مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۲/ دوره ۱۳/ شماره ۵/ صفحه ۱۶۷-۱۸۶

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/JSFM.2023.12811.3710

شناسایی بار زوال یک جسم هایپرالاستیک با در نظر گرفتن محل ایجاد زوال

فاطمه مظفر[۱]، محمدرحیم همتیان[۲،*]

[۱] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز
[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

یادداشت پژوهشی، تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵

چکیده

در سال‌های اخیر تعریف و تحلیل مسائل معکوس مواد هایپرالاستیک به علت استفاده فراوان این مواد در صنایع مختلف و همچنین در ساخت بافت‌های مصنوعی بدن، بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. در تحلیل مکانیکی مواد هایپرالاستیک، هم رفتار مادی و هم تغییر شکل ماده به‌صورت غیرخطی درنظر گرفته می‌شود. در این مقاله، یک مسأله معکوس در خصوص زوال اجسام هایپرالاستیک تعریف و برای حل آن دو روش مختلف پیشنهاد می‌گردد. تحلیل معکوس قطعات هایپرالاستیک که دچار زوال شده‌اند، برای جلوگیری از بروز مجدد زوال و بهبود طرح آن‌ها می‌تواند بسیار مفید باشد. در مسأله معکوس درنظر گرفته شده فرض می‌شود یک جسم دوبعدی که دچار زوال شده است وجود دارد و محل زوال آن مشخص است. توزیع بار اعمالی (شرایط مرزی) در قسمتی از مرز جسم، مجهول مسأله درنظر گرفته می‌شود و با حل مسأله معکوس تعیین می‌گردد. با تعریف یک تابع هدف مناسب، مسأله معکوس تعریف شده به یک مسأله بهینه‌سازی غیرمقید تبدیل می‌شود. برای حل مسأله بهینه‌سازی تعریف شده یک روش مرتبه صفر براساس روش جستجوی فواصل مساوی و یک روش مرتبه یک براساس روش تندترین کاهش مورد استفاده قرار می‌گیرد. جهت کاربردی‌تر شدن مسأله، داده‌های ورودی مسأله معکوس که محل زوال و کرنش معادل بحرانی است با مقداری خطا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در نهایت با در نظر گرفتن محل ایجاد زوال و کرنش معادل زوال، بار ایجاد کننده زوال شناسایی می‌شود. با توجه به مثال‌های ارائه شده ملاحظه می‌شود که عملکرد روش مرتبه اول به مراتب بهتر از روش مرتبه صفر است.

کلمات کلیدی: زوال؛ گرادیان-محور؛ هایپرالاستیک؛ مسأله معکوس؛ بهینه‌سازی

Identification of the Failure Load of a Hyperelastic Body Considering the Location of the Failure

Fatemeh Mozafar[1], Mohammad Rahim Hematiyan[2,*]

[1] M.Sc. Student, Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran

[2] Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran

Abstract

In recent years, the definition and analysis of inverse hyperelastic problems due to the wide use of these materials in various industries and also in manufacturing of artificial tissues of the body, has received more attention than before. In mechanical analysis of hyperelastic materials, both material behavior and material deformation are considered nonlinear. In this article, an inverse problem related to the failure of hyperelastic bodies is defined and two different methods are proposed to solve it. The inverse analysis of hyperelastic bodies that have failed, can be useful to prevent the recurrence of failure in these materials. In the inverse problem, it is assumed that a two-dimensional hyperelastic solid is failed and the place of its failure is known. The distribution of the load (boundary conditions) in a part of the boundary is considered unknown and is calculated by solving the inverse problem. By defining an appropriate objective function, the defined inverse problem is converted to an unconstrained optimization problem. To solve the optimization problem, a zero-order method based on the equal interval search method and a first-order method based on the steepest descent method are used. To make the problem more practical, the inverse problem input data, which are the location of failure and the critical equivalent strain, are used with some error. Finally, considering the location of the failure and the critical equivalent strain, the load causing failure is identified. It can be seen that the performance of the first-order method is better than the zero-order method.

Keywords: Failure; Gradient-based; Hyperelastic; Inverse problem; Optimization

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۹۸۷۱۳۶۱۳۳۱۴۹+؛ فکس: ۹۸۷۱۳۶۴۷۳۵۱۱+

آدرس پست الکترونیک: mhemat@shirazu.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه با دقت در اجزاء تشکیل دهنده بسیاری از تجهیزات مورد استفاده روزانه انسان‌ها، مواد هایپرالاستیک را به وفور خواهیم یافت و استفاده از این مواد را علاوه بر صنایع مهندسی مکانیک در علم بیومکانیک[1] نیز مشاهده می‌نماییم. شناسایی، تحلیل و بهینه‌سازی عملکرد مواد هایپرالاستیک با استفاده از تحلیل معکوس می‌تواند علاوه بر بهبود تجهیزات صنعتی، در زمینه‌های مختلف بیومکانیک مانند ساخت دریچه قلب، ترمیم بافت نرم و ساخت پروتزها نیز کمک کند. به‌طور مثال در صورت بروز زوال در قطعات لاستیکی (مانند تایر خودرو و هواپیما) و همچنین ایجاد زوال در بافت نرم مصنوعی در قسمت‌های مختلف بدن، با کمک تحلیل معکوس می‌توان بار ایجاد کننده زوال را شناسایی کرد و از بروز مجدد این وقایع جلوگیری نمود. یکی از مهم‌ترین خواص مواد هایپرالاستیک این است که در محدوده الاستیک، کرنش‌های بسیار بزرگی را تحت تنش‌های کوچک تجربه می‌نمایند. به علت رفتار غیر خطی مواد هایپرالاستیک، این مواد از قانون هوک تبعیت نمی کنند و برای تحلیل آن‌ها باید از تئوری‌های تغییر شکل بزرگ الاستیک استفاده نمود. روابط تنش بر حسب تغییر شکل یک ماده هایپرالاستیک با کمک تابع چگالی انرژی کرنشی بیان می‌گردد که تابع چگالی انرژی کرنشی همان میزان انرژی الاستیک ذخیره شده در واحد حجم جسم است. در مقاله پیش رو که قرار است توزیع بار به‌وجود آورنده زوال در یک جسم هایپرالاستیک شناسایی شود، یک تابع چگالی انرژی کرنشی مناسب بر اساس نظریه پدیده شناسی ریولین[2] برای بررسی رفتار مواد هایپرالاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بیان تابع انرژی کرنشی از یک سری ناورداهای تغییر شکل و ثابت های مادی استفاده می‌شود. تئوری‌های زوال برای مواد هایپرالاستیک نسبت به مواد الاستیک خطی بسیار پیچیده‌تر است. در ادامه، تعدادی از مهمترین پژوهش‌های انجام شده در این خصوص مرور می‌شود.

در سال ۱۹۹۷ الوسانیا[3] [۱] معیاری برای زوال کششی مواد هایپرالاستیک و کاربرد آن در مواد ویسکو الاستیک و ویسکو پلاستیک ارائه داد. او از چگالی انرژی کرنشی و انرژی هیسترزیس[4] ماده‌ای خاص در هفت دمای متفاوت کمک گرفت و بعد از رسم نمودارهای متعدد، رابطه بین انرژی زوال و دما را بدست آورد. وولوخ[5] [۲] در سال ۲۰۰۷ زوال مواد هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار داد. او این کار را با کمک نرم کردن[6] (یکی از روش‌های آماده کردن ماده جهت شکل‌پذیری بهتر) مواد هایپرالاستیک انجام داد و روی انرژی کرنشی این مواد تحقیقات کاربردی بسیاری به عمل آورد. وی انرژی کرنشی را با زوال و بدون زوال بررسی کرد و حالات تنش تک محوره و برشی ساده را نیز بررسی کرد. برای بررسی تنش تک محوره از مدل مادی نئوهوکین[7] استفاده کرد و پدیده کاویتاسیون[8] در ماده جامد را بررسی نمود و زوال بالون[9] و زوال شریانی[10] و انرژی زوال بحرانی[11] را در ادامه تحقیقاتش بررسی کرد.

در سال ۲۰۰۹ در زمینه توصیف زوال مواد هایپرالاستیک، نیر[12] و همکارانش [۳] از روش‌های استاندارد و نرم افزار آباکوس[13] استفاده کردند و با کمک فنون تجربی یعنی کالیبراسیون[14] مدل هایپرالاستیک، تست پارگی[15] و استفاده از نمونه‌ای که دچار زوال شده بود، به مقایسه رفتار مواد و انرژی زوال بحرانی برای گروه خاصی از مواد هایپرالاستیک پرداختند. وولوخ [۴] در سال ۲۰۱۰ نیز یک مدل برای زوال مواد شبه لاستیک[16] ارائه نمود و قابلیت ارتجاعی[17] را با محدود کننده های انرژی[18] بررسی کرد و از یک تابع پتانسیل زوال جدید[19] استفاده کرد؛ همچنین او در سال ۲۰۱۱ تحقیقاتش را در زمینه زوال مواد هایپرالاستیک ادامه داد [۵] و زوال مواد غیر همسانگرد نرم را نیز مدل کرد.

[1] Biomechanic
[2] Rivilin
[3] Olusanya
[4] Hysteresis
[5] Volokh
[6] Softening
[7] Neo-Hookean
[8] Cavitation
[9] Baloon
[10] Arterial
[11] Critical failure energy
[12] Nair
[13] ABAQUS
[14] Calibration
[15] Tear test
[16] Rubber like
[17] Elasticity
[18] Energy limiter
[19] New failure potential

کائو[1] و همکارانش [۶] در سال ۲۰۱۷ تغییر فرم مواد هایپرالاستیک برای جامدات نرم را تا بروز زوال بررسی کردند و آن‌ها مدلی جدید برای مواد هایپرالاستیک با تخمین خطا و در واقع یک روش مستقیم برای دستیابی به پتانسیل‌های الاستیک چند محوره جدید در مواد هایپرالاستیک نرم غیر قابل تراکم پیشنهاد دادند.

در سال ۲۰۱۸ اشمند[2] و مرزی[3] [۷] تاثیر سرعت باز شدن ترک و ضخامت لایه چسب بر رفتار زوال اتصالات چسبی هایپرالاستیک تحت بارگذاری خاص را مورد بررسی قرار دادند. استفاده گسترده از اتصالات چسبی که جنسی شبیه به لاستیک دارند، نیاز به داشتن دانش درباره رفتار زوال و در نهایت پیش‌بینی خرابی این اتصالات دارد. تمرکز کار اشمند و همکارانش بر روی وابستگی حالت زوال بر سرعت باز شدن ترک و ضخامت لایه‌های چسب اتصالات چسبی در مواد هایپرالاستیک بود. آن‌ها دو نمونه تیر یک‌سر درگیر، با لایه چسب با دو ضخامت متفاوت ساختند و در سرعت‌های مختلف مورد آزمایش قرار دادند.

روزندال[4] و همکارانش [۸] در سال ۲۰۱۸ در مورد ترک در اتصالات چسبی هایپرالاستیک پژوهش‌هایی انجام دادند. در واقع آن‌ها زوال بنیادی چسب‌های اتصال دهنده شیشه به فلز که همان درزگیرهای سیلیکونی هستند را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها حالت‌های مختلف زوال که بستگی به هندسه چسب داشت را بررسی نمودند؛ همچنین، ملاحظه کردند که در محدوده‌هایی که تنش‌های سه محوره وجود دارد، زوال‌های انبساطی به علت رشد ناگهانی حفره‌ها رخ خواهد داد. آن‌ها همچنین در سال ۲۰۱۹ معیار زوال بر پایه کرنش را برای الاستومرهای هایپرالاستیک غیر قابل تراکم، تحت بارگذاری چند محوره بدست آوردند [۹] و زوال بر پایه کرنش مدل‌های مختلف مانند فون میسز[5]، ترسکا[6] و ... را مقایسه کردند و روابط و نمودارهای آن‌ها را با هم قیاس کردند.

در سال ۲۰۲۰ راس[7] و همکارانش [۱۰] پارگی کامپوزیت‌های هایپرالاستیک به‌دست آمده از چاپ سه بعدی را با کمک آزمایش‌های مختلف و تحلیل میدان فازی[8] مدل‌های زوال بررسی کردند. آن‌ها رفتار زوال کامپوزیت‌های پلیمری به‌دست آمده از چاپ سه بعدی، تحت تغییر فرم‌های بسیار بزرگ را بدست آوردند و در نهایت نتایج آزمایشگاهی و محاسبات عددی با کمک روش میدان فازی و فرمول‌بندی تنش صفحه‌ای را با هم مقایسه کردند. در همین سال، روزندال [۱۱] زوال مواد هایپرالاستیک غیر قابل تراکم تحت بارهای انبساطی یا اعوجاجی را به همراه توصیف سطح زوال ارائه نمود. او معیار انرژی زوال و کرنش مربوط به هسته ترک که به علت شکاف ایجاد می‌شود را بیان نمود و یک مدل که تنش، کرنش و آنالیزهای زوال را برای اتصالات چسب‌های هایپرالاستیک نشان می‌داد استخراج کرد. در سال ۲۰۲۲ روزندال و همکارانش [۱۲] روی پیش‌بینی زوال مواد هایپرالاستیک تراکم ناپذیر کار کردند و در این خصوص از نمونه‌های محدود حجمی مانند نمونه‌های پنکیک استفاده نمودند. در سال ۲۰۲۳ زوچووسکی[9] و همکارانش [۱۳] به منظور تحلیل قابلیت‌های جذب و اتلاف انرژی در مواد هایپرالاستیک، مطالعات تجربی و عددی روی مکانیزم‌های شکست مواد هایپرالاستیک تحت برخورد انجام دادند.

به علت گستردگی موضوع زوال مواد هایپرالاستیک هنوز تحقیقات متعددی در این زمینه درحال انجام است. در پژوهش حاضر یک تئوری نسبتا جدید زوال [۹ و۱۱] که یکی از تئوری‌های کارآمد است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. تاکنون مسائل معکوس مختلفی در خصوص مواد هایپرالاستیک تعریف و تحلیل شده است. برای مثال، در پژوهش انجام شده توسط حاج‌هاشم‌خانی و همتیان [۱۴] با استفاده از یک روش معکوس که از الگوریتم هموارسازی تیخونوف استفاده می‌کند، شرایط مرزی مجهول از نوع تنش، برای یک جسم هایپرالاستیک شناسایی شده است. جابه جایی برای نقاط مختلف در سطح خارجی جسم اندازه گیری شده است و با استفاده از این داده ها و فرآیندی تکرار شونده، پارامترهای توزیع تنش روی مرز محاسبه شده است. در پژوهش آن‌ها، تحلیل معکوس برای مدل همسانگرد مونی- ریولین و همچنین مدل همسانگرد اگدن انجام شده است. در مقاله آن‌ها [۱۴] یک مثال برای

5 Cao
6 Schmandt
7 Marzi
8 Rosendahl
9 von Mises
10 Tresca
11 Russ
12 Phase field
13 Zochowski

شناسایی شرایط مرزی روی لبه یک جسم دوبعدی با هندسه نسبتا پیچیده ارائه شده است تا کارائی روش ارائه شده مورد ارزیابی قرار گیرد.

در پژوهش دیگری که توسط حاج‌هاشم‌خانی و همکارانش [۱۵] انجام شده است، یک فرمول‌بندی معکوس جدید برای شناسایی پیکربندی اولیه (بدون بار) یک جسم هایپرالاستیک تغییر شکل یافته با استفاده از روش المان محدود ارائه شده است. در پژوهش انجام شده توسط زو[1] و همکاران [۱۶] یک روش معکوس برای تعیین ثابت‌های الاستیک و شرایط مرزی مواد هایپرالاستیک سه بعدی ارائه گردیده است.

با توجه به بررسی‌های انجام شده ملاحظه می‌شود که تاکنون در خصوص مواد هایپرالاستیک تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است و مسائل مختلف معکوس در مورد شناسایی پارامترهای مادی و شرایط مرزی مواد هایپرالاستیک ارائه شده است، اما تحقیقی در خصوص نوآوری پژوهش حاضر که شناسایی بار زوال یک جسم هایپرالاستیک با داشتن محل ایجاد زوال آن است انجام نگردیده است.

هدف از انجام این پژوهش، کسب این توانایی است که در صورت بروز زوال برای مواد هایپرالاستیک قادر باشیم تا با بررسی محل زوال و دانستن شرایط تکیه‌گاهی، با انجام تحلیل معکوس توزیع بار وارده بر ماده هایپرالاستیک را به‌دست آوریم. در این صورت، هنگام بکارگیری مجدد ماده هایپرالاستیک با همان مشخصات، می‌دانیم که تا چه حد و اندازه‌ای مجاز هستیم ماده را تحت تنش و نیرو قرار دهیم. تحلیل المان محدود تغییر شکل ماده هایپرالاستیک در نرم‌افزار شناخته‌شده انسیس[2] انجام می‌شود. تحلیل زوال و انجام مراحل بهینه‌سازی در تحلیل معکوس در نرم‌افزار متلب[3] انجام می‌شود. در مسأله معکوس مورد بحث، محل زوال، جنس ماده هایپرالاستیک، هندسه و شرایط تکیه‌گاهی معلوم درنظر گرفته می‌شود، اما بار وارد شونده مجهول درنظر گرفته می‌شود. مسأله به‌صورت دوبعدی درنظر گرفته می‌شود و بار وارد شونده مجهول با یک توزیع ساده مثلا خطی مدل می‌شود و پارامترهای بار با حل مسأله معکوس محاسبه می‌شوند. در واقعیت، تعیین محل زوال و خصوصیات مادی جسم هایپرالاستیک با مقداری خطا همراه است. برای نزدیک شدن شرایط مسأله به وضعیت واقعی، مقادیری که برای محل زوال و ظرفیت زوال ماده هایپرالاستیک درنظر گرفته می‌شود با مقادیری خطا بکار برده می‌شود تا توانایی روش ارائه شده در شرایط عملی سنجیده شود.

۲- روابط متشکله و معیار زوال مواد هایپر-الاستیک

در حالت کلی، روابط مرتبط کننده تنش و تغییر شکل با استفاده از تابع انرژی کرنشی بیان می‌شود. در مواد الاستیک غیرخطی برای تابع انرژی پتانسیل کرنشی مدل‌های متفاوتی وجود دارد. معادلات ساختاری دارای ثوابتی هستند که از طریق آزمایش و به صورت تجربی بدست می‌آیند.

در روابطی که در ادامه بیان می‌شود، W تابع انرژی کرنشی، $\mathbf{F}$ تانسور گرادیان تغییر شکل[4] و $\mathbf{u}$ بردار جابجایی است. تانسور گرادیان تغییر شکل بر حسب بردار جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \tag{۱}$$

$\mathbf{C}$ برای بیان تانسور تغییر شکل راست کوشی-گرین[5] بکار گرفته می‌شود که رابطه آن با تانسور گرادیان تغییر شکل به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{۲}$$

دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل با J نمایش داده می‌شود:

$$J = \det(\mathbf{F}) \tag{۳}$$

تابع انرژی کرنشی یک ماده همسانگرد را می‌توان به کمک ناورداهای تانسور $\mathbf{C}$ مطابق رابطه زیر بیان کرد:

$$W = W(I_1(C_{ij}), I_2(C_{ij}), I_3(C_{ij})) \tag{۴}$$

[1] Xu
[2] ANSYS
[3] MATLAB
[3] Deformation gradient tensor
[4] Right Cauchy-Green deformation tensor

I_1، I_2 و I_3 ناورداهای تانسور $\mathbf{C}$ هستند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C}) \quad (۵)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\mathbf{C}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2)\right] \quad (۶)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (۷)$$

در یک رهیافت کلی، می‌توان از سری توانی نامتناهی برای بیان تابع انرژی کرنشی استفاده کرد [۱۷]:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} C_{pqr}(I_1-3)^p (I_2-3)^q (I_3-3)^1 \quad (۸)$$

لازم به ذکر است که C_{pqr} در عبارت فوق، نشان دهنده ثابت‌های ماده است. در مدل‌سازی‌های کاربردی مختلف، تابع انرژی کرنشی برحسب تعداد محدودی ثابت مادی بیان می شود. برای محاسبه تابع چگالی انرژی، مدل‌های متفاوتی با ثوابت متنوع وجود دارد که از مشهورترین آن‌ها می‌توان به مدل‌های مونی-ریولین[۱]، نئوهوکین، و اوگدن[۲] اشاره کرد. در این پژوهش، از مدل نئوهوکین استفاده خواهد شد که در ادامه توضیحات مختصری در مورد آن ارائه می‌گردد.

تابع چگالی انرژی کرنشی نئوهوکین در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W = C_1(I_1-3) + D_1(J-1)^2 \quad (۹)$$

که در آن I_1 ناوردای اول (جمع مقادیر روی قطر) تانسور تغییر شکل راست کوشی-گرین است. C_1 و D_1 ثابت‌های ماده هایپرالاستیک هستند و I_1 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (۱۰)$$

همچنین:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (۱۱)$$

برای یک ماده تراکم ناپذیر، تابع چگالی انرژی کرنشی بر اساس مدل نئوهوکین در سه بعد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W = C_1(I_1-3) \quad (۱۲)$$

درخصوص بیان تغییر شکل مواد هایپرالاستیک و بررسی زوال آن‌ها تانسورهای مختلف و متنوعی در مراجع متعدد تعریف گردیده‌است. در ادامه، رابطه نوعی از کرنش بررسی می شود که در این پژوهش مورد استفاده قرار خواهد گرفت. پژوهش حاضر بر مبنای معیار زوال بر اساس اتساع[۳] و کرنش هنکی[۴] خواهد بود.

اتساع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_i = \frac{dl_i}{dL_i} \quad (۱۳)$$

که در آن dl_i طول المان تغییر فرم یافته و dL_i طول المان قبل از تغییر فرم است

تانسور چپ اتساع[۵] برای یک مسأله سه بعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

تانسور کرنش هنکی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{H} = \log \mathbf{V} \quad (۱۵)$$

لگاریتم تانسور $\mathbf{V}$ که یک تانسور مثبت قطعی است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\log \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} (\ln \hat{\lambda}_i)\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (۱۶)$$

[1] Mooney–Rivlin
[2] Ogden
[3] Stretch
[4] Hencky strain
[5] Left stretch tensor

$\hat{\lambda}_i$ در این‌جا همان مقادیر ویژه مثبت تانسور $\mathbf{V}$ و $\mathbf{n}_i$ همان بردارهای ویژه متعامد تانسور $\mathbf{V}$ هستند. نماد $\otimes$ بیان کننده ضرب دایادیک[1] دو بردار است. مقادیر ویژه $\mathbf{H}$ کرنش های واقعی[2] (ε_i) می‌باشند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_i = \int_{L_i}^{l_i} d\varepsilon = \int_{L_i}^{l_i} \frac{d\tilde{l}}{\tilde{l}} = \ln\left(\frac{l_i}{L_i}\right) = \ln \lambda_i \qquad (۱۷)$$

با این تعاریف $\mathbf{H}$ که معرف کرنش هنکی است، به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

برای تفکیک مودهای تغییر شکل اتساع حجمی[3] و اعوجاجی[4] از یکدیگر، تانسور کرنش هنکی به‌صورت زیر به دو بخش هیدرواستاتیک[5] و انحرافی[6] تقسیم می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \log \mathbf{V} = \log\left[\frac{1}{(\det \mathbf{V})^{1/3}} \mathbf{V} (\det \mathbf{V})^{1/3} \mathbf{I}\right] \\ &= \log\left[\frac{1}{(\det \mathbf{V})^{1/3}} \mathbf{V}\right] + \log\left[(\det \mathbf{V})^{1/3} \mathbf{I}\right] \qquad (۱۹) \\ &= \mathbf{H}_{dev} + \frac{tr\mathbf{H}}{3} \mathbf{I} \end{aligned}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{V}/(\det \mathbf{V})^{1/3}$ نشان دهنده اعوجاج در حجم ثابت[7] و $(\det \mathbf{V})^{1/3} \mathbf{I}$ نشان دهنده اتساع حجمی است.

مطابق شکل ۱ یک تبدیل مختصات به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \qquad (۲۱)$$

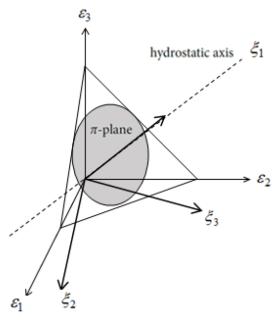
$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \qquad (۲۲)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \qquad (۲۳)$$

محور ξ_1 محور هیدرواستاتیک نامیده می‌شود که بر روی این محور رابطه زیر برقرار است:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \qquad (۲۴)$$

حالات تغییر فرم روی این محور (محور هیدرواستاتیک $\xi_1 = const$) مطابق با اتساع حجمی خالص[8] است؛ همچنین صفحه انحراف[9] (دیویاتوریک) را مشخص می‌کند که با نام‌های صفحه هشت ضلعی[10] یا صفحه پی[11] نیز شناخته می‌شود و در شکل ۱ نیز قابل مشاهده است.



شکل ۱- نشانگر صفحه پی و معرف تبدیل مختصات رابطه‌ی (۲۰)

با توجه به همسانگرد بودن ماده، تئوری زوال باید بر اساس یک سری ناوردای مستقل از چرخش دستگاه مختصات بیان گردد. ناورداها به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند [۹]:

6 Dyadic
7 Principal true strains
8 Dilatational
9 Distortional
10 Hydrostatic
11 Deviatoric

5 Distortional isochoric
6 Pure dilatation
7 Deviatoric plane
8 Octahedral plane
9 π - plane

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{H}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad (۲۵)$$

$$I_2' = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{H}_{dev}^2 - (\mathrm{tr}\,\mathbf{H}_{dev})^2) = \frac{1}{6}((\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2) \qquad (۲۶)$$

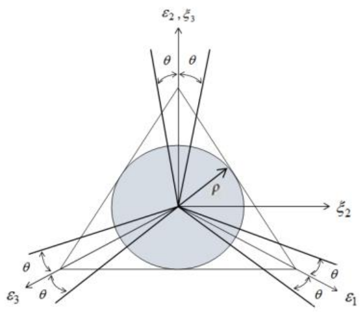
$$I_3' = \det \mathbf{H}_{dev} = (\varepsilon_1 - \frac{1}{3}I_1)(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}I_1)(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}I_1) \qquad (۲۷)$$

فاصله از محور هیدرواستاتیک توسط ρ نشان داده می شود. پارامترهای ρ و θ که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۱]:

$$\rho = \sqrt{2I_2'} \qquad (۲۸)$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{I_3'}{(I_2')^{3/2}}\right) \qquad (۲۹)$$

θ در صفحه پی نظیر شش نقطه مختلف است و نام آن زاویه بار[1] می‌باشد. لازم به ذکر است که θ در محدوده $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ قرار دارد (شکل ۲). ρ ، θ و ξ_1 سطح زوال فی[2] را در مختصات استوانه‌ای بیان می‌کنند.



شکل ۲- موقعیت ρ و θ

تئوری زوال[3]، در واقع همان دانشِ پیش‌بینی شرایط گسیختگی مواد حین اعمال نمودن بارهای خارجی است.

تئوری پادگورسکی-بیگونی-پیکولروز[4] که مخفف آن PBP است[۲۳،۲۲،۹]، هم از نظر شکل معادله و هم از نظر دقت، به علت وجود دو ثابت، از سایر تئوری‌های زوال کامل‌تر است و به همین دلیل در این پژوهش به‌کار گرفته می‌شود. داده‌های تجربی و داده‌های این معیار زوال با توجه به مطالعات انجام شده در مرجع ۲۱ دارای تطابق بسیار خوبی با یکدیگر می‌باشند.

کرنش معادل با توجه به تئوری PBP به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varepsilon_{eq} = \rho\cos\left(\beta\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arccos\left(\alpha\cos(3\theta)\right)\right) \qquad (۳۰)$$

مقدار α در بازه [0,1] و مقدار β در بازه [0,2] انتخاب می‌شوند که برای مثال اگر $\alpha = 1$, $\beta = 0$ انتخاب شود، به تئوری ماریوت[5] و اگر $\beta = 1$ انتخاب شود، به تئوری ترسکا[6] و اگر $\beta = 2$ انتخاب شود، به تئوری ایولو[7] نزدیک می‌شویم؛ همچنین برای $\alpha = 0$ و هر مقدار β، این معیار به معیار فون میسز نزدیک می‌شود.

بر اساس این معیار، برای اینکه در یک نقطه از جسم هایپرالاستیک زوال رخ دهد، باید کرنش معادل[8] که در آن نقطه به‌جود می‌آید برابر با کرنش بحرانی[9] شود. یعنی:

$$\varepsilon_{eq}(\mathbf{H}) = \varepsilon_c \qquad (۳۱)$$

مقدار کرنش بحرانی برای هر ماده هایپرالاستیک با جنس دلخواه مشخص است و برای اینکه زوال رخ دهد، باید مقدار کرنش معادل با مقدار کرنش بحرانی برابر شود.

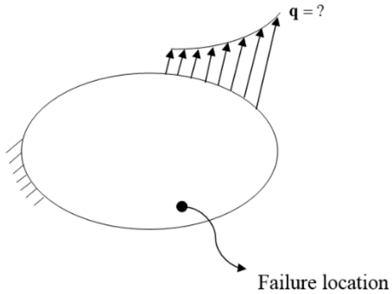
۳- صورت مسأله معکوس و روش حل آن

در این پژوهش فرض می‌شود که یک جسم هایپرالاستیک همگن[10] و همسانگرد[11] وجود دارد که تحت یک بار استاتیکی دچار زوال شده است و محل دقیق زوال هم مشخص است.

[10] Lode angle
[11] ϕ surface
[1] Failure theory
[2] Podgorski-Bigoni-Piccolroaz
[3] Mariotte
[4] Tresca
[5] Ivlev

[6] Equivalent strain
[7] Critical strain
[8] Homogenous
[9] Isotropic
[10] Lode angle

شرایط تکیه‌گاهی، جنس ماده و محدوده مکانی اعمال بار نیز معلوم می‌باشند، اما توزیع بار وارد شونده به جسم که باعث زوال شده است به‌صورت کامل یا به‌صورت جزئی مجهول است. بار برحسب چند پارامتر مدل می‌شود که این پارامترها مجهولات مسأله هستند. هندسه کلی مسأله در شکل ۳ آورده شده است.



شکل ۳- هندسه کلی مسأله شناسایی بار زوال جسم هایپرالاستیک

حل این مسأله نیازمند تحلیل‌های مختلفی در نرم افزارهای تحلیل المان محدود مثل انسیس و برنامه نویسی در محیط متلب است.

بار مجهول به‌صورت یک بار گسترده (جابجایی یا تنش) برحسب یک تا سه پارامتر مدل می‌شود. تعداد معادلاتی که برحسب مجهولات در تحلیل معکوس به‌دست می‌آید نباید از تعداد مجهولات کمتر باشد. در مسأله معکوس مورد نظر سه معادله مختلف مرتبط با مجهولات می‌توان استخراج نمود. دو معادله با توجه به دو مختصه محل زوال که معلوم است حاصل می‌گردند و یک معادله دیگر هم با توجه به معیار زوال به‌دست می‌آید. درصورتیکه در تعریف مسأله، سه پارامتر مجهول (برابر با تعداد معادلات) درنظر گرفته شود برای حالاتی که خطای اندازه‌گیری وجود دارد مسأله معکوس بدشرط[1] می‌شود؛ یعنی یک تغییر کوچک در داده‌های ورودی مسأله معکوس، باعث تغییر بسیار زیاد در جواب مسأله می‌شود و جواب مناسبی به دست نخواهد آمد.

در این پژوهش، دو پارامتر مجهول برای مدل‌سازی بارگذاری درنظر گرفته می‌شود. پارامترهای مجهول بیان کننده بار را به‌صورت درایه‌های ماتریس ستونی $\mathbf{q}$ درنظر می‌گیریم:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{۳۲}$$

هریک از پارامترهای q_1 و q_2 می‌توانند بیان کننده یک پارامتر نیرویی، تنشی، یا جابجایی باشند. مختصات محل زوال را (x_f, y_f) درنظر می‌گیریم که معلوم است. در روند حل مسأله معکوس که به‌صورت تکرار شونده و براساس یک روش بهینه‌سازی غیر خطی انجام می‌شود، مختصات نقطه بحرانی را با (x_c, y_c) نشان می‌دهیم. در روند تکرار شونده باید فاصله نقطه زوال و نقطه بحرانی حداقل شود؛ بنابراین تابع هدف را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$f(\mathbf{q}) = (x_c(\mathbf{q}) - x_f)^2 + (y_c(\mathbf{q}) - y_f)^2 \tag{۳۳}$$

همچنین شرط زوال را می‌توانیم به‌عنوان یک قید غیرخطی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\varepsilon_c(\mathbf{q}) - \varepsilon_{failure} = 0 \tag{۳۴}$$

در یک رهیافت مناسب‌تر برای حالات واقعی که خطای اندازه گیری و خطای مدل‌سازی وجود دارد، تابع هدف و قید را به صورت زیر در یک تابع هدف ترکیب می‌کنیم:

$$g(\mathbf{q}) = \frac{(x_c(\mathbf{q}) - x_f)^2 + (y_c(\mathbf{q}) - y_f)^2}{{x_f}^2 + {y_f}^2} + \lambda \frac{(\varepsilon_c(\mathbf{q}) - \varepsilon_f)^2}{{\varepsilon_f}^2} = g_1 + \lambda g_2 \tag{۳۵}$$

ε_c همان مقدار ε_{eq} در نقطه بحرانی است که در هر مرحله توسط نرم افزار محاسبه می‌گردد و ε_f مقداری از کرنش معادل است که باعث زوال می‌شود و از آغاز مقدار آن معلوم است. در تابع هدف بیان شده در معادله (۳۵)، تابع g_1 برای به حداقل رساندن فاصله بین نقطه بحرانی (نقطه زوال

[1] Ill-conditioned

محاسباتی) و نقطه زوال داده شده و تابع g_2 برای به حداقل رساندن فاصله بین کرنش بحرانی محاسباتی و کرنش زوال درنظر گرفته شده است. در هر دو تابع مخرج مناسبی درنظر گرفته شده است که جملات بدون بعد بوجود آورند. ضریب λ در معادله (۳۵) وزن تابع g_2 را در مقایسه با g_1 بیان می کند. هرچه از نظر مکانی به نقطه مورد نظر نزدیک‌تر شویم تابع g_1 کوچکتر می‌شود و هرچه مقدار ε_c به مقدار ε_f نزدیک‌تر گردد، تابع g_2 کوچک‌تر می‌شود.

برای انجام بهینه‌سازی در روند حل مسأله معکوس از یک برنامه که در نرم‌افزار متلب نوشته شده است، استفاده می‌شود. در هر مرحله از مراحل مختلف فرایند بهینه‌سازی باید $x_c(\mathbf{q})$، $y_c(\mathbf{q})$ و $\varepsilon_c(\mathbf{q})$ محاسبه شوند. با توجه به توضیحات فوق، مسأله مورد بحث دارای دو متغیر طراحی است. در هر مرحله تکرار، با مشخص شدن مقادیر $x_c(\mathbf{q})$ و $y_c(\mathbf{q})$، محاسبه مقدار $\varepsilon_c(\mathbf{q})$ نیز امکان‌پذیر خواهد بود و از آن برای محاسبه تابع هدف استفاده خواهیم نمود. در ادامه، دو روش مختلف، یعنی یک روش مرتبه صفر و یک روش گرادیان محور را مورد بررسی قرار می‌دهیم که برای حل مسأله بهینه‌سازی استفاده می‌شوند.

۳-۱- حل مسأله معکوس با استفاده از یک روش مرتبه صفر

در مراحل اولیه پژوهش، سعی گردید از یک روش مرتبه صفر بهینه‌سازی برای توابع دو متغیره استفاده شود، اما ملاحظه شد که روند همگرایی بسیار کند بوده و گاهی حتی همگرایی به جواب بوجود نمی‌آید. بنابراین تصمیم بر آن شد که مسأله دو بعدی بهینه‌سازی به دو مسأله بهینه‌سازی یک بعدی تبدیل شود. برای اینکه روند حل مسأله تحت کنترل باشد و همگرایی نسبتاً خوبی برای بهینه‌سازی بوجود آید، چند مقدار مختلف برای λ انتخاب کرده و به ازای هر کدام از آن‌ها مسأله بهینه سازی را به مسائل بهینه‌سازی یک متغیره تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم. پس از آن، از بین جواب‌های بدست آمده جواب مناسب را انتخاب می‌کنیم. در هر مرحله از حل مسأله، دو زیر مرحله درنظر گرفته و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) در زیر مرحله اول، q_1 را ثابت در نظر می‌گیریم و تنها متغیر طراحی را q_2 درنظر می‌گیریم و یک مرحله بهینه‌سازی انجام می‌دهیم تا مقدار جدید q_2 بدست آید.

۲) در زیر مرحله دوم، مقدار جدید بدست آمده برای q_2 را ثابت درنظر می‌گیریم و تنها متغیر طراحی را q_1 درنظر می‌گیریم و یک مرحله بهینه‌سازی را انجام می‌دهیم تا مقدار جدید q_1 بدست آید.

به عبارت دیگر، به صورت متوالی در هر مرحله از بهینه‌سازی، یکی از متغیرها را ثابت درنظر می‌گیریم و روند حل مسأله بهینه‌سازی را برای متغیر دیگر انجام می‌دهیم و در مرحله بعد، از مقادیر جدید حاصل شده استفاده می‌نماییم. این روند تا جایی ادامه خواهد داشت که تابع هدف بسیار کوچک گردد و معیار همگرایی نیز ارضا شود.

روش‌های جست‌وجو[1] که تحت عنوان روش‌های مرتبه صفر شناخته می‌شوند، مبتنی بر محاسبه همزمان یا متوالی تابع هدف در ناحیه امکان[2] هستند، تا نقطه بهینه[3] مسأله را مشخص کنند. خروجی این روش‌ها اطلاعاتی در مورد ناحیه‌ای است که نقطه‌ی بهینه در آن قرار دارد. البته باید توجه داشت که دستیابی به جواب کم‌خطا توسط این روش‌ها با صرف هزینه محاسباتی نسبتاً زیاد امکان‌پذیر است.

روش‌های جست‌وجوی متعددی برای پیدا کردن نقطه بهینه توابع تک متغیره وجود دارد، که یکی از ساده‌ترین آن‌ها، روش جست‌وجو با فواصل مساوی[4] است [۲۴]. در این روش، تابع هدف به صورت $U = f(x)$ فرض می‌شود که x تنها متغیر مسأله است و فرض می‌شود که تابع هدف پیوسته است و در حوزه بررسی دارای یک مینیمم است. محل نقطه مینیمم در نقطه x^* درنظر گرفته می‌شود و مقدار مینیمم تابع هدف با $U_{\min}$ نشان داده می‌شود.

برای حل مسأله توسط این روش، از یک نقطه اولیه[5] مانند x_i شروع می‌کنیم و مقدار تابع را در این نقطه محاسبه می نمائیم. آن‌گاه یک گام دلخواه Δx انتخاب کرده و مقدار تابع را نیز در نقطه $x_i + \Delta x$ محاسبه می‌کنیم. در این مرحله مقادیر تابع را در این دو نقطه با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. اگر

[1] Search methods
[2] Feasible region
[3] Optimum point
[4] Equal interval search method
[5] Initial point

مقدار تابع در نقطه $x_i + \Delta x$ کاهش یافته بود، در می‌یابیم که مسیر انتخابی ما درست است و مجددا نقطه $x_i + \Delta x$ را همانند نقطه x_i درنظر گرفته و با مقدار گام Δx جمع کرده و مقدار تابع را در این نقطه جدید محاسبه و همانند قبل روند کاهشی مقدار تابع را بررسی می‌کنیم. در صورت کاهش مقدار تابع نسبت به قبل، این روند را ادامه می‌دهیم. اگر مقدار تابع به جای کاهش، افزایش پیدا کرد، نشان از این می‌دهد که جهت انتخابی اشتباه است. در اینجا باید مقدار گام را نصف کنیم و گام را در یک منفی ضرب کنیم تا جهت مورد بررسی برعکس گردد و ادامه مسیر را همانند قبل با مقدار گام جدید پیش می‌گیریم. معمولاً برای پیدا کردن مینیمم یک تابع چندین بار مقدار گام نصف می‌شود. این روند تا جایی که مقدار گام از معیار همگرایی[1] که با عدد کوچکی مانند η بیان می شود، کوچکتر شود ادامه می‌یابد. در ابتدای بکارگیری این روش، دو مقدار اولیه برای متغیرها درنظر می‌گیریم. سپس متغیر اول را ثابت در نظر گرفته و روند بهینه‌سازی فوق را انجام می‌دهیم. بعد از حاصل شدن مقدار جدید برای متغیر دوم، این مقدار را در مرحله دوم ثابت درنظر گرفته و روند حل مسأله بهینه‌سازی را برای متغیر اول انجام می‌دهیم.

۳-۲- حل مسأله با استفاده از یک روش گرادیان محور (مرتبه یک)

در یک روش گرادیان محور همانطور که از نام آن مشخص است، از گرادیان و مشتق تابع هدف برای حل مسأله استفاده می‌گردد. روشی که در این بخش استفاده می‌گردد، روش تندترین کاهش[2]است [۲۴]. در این روش، تابع هدف به صورت $U = U(x_1, x_2)$ درنظر گرفته می‌شود که x_1 و x_2 متغیرهای مسأله هستند و همچنین گام کلی مسأله به اندازه Δ درنظر گرفته می‌شود. در این روش با یک حدس اولیه برای x_1 و x_2 فرآیند آغاز می‌گردد و $U(x_1, x_2)$ محاسبه می‌گردد. سپس مشتقات تابع U را نسبت به x_1 و x_2 با استفاده از تقریب تفاضل محدود محاسبه می‌نماییم. برای این منظور، ابتدا فقط مقدار x_1 را به اندازه δx، (عدد کوچکی که با کمک آن قصد داریم مقدار مشتق را بدست بیاوریم)، تغییر می‌دهیم و x_2 را بدون تغییر می‌گذاریم و در این مرحله $U(x_1 + \delta x, x_2)$ را بدست می‌آوریم. در این مرحله با استفاده از فرمول تفاضل محدود زیر، $\partial U / \partial x_1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{U(x_1 + \delta x, x_2) - U(x_1, x_2)}{\delta x} \qquad (۳۶)$$

در مرحله بعد، x_1 را ثابت درنظر می‌گیریم و x_2 را به اندازه δx تغییر می‌دهیم و همانند قبل، مقدار $\partial U / \partial x_2$ را نیز محاسبه می‌کنیم. در ادامه با کمک فرمول‌های زیر مقدار گام های Δx_1 و Δx_2 را برای تغییرات x_1 و x_2 به‌صورت جداگانه، محاسبه می‌نماییم.

$$\Delta x_1 = \frac{-(\frac{\partial U}{\partial x_1})\Delta}{\sqrt{(\frac{\partial U}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U}{\partial x_2})^2}} \qquad (۳۷)$$

$$\Delta x_2 = \frac{-(\frac{\partial U}{\partial x_2})\Delta}{\sqrt{(\frac{\partial U}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U}{\partial x_2})^2}} \qquad (۳۸)$$

بعد از محاسبات انجام شده توسط فرمول‌های فوق، با استفاده از فرمول‌های کلی زیر مقادیر $x_{1\mathrm{new}}$ و $x_{2\mathrm{new}}$ را محاسبه می‌نماییم و مجدداً مقدار $U(x_{1\mathrm{new}}, x_{2\mathrm{new}})$ را نیز بدست می‌آوریم.

$$x_{1\mathrm{new}} = x_1 + \Delta x_1 \qquad (۳۹)$$

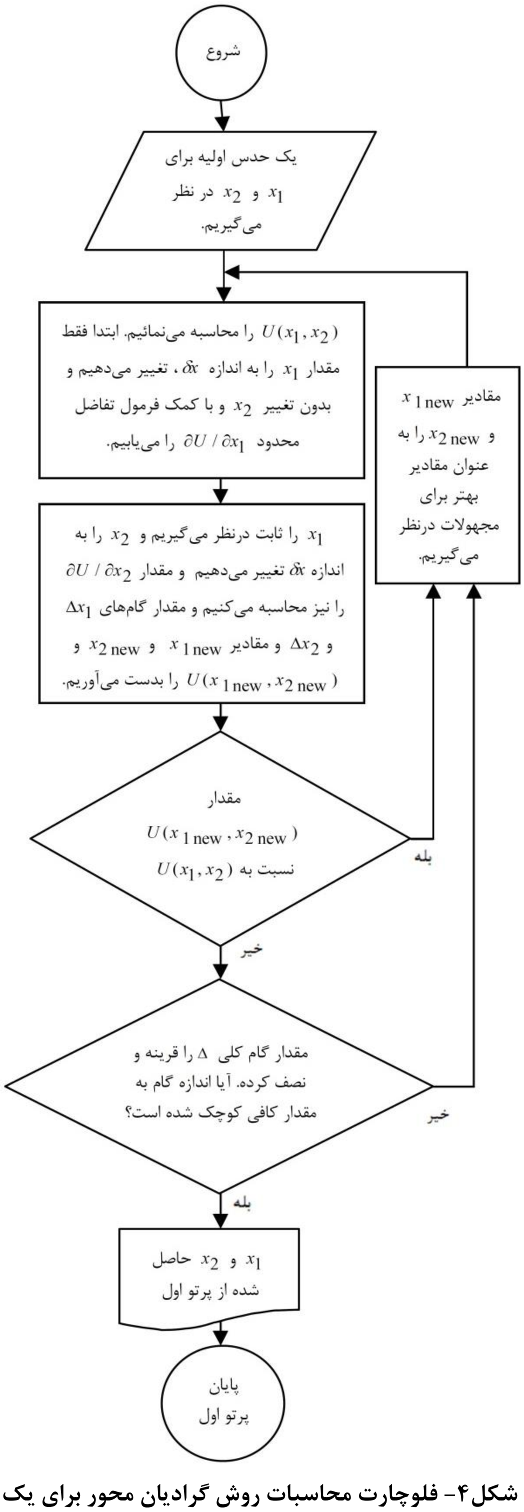
$$x_{2\mathrm{new}} = x_2 + \Delta x_2 \qquad (۴۰)$$

اگر مقدار $U(x_{1\mathrm{new}}, x_{2\mathrm{new}})$ نسبت به $U(x_1, x_2)$ کاهش پیدا کرده بود، مقادیر $x_{1\mathrm{new}}$ و $x_{2\mathrm{new}}$ را به عنوان حدس‌های اولیه جدید (مقادیر بهتر) درنظر می‌گیریم و مجددا روش فوق را به‌کار می‌گیریم. اگر مقدار $U(x_{1\mathrm{new}}, x_{2\mathrm{new}})$ نسبت به $U(x_1, x_2)$ افزایش پیدا کرده بود، مقدار گام کلی مسأله یعنی Δ را قرینه و نصف کرده و مجددا از همین روش استفاده می‌نماییم تا تابع هدف کاهش پیدا کند. این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که مقدار Δ به میزان مطلوب کوچک گردد. در این وضعیت بهینه‌سازی روی پرتو اول[3] به پایان رسیده و برای آغاز پرتو دوم باید مقادیر نهایی x_1 و x_2 حاصل

[1] Convergence criterion
[2] Steepest descent method
[3] First ray

شده از پرتو اول را به عنوان مقادیر اولیه برای پرتو دوم در نظر بگیریم و مجددا از مقدار اولیه Δ استفاده نموده و روش فوق را مجددا به کار ببندیم تا مقدار Δ در طی حل مسأله مجددا به همان میزان مطلوب کوچک گردد (شکل ۴).

روند محاسبات مربوط به پرتو جدید زمانی متوقف می‌شود که مقادیر $\partial U / \partial x_1$ و $\partial U / \partial x_2$ به مقدار کافی کوچک شوند. در این حالت مقادیر نهایی x_1 و x_2 در آخرین پرتو، جواب مسأله می‌باشند. شکل ۴ فلوچارت محاسبات مربوط به یک پرتو را نشان می‌دهد.



شکل۴- فلوچارت محاسبات روش گرادیان محور برای یک پرتو

۴- مثال‌های عددی

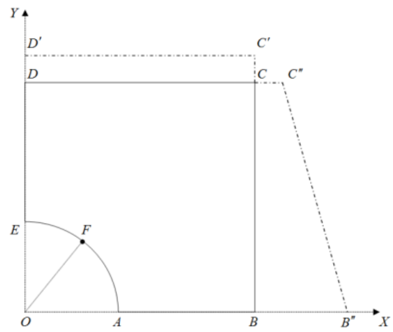
در این بخش یک مثال از ورقی هایپرالاستیک تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای مطرح می‌شود و به صورت عددی آن را بررسی می‌نماییم. برای فراهم آوردن داده‌های ورودی مسأله معکوس و تعریف مسأله معکوس، ابتدا یک مسأله مستقیم را حل می‌کنیم.

۴-۱- حل یک مسأله مستقیم و تعریف مسأله معکوس

یک ورق هایپرالاستیک مطابق آنچه در شکل ۵ نشان داده شده است درنظر می‌گیریم. این ورق به شکل مربع است که از یکی از گوشه‌های آن یک ربع دایره جدا شده است. ابعاد این ورق و شعاع ربع دایره به صورت زیر است:

$$OD = OB = 0.5\,\text{m} \tag{۴۱}$$

$$OF = 0.2\,\text{m} \tag{۴۲}$$



شکل ۵- یک ورق هایپرالاستیک مربع شکل با گوشه بریده شده

در این ورق هایپرالاستیک، یک جابجایی یکنواخت عمودی برای ضلع DC و یک جابجایی افقی با تغییرات خطی برای ضلع BC به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$v_{DC} = 0.1\,\mathrm{m} \qquad (۴۳)$$

$$q_1 = u_C = 0.02\,\mathrm{m} \qquad (۴۴)$$

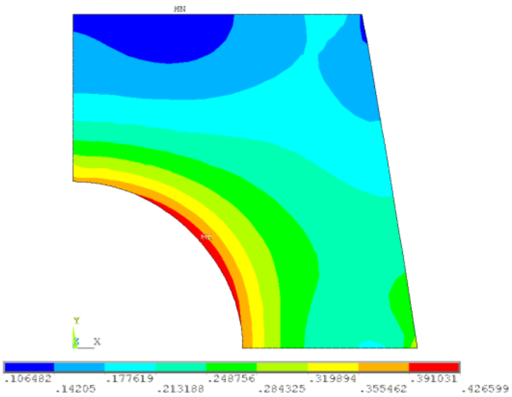
$$q_2 = u_B = 0.12\,\mathrm{m} \qquad (۴۵)$$

لبه‌های AB و DE به‌صورت غلتکی درنظر گرفته می‌شوند. به‌عبارت دیگر در این دو لبه جابجایی عمود بر لبه و تنش برشی مماس بر لبه صفر درنظر گرفته می‌شود. لبه انحنادار بصورت آزاد و بدون تنش درنظر گرفته می‌شود و از مدل مادی متداول و پرکاربرد نئوهوکین استفاده می‌گردد. مشخصات مادی ورق بر اساس مدل نئوهوکین به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\mu = 200\,\mathrm{Pa} \qquad (۴۶)$$

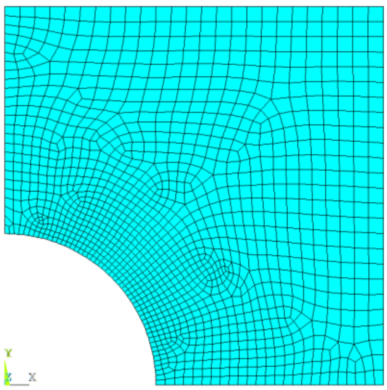
$$d = 5\times10^{-5} \qquad (۴۷)$$

که μ مدول برش اولیه ماده[1] و d پارامتر تراکم ناپذیری ماده[2] است. برای محاسبه کرنش معادل از تئوری PBP، مقادیر α و β را به ترتیب برابر ۱ و ۰/۰۳۲ در نظر می‌گیریم [۹]. در نرم افزار انسیس [۲۵] این مسأله، با ۱۳۵۲ المان تحلیل گردید. در شکل ۶ کانتور کرنش اصلی اول در دامنه مسأله دیده می‌شود.



شکل ۶- کانتور کرنش اصلی اول در دامنه مسأله

برای شروع تحلیل، یک مرتبه مسأله با درنظر گرفتن ۴۱۳ المان و یک مرتبه دیگر با ۱۳۵۲ المان (شکل۷) تحلیل گردید و ملاحظه شد که جواب‌ها در این دو تحلیل تفاوت ناچیزی (کمتر از ۰/۱ درصد) با یکدیگر دارند، بنابراین در کلیه تحلیل‌ها ۱۳۵۲ المان درنظر گرفته شد.



شکل ۷- مدل المان محدود مسأله با ۱۳۵۲ المان

پس از استخراج تغییر شکل از نرم‌افزار انسیس و انجام محاسبات لازم برای تعیین ε_{eq} در تمام گره‌ها توسط نرم‌افزار متلب ملاحظه می‌شود که در نقطه F با مختصات (۰/۱۲۷۵، ۰/۱۵۴۱) بیشترین مقدار ε_{eq} (با توجه به رابطه ۳۰) یعنی ۰/۵۲۱۴ به‌وجود می‌آید که این مقدار را به عنوان ε_f درنظر می‌گیریم. اکنون صورت مسأله معکوس را برای این ورق به

[1] Initial shear modulus of the material

[2] Material incompressibility parameter

صورت زیر تعریف می‌کنیم:

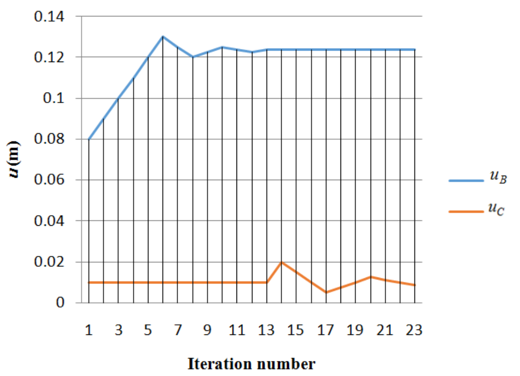
در ورق نشان داده شده در شکل ۵، جنس ماده و شرایط مرزی در تمام لبه‌ها به‌جز لبه BC مانند قبل درنظر گرفته می شود. جابجایی لبه BC به‌صورت افقی با تغییرات خطی و نامعلوم درنظر گرفته می‌شود و کرنش معادل زوال و نقطه‌ای که در آن زوال اتفاق افتاده است معلوم هستند. مجهولات مسأله u_B و u_C هستند که در ادامه، به ترتیب با پارامترهای q_1 و q_2 معرفی می‌شوند. بردار مجهولات به‌صورت $\mathbf{q}=[q_1 \quad q_2]^T$ درنظر گرفته می‌شود. در قسمت بعد، برای حل مسأله معکوس یک مرتبه داده‌های اندازه‌گیری بدون خطا و در مرتبه‌های بعد داده‌های اندازه‌گیری دارای خطا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شروع روش جستوجو با فواصل مساوی، اندازه گام برابر با ۰/۰۱ درنظر گرفته می‌شود. شرط توقف را وقتی درنظر می‌گیریم که اندازه گام به مقدار ۰/۰۰۱۲۵ برسد. جدول ۱ حاصل محاسبات با روش فوق برای مثال ذکر شده است.

جدول ۱- نتایج روش مرتبه صفر بدون خطای اندازه‌گیری برای ۱۳۵۲ گره

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۰۸	۰/۰۱	۱	۲۳	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۰۰	۰	۵/۷۸۵ × ۱۰^{-۷}

در این حالت تعداد مراحل تا دستیابی به جواب ۲۳ بوده است. در شکل ۸ تغییرات مقادیر u_B و u_C در ۲۳ مرحله مشاهده می‌شود.

حال برای مقادیر مختلف λ، مسأله فوق را حل می‌نماییم که نتایج به‌دست آمده در جدول ۲ گزارش شده است.



شکل ۸- تغییرات مقادیر u_B و u_C در مراحل مختلف

جدول ۲- نتایج روش مرتبه صفر بدون خطای اندازه‌گیری به ازای مقادیر مختلف λ

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۱	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۰۰	۰	۵/۷۸۵ × ۱۰^{-۷}
۰/۰۸	۰/۰۱	۰/۲	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۰۰	۰	۵/۷۸۵ × ۱۰^{-۷}
۰/۰۸	۰/۰۱	۵	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۰۰	۰	۵/۷۸۵ × ۱۰^{-۷}
۰/۰۸	۰/۰۱	۱۰	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۰۰	۰	۵/۷۸۵ × ۱۰^{-۷}

همانطور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، نتایج محاسبه شده به ازای مقادیر مختلف λ به نتایج یکسان برای u_B و u_C ختم می‌گردد. این وضعیت به این علت به‌وجود آمده است که به ازای هر مقدار λ، برای حل مسأله از مقادیر به‌دست آمده به ازای مقدار قبلی λ به‌عنوان حدس اولیه استفاده می شود و چون دو قسمت تابع هدف خیلی کوچک بوده است تغییری در آن حاصل نشده است.

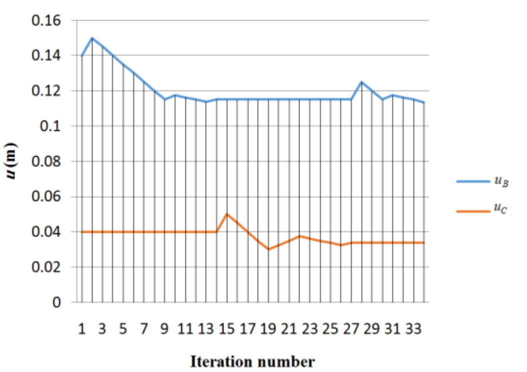
مجددا مسأله فوق را برای حدس اولیه جدید حل می نماییم و مقدار گام و الگوریتم توقف را هم مانند قسمت قبل

در نظر می‌گیریم. نتایج به‌دست آمده با حدس اولیه جدید در جدول ۳ گزارش شده است.

جدول ۳- نتایج روش مرتبه صفر بدون خطای اندازه‌گیری برای حدس اولیه جدید

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	–	۳۴	۰/۱۱۵۰	۰/۰۳۴۸	۹/۷۵۶۶ $\times 10^{-4}$	۳/۶۷۸ $\times 10^{-7}$

مقدار $\sqrt{g_2}$ نسبت به قسمت قبل کاهش یافته و این نشان می‌دهد که ε_{eq} در این حالت به ε_f نزدیکتر شده است؛ اما مقدار $\sqrt{g_1}$ در مقایسه با قسمت قبل افزایش یافته و این به این معنی است که موقعیت مکانی زوال بدست آمده نسبت به مسأله قبل که دقیقا با مقدار ایده‌آل برابر بود، کمی دورتر شده است. در شکل ۹ تغییرات مقادیر u_B و u_C در ۳۴ مرحله روش بهینه‌سازی نشان داده شده است.



شکل ۹- تغییرات مقادیر u_B و u_C در مراحل مختلف برای حدس اولیه جدید

مجددا این مسأله را نیز با مقادیر مختلف λ حل می‌نماییم و مجددا مشاهده می‌گردد که به ازای مقادیر مختلف λ با حدس اولیه جدید نیز نتایج مشابهی حاصل می‌شود. در توضیح اینکه چرا با تغییر حدس اولیه، مقدار نهایی u_B و u_C هربار کمی تغییر می‌کنند و مانند جواب دقیق مسأله به‌دست نمی‌آیند باید گفت که برای پاسخ مسأله فعلی، با دقت درنظر گرفته شده برای معیار توقف، یک جواب خاص وجود ندارد، بلکه ما محدوده‌ای از جواب‌ها را بدست خواهیم آورد. این به این علت است که ما شکل صورت مسأله را به ۱۳۵۲ قسمت تقسیم کرده‌ایم و گره‌های درنظر گرفته شده در عمل مقداری با یکدیگر فاصله دارند و به همین علت است که هر بار با تغییر حدس اولیه، مقادیر نهایی u_B و u_C هم مقدار بسیار اندکی با هم متفاوت به‌دست می‌آیند. به عنوان یک رویکرد می‌توان پیشنهاد نمود که مسأله را با چند حدس اولیه حل کرده و مقدار میانگین جواب را از تحلیل‌های مختلف به عنوان جواب درنظر گرفت. برای مثال جواب میانگین گزارش شده در جداول ۱ و ۳ برای u_B و u_C به ترتیب ۰/۱۱۹۴ و ۰/۰۲۱۹ می‌باشد که با مقدار دقیق آن‌ها یعنی ۰/۱۲ و ۰/۰۲ اختلاف بسیار کمی دارد.

برای حل این مسأله تاکنون فرض بر این بوده است که داده‌های اولیه و معلوم مسأله، کاملا صحیح و بدون خطا اندازه گیری شده‌اند و برای محاسبات بعدی در اختیار ما قرار داده شده‌اند، اما در این قسمت در یک رویکرد نزدیک‌تر به واقعیت فرض می‌کنیم که مختصات نقطه زوال با مقداری خطا در اختیار ما قرار داده شده باشد، ولی ε_f به‌صورت بدون خطا در دسترس باشد. برای این منظور مقدار ε_f را مانند قبل برابر با ۰/۵۲۱۴ ولی مختصات نقطه زوال را در گره‌ای دیگر یعنی (۰/۱۲۲۵۸، ۰/۱۵۸۰۳) درنظر می‌گیریم که نسبت به مختصات گره درست زوال حدود ۳/۵ درصد خطا دارد. نتایج حل مسأله برای این حالت در جدول ۴ گزارش شده است.

جدول ۴- نتایج روش مرتبه صفر با خطای اندازه‌گیری فقط در مختصات محل زوال

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	–	۳۹	۰/۱۱۶۲	۰/۰۳	۰	۱/۴۷۱۳ $\times 10^{-7}$

حال اگر علاوه بر مختصات محل زوال، مقدار ε_f را نیز با دو درصد خطا برابر با ۰/۵۱۱۰ درنظر بگیریم، نتایج حل مسأله معکوس به صورت نشان داده شده در جدول ۵ خواهد بود.

جدول ۵- نتایج روش مرتبه صفر با خطای اندازه‌گیری در مختصات محل زوال و مقدار ε_f

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	-	۶۷	۰/۱۱۶۲	۰/۰۱۱۲	۰	$۱/۵۳۱۸ \times ۱۰^{-۷}$

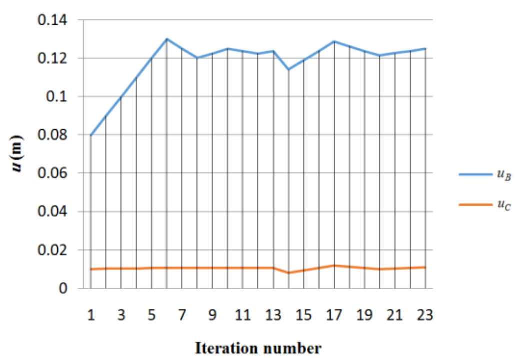
مجددا مسأله فوق که هم در مختصات محل زوال و هم در مقدار ε_f دارای خطای اندازه‌گیری است را به ازای مقادیر مختلف λ حل می‌نماییم و ملاحظه می‌شود، کاهش یا افزایش ۱۰ برابری مقدار λ تأثیری در جواب نهایی ندارد. روش بهینه سازی موفق شده است شرایط مرزی مجهول را به گونه‌ای محاسبه کند که زوال دقیقا در نقطه خواسته شده اتفاق بیافتد و مقدار کرنش معادل در آن نقطه بسیار به مقدار ε_f نزدیک باشد. با توجه به جدول ۵ ملاحظه می‌شود که در این وضعیت که داده‌های اندازه‌گیری دارای خطا هستند جواب به‌دست آمده در مقایسه با جواب ایده‌آل نیز دارای خطایی حتی به مراتب بیشتر است. بیشتر بودن خطای جواب مسأله معکوس را در مقایسه با خطای اندازه‌گیری می‌توان با توجه به بدشرط بودن مسأله معکوس و کم بودن تعداد معلومات (داده‌های اندازه گیری) توجیه نمود.

در روش گرادیان محور، با ثابت نگاه داشتن مقدار u_C، مقدار u_B را به اندازه ۰/۰۰۱، تغییر می‌دهیم و مقدار $\frac{\partial g}{\partial u_B}$ را بدست می‌آوریم و در مرحله بعد مقدار u_B را برابر حدس اولیه درنظر گرفته و مقدار u_C را به اندازه ۰/۰۰۱ تغییر می‌دهیم و $\frac{\partial g}{\partial u_C}$ را محاسبه می‌نماییم. گام کلی مسأله، یعنی Δ را برابر با ۰/۰۱ درنظر گرفته و شرط توقف را وقتی درنظر می‌گیریم که اندازه گام به مقدار ۰/۰۰۱۲۵ برسد. هنگامی که مقادیر $\frac{\partial g}{\partial u_B}$ و $\frac{\partial g}{\partial u_C}$ به مقدار ۰/۰۱ نزدیک شدند، حل مسأله متوقف شده و مقادیر نهایی u_B و u_C جواب‌های مسأله می‌باشند. جدول ۶ حاصل محاسبات با روش فوق برای مثال ذکر شده است.

جدول ۶- نتایج روش گرادیان محور بدون خطای اندازه‌گیری با درنظر گرفتن ۱۳۵۲ گره

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۰۸	۰/۰۱	-	۲۳	۰/۱۲۴۷	۰/۰۱۱۲	۰	$۹/۱۹۵۹ \times ۱۰^{-۷}$

با توجه به جدول ۶ ملاحظه می‌شود که به رغم این‌که مقادیر دو قسمت تابع هدف یعنی $\sqrt{g_1}$ و $\sqrt{g_2}$ خیلی کوچک می‌باشد ولی جواب‌های حاصل شده با مقدار حقیقی مسأله کمی فاصله دارند و علت این اتفاق را همانطور که قبلا ذکر شد، می‌توان گسسته بودن مدل المان محدود و پیوسته نبودن محل زوال محاسبه شده، بیان نمود. در شکل ۱۰ تغییرات مقادیر u_B و u_C در ۲۳ مرحله روش بهینه‌سازی نشان داده شده است.



شکل ۱۰- تغییرات مقادیر u_B و u_C در روش گرادیان محور برای مراحل مختلف

مجددا اگر برای مقادیر مختلف λ، مسأله فوق را حل نماییم ملاحظه می‌شود که مانند روش مرتبه صفر، نتایج به

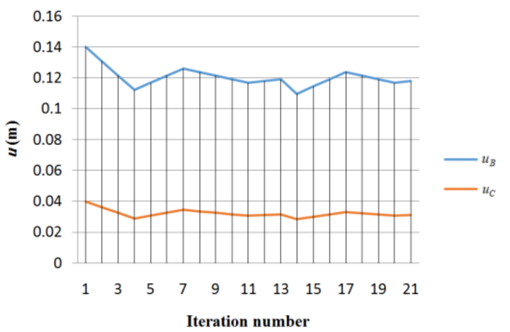
دست آمده به ازای مقادیر مختلف λ به نتایج یکسان برای u_B و u_C ختم می‌شود.

بار دیگر مسأله فوق را برای حدس اولیه جدید حل می نماییم و مقدار گام و الگوریتم توقف را هم مانند قسمت قبل در نظر می‌گیریم. نتایج به‌دست آمده با حدس اولیه جدید در جدول ۷ گزارش شده است.

جدول ۷- نتایج روش گرادیان محور بدون خطای اندازه‌گیری برای حدس اولیه جدید

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	۱	۲۱	۰/۱۱۹۱	۰/۰۳۱۶	۰	۶/۴۸۷۶ $\times$ ۱۰$^{-۵}$

در شکل ۱۱ تغییرات مقادیر u_B و u_C در ۲۱ مرحله روش بهینه‌سازی نشان داده شده است.



شکل ۱۱- تغییرات مقادیر u_B و u_C در روش گرادیان محور برای مراحل مختلف برای حدس اولیه جدید

در اینجا نیز اگر به ازای مقادیر مختلف λ با حدس اولیه جدید مسأله را حل نماییم، نتایج مشابهی حاصل می‌گردد.

مجددا مانند روش مرتبه صفر، یک رویکرد نزدیک‌تر به واقعیت فرض می‌کنیم که مختصات نقطه زوال با مقداری خطا در اختیار ما قرار داده شده باشد، ولی ε_f به‌صورت بدون خطا در دسترس باشد. برای این منظور مقدار ε_f را مانند قبل برابر با ۰/۵۲۱۴ ولی مانند روش مرتبه صفر، مختصات نقطه زوال را در گره‌ای دیگر یعنی (۰/۱۲۲۵۸، ۰/۱۵۸۰۳) درنظر می‌گیریم که نسبت به مختصات گره درست زوال حدود ۳/۵ درصد خطا دارد. نتایج حل مسأله برای این حالت در جدول ۸ گزارش شده است. حال اگر علاوه بر مختصات محل زوال، مقدار ε_f را نیز با دو درصد خطا برابر با ۰/۵۱۱۰ درنظر بگیریم، نتایج حل مسأله معکوس به‌صورت نشان داده شده در جدول ۹ خواهد بود.

جدول ۸- نتایج روش گرادیان محور با درنظر گرفتن ۳/۵ درصد خطا در مختصات محل زوال

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	۱	۲۶	۰/۱۱۶۷	۰/۰۳۰۷	۰	۲/۳۵۴۲

جدول ۹- نتایج روش گرادیان محور با درنظر گرفتن خطای اندازه‌گیری در مختصات محل زوال و مقدار ε_f

حدس اولیه u_B (m)	حدس اولیه u_C (m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی u_B (m)	مقدار نهایی u_C (m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۰/۱۴	۰/۰۴	۱	۵	۰/۱۱۰۹	۰/۰۲۸۵	۱/۰۱۱ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	۳/۴۴۷ $\times$ ۱۰$^{-۵}$

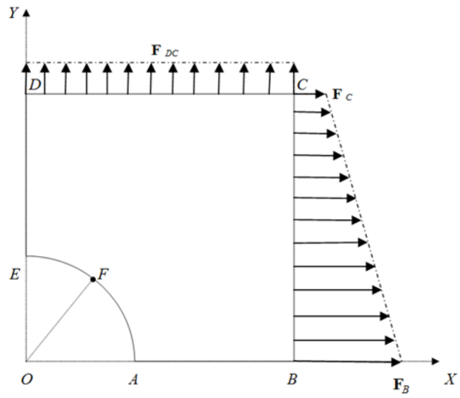
مشاهده می‌گردد که با اضافه کردن خطا در مقدار ε_f، نسبت به حالتی که خطا را فقط در مختصات محل زوال وارد کرده بودیم، مقادیر $\sqrt{g_1}$ و $\sqrt{g_2}$ افزایش پیدا کرده‌اند. مجدداً مسأله فوق که هم در مختصات محل زوال و هم در مقدار ε_f دارای خطای اندازه‌گیری است را به ازای مقادیر مختلف λ حل می‌نماییم و ملاحظه می‌شود که مانند روش مرتبه صفر، کاهش یا افزایش ۱۰ برابری مقدار λ تأثیری در جواب نهایی ندارد.

نتایج به‌دست آمده از روش مرتبه صفر و روش مرتبه یک نشان می‌دهد که هر دو روش توانایی شناسایی شرط مرزی

مجهول را دارند و در شرایط مختلف دقت هر دو روش از یک مرتبه است، اما تعداد مراحل لازم برای حل مسأله توسط روش مرتبه یک به مراتب کمتر از آن توسط روش مرتبه صفر است.

۴-۲- یک مسأله معکوس دیگر با شرایط مرزی متفاوت

در این قسمت، همانند حالت قبل یک ورق مربع شکل هایپرالاستیک که گوشه آن بصورت دایره‌ای بریده شده است درنظر می‌گیریم، اما شرایط مرزی در لبه‌های سمت راست و بالای ورق به‌جای آنکه به‌صورت جابجائی درنظر گرفته شود به صورت بار گسترده با تغییرات خطی درنظر گرفته می‌شود. صورت مسأله مستقیم در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲- یک ورق هایپرالاستیک مربع شکل با گوشه بریده شده با شرایط مرزی به‌صورت نیروی گسترده

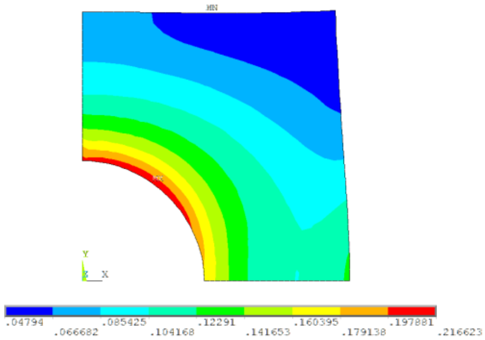
در این ورق هایپرالاستیک، یک نیروی یکنواخت عمود برای ضلع DC و یک نیروی گسترده در جهت افقی با تغییرات خطی برای ضلع BC به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\mathbf{F}_{DC} = 52 \ \ N/m \qquad (۴۸)$$

$$q_1 = \mathbf{F}_C = 32 \ \ N/m \qquad (۴۹)$$

$$q_2 = \mathbf{F}_B = 67 \ \ N/m \qquad (۵۰)$$

همانند حالت قبل، لبه‌های AB و DE به‌صورت غلتکی درنظر گرفته می‌شوند. به‌عبارت دیگر در این دو لبه جابجایی عمود بر لبه و تنش برشی مماس بر لبه صفر درنظر گرفته می شود. لبه انحنادار بصورت آزاد و بدون تنش درنظر گرفته می شود و مدل مادی نئوهوکین با مشخصات مادی که در قسمت قبل ذکر شد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای محاسبه کرنش معادل از تئوری PBP، مقادیر α و β و نوع المان و مش‌بندی ورق در نرم افزار انسیس را همانند قبل درنظر می‌گیریم. در شکل ۱۳، کانتور کرنش اصلی اول، نمایش داده شده است.



شکل ۱۳- کانتور کرنش اصلی اول در دامنه مسأله با شرایط مرزی نیرویی

پس از استخراج تغییر شکل از نرم‌افزار انسیس و انجام محاسبات لازم برای تعیین ε_{eq} در تمام گره‌ها توسط نرم‌افزار متلب ملاحظه می‌شود که در نقطه F با مختصات (۰/۱۶۱۸، ۰/۱۱۷۵) بیشترین مقدار ε_{eq} (با توجه به رابطه ۳۰) یعنی ۰/۲۶۴۸ به‌وجود می‌آید که این مقدار را به عنوان ε_f درنظر می‌گیریم. اکنون صورت مسأله معکوس را مانند قبل برای این ورق به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

در ورق نشان داده شده در شکل ۱۲، جنس ماده و شرایط مرزی در تمام لبه‌ها به‌جز لبه BC مانند قبل درنظر گرفته می شود. نیروی وارد بر لبه BC به‌صورت افقی با تغییرات خطی و نامعلوم درنظر گرفته می‌شود و کرنش معادل زوال و نقطه‌ای که در آن زوال اتفاق افتاده است معلوم هستند. مجهولات مسأله $\mathbf{F}_B$ و $\mathbf{F}_C$ هستند که در ادامه، به ترتیب با پارامترهای q_1 و q_2 معرفی می‌شوند. بردار مجهولات به‌صورت $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$ درنظر گرفته می‌شود. در قسمت بعد، برای حل مسأله معکوس، داده‌های اندازه‌گیری دارای خطا، با سه حدس اولیه مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این قسمت فقط از روش گرادیان محور استفاده می‌گردد.

مجددا مانند قبل، با یک رویکرد نزدیک‌تر به واقعیت فرض می‌کنیم که مختصات نقطه زوال با مقداری خطا در اختیار ما

قرار داده شده باشد، ولی ε_f به‌صورت بدون خطا در دسترس باشد. برای این منظور مقدار ε_f را مانند قبل برابر با ۰/۲۶۴۸، ولی مختصات نقطه زوال را در گره‌ای دیگر یعنی (۰/۱۶۵۴۲، ۰/۱۱۲۴۲) درنظر می‌گیریم. نتایج حل مسأله برای این حالت با سه حدس اولیه متفاوت در جدول ۱۰ گزارش شده است. حال اگر علاوه بر مختصات محل زوال، مقدار ε_f را نیز با دو درصد خطا و برابر با ۰/۲۵۹۵ درنظر بگیریم، نتایج حل مسأله معکوس برای همان سه حدس اولیه متفاوت به صورت نشان داده شده در جدول ۱۱ خواهد بود.

جدول ۱۰- نتایج روش گرادیان محور با درنظر گرفتن خطا در مختصات محل زوال

حدس اولیه $\mathbf{F}_B$ (N/m)	حدس اولیه $\mathbf{F}_C$ (N/m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی $\mathbf{F}_B$ (N/m)	مقدار نهایی $\mathbf{F}_C$ (N/m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۵۰	۲۰	۱	۲۷	۷۶/۲۵	۱۹/۴۴	۰	$1/575 \times 10^{-3}$
۵۵	۳۵	۱	۲۱	۶۳/۷۵	۳۵/۰۴	۸/۸۸۸ × ۱۰^{-۳}	$1/485 \times 10^{-5}$
۶۰	۴۰	۱	۲۱	۷۰/۰۰	۳۰/۰۷	۹/۷۲۷ × ۱۰^{-۴}	$8/353 \times 10^{-4}$

با توجه به جدول ۱۰، با میانگین گرفتن از پاسخ‌های حاصل شده با سه حدس اولیه مختلف، به اعداد ۷۰ و ۲۸/۱۸ برای $\mathbf{F}_B$ و $\mathbf{F}_C$ خواهیم رسید که به مقادیر ایده‌آل آن‌ها یعنی ۶۷ و ۳۲ نسبتاً نزدیک هستند. جواب‌های نهایی با حدس‌های اولیه مختلف مقداری تفاوت دارند و این به علت وضعیت بدشرط (بدوضع) بودن مسائل معکوس می‌باشد. لازم به ذکر است که برای مقادیر حدس اولیه هر میزان نیرویی دلخواهی را نمی‌توانیم درنظر بگیریم، چون در نرم افزار انسیس به علت عدم وجود همگرایی پاسخی نخواهیم یافت. همچنین، از میانگین گرفتن اعداد مندرج در جدول ۱۱، به مقادیر ۶۹/۱۶ و ۲۸/۵ برای $\mathbf{F}_B$ و $\mathbf{F}_C$ خواهیم رسید که مانند قبل به مقادیر ایده‌آل آن‌ها نسبتاً نزدیک هستند. در نهایت با حل مسأله فوق مشاهده می‌گردد که با شرایط مرزی از جنس نیرو نیز می‌توان با وجود خطاهای اندازه‌گیری به جواب‌های قابل قبولی رسید و روش‌های ذکر شده در این پژوهش از کارایی خوبی در حل مسائل مختلف برخوردار می‌باشند.

جدول ۱۱- نتایج روش گرادیان محور با درنظر گرفتن خطای اندازه‌گیری در مختصات محل زوال و مقدار ε_f

حدس اولیه $\mathbf{F}_B$ (N/m)	حدس اولیه $\mathbf{F}_C$ (N/m)	λ	تعداد مراحل تا توقف الگوریتم	مقدار نهایی $\mathbf{F}_B$ (N/m)	مقدار نهایی $\mathbf{F}_C$ (N/m)	$\sqrt{g_1}$	$\sqrt{g_2}$
۵۰	۲۰	۱	۲۵	۷۴/۱۸	۲۰/۸۵	۹/۷۲۷ × ۱۰^{-۴}	۷/۹۱۴ × ۱۰^{-۴}
۵۵	۳۵	۱	۲۱	۶۳/۷۵	۳۵/۰۲	۸/۸۸۸ × ۱۰^{-۳}	۱/۴۸۵ × ۱۰^{-۵}
۶۰	۴۰	۱	۱۹	۶۹/۵۶	۲۹/۶۴	۹/۷۲۷ × ۱۰^{-۴}	۵/۱۶۹ × ۱۰^{-۴}

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مسأله معکوس جدیدی در خصوص شناسایی توزیع بار ایجاد کننده زوال در حالت دو بعدی تعریف و راه حل آن با استفاده از روش‌های مرتبه صفر و مرتبه یک بیان گردید. با توجه به محاسبات انجام شده در قسمت‌های مختلف این پایان نامه، می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از روش گرادیان-محور تعداد مراحل تا توقف الگوریتم نسبت به روش مرتبه صفر کمتر است و این نکته برای هر دو حالت دارای خطای اندازه‌گیری و بدون خطای اندازه‌گیری صادق است.

با توجه به گسسته بودن مدل المان محدود، در روند بهینه‌سازی، محل زوال به‌صورت پیوسته تغییر نمی‌کند و به همین دلیل با درنظر گرفتن حدس‌های اولیه مختلف، برای هریک از مجهولات مسأله یک بازه جواب به‌دست می‌آید که با میانگین گرفتن از جواب‌ها می‌توان به جواب مناسب دست پیدا کرد. در حالت کلی مشاهده می‌گردد که روش گرادیان-محور با وجود پیچیده‌تر بودن معادلات مورد استفاده آن نسبت به روش مرتبه صفر، در زمانی کوتاه‌تر به نتایج نسبتا بهتری می رسد و این به این معنی است که در حل مسأله معکوس این

پژوهش، روش گرادیان-محور توصیه می‌گردد. همچنین این نتیجه حاصل شد که با تغییر ضریب وزن موجود در تابع هدف، جواب نهایی تغییر محسوسی نمی‌کند و این به این معنی است که مختصات محل زوال و مقدار کرنش نهایی هر کدام به یک میزان در تابع هدف تاثیر دارند.

در این پژوهش، داده‌های ورودی مسأله معکوس تعریف شده با حل مسأله مستقیم متناظر و اضافه کردن خطا به نتایج به‌دست آمده فراهم گردید. اگرچه این عملکرد در پژوهش‌های انجام شده قبلی به فراوانی دیده می‌شود و کاملاً متداول است، ولی انجام آزمایش‌های تجربی جهت جمع‌آوری داده‌های اندازه‌گیری برای مسأله معکوس نیز مفید خواهد بود.

مراجع

[1] Olusanya, A. (1997). A criterion of tensile failure for Hyperelastic materials and its application to viscoelastic-viscoplastic materials. NPL Report CMMT (B), 130.

[2] Volokh, K. Y. (2007). Hyperelasticity with softening for modeling materials failure. J. Mech. Phys. Sol., 55(10), 2237-2264.

[3] Nair, A. U., Lobo, H., & Bestelmeyer, A. M. (2009). Characterization of damage in hyperelastic materials using standard test methods and abaqus. In 2009 simulia customer conference (Vol. 15).

[4] Volokh, K. Y. (2010). On modeling failure of rubber-like materials. Mechanics Research Communications, 37(8), 684-689.

[5] Volokh, K. Y. (2011). Modeling failure of soft anisotropic materials with application to arteries. J. mech. Behave. Biomed. materials, 4(8), 1582-1594.

[6] Cao, J., Ding, X. F., Yin, Z. N., & Xiao, H. (2017). Large elastic deformations of soft solids up to failure: new hyperelastic models with error estimation. Acta Mechanica, 228, 1165-1175.

[7] Schmandt, C., & Marzi, S. (2018). Effect of crack opening velocity and adhesive layer thickness on the fracture behaviour of hyperelastic adhesive joints subjected to mode I loading. Int. J. Adh. Adhesives, 83, 9-14.

[8] Rosendahl, P. L., Drass, M., Schneider, J., & Becker, W. (2018). Crack nucleation in hyperelastic adhesive bonds. ce/papers, 2(5-6), 409-425.

[9] Rosendahl, P. L., Drass, M., Felger, J., Schneider, J., & Becker, W. (2019). Equivalent strain failure criterion for multiaxially loaded incompressible hyperelastic elastomers. Int. J. Solid Struct., 166, 32-46.

[10] Russ, J., Slesarenko, V., Rudykh, S., & Waisman, H. (2020). Rupture of 3D-printed hyperelastic composites: Experiments and phase field fracture modeling. J. Mech. Phys. Solid., 140, 103941.

[11] Rosendahl, P. L. (2021). From bulk to structural failure: fracture of hyperelastic materials. Springer Vieweg.

[12] Rosendahl, P. L., Rheinschmidt, F., & Schneider, J. (2022). Structural bonding with hyperelastic adhesives: Material characterization, structural analysis and failure prediction. In Current Perspectives and New Directions in Mechanics, Modelling and Design of Structural Systems (pp. 281-282). CRC Press.

[13] Zochowski, P., Cegła, M., Szczurowski, K., Mączak, J., Bajkowski, M., Bednarczyk, E., ... & Prasuła, P. (2023). Experimental and numerical study on failure mechanisms of the 7.62× 25 mm FMJ projectile and hyperelastic target material during ballistic impact. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 35(4), 1745-1767.

[۱۴] مائده حاج هاشم خانی، محمدرحیم همتیان(۱۳۹۶) شناسایی شرایط مرزی در مسائل تغییر فرم مواد هایپرالاستیک، مجله مهندسی مکانیک امیرکبیر، (۴۹)۲، ۲۶۱.

[15] Hajhashemkhani, M., Hematiyan, M. R., Khosrowpour, E., & Goenezen, S. (2020). A novel method for the identification of the unloaded configuration of a deformed hyperelastic body. Inverse Problems in Science and Engineering, 28(10), 1493-1512.

[16] Xu, T., Li, M., Wang, Z., Hu, Y., Du, S., & Lei, Y. (2022). A method for determining elastic constants and boundary conditions of three-dimensional hyperelastic materials. Int. J. Mech.l Sci., 225, 107329.

[17] Bower, A. F. (2009). Applied mechanics of solids. CRC press.

[18] Holzapfel, G.A. (2000) Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering. 1st Edition, John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

[19] Neff, P., Eidel, B., & Martin, R. J. (2016). Geometry of logarithmic strain measures in solid mechanics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 222, 507-572.

[20] Chen, W. F., & Zhang, H. (1991). Structural plasticity: theory, problems, and CAE software (Vol. 2). New York: Springer-Verlag.

[21] Lode, W. (1926). Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Zeitschrift für Physik, 36(11-12), 913-939.

[22] Podgórski, J. (1985). General failure criterion for isotropic media. J. eng. Mech., 111(2), 188-201.

[23] Bigoni, D., & Piccolroaz, A. (2004). Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. Int. J. solid struct., 41(11-12), 2855-2878.

[24] Arora, J. S. (2004). Introduction to optimum design. Elsevier.

[25] ANSYS 18.0 Help Manual.2018