (N/m^2)$
1000	0.05	50	7800	0.3	2.1e+8

مطابق شکل ۱۱، درون دامنه سیال، سازه ای مستطیل شکل به مساحت ۲×۰/۵متر مربع و به فاصله ۳ متر از مبداء مختصات منطبق بر محور افقی، واقع می‌باشد. همچنین نقطه A در مرکز مرز سمت چپ سازه به‌منظور بررسی بیشترین جابجایی ممکن در نظر گرفته شده است. سرعت ورودی ۱ m/s برای مرز ورودی و فشار صفر برای مرز خروجی در نظر گرفته شده است.

شرط عدم لغزش[1] برای محیط دامنه سیال در نظر گرفته می-شود. مطابق با این شرط جابجایی و سرعت برای محیط سیال برابر با صفر خواهد بود.



شکل ۱۱- هندسه و شرایط مرزی مسئله دوم

کل مدت زمان حرکت سیال و نیز گام زمانی افزایشی این مثال به‌صورت [۰:۰/۰۱:۱] در نظر گرفته شده است.

برای مسئله موجود ابتدا به منظور بررسی استقلال حل از شبکه محاسباتی مسئله، جابجایی نقطه A و فشار وارد بر مرز سمت چپ سازه با سه نوع مش مختلف مطابق جدول ۳ بررسی شده است. نتایج به‌دست‌آمده در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان می‌دهند که این مقادیر با تغییر اندازه مش تفاوت قابل‌توجهی ندارند، که نشان‌دهنده همگرایی نتایج و استقلال آن‌ها از اندازه شبکه است.

در تحلیل عددی مسئله اندرکنش سیال-سازه، بررسی عدد کورانت CFL نیز برای ارزیابی پایداری حل ضروری است[۴۹].

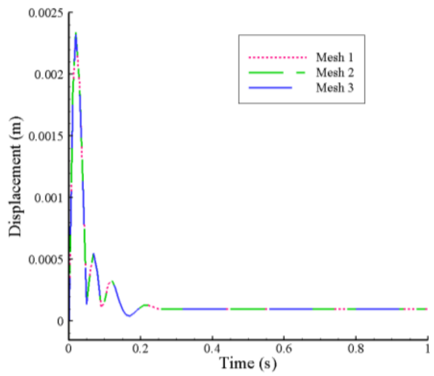
$$CFL = \frac{U_{\max}\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \qquad (۳۴)$$

که در آن $U_{\max}$ بیشینه سرعت موجود، Δt گام زمانی و Δx ابعاد شبکه می‌باشد. بدین ترتیب بحرانی ترین حالت عدد کورانت برای مش‌های ۱ و ۲ و۳ موجود در جدول ۳ به ترتیب ۰/۷۷ و ۰/۳ و ۰/۱۷ بدست می‌آید. همچنین مطابق با معادله ۳۳ عدد رینولدز برای این مثال ۹۰ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳- انواع شبکه مورد بررسی

	تعداد درجه آزادی	تعداد المان سیال	تعداد المان سازه
مش۱	۱۱۴۱۰۲۷	۱۰۶۶۷۱	۲۶۹۸۴
مش۲	۲۹۳۳۱۲	۲۷۰۹۵	۷۱۲۰
مش۳	۸۵۴۵۲	۷۱۷۴	۲۷۶۰

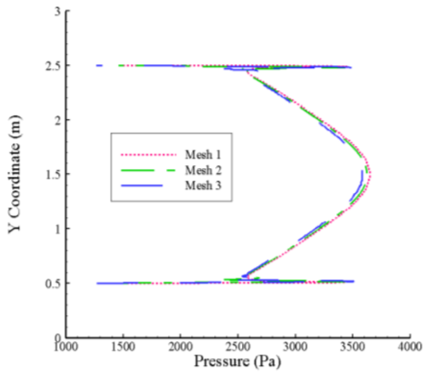
شکل ۱۲ نمودار جابجایی-زمان نقطه A را در طول مدلسازی نشان می‌دهد. مطابق انتظار، با زمان مدلسازی کافی، نتایج در حالت ناپایدار به نتایج در حالت پایدار همگرا می شود. مطابق شکل ۱۲، مقدار بیشینه جابجایی نقطه A برای مش شماره یک برابر با ۰/۰۰۲۳۵ متر، برای مش شماره دو ۰/۰۰۲۳۴ متر، و برای مش شماره سه ۰/۰۰۲۳۲ متر به‌دست آمده است. همچنین هر سه در زمان پایدار شدن به جابجایی ۰/۰۰۰۱ متر همگرا شده اند.



شکل ۱۲- نمودار جابجایی-زمان نقطه A

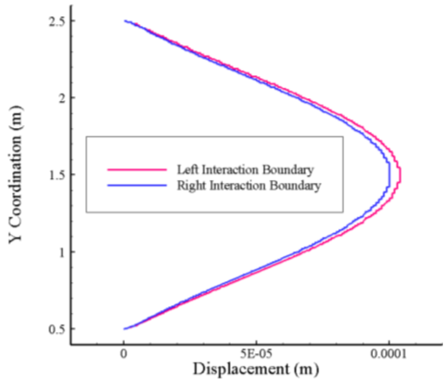
همان‌طور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، مقدار بیشینه فشار وارد بر مرز سمت چپ سازه برای مش شماره یک برابر با ۳۶۵۰ پاسکال، برای مش شماره دو ۳۶۲۲ پاسکال، و برای مش شماره سه ۳۶۰۵ پاسکال محاسبه شده است. فشار در طول ارتفاع سازه دچار تغییراتی می‌شود که این تغییرات به عواملی مانند سرعت جریان سیال پیرامون سازه و هندسه آن وابسته است. در مسئله مورد بررسی، نواحی با فشار بالا در محل‌هایی مشاهده می‌شوند که جریان سیال با موانع برخورد کرده است.

[1] No-slip



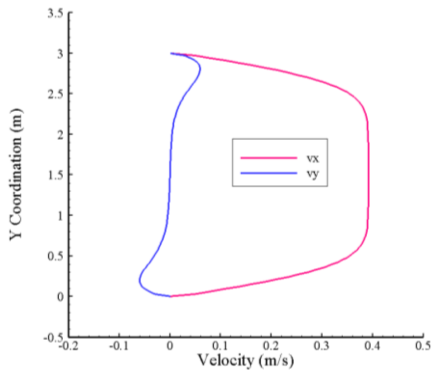
شکل ۱۳- نمودار فشار روی مرز سمت چپ سازه

همچنین مطابق شکل ۱۴ مقدار بیشینه جابجایی مرز سمت چپ سازه برابر با ۰/۰۰۰۱۰۷ متر و مقدار بیشینه جابجایی مرز سمت راست آن برابر با ۰/۰۰۰۱۰۳ متر بدست آمده است.



شکل ۱۴- جابجایی سمت چپ و راست مرز سازه

شکل ۱۵ به بررسی مولفه‌های سرعت در مرز خروجی پرداخته شده است. شکل ۱۵ الف و ب به‌ترتیب مربوط به مولفه‌های سرعت در راستای y و x مرز خروجی پژوهش حاضر می‌باشد.

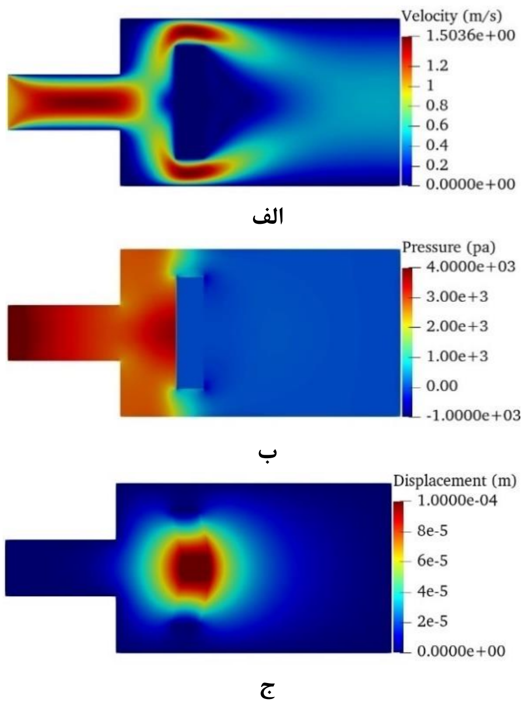


شکل ۱۵- مولفه‌های سرعت y و x در مرز خروجی

همانطور که مشخص است با توجه به شرط عدم لغزش، سرعت در Y=0 و Y=3 برابر با صفر بوده همچنین در X=1.5 سرعت در راستای x داری مقدار بیشینه می‌باشد.

در ادامه کانتورهای سرعت، فشار و جابجایی مربوط به انتهای زمان مدلسازی t=1، که پاسخها به حالت پایدار همگرا شده است، در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

مطابق شکل ۱۶-الف سرعت بیشینه ۱/۵۰۳۶ m/s در نواحی بالا و پایین سازه مشاهده می‌شود. همچنین بیشینه جابجایی مربوط به نقطه A مطابق شکل ۱۵-ج برابر با ۰/۰۰۰۱۰۷ متر می‌باشد و فشار وارد بر آن مطابق با شکل ۱۵-ب، برابر با ۳۶۵۰ پاسکال می‌باشد.



شکل ۱۶ الف) کانتور سرعت ب) کانتور فشار ج) کانتور جابجایی

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل مسائل اندرکنش سیال-سازه با استفاده از فرمول‌بندی یکپارچه در چهارچوب توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) و پیاده‌سازی آن در محیط برنامه‌نویسی FEniCS انجام شد. استفاده از یک روش جفت قوی برای حل همزمان معادلات سیال و سازه، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر

اندرکنش این دو حوزه را فراهم آورد و موجب بهبود همگرایی و پایداری محاسباتی گردید.
نتایج به‌دست‌آمده در بخش ۵-۱ نشان داد که این رویکرد، ضمن کاهش زمان محاسباتی در هر تکرار، از دقت بالاتری نسبت به روش‌های تقسیم‌بندی‌شده برخوردار است. به‌طور میانگین هر گام از تحلیل در رویکرد تقسیم‌بندی شده ۵۱ ثانیه و هر گام از تحلیل در رویکرد یکپارچه ۷ ثانیه به‌طول انجامیده است.
همچنین، بررسی‌های عددی و پارامتریک شامل تأثیر عدد رینولدز و تحلیل حساسیت به مش، کارایی روش ارائه‌شده را در شرایط مختلف تأیید کرد.
استفاده از رویکرد یکپارچه برای عدد رینولدز ۷۰ عملکرد بهتری در مقایسه با رویکرد تقسیم‌بندی شده از خود نشان داد و ضمن حذف اثر جرم افزوده توانست پاسخ‌های همگرا و پایدار ارائه دهد.
بررسی‌های عددی نشان داد که کد موجود مشابه با سایر مقالات مشابه، تا عدد رینولدز ۱۰۰ نیز پاسخ‌های قابل اعتمادی تولید می کند.
همچنین با بررسی اثر وابستگی مش مشخص گردید افزایش درجات آزادی از ۸۵۴۵۲ به ۱۱۴۱۰۲۷، منجربه تغییرات اندکی در فشار (۳۶۰۵ به ۳۶۵۰ پاسکال) و جابجایی (۰/۰۰۲۳۲ به ۰/۰۰۲۳۵ متر) می¬شود که نشان‌دهنده وابستگی ناچیز به ابعاد مش است.
مقایسه هزینه محاسباتی این روش با رویکرد تقسیم‌بندی‌شده، برتری آن را در کاهش زمان محاسباتی و بهبود کیفیت پاسخ‌ها برجسته ساخت. استفاده از این رویکرد می‌تواند به‌عنوان راهکاری کارآمد برای حل مسائل پیچیده اندرکنش سیال-سازه در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار گرفته و همچنین برای مسائل مرتبط با تغییر شکل‌های بزرگ نیز به‌منظور جلوگیری از ناپایداری‌های حل عددی قابل تعمیم خواهد بود.

فهرست علائم

$\boldsymbol{\sigma_f}$	تانسور تنش سیال
p	فشار سیال (N/m²)
ρ_f	چگالی سیال (kg/m³)
v_f	ویسکوزیته سینماتیکی (m²/s)
v_f	مولفه سرعت سیال(m/s)
μ_f	ویسکوزیته دینامیکی (kg/m.s)
v_{in}	سرعت ورودی (m/s)
ρ_s	چگالی سازه (kg/m³)
ν_s	ضریب پواسون
E	مدول الاستیسیته (N/m²)
u	بردار جابجایی (m)
w_f	بردار جابجایی مش سیال (m)
$\boldsymbol{\sigma_s}$	تانسور تنش جامد
Γ	فصل مشترک سیال و جامد
$\partial\Omega^D$	مرز دیریکله
$\partial\Omega^N$	مرز نئومان
λ_s	ضریب لامه
μ_s	مدول برشی (N/m²)
$\boldsymbol{\epsilon}$	تانسور کرنش سازه
Δt	گام زمانی (s)
CFL	عدد کورانت
Re	عدد رینولدز
$U_{\max}$	سرعت بیشینه (m)
Δx	اندازه شبکه (m)

مراجع

[1] C. Farhat, K. G. Van der Zee, and P. Geuzaine, "Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 195, no. 17-18 ,pp. 1973-2001, 2006.

[2] J. Hoffman, J. Jansson, and N. Jansson, "FEniCS-HPC: Automated predictive high-performance finite element computing with applications in aerodynamics," in Parallel Processing and Applied Mathematics: 11th International Conference , PPAM 2015, Krakow, Poland, September 6-9, 2015. Revised Selected Papers, Part I 11, 2016: Springer, pp. 356-365 .

[3] G. Link, M. Kaltenbacher, M. Breuer, and M. Döllinger, "A 2D finite-element scheme for fluid–solid–acoustic interactions and its application to human phonation," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 41-44, pp. 3321-3334, 2009.

[4] Y. Bazilevs, M. C. Hsu, J. Kiendl, R. Wüchner, and K. U. Bletzinger, "3D simulation of wind turbine rotors at full scale. Part II: Fluid–structure interaction modeling with composite blades," Int. J. num. methods in fluids, vol. 65, no. 1-3, pp. 236-253, 2011.

[5] R. Castilla, P. Gamez-Montero, N. Ertürk, A. Vernet, M. Coussirat, and E. Codina, "Numerical simulation of turbulent flow in the suction chamber of a gearpump using deforming mesh and mesh replacement," Int. J. Mech. Sci., vol. 52, no. 10, pp. 1334-1342, 2010.

[6] R. K. Jaiman, F. Shakib, O. H. Oakley Jr, and Y. Constantinides, "Fully coupled fluid-structure interaction for offshore applications," in International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2009, vol. 43451, pp. 757-765 .

[7] M. R. Ross, M. A. Sprague, C. A. Felippa, and K. Park, "Treatment of acoustic fluid–structure interaction by localized Lagrange multipliers and

comparison to alternative interface-coupling methods," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 9-12, pp. 986-1005, 2009.

[۸] ا. کیانی و م. محمدی امین، "مطالعه عددی نوسانات پایدارکننده انعطاف‌پذیر متصل به جسم در حال ارتعاشات اجباری با استفاده از شبیه‌سازی اندرکنش سیال– سازه"، مکانیک سازه ها و شاره ها، دوره ۹، شماره ۲، صفحات ۴۷-۵۹، ۲۰۱۹.

[9] S. Turek and J. Hron, Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow. Springer, 2006.

[10] L. Shang, C. Hoareau, and A. Zilian, "Modeling and simulation of thin-walled piezoelectric energy harvesters immersed in flow using monolithic fluid–structure interaction," Finite Elements in Analysis and Design, vol. 206, p. 103761, 2022.

[11] J. Hron, A. Ouazzi, and S. Turek, "A computational comparison of two FEM solvers for nonlinear incompressible flow," in Challenges in Scientific Computing-CISC 2002: Proceedings of the Conference Challenges in Scientific Computing Berlin, October 2–5, 2002, 2003: Springer, pp. 87-109 .

[12] S. Bna, "Multilevel domain decomposition algorithms for monolithic fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics," 2014.

[13] J. Degroote, K.-J. Bathe, and J. Vierendeels, "Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid–structure interaction," Computers & Structures, vol. 87, no. 11 ,۱۲-pp. 793-801, 2009.

[14] P. Causin, J.-F. Gerbeau, and F. Nobile, "Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 194, no. 42-44, pp. 4506-4527, 2005.

[15] E. H. van Brummelen, "Added mass effects of compressible and incompressible flows in fluid-structure interaction," 2009.

[16] S. R. Idelsohn, F. Del Pin, R. Rossi, and E. Oñate, "Fluid–structure interaction problems with strong added-mass effect," Int. J. for numerical methods in engineering, vol. 80, no. 10, pp. 1261-1294, 2009.

[17] A. E. Bogaers, S. Kok, B. D. Reddy, and T. Franz, "An evaluation of quasi-Newton methods for application to FSI problems involving free surface flow and solid body contact," Computers & Structures, vol. 173, pp. 71-83, 2016.

[18] U. Küttler, M. Gee, C. Förster, A. Comerford, and W. Wall, "Coupling strategies for biomedical fluid–structure interaction problems," Int. J. Num. Methods in Biomedical Engineering, vol. 26, no. 3-4, pp. 305-321, 2010.

[19] H.-J. Bungartz, M. Mehl, and M. Schäfer, Fluid Structure Interaction II: Modelling, Simulation, Optimization. Springer Science & Business Media, 2010.

[20] U. Langer and H. Yang, "Numerical simulation of fluid-structure interaction problems with hyperelastic models I: A partitioned approach," arXiv preprint arXiv:1312.5561, 2013.

[21] G. A. Holzapfel, "Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science," ed: Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 2002.

[22] Z. Więckowski, "The material point method in large strain engineering problems," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 193, no. 39-41, pp. 4417-4438, 2004.

[23] T. Wick, "Adaptive finite element simulation of fluid-structure interaction with application to heart-valve dynamics," 2011 .

[۲۴] س. اصیل قره‌باغی و م. شیرزاد، "مطالعه عددی رفتار دینامیکی استوانه‌های در معرض جریان با تکیه‌گاه غیرخطی"، نشریه علمی-پژوهشی مهندسی دریا، دوره ۱۹، شماره ۴۰، صفحات ۴۲-۳۰، ۲۰۲۳.

[۲۵] س. اصیل قره‌باغی و م. شیرزاد، "ارزیابی پارامترهای هیدرودینامیکی در ارتعاش ناشی از گردابه سازه‌های استوانه ای با تکیه‌گاه غیرخطی"، مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۲۴، شماره ۹، صفحات ۵۵۷-۵۶۶، ۲۰۲۴.

[26] S. Asil Gharebaghi and M. Shirzad, "Chaotic Vortex-Induced Vibrations of Rigid Cylinders with Nonlinear Snapping Support," Int.J. Bifurcation and Chaos, vol. 34, no. 08, p. 2450096, 2024, doi: 10.1142/s0218127424500962.

[27] T. J. Hughes, W. K. Liu, and T. K. Zimmermann, "Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 29, no. 3, pp. 329-349, 1981.

[28] J. Donea, S. Giuliani, and J.-P. Halleux, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 33, no. 1-3, pp. 689-723, 1982.

[29] N. Jenkins and K. Maute, "An immersed boundary approach for shape and topology optimization of stationary fluid-structure interaction problems," Structural and Multidisciplinary Optimization ,vol. 54, pp. 1191-1208, 2016.

[30] S. Tschisgale and J. Fröhlich, "An immersed boundary method for the fluid-structure interaction of slender flexible structures in viscous fluid," J. Comput. Phys., vol. 423, p. 109801, 2020.

[31] J. Hron and S. Turek, "A monolithic FEM/multigrid solver for an ALE formulation of fluid-structure interaction with applications in biomechanics," in Fluid-Structure Interaction:

Modelling, Simulation, Optimisation: Springer, 2006, pp. 146-170.

[32] J. Baiges and R. Codina, "The fixed-mesh ALE approach applied to solid mechanics and fluid–structure interaction problems," Int. J. for numerical methods in engineering, vol. 81, no. 12, pp. 1529-1557, 2010.

[33] M. Razzaq, R. Owais, M. Anwar, and F. Abbas, "Finite Element Method for Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction of a Vertical Flap in a Channel and Aneurysm Hemodynamics," 2023.

[34] R. Nemer, A. Larcher, and E. Hachem, "Adaptive Immersed Mesh Method (AIMM) for Fluid–Structure Interaction ",Computers & Fluids, vol. 277, p. 106285, 2024.

[35] S. Basting, A. Quaini, S. Čanić, and R. Glowinski, "Extended ALE method for fluid–structure interaction problems with large structural displacements," J. Computational Physics, vol. 331, pp. 312.۲۰۱۷ ,۳۳۶-

[36] F. M. White and J. Majdalani, Viscous fluid flow. McGraw-Hill New York, 2006.

[37] R. Lan, M. J. Ramirez, and P. Sun, "Finite element analysis of an arbitrary Lagrangian–Eulerian method for Stokes/parabolic moving interface problem with jump coefficients," Results in Applied Mathematics, vol. 8, p. 100091, 2020.

[38] J. Donea and A. Huerta, Finite element methods for flow problems. John Wiley & Sons, 2003.

[39] A. M. Winslow, "Adaptive-mesh zoning by the equipotential method," Lawrence Livermore National Lab.(LLNL), Livermore, CA (United States), 1981 .

[40] D. Han, G. Liu, and S. Abdallah, "An Eulerian-Lagrangian-Lagrangian method for 2D fluid-structure interaction problem with a thin flexible structure immersed in fluids," Computers & Structures, vol. 228, p. 106179, 2020.

[41] C. Taylor and P. Hood, "A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique," Computers & Fluids, vol. 1, no. 1, pp. 73-100, 1973.

[42] Z. Ge, M. Feng, and Y. He, "Stabilized multiscale finite element method for the stationary Navier–Stokes equations," J. mathematical analysis and applications, vol. 354, no. 2, pp. 708-717, 2009.

[43] P. Sun, C.-S. Zhang, R. Lan, and L. Li, "An advanced ALE-mixed finite element method for a cardiovascular fluid–structure interaction problem with multiple moving interfaces," J. Computational Science, vol. 50, p. 101300, 2021.

[44] M. Alnæs et al., "The FEniCS project version 1.5," Archive of numerical software, vol. 3, no. 100, 20.

[45] A. Logg, K.-A. Mardal, and G. Wells, Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Springer Science & Business Media, 2012.

[46] T. Wick, "Flapping and contact FSI computations with the fluid–solid interface-tracking/interface-capturing technique and mesh adaptivity," Computational Mechanics, vol. 53, pp. 29-43, 2014.

[47] S. T. Ha, L. C. Ngo, M. Saeed, B. J. Jeon, and H. Choi, "A comparative study between partitioned and monolithic methods for the problems with 3D fluid-structure interaction of blood vessels," J.Mech. Sci. Tech., vol. 31, pp. 281-287, 2017.

[48] M. Bucelli, L. Dede, A. Quarteroni, and C. Vergara, "Partitioned and monolithic algorithms for the numerical solution of cardiac fluid-structure interaction," Communications in Computational Physics, vol. 32, no. 5, pp. 1217-1256, 2023.

[49] D. Appelö, L. Zhang, T. Hagstrom, and F. Li, "An energy-based discontinuous Galerkin method with tame CFL numbers for the wave equation," BIT Numerical Mathematics, vol. 63, no. 1, p. 5, 2023.