مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال 1393/ دوره 4/ شماره 2/ صفحه 74-67

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

روشی جدید جهت پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته زمانی تعریف شده با مدل راسر

حجت احسنی طهرانی[1,*] و فاطمه انجیلی[2]

[1] استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه شاهرود، شاهرود

[2] کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه شاهرود، شاهرود

تاریخ دریافت: 1392/09/26؛ تاریخ بازنگری: 1393/02/09؛ تاریخ پذیرش: 1393/07/05

چکیده

در این مقاله، یک روشی جدید جهت پایداری سیستم های دو بعدی گسسته زمانی تعریف شده با مدل راسر ارائه می‌دهیم، ابتدا سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته زمانی مدل راسر معرفی می‌شود، سپس با استفاده از این ویژگی که پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته زمانی، رفتاری مشابه با پایداری سیستم‌های خطی یک بعدی گسسته زمانی هم ارزش را دارد، پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته زمانی راسر را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه برای پایداری سیستم‌های گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار بگیرد، روش تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای جایگزینی مقادیر ویژه مطلوب به جای آن مقادیر ویژه سیستم حلقه باز که خارج دایره واحد قرار دارند، بکار می‌گیریم. برای حل مساله، با استفاده از روش تجزیه شور جزیی، ماتریس **A** را که بزرگ بوده به ماتریس‌های کوچک‌تری تجزیه می‌کنیم، سپس با به کارگیری روش تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، طیف مورد‌نظر را به سیستم اختصاص می‌دهیم. بدین ترتیب سیستم پایدار می‌شود. در انتها نیز مثالی برای شرح این روش آورده شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های دوبعدی؛ مدل راسر؛ پایداری؛ تخصیص مقادیر ویژه جزئی؛ تجزیه شور جزئی؛ تبدیلات تشابهی.

A new method for the stability of discrete-time two-dimensional systems defined by the Roesser model

H.A. Tehrani[1,*] and F. Enjili[2]

[1] Assist. Prof., Mathematics Department, University of Shahrood, Shahrood, Iran

[2] M.Sc., Mathematics Department, University of Shahrood, Shahrood, Iran

Abstract

In this paper, We introduce a new method for the stability of discrete-time two-dimensional systems defined by the Roesser model, First we introduce discrete-time two-dimensional linear systems described by Roesser model. Then, with using of this property that stability of discrete-time two-dimensional linear systems has a similar manner with stability of discrete time linear systems, we study stability of Roesser discrete-time two-dimensional systems. As for the stability of discrete time systems it is necessary to place all the eigenvalues in unit circle. We use the partial eigenvalues assignment method for replacing the desired eigenvalues in place of the eigenvalues lying outside the unit circle. For solving this problem, with using of partial Schur decomposition method, we decompose big matrix A to smaller matrices. Then with applying similarity transitions method for linear control systems, we allocate the desired spectrum to the system, so system will be stable. Finally, an illustrative example is presented.

Keywords: Two-dimensional (2D) systems; Roesser model; Stability; Partial eigenvalues assignment; Partial Schur decomposition; Similarity transformations.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: 02733300235

آدرس پست الکترونیک: hahsani@shahroodut.ac.ir

1- مقدمه

سیستم‌های خطی دو بعدی به دلایل زیادی از جمله راندمان بالا، پردازش و تحلیل بهتر داده‌ها، قابلیت اجرای عملگرهای غیرخطی، قابلیت بالای انعطاف پذیری مورد توجه قرار گرفته اند. از کاربردهای سیستم‌های خطی دوبعدی می‌توان مسایل انتقال حرارت که وابسته به دو بعد مکان و زمان می باشند را نام برد. نظریه تحلیل و طراحی سیستم‌های دو بعدی در سال‌های اخیر بسیار گسترش یافته است و مورد استفاده فراوانی قرار گرفته است.

از زمانی که این سیستم‌ها معرفی شده‌اند دانشمندان مدل‌های متنوعی را برای این سیستم‌ها ارائه داده‌اند که معروف‌ترین این مدل‌ها عبارتند از: مدل راسر[1] [7]، فارناسینی- مارکسینی[2] [4] و غیره. از آن جایی که مدل راسر به عنوان بهترین و کلی‌ترین مدل معرفی شده است در این مقاله روشی نو، جهت پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته زمانی مدل راسر ارائه می‌دهیم. جهت پایداری یک سیستم گسسته زمانی لازم است تمامی مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار گیرند، لذا می‌توان مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را برای این سیستم‌ها به کار برد، ابتدا مقادیر ویژه سیستم حلقه باز را محاسبه می‌کنیم و آن دسته از مقادیر ویژه‌ای که داخل دایره واحد قرار ندارند و باعث ناپایداری سیستم می‌شوند را با مقادیر ویژه جدید جایگزین می‌کنیم تا سیستم پایدار شود.

2- پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته زمانی

معادله حالت سیستم دو بعدی خطی گسسته زمانی راسر را به صورت زیر در نظر بگیرید [1]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Bu(i,j), \qquad (1)$$

که

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

به‌طوری که

$A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$

$A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$

$A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$

$A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$

$B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m} B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$

ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب بوده و بردارهای $x^h(i,j) \in \mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i,j) \in \mathbb{R}^{n_2}$ بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه (i,j) و $u\ (i,j) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی می‌باشند.

شرایط مرزی برای سیستم (1) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x^h(0,j) &= x_0^h(j), \quad \forall j \in N \\ x^v(i,0) &= x_0^v(i), \quad \forall i \in N \end{aligned} \qquad (3)$$

حال قانون کنترل را برای معادله حالت (1) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u\ (i,j) = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

که F_1 و F_2 به ترتیب دارای بعد $n_1 \times m$ و $n_2 \times m$ می‌باشند. با جایگذاری قانون کنترل در معادله (1)، سیستم حلقه بسته مدل راسر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} - B_1F_1^T & A_{12} - B_1F_2^T \\ A_{21} - B_2F_1^T & A_{22} - B_2F_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \\ &= (A - BF^T) \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (5)$$

که در آن $\Gamma = A - BF^T$ را ماتریس حلقه بسته سیستم (1) می‌نامیم.

لم (2-1). فرض کنید $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ و $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ و $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ و $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب می‌باشند بنابراین سیستم دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر(1) با $u\ (i,j)=0$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشند [3].

$$det\left(\begin{bmatrix} I_{n_1} - Z_1A_{11} & -Z_1A_{12} \\ -Z_2A_{21} & I_{n_2} - Z_2A_{22} \end{bmatrix}\right) \neq . \qquad (6)$$

$\forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$

قضیه(2-1). مدل راسر سیستم دو بعدی توصیف شده (1) با $u\ (i,j) = 0$ به طور مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی

$$x(i+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i) \qquad (7)$$

پایدار مجانبی باشد[3].

نتیجه (2-1). عبارات زیر هم ارزند:

---

[1] Roesser

[2] Fornasini-Marchesini

1- سیستم دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر (1) پایدار مجانبی است.

2- سیستم توصیف شده (7) پایدار مجانبی است.

در نتیجه برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت سیستم دو بعدی، ابتدا سیستم را به فرم یک بعدی هم ارزش تبدیل نموده و ماتریس پس‌خورد حالت مناسب را برای سیستم جدید محاسبه می‌کنیم، سپس با توجه به ابعاد $x^h(i,j)\epsilon\mathbb{R}^{n_1}$ و $x^v(i,j)\epsilon\mathbb{R}^{n_2}$ ماتریس پس‌خورد حالت به دست آمده را به دو ماتریس F_1 و F_2 افراز می‌کنیم که به ترتیب دارای ابعاد $(n_1 \times m)$ و $(n_2 \times m)$ می باشند. در نتیجه ماتریس پس‌خورد حالت دو بعدی به دست می‌آید.

3- تخصیص مقادیر ویژه جزئی سیستم های خطی گسسته زمانی

سیستم توصیف شده (1) را به صورت سیستم یک بعدی زیر در نظر می‌گیریم:

$$x(i+1)=Ax(i)+Bu(i). \qquad (8)$$

که در آن $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\epsilon\mathbb{R}^{n\times n}$ و $B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}\epsilon\mathbb{R}^{n\times m}$ ماتریس‌های A_{11}، A_{12}، A_{21}، A_{22} تعریف شده در بخش قبل هستند و $u(i)\epsilon\mathbb{R}^m$ بردار ورودی می باشد.

حال برای سیستم (8) قانون کنترل را به صورت

$$u(i)=-F^Tx(i) \qquad (9)$$

تعریف می‌کنیم. اگر زوج (A, B) کنترل‌پذیر باشد آنگاه می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت F را طوری پیدا کرد که سیستم حلقه بسته

$$x(i+1)=(A-BF^T)x(i). \qquad (10)$$

دارای مقادیر ویژه مورد نظر باشد.

تعریف (3-1). مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای سیستم (7)، تغییر دادن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز سیستم با K مقدار ویژه جدید و بدون تغییر باقی گذاشتن بقیه طیف است [4].

فرض کنید $\Lambda=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_K,\lambda_{K+1},\ldots,\lambda_n\}$ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز A و $M=\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ یک مجموعه مقادیر ویژه دلخواه و هر دو تحت مزدوج مختلط بسته باشند. Λ را به صورت $\Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2)$ تجزیه می‌کنیم که در آن $\Lambda_1=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_K\}$ و $\Lambda_2=\{\lambda_{K+1},\ldots,\lambda_n\}$ تحت مزدوج مختلط بسته می‌باشند. با توجه به این که برای پایداری سیستم‌های گسسته لازم است تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد قرار بگیرند، مجموعه Λ_1 را که اعضای آن داخل دایره واحد قرار ندارند به مجموعه M که تمام اعضای آن داخل دایره واحد قرار دارند تغییر می‌دهیم. در نتیجه، هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت F به گونه ای است که ماتریس حلقه بسته $A-BF^T$ دارای مقادیر ویژه

$$\{\mu_1,\ldots,\mu_K,\lambda_{K+1},\ldots,\lambda_n\} \qquad (11)$$

بوده و در این صورت سیستم توصیف شده (1)، پایدار خواهد شد. جهت تخصیص مقادیر ویژه جزیی، زیر فضای چپ ناوردای ماتریس A وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ را به دست می‌آوریم [6].

ابتدا تجزیه شور جزیی ماتریس A^T را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$A^TQ=QR \qquad (12)$$

که در آن Q یک ماتریس $n \times K$ است به طوری که ستون های آن تشکیل یک پایه یکا متعامد برای زیر فضای چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_i^k$ را می دهد و R یک ماتریس بالا مثلثی $K \times K$ است. با در نظر گرفتن ماتریس $Z=A-BF^T$ و تعریف ماتریس پس‌خورد حالت به فرم

$$F=QS \qquad (13)$$

می‌توان نوشت:

$$Z^TQ=(A^T-FB^T)Q=QR-QSB^TQ= QR-QSE^T=Q[R-SE^T], \qquad (14)$$

لذا

$$Z^TQ=Q[R^T-ES^T]^T=QC_K^T, \qquad (15)$$

که در آن

$$C_K=R^T-ES^T, E=Q^TB, \qquad (16)$$

می‌باشد. در نتیجه C_K دارای مقادیر ویژه $M=\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ است. پس می‌توان مساله تخصیص مقادیر ویژه جزیی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

پیدا کردن ماتریس S به صورتی که ماتریس کوچک C_K دارای مقادیر ویژه $\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ باشد. با توجه به قضیه ذیل می‌توان ماتریس S را طوری اختیار کرد که مقادیر ویژه

$\lambda_i(1 \le i \le k)$ از A را به μ_i تغییر دهد و بقیه مقادیر ویژه A بدون تغییر باقی بماند.

قضیه (3-1). فرض کنید S ماتریسی باشد که در معادله (16) صدق کند و F از (13) به دست آید. آنگاه ماتریس $Z = A - BF^T$ دارای مقادیر ویژه

$$\{\mu_1,\ldots,\mu_K,\lambda_{K+1},\ldots,\lambda_n\} \qquad (17)$$

است [6].

حال برای یافتن ماتریسS فرض کنید زوج (R , E) کنترل پذیر باشد ماتریس حلقه بسته $C_K = R^T - ES^T$ را در نظر بگیرید. ماتریس S را طوری پیدا می‌کنیم که ماتریس C_K دارای مقادیر ویژه مورد نظر باشد.

ابتدا ماتریس افزوده $[E, R^T, I]$ را با استفاده از عملیات تشابهی اولیه تبدیل به فرم همدم برداری $[\tilde{E}, \tilde{R}^T, T^{-1}]$ می‌کنیم [5]. بنابراین ماتریس‌های $\tilde{E}$ و $\tilde{R}^T$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_0 \\ \cdots \\ . \end{bmatrix}, \qquad \tilde{R}^T = \begin{bmatrix} G_0 \\ \cdots \\ I_{(k-m)}\,0_{(k-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

که در آن E_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی و معکوس پذیر و G_0 یک ماتریس $m \times k$ است. حال ماتریس پس خورد حالتی را که مقادیر ویژه صفر را به سیستم همدم برداری اختصاص می دهد به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:

$$\tilde{S}_P = E_0^{-1} G_0 \qquad (19)$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد اولیه برای زوج (R , E) به صورت $S_P^T = \tilde{S}_P T^{-1}$ محاسبه می‌شود.

با جایگذاری ماتریس پس خورد حالت (19) در سیستم همدم برداری ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_k$ به صورت بلوکی $\tilde{\Gamma}_K = \begin{bmatrix} 0_{m\times k} \\ \cdots \\ I_{(k-m)}\;0_{(k-m)\times m} \end{bmatrix}$ با مقادیر ویژه صفر به دست می‌آید.

می‌خواهیم ماتریس پس‌خورد حالتی را به دست آوریم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف مورد نظر قرار گیرند، بدین منظور ماتریس قطری $D = diag\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ را با ماتریس $\tilde{\Gamma}_K$ جمع می‌کنیم داریم :

$$V = \left(\tilde{R}^T - \tilde{E}\tilde{S}^T\right) + D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & 0 & \mu_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ I & & & 0 & \mu_k \end{bmatrix} \qquad (20)$$

حال با انجام عملیات تشابهی ستونی و سطری نظیر روی V آن را به فرم همدم برداری $\tilde{V}$ تبدیل می‌کنیم

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{\lambda_{m\times k}} \\ \cdots \\ I_{(k-m)}\,0_{(k-m)\times m} \end{bmatrix} \qquad (21)$$

از آنجایی که $\tilde{V}$ مشابه V است لذا مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{V}$ نیز همان طیف $\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ است. بنابراین ماتریس پس‌خورد حالت اولیه را به صورت

$$S^T = S_P^T - E_0^{-1}\tilde{G}_\lambda T^{-1} \qquad (22)$$

در نظر می گیریم در نهایت ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - BF^T$ را در طیف پایدار (11) قرار می‌دهد را به صورت $F = QS$ محاسبه می‌کنیم.

4- الگوریتم پایدارسازی سیستم های دو بعدی مدل راسر

ورودی: $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ ، $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2}$ ، $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_1}$ ، $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ ، $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}$ ، $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}$.

خروجی: ماتریس پس خورد حالت F به طوری که سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه مورد نظر باشد.

1. ابتدا قرار می‌دهیم
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$
2. طیف مقادیر ویژه جزیی $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_K\}$ از ماتریس A^T و ماتریس‌های Q و R را با استفاده از تجزیه شور جزیی محاسبه می‌کنیم.
3. قرار می دهیم $E = Q^T B$.
4. حال با استفاده از تبدیلات تشابهی و فرم همدم برداری، S را به گونه ای تعیین می نماییم که مقادیر ویژه ماتریس $R^T - ES^T$ طیف $\{\mu_1,\ldots,\mu_K\}$ باشد.
5. $F = QS$ را محاسبه می‌کنیم.
6. در نهایت با استفاده از تعریف $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های $F_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}$ و $F_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times m}$ را به دست می‌آوریم.

5- مثال عددی

مدل راسر سیستم دو بعدی خطی گسسته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \qquad (23)$$

(i,j)

که در آن بردارهای حالت افقی و عمودی به ترتیب دارای ابعاد $x^h(i,j) \in \mathbb{R}^4$ و $x^h(i+1,j) \in \mathbb{R}^2$ می‌باشند و

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0/4065 & 0/8867 & 0/2158 & 0/7922 \\ 0/9518 & 0/2100 & 0/0787 & 0/2335 \\ 0/9120 & 0/1309 & 0/9331 & 0/6927 \\ 0/9514 & 0/5205 & 0/6029 & 0/2038 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0/1669 & 0/6808 \\ 0/4428 & 0/9232 \\ 0/6330 & 0/1528 \\ 0/9300 & 0/4057 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0/3460 & 0/9055 & 0/3775 & 0/9587 \\ 0/2902 & 0/4025 & 0/6649 & 0/7118 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 2/0000 & 1/0000 \\ 0/6214 & 0/2145 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} ، B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

به طوری که A و B به صورت معادلات (24) و (25) می‌باشند. با توجه به توضیحات گفته شده سیستم دو بعدی توصیف شده (23) را هم ارز سیستم یک بعدی زیر در نظر می‌گیریم.

$$x(i+1)=Ax(i)+Bu(i) \tag{26}$$

لذا بررسی پایداری سیستم دو بعدی (23) به بررسی پایداری سیستم یک بعدی (26) تبدیل می‌شود. طیف مقادیر ویژه ماتریس A به صورت

$$\Lambda = \{3/7749,\ 1/0869,\ -0/3953,\ 0/1725 \pm 0/2229i, -0/8479\} \tag{27}$$

می‌باشد. Λ را به صورت $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ تجزیه می‌کنیم به طوری که

$$\Lambda_1=\{3/7749, 1/0869\},$$
$$\Lambda_2=\{-0/3953,\ 0/1725 \pm 0/2229i, -0/8479\} \tag{28}$$

فرض می کنیم $M = \{0/2, -0/32\}$ مجموعه مقادیر ویژه دلخواه باشد. هدف تغییر دادن مجموعه مقادیر ویژه Λ_1 به مجموعه مقادیر ویژه M که درون دایره واحد قرار دارند می‌باشد. آنگاه با استفاده از تجزیه شور جزیی برای A^T و تبدیلات تشابهی ماتریس پس خورد F را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} 0/1800 & -0/2392 \\ -0/2153 & 0/3013 \\ 0/0143 & -/0142 \\ -0/2142 & 0/3007 \\ -1/1421 & 1/5740 \\ -0/3354 & 0/4663 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد حالت برای سیستم دو بعدی (22) را با توجه به ابعاد $x^h(i,j)$ و $x^v(i,j)$ به صورت زیر تفکیک می‌کنیم.

$$F_1=\begin{bmatrix} 0/1800 & -0/2392 \\ -0/2153 & 0/3013 \\ 0/0143 & -0/0142 \\ -0/2142 & 0/3007 \end{bmatrix},$$

$$F_2=\begin{bmatrix} -1/1421 & 1/5740 \\ -0/3354 & 0/4663 \end{bmatrix}$$

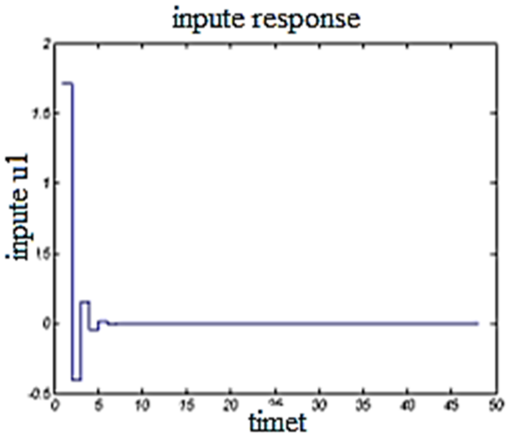
به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A - BF^T$ به صورت زیر است:

$$\{0/2, -0/32, -0/3953, 0/1725 \pm 02229i, -0/8479\}$$

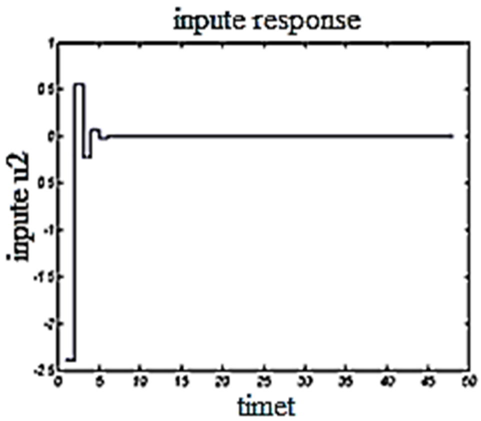
برای اثبات این ادعا با استفاده از نرم افزار متلب نمودار مربوط به x_iها و u را رسم کرده و مساله پایداری را به وضوح مشاهده می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 0/4065 & 0/8867 & 0/2158 & 0/7922 & \vdots & 0/1669 & 0/6808 \\ 0/9518 & 0/2100 & 0/0787 & 0/3335 & \vdots & 0/4428 & 0/9232 \\ 0/9120 & 0/1309 & 0/9331 & 0/6927 & \vdots & 0/6330 & 0/1528 \\ 0/9514 & 0/5205 & 0/6029 & 0/2038 & \vdots & 0/9300 & 0/4057 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0/3460 & 0/9055 & 0/3775 & 0/9587 & \vdots & 2/0000 & 1/0000 \\ 0/2902 & 0/4025 & 0/6649 & 0/7118 & \vdots & 0/6214 & 0/2145 \end{bmatrix} \tag{25}$$

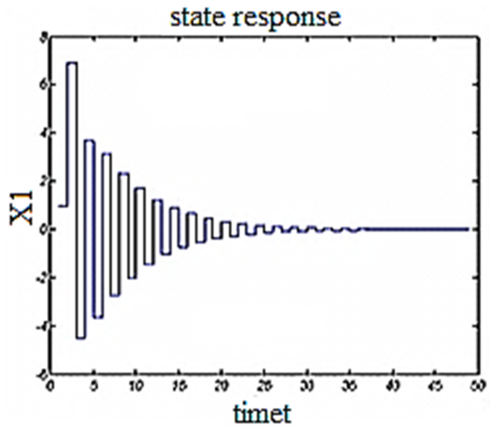
$$B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 6 \\ \cdots & \cdots \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{24}$$



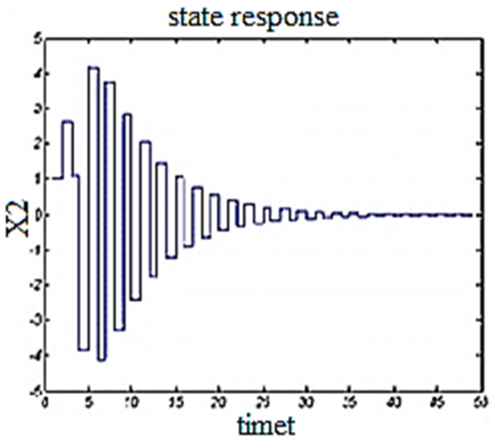
شکل 1- نمودار مربوط به مولفه اول ورودی



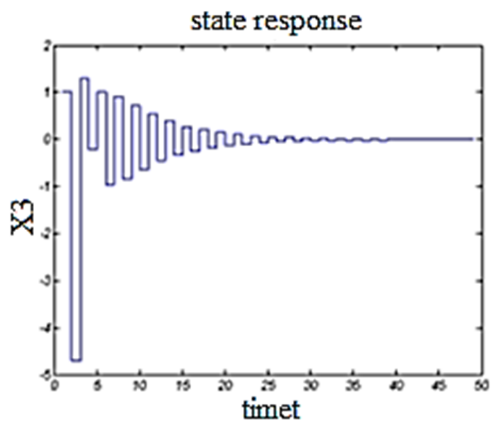
شکل 2- نمودار مربوط به مولفه دوم ورودی



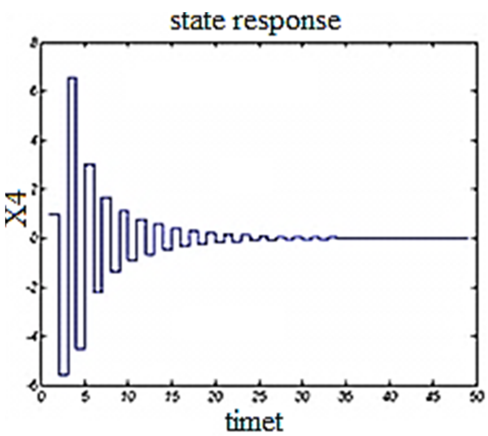
شکل 3- نمودار مربوط به مولفه اول حالت



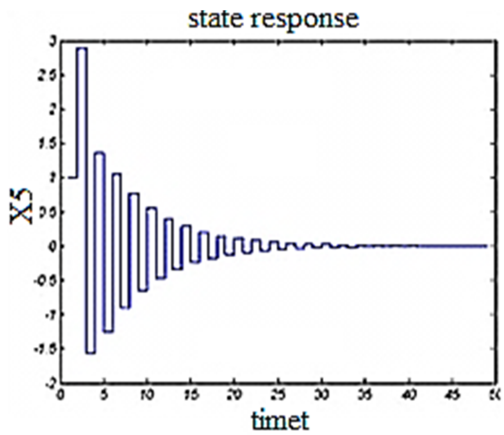
شکل 4- نمودار مربوط به مولفه دوم حالت



شکل 5- نمودار مربوط به مولفه سوم حالت



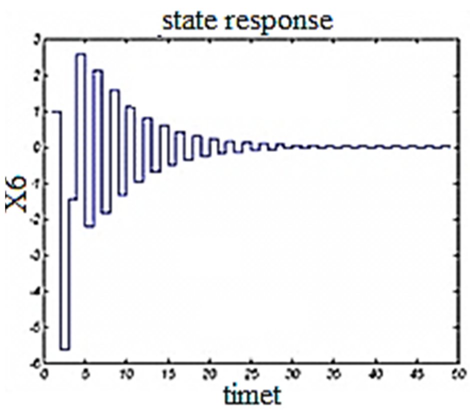
شکل 6- نمودار مربوط به مولفه چهارم حالت



شکل 7- نمودار مربوط به مولفه پنجم حالت

6- نتیجه گیری

در این مقاله، روشی نو برای شرح مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزیی به منظور پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته راسر ارائه گردید. نوآوری این مقاله جهت پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته راسر بدین صورت است که با استفاده از تجزیه شور جزیی و تبدیلات تشابهی ماتریس پس‌خورد حالت را به گونه ای به دست آوردیم که تمام مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته داخل دایره واحد قرار گیرد و الگوریتم مربوط به این روش نیز شرح داده شد. در سیستم های دو بعدی، ماتریس افزوده تشکیل شده A دارای بعد بزرگ n بوده که معمولا ناپایدار می‌باشد حال اگر این ناپایداری به دلیل قرار گرفتن تعداد محدود k تا از مقادیر ویژه ماتریس A در ناحیه ناپایداری باشد در روش تخصیص جزئی ارائه شده تنها k مقدار ویژه تخصیص داده می شود حال آنکه در روش‌های موجود [7 و 8] جهت پایداری سیستم های دوبعدی نیاز به تخصیص n مقدار ویژه می‌باشد بنابراین در روش پیشنهادی انجام عملیات به جای یک ماتریس $n \times n$ به عملیات بر روی یک ماتریس $k \times k$ کاهش می‌یابد لذا تعداد محاسبات کمتر و سرعت آن نیز بیشتر می‌شود که این افزایش سرعت به مقدار n و k بستگی دارد. همچنین روش تخصیص مقادیر ویژه جزیی با استفاده از تجزیه شور جزیی و تبدیلات تشابهی در مقایسه با روش‌های روابط متعامد [2] و آرنولدی [3 و 6] دارای مزیت‌های زیر است:



شکل 8- نمودار مربوط به مولفه ششم حالت

1- با تبدیل ماتریس بزرگ A به ماتریس‌های کوچک باعث سرعت بخشیدن به انجام محاسبات می‌شود.

2- در دو روش ذکر شده، ماتریس B حتما باید به صورت بردار باشد از آنجایی که در سیستم‌های دوبعدی ماتریس‌های $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ و $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ می باشد و این سیستم‌ها چند ورودی بوده، لذا $m > 1$ می‌باشد و در نتیجه ماتریس افزوده $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ نیز به صورت برداری نبوده و روش‌های موجود کاربرد ندارند حال آنکه در روش پیشنهادی از تبدیلات تشابهی به جای روابط متعامد و آرنولدی استفاده می‌شود و B می‌تواند به صورت ماتریسی باشد و در این صورت می‌توان روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی جدید را برای سیستم‌های دو بعدی بکار برد.

مراجع

[1] Hmamed A, Ait Rami M, Alfidi M (2008) Controller synthesis for positive 2D systems described by the Roesser model. 47th IEEE CD: 9–77.

[2] Datta BN, Sarkissian DR (2002) Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence uniqueness and numerical solution. IEEE: 1–11.

[3] Calvetti D, Lewis B, Reichel L (2001) On the solution of large sylvester-observer equations. Lin Alg Appl: 1–16.

[4] Fornasini E, Marchesini G (1987) Doubly-indexed dynamical system: State-space models

and structural properties. Math Syst Theory: 59–72.

[5] Fateh MM, AhsaniTehrani H, Karbassi SM (2011) Repetitive control of electrically driven robot manipulators. Int J Syst Sci: 1057–1065.

[6] Ramadan MA, El-Sayed EA (2006) Partial eigenvalue assignment problem of linear control systems using orthogonality relations. Acta. Montan Slovaca: 16–25.

[7] Roesser R (1975) A discrete state-space model for linear image processing. IEEE Trans Aut Contr: 1–10 .

[8] Paszke W, Lamb J, Galkowski K, Lind Z (2004) Robust stability and stabilization of 2D discrete state-delayed systems. Syst Contr Letters 51: 277–291.