مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال 1393/ دوره 4/ شماره 3/ صفحه 33-23

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

کمانش الکتروترمومکانیکی نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری های الاستیسیته گرادیان کرنشی و تیر ردی

علی قربان‌پور آرانی[1,*]، محمد عبدالهیان[2] و.رضا کلاه‌چی[2]

[1] استاد، مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

[2] دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

تاریخ دریافت: 1392/03/26؛ تاریخ بازنگری: 1393/08/02؛ تاریخ پذیرش: 1393/09/25

چکیده

در این مقاله کمانش عرضییک نانوتیر پیزوالکتریک واقع در محیط الاستیک با استفاده از تئوری تیر ردی مورد بررسی قرار گرفته است. نانوتیر در راستای ضخامت قطبی شده و تحت یک ولتاژ خارجی و اختلاف دما قرار دارد. برای مدل کردن بستر الاستیک از مدل پاسترناک و برای بررسی اثرات مقیاس کوچک از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی استفاده شده است. ابتدا به بررسی روابط کرنش-تغییر مکان پرداخته شده، سپس با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون معادلات تعادل بدست آمده‌اند. برای حل این دستگاه معادلات و بدست آوردن بار کمانش بحرانی از روش تحلیلی استفاده شده است. در نهایت اثرات تغییرات دما، مود های کمانش، ولتاژ اعمال شده، پارامترهای مقیاس کوچک و محیط الاستیک بر نسبت بار کمانش بحرانی، نسبت دمای بحرانی و نسبت ولتاژ بحرانی نشان داده شده است. هم‌چنین مقایسه‌ای میان دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهند با افزایش ولتاژ اعمال شده، نسبت بار کمانش بحرانی نیز افزایش و نسبت دمای بحرانی کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی:نانوتیر پیزوالکتریک؛ تئوری تیر ردی؛ تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی؛ محیط پاسترناک.

Buckling of an embedded piezoelectric nanobeam based on strain gradient and Reddy beam theories

A. Ghorbanpour Arani[1,*], M. Abdollahian[2] and R. Kolahchi[2]

[1] Prof., Mech. Eng., Kashan University, Kashan, Iran

[2] Ph.D. Student, Mech. Eng., Kashan University, Kashan, Iran

Abstract

Electro-thermo-mechanical transverse buckling of an embedded piezoelectric nanobeam (PNB) is investigated in this article based on Reddy beam theory (RBT). Surrounded elastic medium is simulated by the Pasternak foundation. The small scale effects are taken into account using strain gradient theory (SGT). In order to control the vibration characteristics, the PNB is subjected to an applied voltage in the thickness direction and a uniform temperature change. The governing equations are derived based on the energy method and Hamilton's principle which are then solved by an analytical method to obtain the critical buckling load. The effects of temperature change, external electric voltage, the material length scale parameters and elastic medium on the buckling load ratio of the PNB are studied in detail. Moreover, a comparison between modified couple stress theory and strain gradient theory is carried out. The presented results indicate that increasing the external applied voltage increases the buckling load ratio of the piezoelectric nanobeam.

Keywords: Piezoelectric nanobeam; Reddy beam theory; Srain gradient theory; Pasternak foundation.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: 03155592450؛فکس:03155592424

آدرس پست الکترونیک:aghorban@kashanu.ac.ir

1- مقدمه

تیرها یکی از پرکاربردترین سازه‌ها در علوم مهندسی از جمله مهندسی معماری، عمران و مکانیک می‌باشند. در این میان، نانوتیرها به عنوان یکی از نانوساختارهای یک بعدی کاربردهای مختلفی در فناوری نانو پیدا کرده‌اند. به تازگی مطالعات زیادی در زمینه‌ی بررسی رفتار مکانیکی نانوتیرها صورت گرفته است. تای[1] [1] با استفاده از تئوری غیر موضعی الاستیسیته[2] به بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیرها پرداخت. هم‌چنین الطاهر[3] و همکاران [2] کمانش استاتیکی نانوتیرهای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری غیر موضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای بدست آوردن معادلات حاکم از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده کردند. اصغری‌فرد شرابیانی و حائری یزدی [3] نیز ارتعاشات غیر خطی نانوتیرهای مدرج تابعی[4] را مطالعه کردند. آن‌ها در تحلیلی خود از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده کرده و با در نظر گرفتن اثرات سطح نشان دادند که با افزایش ابعاد نانوتیر مدرج تابعی، اثرات سطح بر فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

مواد پیزوالکتریک بسیار پر کاربرد بوده و در زمینه‌های مهمی هم‌چون هوا-فضا، انرژی هسته‌ای، کارخانه‌های شیمیایی، الکترونیک و بیومتریال‌ها کاربرد دارند. لقمان و همکاران [4] نشان دادند، در این مواد بر اثر تغییر شکل یا بارگذاری مکانیکی میدان الکتریکی تولید شده و بر اثر اعمال میدان الکتریکی، تغییر شکل در ساختار ماده رخ می‌دهد. قشلاقی و هاشمی‌نژاد [5] برای پیش‌بینی اثرات سطح بر ارتعاشات عرضی نانوسیم‌های پیزوالکتریک یک حل تحلیلی ارائه نمودند. ارتعاشات غیر خطی نانوتیر پیزوالکتریک تحت اختلاف دمای یکنواخت و ولتاژ خارجی توسط که و همکاران [6] ارائه شد. آن‌ها از تئوری تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو برای مدل کردن نانوتیر و از تئوری غیر موضعی الاستیسیته برای بررسی اثر مقیاس کوچک استفاده کردند و نشان دادند که با افزایش ولتاژ خارجی فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. خدامی مرقی و همکاران [7] ارتعاشات غیر خطی نانولوله‌ی دو جداره‌ی نیتریدبور حاوی جریان سیال ویسکوز واقع در محیط پاسترناک را با استفاده از تئوری غیر موضعی الاستیسیته مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که توزیع پتانسیل الکتریکی در طول نانولوله با افزایش اثر مقیاس کوچک، کاهش می‌یابد.

طبق تئوری موضعی الاستیسیته، تنش در هر نقطه از یک ماده وابسته به کرنش و تغییر مکان در همان نقطه از ماده می‌باشد. بنابراین تئوری موضعی وابسته به اندازه نبوده و از آن‌جایی که برای تحلیل رفتار مکانیکی نانوساختارها اثرات مقیاس کوچک حائز اهمیت می‌باشد، برای تحلیل نانوساختارها می‌بایست از تئوری‌های مقیاس کوچک از جمله تئوری غیرموضعی الاستیسیته [8و9]، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی[5] [10-14]و تئوری تنش کوپل اصلاح شده[6] [15و16] استفاده شود. طبق تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی چگالی انرژی کرنشی تابعی از تنسور کرنش[7]، بردار گرادیان اتساع[8]، تنسور گرادیان کشش انحرافی[9] و تنسور گرادیان چرخش[10] می‌باشد. یین[11] و همکاران [10] از تئوری گرادیان کرنشی برای بررسی رفتار دینامیکی لوله‌های حاوی جریان سیال در مقیاس میکرو استفاده کردند. برای یافتن معادلات حرکت غیر خطی حاکم بر میکروتیرها ژائو[12] و همکاران [11] از اصل همیلتون به همراه تئوری گرادیان کرنشی استفاده کردند. در تحقیقی دیگر صادقی و همکاران [12] برای نشان دادن اثرات مقیاس کوچک بر روی خمش، ارتعاشات و پایداری میکروتیرهای مدرج تابعی تئوری گرادیان کرنشی را مورد استفاده قرار دادند. قایش و همکاران [13] ارتعاشات اجباری غیرخطی یک میکروتیر را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای بررسی اثرات مقیاس کوچک ار تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی استفاده کردند. خمش استاتیکی، ارتعااشات آزاد و کمانش میکروتیرها با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی گرادیان

---
[1]Thai
[2]Nonlocal elasticity theory
[3]Eltaher
[4]Functionally graded
[5]Strain gradient elasticity theory
[6]Modified couple stress theory
[7]Strain tensor
[8]Dilatation gradient tensor
[9]Deviatoric stretch gradient tensor
[10]Rotation gradient tnesor
[11]Yin
[12]Zhao

کرنشی توسط ژنگ[1] و همکاران [14] مورد بررسی قرار گرفت.

بر اساس اطلاعات نویسندگان مقاله‌ی حاضر و با توجه به بررسی‌های انجام گرفته در پایگاه‌های معتبر علمی، کمانش نانوتیرهای ردی با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. در این مقاله کمانش عرضی الکتروترمومکانیکی نانوتیر پیزوالکتریک واقع در بستر پاسترناک مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور برای مدل کردن نانوتیر از تئوری تیر ردی و برای بررسی اثرات مقیاس کوچک از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی استفاده شده است. هم‌چنین از اصل همیلتون و روش انرژی برای یافتن دستگاه معادلات حرکت و از حل تحلیلی برای بدست آوردن بار کمانش بحرانی استفاده شده است. در پایان نیز اثرات تغییرات دما، مودهای کمانش، مقیاس کوچک، ولتاژ خارجی اعمالی و محیط الاستیک بر روی نسبت بار کمانش بحرانی، نسبت دمای بحرانی و نسبت ولتاژ بحرانی برای هر دو تئوری گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده نشان داده شده است.

2- تئوری پیزوالاستیسیته گرادیان کرنشی

طبق تئوری پیزوالاستیسیته گرادیان کرنشی، چگالی انرژی کرنشی Π_s به صورت تابعی از تنسور کرنش متقارن ε_{ij} بردار گرادیان اتساع γ_i، تنسور انحرافی گرادیان کشش $\eta^{(1)}_{ijk}$، تنسور گرادیان چرخش متقارن χ^s_{ij} و بردار میدان الکتریکی E_i می‌باشد. بنابراین انرژی کرنشی یک ماده‌ی پیزوالکتریک که حجم Ω را اشغال می‌کند به صورت زیر بیان می‌شود [8]:

$$\Pi_s = \frac{1}{2}\int_\Omega \begin{pmatrix} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p_i\gamma_i + \tau^{(1)}_{ijk}\eta^{(1)}_{ijk} \\ + m^s_{ij}\chi^s_{ij} - D_iE_i \end{pmatrix} dV , \quad (i,j=1,2,3), \qquad (1)$$

که روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right), \qquad \text{(الف-2)}$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i}, \qquad \text{(ب-2)}$$

$$\eta^{(1)}_{ijk} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{jk,i}+\varepsilon_{ki,j}+\varepsilon_{ij,k}\right) - \frac{1}{15}\delta_{ij}\left(\varepsilon_{mm,k}+2\varepsilon_{mk,m}\right) - \frac{1}{15}\left[\delta_{jk}\left(\varepsilon_{mm,i}+2\varepsilon_{mi,m}\right)+\delta_{ki}\left(\varepsilon_{mm,j}+2\varepsilon_{mj,m}\right)\right], \qquad \text{(ج-2)}$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j}, \qquad \text{(د-2)}$$

$$\chi^s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\theta_{i,j}+\theta_{j,i}\right), \qquad \text{(ه-2)}$$

$$E_i = -\phi_{,i}, \qquad \text{(و-2)}$$

که u_i مؤلفه‌های بردار جابجایی، θ_i مؤلفه‌های بردار چرخش، δ_{ij} عملگر دلتای کرونیکر، e_{ijk} تنسور متناوب و ϕ پتانسیل الکتریکی می‌باشد. تنسور تنش σ_{ij}، بردار جابجایی الکتریکی D_i، تنش‌های مراتب بالاتر p_i، $\tau^{(1)}_{ijk}$ و m^s_{ij} را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \text{(الف-3)}$$

$$p_i = 2\mu l_0^2\gamma_i, \qquad \text{(ب-3)}$$

$$\tau^{(1)}_{ijk} = 2\mu l_1^2\eta^{(1)}_{ijk}, \qquad \text{(ج-3)}$$

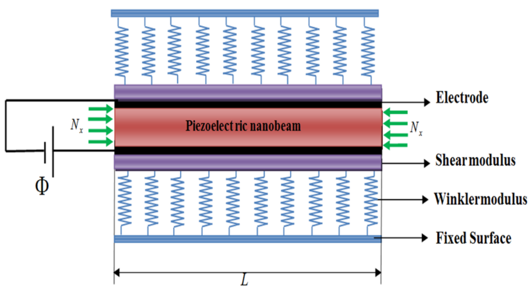
$$m^s_{ij} = 2\mu l_2^2\chi^s_{ij}, \qquad \text{(د-3)}$$

$$D_i = e_{imn}\varepsilon_{mm} + \in_{im} E_m, \qquad \text{(ه-3)}$$

در روابط بالا λ و μ ضرایب لامه، e_{imn} تنسور مرتبه سوم ضرایب پیزوالکتریک، $\in_{im}$ تنسور دی الکتریک و $\left(l_0,l_1,l_2\right)$ پارامترهای مقیاس طول ماده می‌باشند.

3- معادلات حاکم

نمایی از تیر پیزوالکتریک واقع در محیط الاستیک با ضخامت h و طول L که تحت ولتاژ خارجی قرار دارد در شکل 1 نشان داده شده است.



شکل 1- شماتیک نانو تیر پیزوالکتریک واقع در محیط الاستیک تحت بار محوری

[1]Zhang

توزیع پتانسیل الکتریکی را به صورت زیر می‌توان نوشت [17]:

$$\Phi(x,z,t)=-\cos(\beta z)\phi(x,t)+\frac{2zV_0}{h}, \tag{4}$$

در رابطه (4)، $\beta=\pi/h$؛ $\phi(x,t)$ تغییرات مکانی و زمانی پتانسیل الکتریکی در جهت x و V_0 ولتاژ خارجی اعمال شده است.

با توجه به تئوری تیر ردی میدان جابجایی در جهات x، y و z را که به ترتیب با $u_1(x,y,z,t)$، $u_2(x,y,z,t)$ و $u_3(x,y,z,t)$ نشان می‌دهند، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$u_1(x,y,z,t)=z\psi(x,t)-c_1z^3\left[\psi(x,t)+\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right], \tag{5-الف}$$

$$u_2(x,y,z,t)=0, \tag{5-ب}$$

$$u_3(x,y,z,t)=w(x,t), \tag{5-ج}$$

در معادلات (5)، $c_1=\frac{4}{3h^2}$، $c_2=\frac{4}{h^2}$، $w(x,t)$ جابجایی عرضی لایه‌ی میانی، $\psi(x,t)$ چرخش سطح مقطع نانوتیر و t معرف زمان می‌باشد. جایگذاری معادلات (5) در معادلات (2)، روابط زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon_{11}=z\frac{\partial\psi}{\partial x}-c_1z^3\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{6-الف}$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(1-c_1z^2\right)\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{6-ب}$$

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=0, \tag{6-ج}$$

با توجه به معادلات (2-الف) و (2-ب)، معادلات زیر را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\gamma_1=z\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-c_1z^3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right), \tag{7-الف}$$

$$\gamma_3=\frac{\partial\psi}{\partial x}-3c_1z^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{7-ب}$$

همچنین با استفاده از معادلات (2-الف)، (2-ج) و (5) روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\eta_{111}^{(1)}=\frac{2}{5}\left(z\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-c_1z^3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\right.$$
$$\left.+c_2z\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right), \tag{8-الف}$$

$$\eta_{113}^{(1)}=\eta_{311}^{(1)}=\eta_{131}^{(1)}=\frac{4}{15}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\left(1-3c_1z^2-c_2z\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right), \tag{8-ب}$$

$$\eta_{212}^{(1)}=\eta_{122}^{(1)}=\eta_{221}^{(1)}=-\frac{1}{5}\left(z\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-c_1z^3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\right)$$
$$+\frac{2}{15}c_2z\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{8-ج}$$

$$\eta_{133}^{(1)}=\eta_{313}^{(1)}=\eta_{331}^{(1)}=-\frac{1}{5}\left(z\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-c_1z^3\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\right)$$
$$-\frac{8}{15}c_2z\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{8-د}$$

$$\eta_{223}^{(1)}=\eta_{232}^{(1)}=\eta_{322}^{(1)}=-\frac{1}{15}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\left(1-3c_1z^2-c_2z\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right), \tag{8-ه}$$

$$\eta_{333}^{(1)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(1-3c_1z^2-c_2z\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right), \tag{8-و}$$

$$\eta_{112}^{(1)}=\eta_{211}^{(1)}=\eta_{121}^{(1)}=\eta_{213}^{(1)}=\eta_{321}^{(1)}=\eta_{132}^{(1)}=$$
$$\eta_{332}^{(1)}=\eta_{233}^{(1)}=\eta_{323}^{(1)}=\eta_{312}^{(1)}=\eta_{231}^{(1)}=\eta_{123}^{(1)}=\eta_{222}^{(1)}=0. \tag{8-ز}$$

بکارگیری معادلات (2-د) و (5) نیز معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\theta_2=\frac{1}{2}\left(\psi-\frac{\partial w}{\partial x}-3c_1z^2\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right), \tag{9-الف}$$

$$\theta_1=\theta_3=0, \tag{9-ب}$$

همچنین با جایگذاری معادلات (9) در معادله‌ی (2-د) روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\chi_{12}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-3c_1z^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right), \tag{10-الف}$$

$$\chi_{23}=-\frac{3}{2}c_1z\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{10-ب}$$

$$\chi_{11}=\chi_{22}=\chi_{33}=\chi_{13}=0, \tag{10-ج}$$

چگالی انرژی کرنشی نانوتیر پیزوالکتریک با جایگذاری معادلات (6) تا (8) و معادله‌ی (10) در معادله‌ی (1) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Pi_s=\frac{1}{2}\int_0^L\Bigg[M^{(2)}\frac{\partial\psi}{\partial x}-c_1M^{(4)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$
$$+\left(\frac{2}{5}c_2T_{111}^{(2)}+\frac{2}{5}c_2T_{122}^{(2)}-\frac{8}{5}c_2T_{133}^{(2)}-3c_1Y_{23}^{(2)}+Q^{(1)}\right.$$
$$\left.-c_2Q^{(3)}\right)\left(\psi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(P_1^{(2)}+\frac{2}{5}T_{111}^{(2)}-\frac{3}{5}T_{122}^{(2)}-\frac{3}{5}T_{133}^{(2)}\right)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-c_1\left(P_1^{(4)}+\frac{2}{5}T_{111}^{(4)}-\frac{3}{5}T_{122}^{(4)}-\frac{3}{5}T_{133}^{(4)}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)+P_3^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(\frac{4}{3}T_{113}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(1)}-\frac{1}{5}T_{333}^{(1)}\right)\tag{11}$$
$$\left(2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-(3c_1+c_2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$
$$\left(\frac{4}{3}T_{113}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(1)}-\frac{1}{5}T_{333}^{(1)}\right)-3c_1P_3^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$
$$+\frac{Y_{12}^{(1)}}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{3}{2}c_1Y_{12}^{(3)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg]dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L\int_{-h/2}^{-h/2}\left[D_x\cos(\beta z)\frac{\partial\phi}{\partial x}\right.$$
$$\left.+D_z\left(\beta\sin(\beta z)\phi+\frac{2V_0}{h}\right)\right]dzdx,$$

که:

$$\begin{Bmatrix}M^{(1)}\\M^{(3)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{-h/2}\sigma_{11}\begin{Bmatrix}z\\z^3\end{Bmatrix}dz,\begin{Bmatrix}Q^{(1)}\\Q^{(3)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{13}\begin{Bmatrix}1\\z^2\end{Bmatrix}dz,$$
$$\begin{Bmatrix}Y_{ij}^{(1)}\\Y_{ij}^{(2)}\\Y_{ij}^{(3)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}m_{ij}^s\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\end{Bmatrix}dz,\begin{Bmatrix}P_i^{(1)}\\P_i^{(2)}\\P_i^{(3)}\\P_i^{(4)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}p_i\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\\z^3\end{Bmatrix}dz,\tag{12}$$
$$\begin{Bmatrix}T_{ijk}^{(1)}\\T_{ijk}^{(2)}\\T_{ijk}^{(3)}\\T_{ijk}^{(4)}\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{ijk}^{(1)}\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\\z^3\end{Bmatrix}dz,(i,j,k=1,2,3)$$

کار خارجی ناشی از محیط الاستیک پاسترناک Π_e به صورت زیر بیان می‌شود [18]:

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\int_0^L\left(-k_w w+k_g\nabla^2 w\right)wdx,\tag{13}$$

در معادله‌ی (13) k_w ضریب وینکلر، k_g ضریب پاسترناک و $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2$ عملگر گرادیان می‌باشد.

برای بدست آوردن معادلات تعادل از اصل همیلتون که به صورت معادله‌ی زیر بیان می‌شود، استفاده شده است:

$$\int_0^t(\delta\Pi_s-\delta\Pi_e)dt=0.\tag{14}$$

با جایگذاری معادلات (11) و (13) در معادله‌ی (14) و جداسازی ضرایب δw ، $\delta\psi$ و $\delta\phi$ معادلات تعادل به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$c_1\frac{\partial^2 M^{(4)}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q^{(1)}-c_2Q^{(3)}+\frac{2}{5}c_2T_{111}^{(2)}+\frac{2}{5}c_2T_{122}^{(2)}\right.$$
$$\left.-\frac{8}{5}c_2T_{133}^{(2)}-3c_1Y_{23}^{(2)}\right)+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{4}{3}T_{113}^{(1)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(1)}\right.$$
$$-\frac{1}{5}T_{333}^{(1)}-(3c_1+c_2)\left(\frac{4}{3}T_{113}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{333}^{(3)}\right)-\frac{1}{2}Y_{12}^{(1)}\tag{الف-15}$$
$$\left.-\frac{3}{2}c_1Y_{12}^{(3)}-3c_1P_3^{(3)}\right]-c_1\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(P_1^{(4)}+\frac{2}{5}T_{111}^{(4)}-\frac{3}{5}T_{122}^{(4)}\right.$$
$$\left.-\frac{3}{5}T_{133}^{(4)}\right)-k_w w+k_g\nabla^2 w=0,$$

$$-Q^{(1)}+c_2Q^{(3)}-\frac{2}{5}c_2T_{111}^{(2)}-\frac{2}{5}c_2T_{122}^{(2)}+\frac{8}{5}c_2T_{133}^{(2)}+3c_1Y_{23}^{(2)}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[M^{(2)}-c_1M^{(4)}+2\left(\frac{4}{3}T_{113}^{(1)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(1)}-\frac{1}{5}T_{333}^{(1)}\right.\right.$$
$$-(3c_1+c_2)\left(\frac{4}{3}T_{113}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{223}^{(3)}-\frac{1}{5}T_{333}^{(3)}\right)+\frac{1}{2}Y_{12}^{(1)}-\frac{3}{2}c_1Y_{12}^{(3)}\tag{ب-15}$$
$$\left.+P_3^{(1)}-3c_1P_3^{(3)}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[c_1\left(P_1^{(4)}+\frac{2}{5}T_{111}^{(4)}-\frac{3}{5}T_{122}^{(4)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3}{5}T_{133}^{(4)}\right)-\left(P_1^{(2)}+\frac{2}{5}T_{111}^{(2)}-\frac{3}{5}T_{122}^{(2)}-\frac{3}{5}T_{133}^{(2)}\right)\right]=0,$$

$$\int_{-h/2}^{-h/2}\left[D_z\beta\sin(\beta z)+\frac{\partial D_x}{\partial x}\cos(\beta z)\right]dz=0,\tag{ج-15}$$

در روابط (15)، N_x نیروی ناشی از بارهای محوری، که در این‌جا شامل بارهای الکتریکی N_x^E و حرارتی N_x^T می‌باشند و طبق [6] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_x^T=-\lambda_1 hT,\tag{الف-16}$$
$$N_x^E=2e_{31}V_0,\tag{ب-16}$$

e_{31} ضریب پیزوالکتریک و T تغییرات دما می‌باشد.

برای ارائه‌ی بهتر نتایج پارامترهای بی‌بعد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{gathered}(U,W)=\left(\frac{u}{h},\frac{w}{h}\right),\Psi=\psi,X=\frac{x}{L},\mu=\frac{e_0a}{L},\eta=\frac{h}{L},\\ K_g=\frac{k_g}{A_{11}},\Phi=\frac{\phi}{\phi_0},\phi_0=\sqrt{\frac{LA_{11}}{\in_{11}}}\\ \left(\bar{H}_{15},\bar{I}_{31}\right)=\left(\frac{H_{15}\phi_0}{A_{11}h^3},\frac{I_{31}\phi_0}{A_{11}h^3}\right),\left(\bar{A}_{11},\bar{D}_{11}\right)=\left(\frac{A_{11}}{A_{11}},\frac{D_{11}}{A_{11}h^2}\right),\\ \left(\bar{G}_{11},\bar{J}_{11}\right)=\left(\frac{G_{11}}{A_{11}h^4},\frac{J_{11}}{A_{11}h^6}\right),\left(\bar{E}_{15},\bar{F}_{31}\right)=\left(\frac{E_{15}\phi_0}{A_{11}h},\frac{F_{31}\phi_0}{A_{11}h}\right),\\ \left(\bar{A}_{44},\bar{D}_{44},\bar{G}_{44},\right)=\left(\frac{A_{44}}{A_{11}},\frac{D_{44}}{A_{11}h^2},\frac{G_{44}}{A_{11}h^4}\right),K_w=\frac{L^2k_w}{A_{11}},\\ \left(\bar{X}_{11},\bar{X}_{33}\right)=\left(\frac{X_{11}\phi_0^2}{A_{11}h^2},\frac{X_{33}\phi_0^2}{A_{11}}\right),\left(\bar{N}_x^T,\bar{N}_x^E\right)=\left(\frac{N_x^T}{A_{11}},\frac{N_x^E}{A_{11}}\right),\\ a=\frac{\mu l_0^2}{A_{11}L},b=\frac{\mu l_1^2}{A_{11}L},c=\frac{\mu l_2^2}{A_{11}L},\end{gathered} \tag{17}$$

که:

$$\begin{gathered}\left(A_{ii},D_{ii},G_{ii},J_{ii}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}C_{ii}\left(1,z^2,z^4,z^6\right)dz\\ \left(E_{15},H_{15}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}e_{15}\cos\left(\beta z\right)\left(1,z^2\right)dz,\\ \left(F_{31},I_{31}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}e_{31}\beta\sin\left(\beta z\right)\left(z,z^3\right)dz,\\ X_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}\in_{11}\cos^2\left(\beta z\right)dz,\left(i=1,4\right),\\ X_{33}=\int_{-h/2}^{h/2}\in_{33}\left[\beta\sin\left(\beta z\right)\right]^2dz,\end{gathered} \tag{18}$$

با جایگذاری معادلات (6) تا (10) در معادله‌ی (3)، بکارگیری معادلات حاصل در معادلات (15) و استفاده از روابط (17)، معادلات بی‌بعد زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{gathered}\left(\frac{976}{2250}b-\frac{244}{225}b+\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}a+\frac{16}{9}\bar{J}_{11}\eta-\frac{4}{3}\bar{G}_{11}\eta\right.\\ \left.-\frac{184}{225}b+\frac{368}{2250}b+\frac{368}{2250}b+\frac{1}{20}c+\frac{368}{225}b-\frac{1}{4}c\right)\frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}\\ +\left(\frac{976}{2250}b+\frac{2}{5}a+\frac{16}{9}\bar{J}_{11}\eta-\frac{368}{675}b-\frac{368}{675}b+\frac{368}{2250}b+\right.\\ \left.\frac{368}{2250}b+\frac{1}{6}c+\frac{1}{20}c+\frac{184}{225}b+\frac{1}{4}c\right)\eta\frac{\partial^4W}{\partial X^4}\\ +\left(-\frac{128}{45}b-\frac{4}{3}c-\bar{A}_{44}\eta+8\eta\bar{D}_{44}-16\eta\bar{G}_{44}\right)\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\Psi}{\partial X}\\ +\left(-\frac{128}{45}b-\frac{4}{3}c+8\bar{D}_{44}\eta-16\bar{G}_{44}\eta-\bar{A}_{44}\eta\right)\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2W}{\partial X^2}\\ +\left(\bar{E}_{15}-4\bar{H}_{15}-\frac{4}{3}\bar{I}_{31}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}-\left(\frac{1}{126}a+\frac{1}{315}b\right)\eta^3\frac{\partial^6W}{\partial X^6}\\ +\left(\frac{1}{30}a-\frac{1}{315}b+\frac{1}{75}b-\frac{1}{126}a\right)\eta^2\frac{\partial^5\Psi}{\partial X^5}=0,\end{gathered} \tag{19-الف}$$

$$\begin{gathered}\left(-\frac{976}{2250}b+\frac{4}{3}\bar{G}_{11}\eta-\frac{16}{9}\bar{J}_{11}\eta+\frac{184}{225}b+\frac{244}{225}b+\frac{2}{3}a\right.\\ \left.-\frac{368}{2250}b-\frac{368}{2250}b-\frac{1}{20}c-\frac{2}{5}a+\frac{1}{4}c-\frac{368}{225}b\right)\frac{\partial^3W}{\partial X^3}\\ +\left(-\frac{976}{2250}b-\frac{16}{9}\bar{J}_{11}\eta+\frac{8}{3}\bar{G}_{11}\eta+\frac{736}{675}b+\frac{1096}{675}b\right.\\ +\frac{1}{6}c+\frac{4}{3}a-\frac{368}{2250}b-\frac{368}{2250}b-\frac{144}{2880}c-\frac{2}{5}a-\bar{D}_{11}\eta\\ \left.-\frac{736}{225}b-\frac{1}{4}c-2a\right)\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\left(-8\bar{D}_{44}\eta+16\bar{G}_{44}\eta\right.\\ \left.+\bar{A}_{44}\eta+\frac{4}{3}c+\frac{128}{45}b\right)\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial W}{\partial X}+\frac{\Psi}{\eta^3}\right)+\left(-\frac{1}{15}a\right.\\ \left.-\frac{2}{75}b+\frac{1}{315}b+\frac{1}{126}a+\frac{1}{15}b+\frac{1}{6}a\right)\eta\frac{\partial^4\Psi}{\partial X^4}\\ +\left(-\frac{1}{30}a-\frac{1}{75}b+\frac{1}{315}b+\frac{1}{126}a\right)\eta^2\frac{\partial^5W}{\partial X^5}\\ +\left(4\bar{H}_{15}+\frac{4}{3}\bar{I}_{31}-\bar{E}_{15}-\bar{F}_{31}\right)\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial X}=0,\end{gathered} \tag{19-ب}$$

$$\begin{gathered}\bar{F}_{31}\frac{\partial\Psi}{\partial X}+\bar{X}_{11}\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}-\frac{\bar{X}_{33}}{\eta}\Phi\\ +\left(\bar{E}_{15}-4\bar{H}_{15}-\frac{4}{3}\bar{I}_{31}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}+\eta\frac{\partial^2W}{\partial X^2}\right)=0.\end{gathered} \tag{19-ج}$$

4- روش حل

در این مقاله به منظور حل دستگاه معادلات بدست آمده از روش تحلیلی استفاده شده است. به همین منظور برای شرایط تکیه‌گاهی ساده بدون اعمال پتانسیل الکتریکی در دو سر تیر، شکل مودهای زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$W(x)=\bar{W}\sin\left(m\pi X\right), \tag{20-الف}$$

$$\Psi(x)=\bar{\Psi}\sin\left(m\pi X\right), \tag{20-ب}$$

$$\Phi(x)=\bar{\Phi}\sin\left(m\pi X\right). \tag{20-ج}$$

که m شماره مود می‌باشد؛ هم‌چنین $\bar{W}$، $\bar{\Psi}$ و $\bar{\Phi}$ ثوابت دامنه‌ی نوسانات می‌باشند. با جایگذاری معادلات (20) در روابط (19) دستگاه معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود:

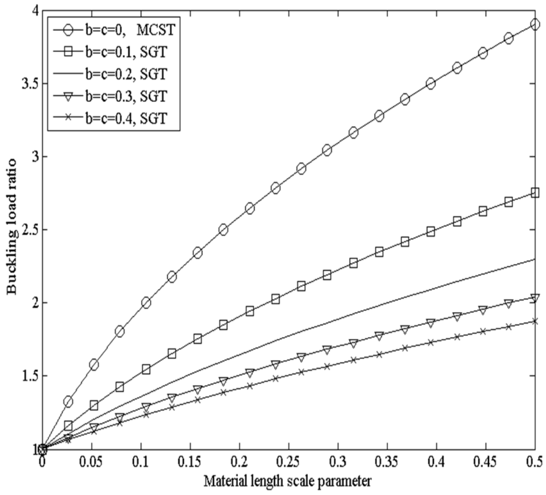
$$\left[M\right]\left\{Y\right\}=\left\{0\right\}, \tag{21}$$

که $\left\{Y\right\}=\left[\bar{W}\quad\bar{\Psi}\quad\bar{\Phi}\right]^T$ می‌باشد. برای بدست آوردن بار کمانش بحرانی، کافی است دترمینان ماتریس M برابر با صفر قرار داده شود.

5- نتایج

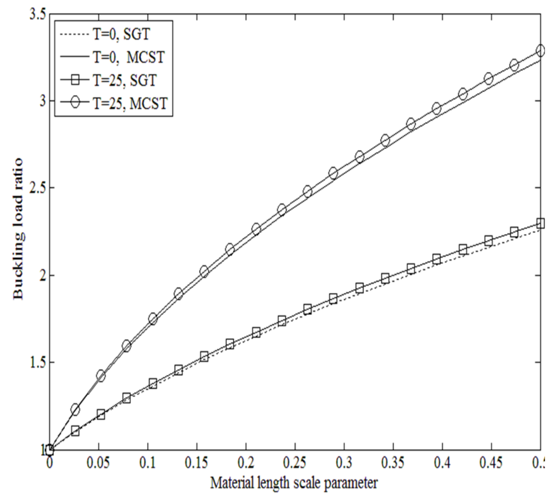
در این بخش، کمانش عرضی الکتروترمومکانیکی یک تیر پیزوالکتریک در ابعاد نانو با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته گرادیان کرنشی و تیر ردی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور نسبت بار کمانش به صورت بار کمانش غیر موضعی به بار کمانش موضعی تعریف شده و اثرات پارامترهای تغییرات دما، مود های کمانش، ولتاژ اعمال شده، پارامترهای مقیاس کوچک و محیط الاستیک بر نسبت بار کمانش بحرانی نشان داده شده است. هم‌چنین به بررسی تغییرات نسبت دما و ولتاژ بحرانی پرداخته شده است. نسبت دمای بدست آمده از تئوری غیر موضعی به نسبت دمای بدست آمده از تئوری موضعی را نسبت دمای بحرانی می‌نامند. هم‌چنین ولتاژ بحرانی به صورت ولتاژ بدست آمده از تئوری غیر موضعی الاستیسیته به ولتاژ بدست آمده از تئوری موضعی الاستیسیته تعریف می‌شود.

شکل 2 اثر پارامترهای مقیاس کوچک (b,c) روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده (a) را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که حالت $b=c=0$ حالت خاصی از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی است که تئوری تنش کوپل اصلاح شده نام دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نسبت بار کمانشی در تئوری تنش کوپل اصلاح شده بیشتر از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی می‌باشد که این به دلیل تعداد کمتر پارامترهای مقیاس کوچک در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، می‌باشد. هم‌چنین، با افزایش b,c، نسبت بار کمانشی و نرخ کاهش آن کاهش می‌یابد. نتیجه دیگری که از شکل 2 مشاهده می‌شود آن است که اثر پارامترهای مقیاس کوچک روی نسبت بار کمانشی نانو تیر پیزوالکتریک با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده، افزایش می‌یابد.



شکل 2- اثرپارامترهای مقیاس کوچک روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

اثر تغییرات دما روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده برای دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده در شکل 3 نشان داده شده است. نتایج حاکی از آن است که با افزایش دما نسبت بار کمانشی افزایش می‌یابد که این به دلیل کاهش سختی



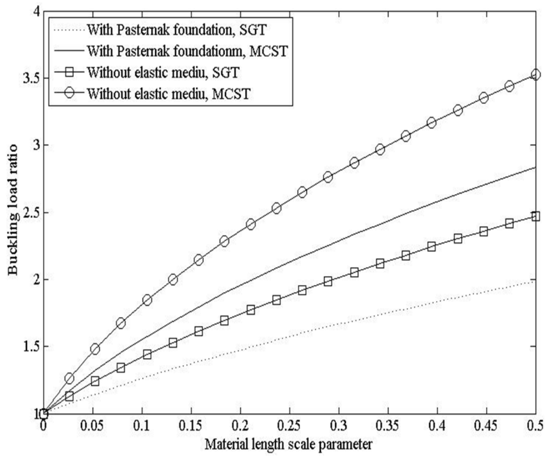
شکل 3- اثر تغییرات دما روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

سیستم می باشد. هم‌چنین نسبت بار کمانش بدست آمده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بسیار بیشتر از تئوری

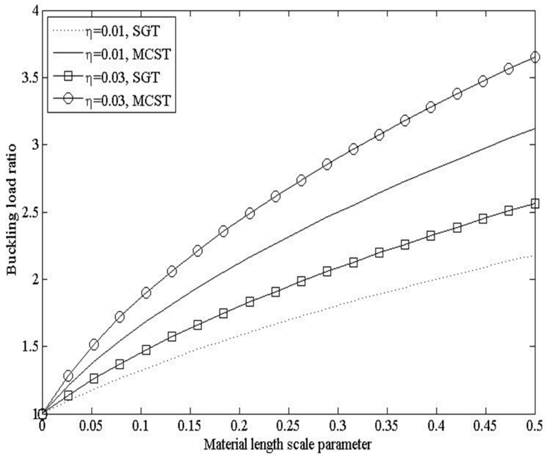
الاستیسیته گرادیان کرنشی می‌باشد در حالی که اثر تغییرات دما روی نسبت بار کمانش بسیار ناچیز است.

شکل 4 بیانگر اثر محیط الاستیک اطراف نانو تیر پیزوالکتریک روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده می‌باشد. مشخص است که نسبت بار کمانش نانو تیر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده چه با درنظر گرفتن محیط الاستیک و چه بدون درنظر گرفتن محیط الاستیک، بیشتر از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی می باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود درنظر گرفتن محیط الاستیک باعث کاهش نسبت بار کمانشی می‌شود. دلیل این امر آن است که محیط الاستیک باعث افزایش سختی سیستم و درنتیجه کاهش نسبت بار کمانشی می‌گردد.

نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده در شکل 5 رسم شده است به طوریکه اثر پارامتر بدون بعد ضخامت به طول تیر را نشان می‌دهد. از این شکل استنباط می‌شود که نسبت بار کمانشی در نسبت بدون بعد بالاتر، بیشتر می‌شود و اثر آن با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده بیشتر می شود زیرا افزایش این پارامتر بدون بعد منجر به افزایش مقاومت سیستم می‌گردد.



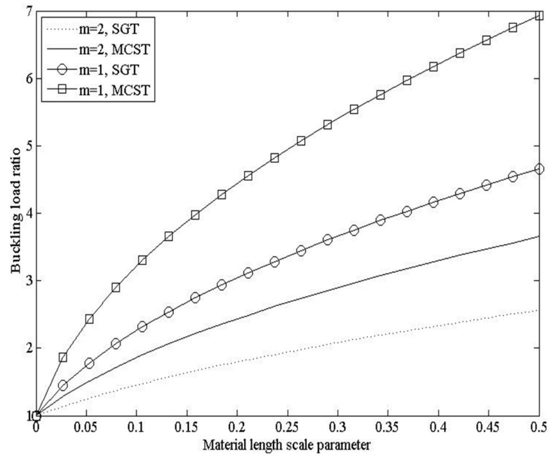
شکل 4- اثر محیط الاستیک روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده



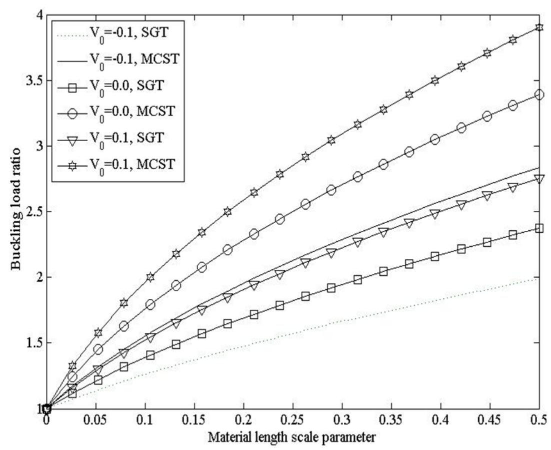
شکل 5- اثر پارامتر بدون بعد ضخامت به طول تیر روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

اثر مودهای کمانشی روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده برای دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده در شکل 6 نشان داده شده است. با توجه به این شکل واضح است که مطابق انتظار، نسبت بار کمانشی برای مود دوم کمتر از مود اول می باشد. به علاوه، اثر مودهای کمانشی روی نسبت بار کمانش با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده، بیشتر می‌شود.

شکل 7 بیانگر اثر ولتاژ خارجی اعمال شده به نانو تیر پیزوالکتریک روی نسبت بار کمانش می‌باشد. این شکل برای سه ولتاژ مثبت، صفر و منفی رسم شده و تفاوت دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده را نیز نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای حالتی که ولتاژ اعمالی به نانو تیر پیزوالکتریک مثبت باشد، نسبت بار کمانشی ماکزیمم است و برای حالتی که ولتاژ اعمالی به نانو تیر پیزوالکتریک منفی باشد، نسبت بار کمانشی مینیمم مقدار را دارد. نتیجه مهم دیگری که از این شکل برداشت می شود آن است که اثر ولتاژ خارجی اعمال شده روی نسبت بار کمانشی با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که از ولتاژ خارجی اعمال شده به نانو تیر پیزوالکتریک می توان به عنوان کنترل کننده کمانش سیستم در صنایع مختلف استفاده نمود.

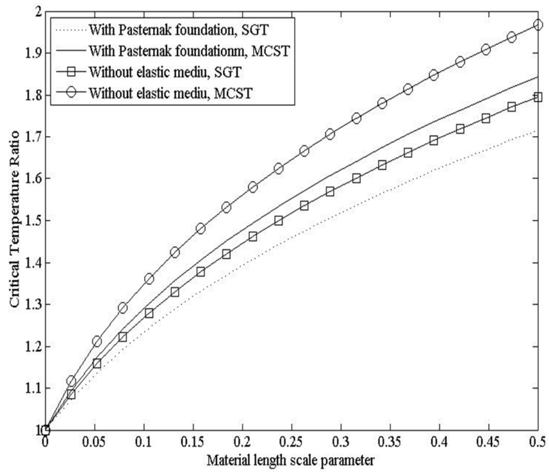


شکل 6- اثر مودهای کمانشی روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

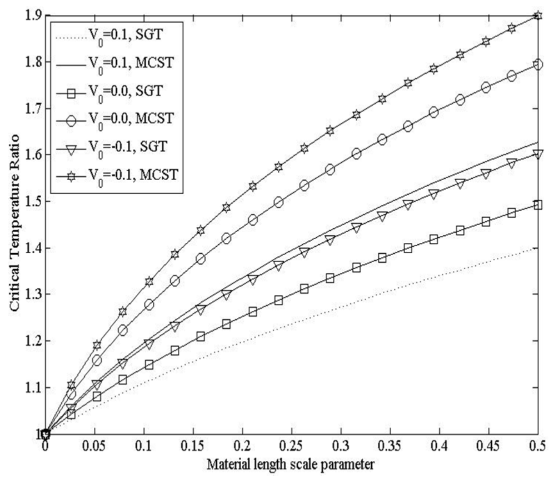


شکل 7- اثر ولتاژ خارجی روی نسبت بار کمانشی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

تاثیرات محیط الاستیک بر دمای بحرانی بر حسب پارامتر مقیاس طول ماده در شکل 8 برای هر دو تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده رسم شده است. همان‌گونه که مشخص است، نسبت دمای بحرانی بدست آمده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بیش‌تر از نتایج بدست آمده از تئوری گرادیان کرنشی است. هم‌چنین در نظر گرفتن محیط الاستیک اطراف نانوتیر باعث کاهش نسبت دمای بحرانی می‌گردد.



شکل 8- اثر محیط الاستیک روی نسبت دمای بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

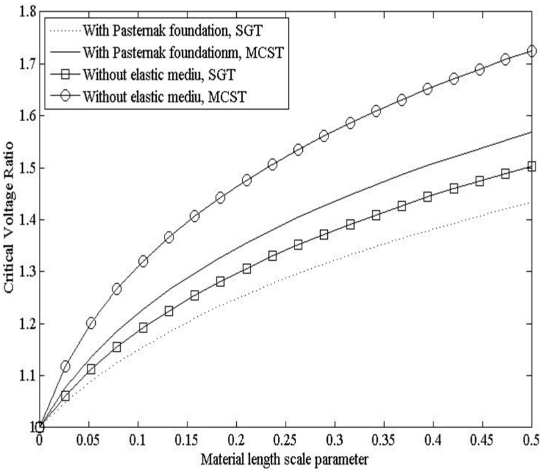


شکل 9- اثر ولتاژ خارجی روی نسبت دمای بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

شکل 9 تاثیرات ولتاژ خارجی را بر نسبت دمای بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده نشان می‌دهد. کاهش ولتاژ اعمال شده باعث افزایش نسبت دمای بحرانی می‌گردد.

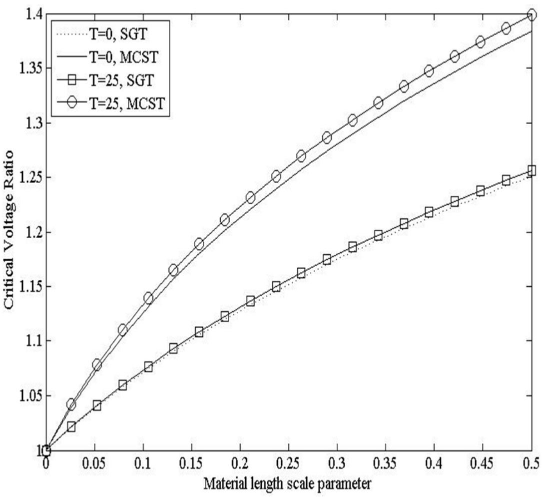
شکل‌ها 10 و 11 بترتیب تاثیرات محیط الاستیک و ولتاژ اعمالی را بر ولتاژ بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده نشان می‌دهند. هم‌چنین تفاوت بین تئوری‌های الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی و تنش کوپل اصلاح شده بر ولتاژ بحرانی در این دو شکل نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند، بکار بردن تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی باعث کاهش ولتاژ بحرانی می‌گردد. هم‌چنین با

افزایش دما ولتاژ بحرانی افزایش می‌یابد، این در حالی است که در نظر گرفتن محیط الاستیک کاهش ولتاژ بحرانی را به همراه دارد. بعلاوه، با افزایش پارامتر مقیاس طول، ولتاژ بحرانی نانوتیر پیزوالکتریک افزایش می‌یابد.



شکل 10- اثر محیط الاستیک روی نسبت ولتاژ بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

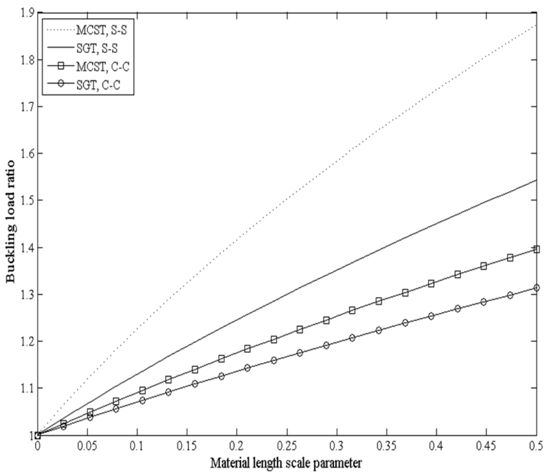
در شکل 12 تاثیر پارامتر مقیاس کوچک بر نسبت بار کمانش برای تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار (C-C) و دو سر مفصل (S-S) و تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی نشان داده شده است. برای بدست آوردن جواب برای این شرط مرزی دو سر گیردار کافی است از معادلات زیر بجای معادلات (20) استفاده شود.



شکل 11- اثر تغییرات دما روی نسبت ولتاژ بحرانی در برابر پارامتر مقیاس طول ماده

$$\Gamma(x)=\bar{\Gamma}\Big[\cosh(mX)-\cos(mX) - \frac{\cosh(n)-\cos(n)}{\sinh(n)-\sin(n)}\big[\sinh(nX)-\sin(nX)\big]\Big], \qquad (22)$$

که در معادله‌ی (22)، $\Gamma=W,\Psi,\Phi$ می‌باشد. همان‌گونه که از شکل مشخص است با استفاده از یک تئوری مشخص نسبت بار کمانش بحرانی برای یک تیر که در دو انتها گیردار است بیش‌تر از تیر با شرایط مرزی دو سر مفصل است.



شکل 12- مقایسه شرایط مرزی دوسر مفصل و دو سر درگیر

در پایان برای اعتبار سنجی نتایج و مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج ارائه شده در پایگاه‌های معتبر علمی، نتایج بدست آمده در مقاله‌ی حاضر با نتایج ارائه شده توسط تای [1] مقایسه شده است. همان‌گونه که در جدول 1 ملاحظه میشود، مقادیر بار کمانش بحرانی موضعی بدست آمده منطبق بر مقادیر بار بحرانی بدست آمده توسط تای [1] است. این در حالی است که، مقادیر بار بحرانی غیر موضعی به طور دقیق منطبق بر نتایج بدست آمده در مرجع [1] نیست. دلیل این امر آن است که در مقاله‌ی حاضر برای بررسی اثرات مقیاس کوچک از تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنشی استفاده شده، در حالی که در مرجع [1] تئوری غیرموضعی الاستیسیته مورد استفاده قرار گرفته است. با این وجود مقادیر بار کمانش غیرموضعی نیز از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشند.

جدول 1- مقایسه‌ی میان نتایج مقاله‌ی حاضر با نتایج ارائه شده در مرجع [1]

L/h	تئوری استفاده شده	نتایج تای [1]	نتایج بدست آمده از SGT	نتایج بدست آمده از MCST
5	تئوری موضعی	8/9519	8/9519	8/9519
5	تئوری غیر موضعی	8/1477	8/3421	8/6598
10	تئوری موضعی	9/6228	9/6228	9/6228
10	تئوری غیر موضعی	8/7583	8/9812	9/1834
20	تئوری موضعی	9/8067	9/8067	9/8067
20	تئوری غیر موضعی	8/9258	9/2804	9/5601
100	تئوری موضعی	9/8671	9/8671	9/8671
100	تئوری غیر موضعی	8/9807	9/2666	9/5827

تشکر و قدردانی

از دانشگاه کاشان با شماره گرانت 363443/23 به دلیل حمایت از این کار پژوهشی تشکر و قدردانی به عمل می آید.

مراجع

[1] Thai HT (2012) A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. International journal of Engineering Science 52: 56–64.

[2] Eltaher MA, Amam, SA, Mahmoud, FF (2013) Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams. Composite Structures 96: 82–88.

[3]AsgharifardSharabiani P, HaeriYazdi MR (2013) Nonlinear free vibrations of functionally graded nanobeams with surface effects. Composites: Part B 45: 581–586.

[4]Loghman A, Abdollahian M, JafarzadehJazi A, GhorbanpourAraniA (2013) Semi-analytical solution for electrothermomagnetothermoelastic creep response of functionally graded piezoelectric rotating disk. International Journal of Thermal Sciences65: 254–266.

[5]Gheshlaghi B, Hasheminejad SM, Vibration analysis of piezoelectric nanowires with surface and small scale effects. Current Applied Physics12: 1096–1099.

[6]Ke LL, Wang YS, Wang ZD (1993) Optimal Design. MechanicsLetters 29: 1–6.

[7] KhodamiMaraghi Z, GhorbanpourArani A, Kolahchi R, Amir S, Bagheri MR (2013) Nonlocal vibration and instability of embedded DWBNNT conveying viscose fluid. Compos Part B 45: 423–432.

[8] Fang B, Zhen YX, Zhang CP, Tang Y (2013) Nonlinear vibration analysis of double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elasticity theory. Appl Math Model 37: 1096–1107.

[9] Claeyssen JR, Tsukazan T, Coppeti RD (2013) Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. MechSyst Signal Pr 38:299–311.

[10]Yin L, Qian Q, Wang L (2011) Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid. Appl Math Model 35: 2864–2873.

[11]Zhao J, Zhou S, Wang B, Wang X (2012) Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory. Appl Math Model 36: 2674–2686.

[12]Sadeghi H, Bagheri M, Naghdabadi R (2012) Strain gradient elasticity solution for functionally graded micro-cylinders.Int J of EngSci 50: 22–30.

[13] Ghayesh MH, Amabili M, Farokhi H (2013) Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient thepry. Int J of EngSci 63: 52–60.

[14] Zhang B, He Y, Liu D, Zhipeng G, Shen L (2014) Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. Finite Elem Anal Des 79: 22–39.

[15] Simsek M, Kocaturk T, Akbas SD (2013) Static beding of a functionally graded microscale Timoshenko beam model based on the modified couple stress theory. Compos Struct 95: 740–747.

[16] Simsek M, Reddy JN (2013) A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory. Compos Struct 101:47–58.

[17] Wang Q (2002) On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers. EngStruct 24: 109–205.

[18]GhorbanpourArani A, Abdollahian M, Kolahchi R, Rahmati AH (2013) Electro-thermo-torsional buckling of an embedded armchair DWBNNT using nonlocal shear deformatble shell model. Compos Part B 51: 291–299.