مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال 1393/ دوره 4/ شماره 3/ صفحه 55-45

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

استفاده از روش ایزوژئومتریک در مدل‌سازی شکست سد با دیدگاه لاگرانژی

رامین امینی[1]، رضا مقصودی[2,*]، ناصر ظریف مقدم باصفت[3]

[1] استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود، شاهرود

[2] دانشجوی دکتری عمران، گرایش هیدرولیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

[3] مدرس دانشکده فنی-حرفه‌ای شهید منتظری، مشهد

تاریخ دریافت: 1392/10/05؛ تاریخ بازنگری: 1393/07/16؛ تاریخ پذیرش: 1393/10/23

چکیده

بررسی شکست سد همواره مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. که به صورت دیدگاه لاگرانژی و دیدگاه اویلری مدل شده است. در این مقاله برای مدل‌سازی جریان شکست سد با توجه به دیدگاه لاگرانژی، از روش ایزوژئومتریک استفاده شده است. معادلات حاکم بر جریان، معادلات بقای جرم و بقای ممنتوم می‌باشند که به شکل لاگرانژی با استفاده از روش تصحیح فشار حل شده‌اند. برای گسسته‌سازی مکانی از روش حداقل مربعات استفاده می‌شود. با استفاده از روش ایزوژئومتریک دستگاه معادلات دارای ابعاد بسیار کمتر نسبت به دیگر روش‌ها (روش اجزای محدود و روش بدون شبکه) می‌باشد. همچنین ماتریس سختی متقارن و دارای مقادیر مثبت می‌باشد. توابع نربز به عنوان توابع شکل استفاده می‌شود. پروفیل سطح آزاد، بردار سرعت و مقادیر فشار بدست آمده از روش ایزوژئومتریک در زمان‌های مختلف با روش بدون شبکه مقایسه می‌شود. نتایج نشان دهنده توانایی روش پیشنهادی برای حل مسائل سیال متحرک با حرکت شرایط مرزی می‌باشد.

کلمات کلیدی: شکست سد؛ دیدگاه لاگرانژی؛ روش ایزوژئومتریک؛ حداقل مربعات؛ توابع نربز.

Using isogeometric method for dam break modeling by Lagrangian approach

R. Amini[1], R. Maghsoodi[2,*], N. Z. Moghaddam[3]

[1] Assis. Prof., Civil. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

[2] Ph.D. Student, Civil. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

[3] Lecturer, Shahid Montazeri Technical and Vocational Univ., Mashhad, Iran

Abstract

Dam break time history have always been the intrest of many researchers. This phenomena can be modeled by Eulerian or Lagrangian approach which each of them have their benefits and disadvantages. In this paper isogeometric method is utilized for modeling flow in dam break analysis by Lagrangian approach. Mass and momentum conservation laws are governing equations of flow which are solved by pressure correction in Lagrangian approach. Least square method is used for discretization of space. Matrix size is notably smaller in isogeometric method in comparison with other methods (finite elements and meshless methods). Also stiffness matrix is symmetric and positive definitive. NURBS (Non - Uniform Rational B-Spline) functions are used as shape functions. Free surface profile and pressure values of isogeometric method in different times are compared with a meshless method. The results indicate the ability of the proposed method in solution of moving fluid with moving boundaries.

Keywords: Dam break; Lagrangian approach; Isogeometric analysis; Least Squares method; NURBS (Non-uniform Rational B-Splines).

* نویسنده مسئول؛ تلفن: 9158724512(98+)؛ فکس: **********

آدرس پست الکترونیک: maghsoodi81@yahoo.com

1- مقدمه

بررسی پدیده‌های طبیعی همواره مورد توجه محققان و پژوهشگران بوده است. این کار به دو صورت آزمایشگاهی و حل معادلات حاکم انجام می‌گیرد که هر کدام دارای معایب و مزایایی می‌باشند. از جمله معایب مدل آزمایشگاهی می‌توان به هزینه نسبتا زیاد، خطا در اندازه‌گیری اطلاعات و طولانی بودن انجام آزمایش اشاره نمود. حل معادلات حاکم به دو صورت تحلیلی و مدل‌سازی عددی[1] انجام می‌گیرد. حل تحلیلی در مسائل پیچیده بسیار سخت و گاهی غیر ممکن می‌شود. با توجه به توسعه کامپیوترها رشد مدل‌های عددی قابل ملاحظه می‌باشد. این روش‌ها به نام دینامیک سیالات محاسباتی[2] معروف می‌باشد. از امتیازهای مهم مدل‌سازی عددی می‌توان به هزینه کم، زمان مناسب و اطلاعات کامل نسبت به کارهای آزمایشگاهی نام برد.

یکی از پدیده‌های که همواره مورد توجه محققین است، جریان شکست سد می‌باشد. بررسی این پدیده به‌صورت آزمایشگاهی، حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی صورت گرفته است. از مدل‌های تحلیلی به دلیل پیچیده بودن آنها کمتر استفاده می‌شود. از جمله مشکلات روش‌های تحلیلی می‌توان حل معادلات غیر خطی بسیار مشکل، اعمال شرایط مرزی بسیار سخت و غیر هندسی بودن دامنه‌ی محاسباتی اشاره کرد [1].

برای تحلیل مسائل مکانیک سیالات سه دیدگاه وجود دارد [2]:

1- روش‌های اویلری[3]: در این روش‌ها، یک دستگاه مختصات ثابت در فضا در نظر گرفته می‌شود و جریان سیال تنها در این دستگاه ثابت بررسی می‌شود [3]. این روش‌ها بیشتر برای مسائلی که مرزهای میدان جریان تغییر چندانی ندارد مناسب می‌باشند. در این روش برای مدل کردن سطح آزاد می‌توان از روش حجم سیال[4] استفاده نمود [4].

2- روش‌های لاگرانژی[5]: در این روش‌ها دستگاه مختصات همراه با سیال حرکت می‌کند بدین معنی که ذرات سیال در طول زمان ردیابی می‌شوند و تغییرات خصوصیاتشان مورد بررسی قرار می‌گیرد و معمولا برای مسائلی که در آنها مرزهای میدان جریان تغییرات زیادی دارند مناسب می‌باشند [5].

3- روش‌های ترکیبی لاگرانژی و اویلری: که ترکیبی از دو روش بالا می‌باشند.

با توجه به اینکه هر یک از روش‌های بالا دارای مزایا و معایبی می‌باشند، برای انتخاب یکی از روش‌های بالا باید به شرایط مسئله و خصوصیات آن توجه نمود و سپس روش مدنظر را انتخاب کرد.

روش‌های عددی را می‌توان به دو گروه با شبکه و بدون شبکه تقسیم‌بندی نمود. از جمله روش‌های با شبکه می‌توان روش تفاضل محدود[6]، روش حجم محدود[7] و روش اجزای محدود[8] را نام برد. در روش‌های بدون شبکه برای گسسته‌سازی معادلات نیازی به شبکه‌بندی نیست، مانند روش بدون شبکه[9] [6].

از جمله معایب این روش‌ها می‌توان به ضعف در تولید دقیق مسایل دارای هندسه‌ی پیچیده و نیاز به تولید مکرر شبکه‌ی المان‌ها در مسائلی که در دیدگاه لاگرانژیی حل می‌شوند اشاره نمود (به جز روش بدون شبکه). برای غلبه بر این مشکلات در سال‌های 1998 تا 2004 توسط کیگان[10] و هولیگ[11] به جای توابع شکل اجزای محدود از توابع پایه اسپلاین استفاده کردند [7-9]. هیوز[12] در سال 2005 از توابع نربز به جای توابع اسپلاین استفاده کرد و روش تحلیل ایزوژئومتریک را ابداع کرد [10]. برتری توابع نربز[13] نسبت به توابع پایه اسپلاین مدل کردن بهتر اشکال دارای انحناء می‌باشد [10]. به علت استفاده از شرایط یکسان در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول، نام این روش «تحلیل ایزوژئومتریک[14]» انتخاب شد. به‌طور خلاصه می‌توان مزایای روش ایزوژئومتریک را به‌صورت زیر بیان نمود [11]:

---

1 Numerical Modeling
2 Computational Fluid Dynamics (CFD)
3 Eulerian Methods
4 Volume of fluid
5 Lagrangian Methods
6 Finite difference
7 Finite Volume
8 Finite element
9 Meshless
10 Kagan
11 Hollig
12 Hughes
13 Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)
14 Isogeometric Analysis

- مدل‌سازی بسیار دقیق‌تر هندسه نسبت به روش اجزای محدود.
- با توجه به استفاده از شبکه کنترلی موجب کاهش وابستگی مدل‌سازی هندسه به ریز یا درشت بودن شبکه‌بندی.
- امکان استفاده از روش‌های معمول حل معادلات دیفرانسیل که در روش اجزای محدود استفاده می‌شود.
- کاهش قابل ملاحظه در اندازه دستگاه معادلات نسبت به روش‌های دیگر.
- نیاز نداشتن به تولید مکرر شبکه در مسائلی که در دیدگاه لاگرانژی حل می‌شوند.

روش ایزوژئومتریک به سرعت در دینامیک سیالات توسعه یافته است [12-18]. آکرمن[1] و همکاران با روش ایزوژئومتریک و در نظر گفتن دیدگاه اویلری به بررسی مسائل سطح آزاد مانند شکست سد پرداخته‌اند [18]. آنها برای مدل‌سازی سطح آزاد از روش سطح تراز[2] استفاده کرده‌اند. دکتر حسنی[3] و همکاران با استفاده از آنالیز ایزوژئومتریک معادله لاپلاس را حل کرده‌اند و علاوه بر خصوصیات فوق الذکر، به نتایجی از جمله توانایی قابل ملاحظه در حل معادلات نسبت به روش اجزای محدود و حساس نبودن روش ایزوژئومتریک به نحوه چیدمان نقاط کنترلی برای مسائل دیدگاه لاگرانژی دست یافتند [19].

2- آشنایی با منحنی و سطوح نربز

در این قسمت به‌طور مختصر توابع ب-اسپلاین و توابع نربز توضیح داده می‌شود. برای مطالعه بیشتر به مراجع [20 و 21] رجوع شود. نربز از ب-اسپلاین ساخته می‌شود. یک بردار گرهی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [21]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \qquad \xi_{i+1} \geq \xi_i, \quad i = 1,2,\dots,n+p+1 \tag{1}$$

که ξ_i امین گره؛ i شاخص گره، p درجه چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه می‌باشد. اگر گره‌ها دارای فواصل مساوی باشند، بردار گرهی یکنواخت می‌گویند و اگر دارای فواصل نابرابر باشند بردار گرهی غیریکنواخت نامیده می‌شود. یک بردار گرهی باز نامیده می‌شود که اولین و آخرین گره $p+1$ مرتبه تکرار شده باشد. بردار گرهی باز استاندارد به‌صورت زیر تعریف می‌شود [21]:

$$\Xi = \Big\{\underbrace{a, \cdots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\Big\} \tag{2}$$

تابع پایه ب-اسپلاین iام از درجه p با $N_{i,p}$ نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود [21]:

$$N_{i,0} = \begin{Bmatrix} 1 & if \quad \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & otherwise \end{Bmatrix}$$
$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{3}$$

بازه $[\xi_i, \xi_{i+1})$ iامین فاصله گرهی و یا المان گره iام نامیده می‌شود. بنابراین منحنی ب-اسپلاین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) P_i \qquad a \leq \xi \leq b \tag{4}$$

که $\{P_i\}$ نقاط کنترل، و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ pامین درجه تابع پایه ب-اسپلاین می‌باشد. برای مثال با استفاده از $\Xi=\{0,1,2,3,4,\dots\}$ به‌عنوان بردار گرهی توابع پایه ب-اسپلان با درجات $p=0,1,2$ در شکل 1 نشان داده شده است [10].

سطح ب-اسپلاین نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi)\, N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \tag{5}$$

با بردار گرهی

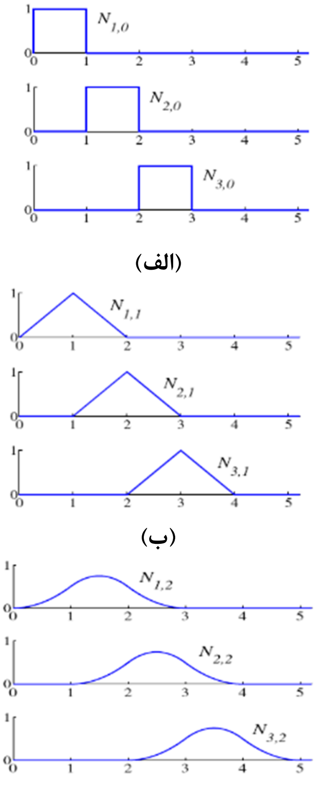
$$\Xi = \Big\{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\Big\}$$
$$H = \Big\{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \xi_{q+1}, \dots, \xi_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\Big\} \tag{6}$$

که Ξ و H به ترتیب دارای $r+1$ و $s+1$ گره می‌باشند.

در شکل 2 نحوه تولید توابع پایه سطح ب-اسپلاین نشان داده شده است [21].

---

[1] I. Akkerman
[2] Level set
[3] Hassani



شکل 1- توابع پایه الف) درجه صفر، ب) درجه یک، ج) درجه دو

منحنی درجه p نربز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

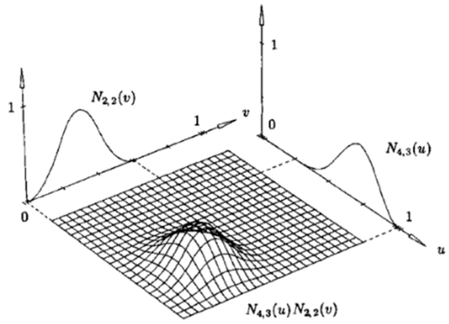
$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i} \qquad a \le \xi \le b \tag{7}$$

که $\{P_i\}$ نقاط کنترل، $\{w_i\}$ وزن‌ها، و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ تابع ب-اسپلاین درجه p می‌باشد. به‌طور مشابه سطح نربز درجه p به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi,\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \qquad 0 \le \xi,\eta \le 1 \tag{8}$$

که $\{P_i\}$ شبکه کنترل، $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها، و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{i,q}(\eta)\}$ توابع پایه ب-اسپلاین می‌باشد. با در نظر گرفتن:

$$R_{i,j}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \qquad 0 \le \xi,\eta \le 1 \tag{9}$$

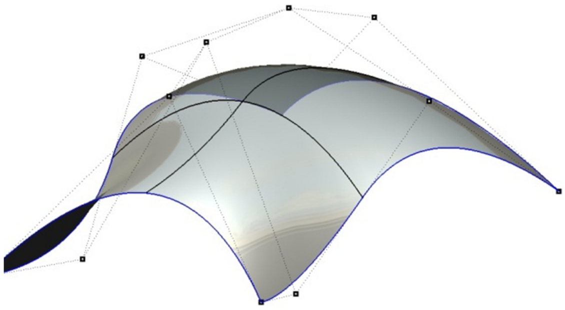


شکل 2- توابع پایه ب–اسپلاین در تولید سطوح

رابطه (8) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,p}(\xi,\eta) P_{i,j} \qquad 0 \le \xi,\eta \le 1 \tag{10}$$

در شکل 3 مثالی از شبکه نقاط کنترلی و سطح تولید شده با نربز نشان داده شده است.



شکل 3- مثالی از شبکه‌ی کنترل و سطح نربز

3- گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی

معادلات حاکم بر جریان غیرویسکوز به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla.\vec{\mathbf{u}} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{D\vec{\mathbf{u}}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{\mathbf{g}} \tag{12}$$

روابط (11) و (12) به ترتیب معادله بقای جرم و معادله بقای ممنتوم در حالت تراکم‌پذیر می‌باشند. در این معادلات:
ρ: چگالی، $\vec{\mathbf{u}}$: بردار سرعت، P: فشار، $\vec{\mathbf{g}}$: شتاب ثقل، t: زمان، $\frac{D}{Dt}$ عملگر مشتق مادی[1] می‌باشند.

[1] Material Derivative operator

3-1- شرایط مرزی

برای فشار دو نوع شرایط مرزی متمایز در مسائل سطح آزاد وجود دارد. اولین شرط فشار اتمسفر روی سطح آزاد (شرط دریشله[1]) و دومین شرط روی سطح دیوار می‌باشد (شرط نیومن[2]). این دو شرط به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} P &= 0 \quad \text{مرز سطح آزاد} \\ \frac{\partial P}{\partial n} &= 0 \quad \text{مرز دیوار} \end{aligned} \tag{13}$$

که n بردار واحد عمود به سمت بیرون دیوار می‌باشد.

3-2- گسسته‌سازی زمانی معادلات حاکم

گسسته‌سازی زمانی را به صورت دو مرحله انجام می‌دهیم. در مرحله اول فقط عبارت گرانشی معادله (12) را در نظر می‌گیریم (مرحله پیش‌بینی) که برای پیش‌بینی سرعت و موقعیت ذره استفاده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{g}.\Delta t \tag{14}$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^t + \Delta \mathbf{u}^* \tag{15}$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^t + \mathbf{u}^* \Delta t \tag{16}$$

که $\mathbf{u}^t$ سرعت ذره، $\mathbf{r}^t$ موقعیت ذره در زمان t، $\mathbf{u}^*$ سرعت موقتی ذره، $\mathbf{r}^*$ موقعیت ذره و $\Delta \mathbf{u}^*$ تغییر سرعت ذره در طی مرحله پیش‌بینی می‌باشد.

در مرحله دوم که مرحله تصحیح نامیده می‌شود، عبارت فشار برای محاسبه تغییرات اصلاحی در سرعت ذره بکار برده می‌شود:

$$\Delta \mathbf{u}^{**} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{t+1} \Delta t \tag{17}$$

$$\mathbf{u}^{t+1} = \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}^{**} \tag{18}$$

که $\Delta \mathbf{u}^{**}$ تغییر سرعت ذره در طی مرحله تصحیح، P^{t+1} فشار ذره در زمان $t + 1$، $\mathbf{u}^{t+1}$ سرعت ذره در زمان $t + 1$ می‌باشد.

اما برای محاسبه $\Delta \mathbf{u}^{**}$ نیاز به تعیین توزیع فشار در زمان $t + 1$ می‌باشد.

$$\nabla^2 P^{t+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla . \mathbf{u}^* \tag{19}$$

[1] Dirichlet condition
[2] Neuman condition

حال برای محاسبه سرعت جدید ذرات می‌توان از روابط (17) و (18) استفاده کرد. در نهایت موقعیت جدید ذرات به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{r}^{t+1} = \mathbf{r}^t + \frac{\mathbf{u}^{t+1} + \mathbf{u}^t}{2} \Delta t \tag{20}$$

که $\mathbf{r}^t$ موقعیت ذره در زمان t و $\mathbf{r}^{t+1}$ موقعیت ذره در زمان $t + 1$ می‌باشد.

3-3- مقدار گام زمانی

برای پایداری حل باید گام زمانی در هر مرحله کنترل شود. بدین منظور از تعریف شرایط کورانت استفاده می‌کنیم [21]:

$$\Delta t \le 0.1 \frac{l_0}{\mathbf{u}_{max}} \tag{21}$$

که l_0 فاصله‌ی اولیه ذره و $\mathbf{u}_{max}$ حداکثر سرعت ذره در محاسبات می‌باشد. ضریب 0.1 در جهت اطمینان است.

3-4- گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش ایزوژئومتریک

هر دو روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک دارای پایه نظری یکسانی می‌باشند. برای گسسته‌سازی در روش ایزوژئومتریک می‌توان از روش‌های مرسوم در اجزای محدود استفاده نمود. معادله پواسون فشار با توجه به شرایط مرزی به‌صورت زیر دوباره نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P^{t+1} &= \frac{\rho}{\Delta t} \nabla . \mathbf{u}^* \\ P &= 0 \quad \text{مرز سطح آزاد} \\ \frac{\partial P}{\partial n} &= 0 \quad \text{مرز دیوار} \end{aligned} \tag{22}$$

رابطه (10) را به‌عنوان تابع شکل در نظر می‌گیریم. بنابراین مقدار تقریبی فشار P در نقطه (ξ_k, η_l) به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$P(\xi_k, \eta_l) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi_k, \eta_l) p_{i,j} \tag{23}$$

که $(n + 1) \times (m + 1)$ تعداد شبکه کنترلی و $p_{i,j}$ مقدار فشار می‌باشد. گرادیان و لاپلاس فشار با استفاده از رابطه (23) به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla P(\xi_k, \eta_l) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \nabla R_{i,j}(\xi_k, \eta_l) p_{i,j} \tag{24}$$

$$\nabla^2 P(\xi_k,\eta_l) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \nabla^2 R_{i,j}(\xi_k,\eta_l) p_{i,j} \tag{25}$$

با قرار دادن رابطه (23) در رابطه (22) باقی‌مانده معادله دیفرانسیل R^d، و باقی‌مانده شرط مرزی دریشله R^p و R^t باقی‌مانده شرط مرزی نیومن به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{k,l}^{(d)} &= \nabla^2 P_{k,l}^{t+1} - \frac{\rho}{\Delta t}\nabla.\mathbf{u}^* \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \nabla^2 R_{i,j}(\xi_k,\eta_l) p_{i,j}^{t+1} - \frac{\rho}{\Delta t}\nabla.\mathbf{u}^* \end{aligned} \tag{26}$$

$$R_{k,l}^{(p)} = P_{k,l}^{t+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi_k,\eta_l)\, p_{i,j}^{t+1} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} R_{k,l}^{(t)} &= \frac{\partial\left(P_{k,l}^{t+1}\right)}{\partial n} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{R_{i,j}(\xi_k,\eta_l) p_{i,j}^{t+1}}{\partial n} \end{aligned} \tag{28}$$

تابع حداقل مربعات در تمام نقاط کنترل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2}\Bigg(&\sum_{k=1}^{M_d}\left[R_{k,l}^{(d)}\right]^2 + \alpha.\sum_{k=1}^{M_p}\left[R_{k,l}^{(p)}\right]^2 \\ &+ \beta.\sum_{k=1}^{M_t}\left[R_{k,l}^{(t)}\right]^2 \Bigg) \end{aligned} \tag{29}$$

که M_d، M_p و M_t به ترتیب تعداد نقاط کنترل در قلمرو حل، روی مرز دریشله و روی مرز نیومن می‌باشد. α و β ضرایب پنالتی[1] دریشله و نیومن با مقادیر به اندازه کافی بزرگ که شرایط مرزی را ارضاء کنند، می‌باشند.

با حداقل‌سازی رابطه (29) نسبت به پارامتر گرهی $P_{i,j}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial P_{i,j}} = &\sum_{k=1}^{M_d} \frac{\partial R_{k,l}^{(d)}}{\partial P_{i,j}^{t+1}}\left[R_{k,l}^{(d)}\right] \\ &+ \alpha.\sum_{k=1}^{M_p} \frac{\partial R_{k,l}^{(p)}}{\partial P_{i,j}^{t+1}}\left[R_{k,l}^{(p)}\right] \\ &+ \beta.\sum_{k=1}^{M_t} \frac{\partial R_{k,l}^{(t)}}{\partial P_{i,j}^{t+1}}\left[R_{k,l}^{(t)}\right] \end{aligned} \tag{30}$$

با قرار دادن روابط (26) تا (28) در رابطه (30) دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^{t+1}\mathbf{F} \tag{31}$$

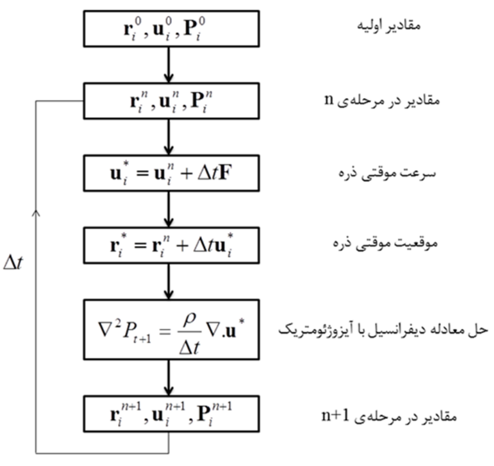
که $\mathbf{P}^{t+1}$ بردار پارامتری فشار در زمان $t + 1$، و ماتریس $\mathbf{K}$ و بردار $\mathbf{F}$ به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{lm} = &\sum_{i=1}^{M_d}[\nabla^2(N_l)]_i^T[\nabla^2(N_m)]_i \\ &+\alpha.\sum_{i=1}^{M_p}[(N_l)]_i^T[(N_m)]_i \\ &+\beta.\sum_{i=1}^{M_t}\left[\left(\frac{\partial N_l}{\partial n}\right)\right]_i^T\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial n}\right)\right]_i \\ &l,m = 1,\dots,M \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\boldsymbol{l}} = -&\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{M_d}}[\nabla^2(N_l)]_i^T\frac{\rho}{\Delta t}\nabla.\mathrm{u}_i^* \\ &l = 1,\dots,M \end{aligned} \tag{33}$$

که M کل تعداد گره‌ها شامل M_d، M_p و M_t می‌باشد. ماتریس K در رابطه (32) متقارن و مثبت می‌باشد.

هر زمان که توزیع فشار مشخص شد، با استفاده از رابطه (17) مقدار تصحیح شده $\Delta\mathbf{u}^{**}$ تعیین می‌شود و با رابطه (18) مقدار $\mathbf{u}^{t+1}$ بدست می‌آید. پس از آن می‌توان جابجایی ذرات را محاسبه کرد. روند انجام برنامه در شکل 4 نشان داده شده است.

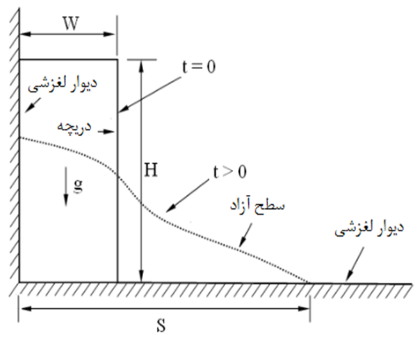


شکل 4- الگوریتم کوپل کردن سرعت-فشار

---
[1] Penalty coefficients

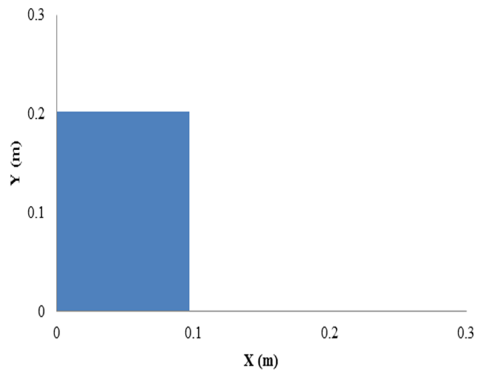
4- مدل‌سازی شکست سد

محقیقن بسیار زیادی به صورت آزمایشگاهی و به صورت عددی به بررسی شکست سد پرداخته‌اند [30-23]. مدل شکست سد در شکل 5 نشان داده شده است [31].



شکل 5- طرح مسئله‌ی شکست سد (مرجع [31])

ارتفاع اولیه ستون آب را 0.2 متر و عرض آن را 0.1 متر در نظر می‌گیریم (شکل 6). در این بخش به بررسی نتایج مدل‌سازی شکست سد با استفاده از روش ایزوژئومتریک و مقایسه آن با مرجع [1] می‌پردازیم.



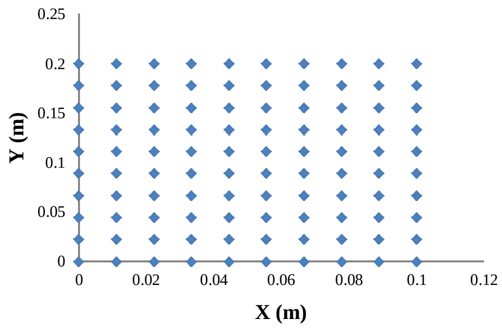
شکل 6- هندسه‌ی شکست سد

برای مدل‌سازی شکست سد با استفاده از روش ایزوژئومتریک درجه توابع نربز را 2 و تعداد نقاط کنترلی را برابر 100 در نظر می‌گیریم (شکل 7). وزن‌ها در تمامی نقاط کنترل برابر 1 می‌باشد.

بردارهای گرهی به صورت یکنواخت، باز و استاندارد می‌باشد. و به صورت زیر است:

[0 0 0 0.125 0.25 0.375 0.5 0.625 0.75 1 1 1]

در شکل 8 جواب‌های بدست آمده از روش ایزوژئومتریک در زمان‌های 0.1 و 0.15 ثانیه با جواب‌های روش بدون شبکه حداقل مربعات[1] مرجع [1] مقایسه شده است.



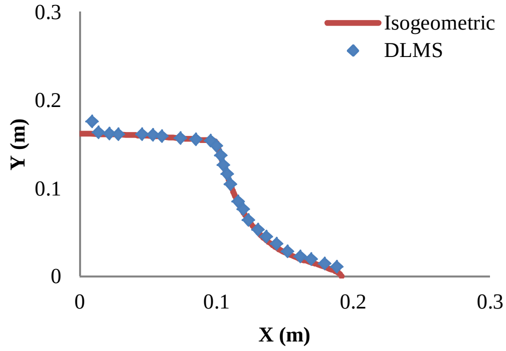
شکل 7- نقاط کنترلی برای مدل‌سازی روش ایزوژئومتریک

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن 100 نقطه کنترلی جواب‌ها بدست آمده از روش ایزوژئومتریک و روش بدون شبکه نزدیک به هم می‌باشد. برای مدل‌سازی در روش بدون شبکه 450 گره در نظر گرفته شده است (مرجع [1]). بنابراین دستگاه معادلات روش ایزوژئومتریک دارای اندازه بسیار کمتر نسبت به روش بدون شبکه می‌باشد.

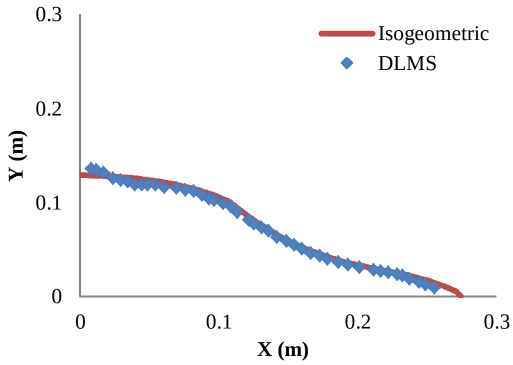
در شکل 9 و شکل 10 بردار سرعت و پروفیل فشار بدست آمده از دو روش ایزوژئومتریک و روش بدون شبکه در زمان‌های 0.1 و 0.15 ثانیه با هم مقایسه شده است.

خاطر نشان می‌سازد که در روش اجزای محدود با افزایش تعداد گره‌های المان، درجه توابع شکل افزایش می‌یابد ولی در روش ایزوژئومتریک، می‌توان بدون افزودن درجه توابع پایه اسپلاین، اقدام به افزایش تعداد نقاط کنترلی نمود. در نتیجه در روش اجزای محدود با افزایش درجه توابع شکل بایستی تعداد نقاط گوسی بیشتری را برای افزایش دقت انتگرال‌گیری عددی استفاده نمود در حالی که این کار در روش ایزوژئومتریک حساسیت بسیار کمتری را خواهد داشت. در نتیجه افزایش تعداد نقاط گوسی در روش ایزوژئومتریک فقط سبب افزایش حجم محاسبات شده و تاثیری در جواب نهایی نخواهد داشت.

---
[1] Discrete Least Squares Meshless Method (DLSM)

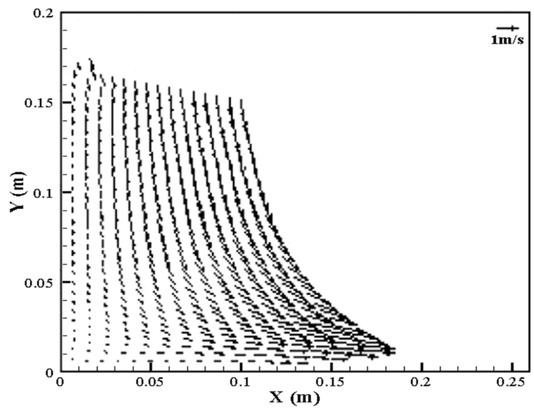


الف) 0/1 ثانیه

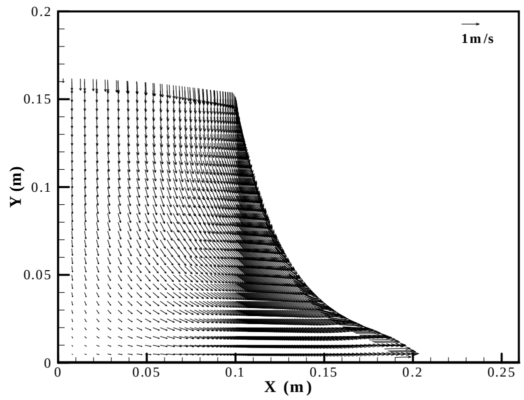


ب) 0/15 ثانیه

شکل 8- مقایسه مدل‌سازی سطح آزاد آب با استفاده از روش ایزوژئومتریک و روش بدون شبکه (مرجع [1]) در زمان‌های الف) 0/1ثانیه و ب) 0/15 ثانیه

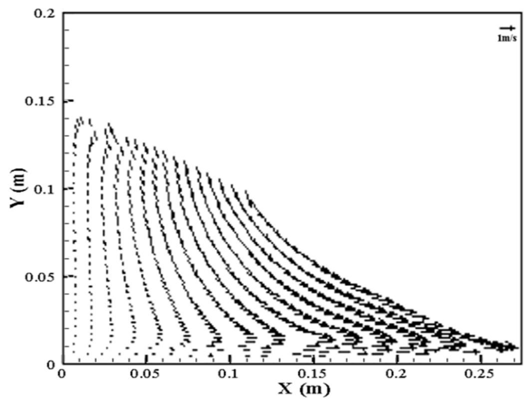


روش بدون شبکه (مرجع [1])

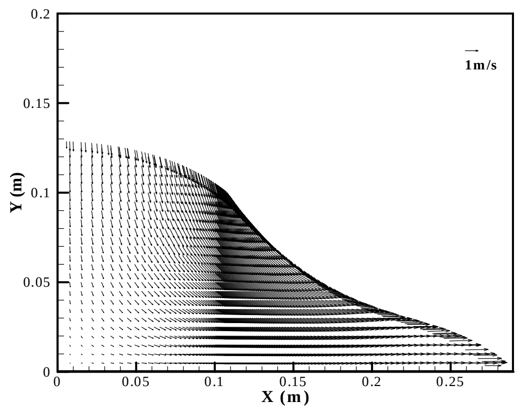


روش ایزوژئومتریک

الف) 0/1 ثانیه



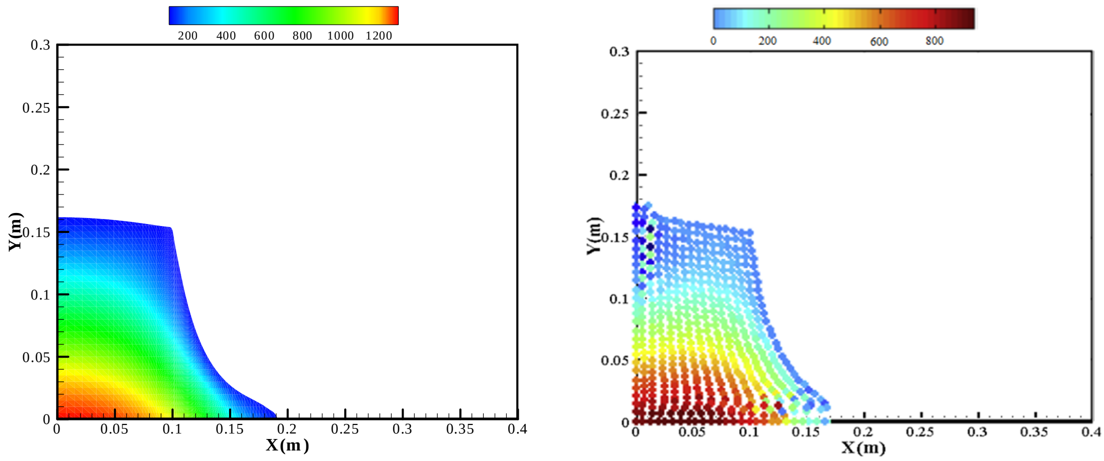
روش بدون شبکه (مرجع [1])



روش ایزوژئومتریک

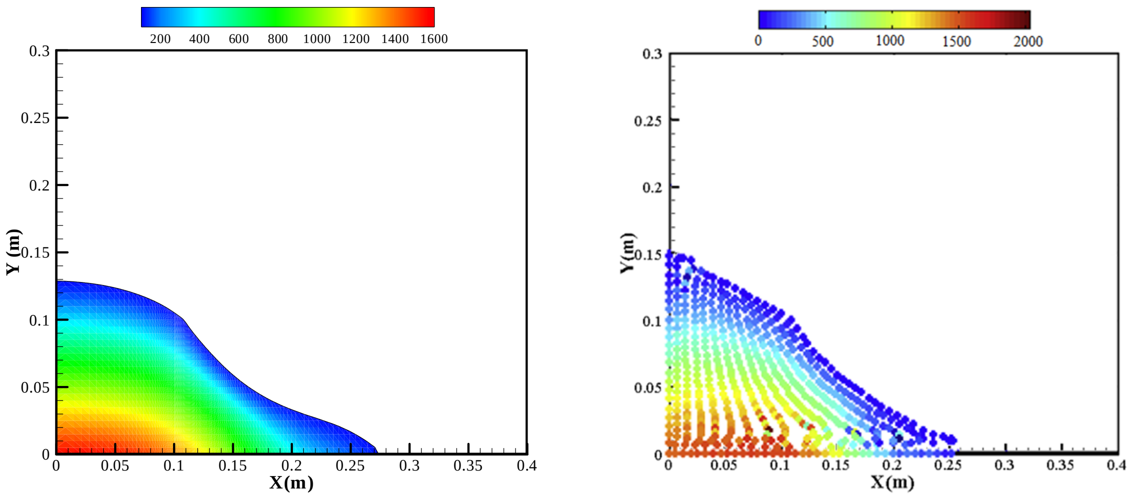
ب) 0/15 ثانیه

شکل 9- مقایسه مدل‌سازی بردار سرعت با استفاده از روش ایزوژئومتریک و روش بدون شبکه (مرجع [1]) در زمان‌های الف) 0/1 ثانیه و ب) 0/15 ثانیه



روش بدون شبکه (مرجع [1]) روش ایزوژئومتریک

الف) 0/1 ثانیه



روش بدون شبکه (مرجع [1]) روش ایزوژئومتریک

ب) 0/15 ثانیه

شکل 10- مقایسه‌ی مدل‌سازی پروفیل فشار با استفاده از روش ایزوژئومتریک و روش بدون شبکه (مرجع [1]) در زمان‌های الف) 0/1 ثانیه و ب) 0/15 ثانیه (برحسب پاسکال)

5- نتیجه‌گیری

یکی از برتری‌های روش ایزوژئومتریک حل مسائل با دیدگاه لاگرانژی می‌باشد که نیاز به شبکه‌بندی مکرر در زمان‌های مختلف نمی‌باشد. در این مقاله از این خصوصیت مهم روش ایزوژئومتریک برای مدل‌سازی شکست سد استفاده شده است. معادلات ناویر-استوکس با استفاده از روش پیش‌بینی فشار در زمان گسسته‌سازی می‌شوند. گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم با استفاده از روش حداقل مربعات انجام شده است. نتایج بدست آمده حاکی از قابلیت بالای مدل‌سازی شکست سد با روش ایزوژئومتریک با دیدگاه لاگرانژی می‌باشد. از خصوصیات دیگر روش ایزوژئومتریک کاهش قابل ملاحظه در دستگاه معادلات نسبت به روش‌های مشابه (مانند روش اجزای محدود و روش بدون شبکه) می‌باشد، که این نتیجه از مقایسه نتایج شکست سد با روی بدون شبکه بدست می‌آید.

فهرست علائم

Ξ	بردار گرهی در فضای پارامتری ξ
H	بردار گرهی در فضای پارامتری η
$N_{i,0}(\xi)$	iامین تابع پایه ب-اسپلاین از درجه صفر
$N_{i,p}(\xi)$	iامین تابع پایه ب-اسپلاین از درجه p
$C(\xi)$	منحنی تعریف شده توسط توابع پایه ب-اسپلاین و یا نربز
$S(\xi,\eta)$	سطح تعریف شده توسط توابع پایه ب-اسپلاین و یا نربز
$R_{i,j}(\xi,\eta)$	توابع پایه نسبی قطعه‌ای نربز
ρ	چگالی سیال، kg/m^3
$\vec{\mathbf{u}}$	بردار سرعت، m/s
$\mathbf{P}$	فشار، N/m^2
$\vec{\mathbf{g}}$	شتاب ثقل، m/s^2
t	زمان، s
$\frac{D}{Dt}$	عملگر مشتق مادی
$\mathbf{u}^t$	سرعت ذره در زمان t، m/s
$\mathbf{r}^t$	موقعیت ذره در زمان t، m
$\Delta\mathbf{u}^*$	تغییر سرعت ذره در طی مرحله پیش‌بینی، m/s
$\Delta\mathbf{u}^{**}$	تغییر سرعت ذره در طی مرحله تصحیح، m/s
$\mathbf{P}^{t+1}$	فشار ذره در زمان $t+1$، N/m^2
$\mathbf{u}^{t+1}$	سرعت ذره در زمان $t+1$، m/s
$\mathbf{r}^t$	موقعیت ذره در زمان t، m
$\mathbf{r}^{t+1}$	موقعیت ذره در زمان $t+1$، m
l_0	فاصله‌ی اولیه ذره، m
$\mathbf{u}_{max}$	حداکثر سرعت ذره، m/s

مراجع

[1] Shobeyri G, Afshar MH (2010) Simulating free surface problems using Discrete Least Squares Meshless method. Computers & Fluids 39: 461–470.

[2] Cruchaga M, Celentano D, Tezduyar T (2001) A moving Lagrngian interface technique for flow computations over fixed meshes. J Comput Methods Appl Mech Engng 191: 525–543.

[3] Radovitzky R, Oritz M (1998) Lagrangian finite element analysis of newtonian fluid flows. Int J Numer Meth Eng 43: 607–619.

[4] Hirt CW, Nichols BD (1981) Volume of fluid methods for the dynamics of free boundaries. Journal of Computational Physics 39: 201–225.

[5] Donea J (1982) An arbitary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient fluid-structure interactions. J Comput Methods Appl Mech Eng 33: 689–723.

[6] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P (1996) Meshless methods: An overview and recent developments. J Comput Methods Appl Mech Eng 139: 3–47.

[7] Kagan P, Fischer A, Bar–Yoseph PZ (1998) New B–spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. Int J Numer Methods Eng 41: 435–458.

[8] Hollig K, Reif U, Wipper J (2001) Weighted extended B–spline approximation of dirichlet problems. SIAM J Numer Anal 39(2): 442–462.

[9] Kagan P, Fischer A, Bar–Yoseph PZ (2003) Mechanically based models: adaptive refinement for Bspline finite element. Int J Numer Methods Eng 57(8): 1145–1175.

[10] Hughes TGR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Comput Methods Appl Mech Eng 194: 4135–4195.

[11] Hassani B, Ganjali A, Tavakkoli M (2011) An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. European Journal of Mechanics A/Solids 31(1): 101–109.

[12] Bazilevs Y, Calo VM, Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A,Scovazzi G (2007) Variational multiscale residual based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. Comput Methods Appl Mech Eng 197(1–4): 173–201.

[13] Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR, Zhang Y (2008) Isogeometric fluid–structure interaction: theory, algorithms, and computations. Comput Mech 43(1): 3–37.

[14] Bazilevs Y, Calo VM, Zhang Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. Comput Mech 38: 310–322.

[15] Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components. Comput Mech 43(1): 143–150.

[16] Buffa A, deFalco C, Sangalli G (2010) Isogeometric analysis: Stable elements for the 2D Stokes equation. Int J Numer Meth Fluids 65 (11-12): 1407-1422.

[17] Gmez H, Calo V, Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase–

field model. Comput Methods Appl Mech Eng 197(49–50): 4333–4352.

[18] Akkerman I, Bazilevs Y, Kees CE, Farthing MW (2011) Isogeometric analysis of free-surface flow. Journal of Computational Physics 230: 4137–4152.

[19] Hassani B, Moghaddam NZ, Tavakkoli SM (2009) Isogeometrical solution of laplace equation. Asian Journal of Civil Engineering 10: 579–592.

[20] Rogers DF (2001) Anintroduction to NURBS. Morgan Kaufmann Publishers.

[21] Piegl L, Tiller W (1997) The NURBS book. 2nd ed, Springer-Verlag, New York.

[22] Shao SD, Lo EYM (2003) Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. Adv Water Resour 26(7): 787–800.

[23] Mohapatra PK, Eswaran V, Murty Bhallamudi S (1999) Two-dimensional analysis of dam-break flow in vertical plane. Journal of Hydraulic Engineering 125(2): 183–192.

[24] Valiani A, Caleffi V, Zanni A (2002) Case study malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method. Journal of Hydraulic Engineering 128(5): 460–472.

[25] Lv X, Zou Q, Zhao Y, Reeve D (2010) A novel coupled level set and volume of fluid method for sharp interface capturing on 3D tetrahedral grids. Journal of Computational Physics 229(7): 2573–2604.

[26] Lins EF, Elias RN, Rochinha FR, Coutinho ALGA (2010) Residual-based variational multiscale simulation of free surface flows. Comput Mech 46(4): 545–557.

[27] Benkhaldoun F, Sari S, Seaid M (2012) A flux-limiter method for dam-break flows over erodible sediment beds. Applied Mathematical Modelling 36(10): 4847–4861.

[28] Zoppou C, Roberts S (2000) Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break. Applied Mathematical Modelling 24(7): 457–475.

[29] Chang TJ, Kao HM, Chang KH, Hsu MH (2011) Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. Journal of Hydrology 408(1-2): 78–90.

[30] Maghsoodi R, Roozgar MS, Chau KW, Sarkardeh H (2012) 3D Simulation of dam break flows. Dam Engineering 23(2): 53–70.

[31] Nithiarasu P (2005) An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. International Journal for Numerical Method in Fluids 48: 1415–1428.