



## بررسی تأثیر خاصیت کشسان یاتاقان‌ها بر دینامیک غیرخطی محور نامتوازن موتورهای القایی در حضور کشش میدان مغناطیسی نامتقارن

محمد حسین عباسیان<sup>۱</sup>، امیر رضا عسکری<sup>۲\*</sup> و عباس احسانی سرشت<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

<sup>۳</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۶/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۰۹

### چکیده

هدف پژوهش پیش‌رو بررسی تأثیر خواص کشسان یاتاقان‌ها بر دینامیک غیرخطی روتورهای نامتوازن است. با در نظر گرفتن تأثیر کشش ناشی از میدان مغناطیسی نامتقارن، معادلات حرکت متناظر با روتور با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی غیرخطی بدست می‌آیند. معادلات کاهیده شده حرکت با اتخاذ روش تجزیه گالرکین استخراج و سپس با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به صورت تحلیلی برای حالات ارتعاشات آزاد و تشدید اولیه حل می‌شوند. یافته‌های پژوهش حاضر علاوه بر شبیه‌سازی‌های عددی، با نتایج موجود در پژوهش‌های پیشین مقایسه و به‌صورت موفقیت آمیزی صحت‌گذاری می‌شوند. سپس برای بررسی تأثیر کشش نامتقارن مغناطیسی، سفتی غیرخطی یاتاقان‌ها و خروج از مرکزی روتور بر دینامیک غیرخطی سیستم، یک مطالعه پارامتری با جزئیات انجام می‌پذیرد. نتایج حاکی از آن است که در نظر گرفتن کشش میدان مغناطیسی نامتقارن موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود؛ همچنین مشاهده می‌شود که افزایش خروج از مرکزی باعث افزایش دامنه ارتعاشات شده و سبب بزرگ‌تر شدن ناحیه دو پایدار می‌شود.

**کلمات کلیدی:** دینامیک غیرخطی؛ محور موتورهای القایی؛ کشش میدان مغناطیسی نامتقارن؛ سختی غیرخطی یاتاقان‌ها؛ خروج از مرکزی.

## Investigating the influence of bearings elastic properties on nonlinear dynamics of unbalanced induction motors shaft in presence of asymmetric magnetic pull

Mohammad Hosein Abbasian<sup>1</sup>, Amir Reza Askari<sup>2\*</sup>, Abbas Ehsani-Seresht<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng. Dept., Hakim Sabzevari Univ., Sabzevar, Iran.

<sup>2</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng. Dept., Hakim Sabzevari Univ., Sabzevar, Iran.

<sup>3</sup> Asst. Prof., Mech. Eng. Dept., Hakim Sabzevari Univ., Sabzevar, Iran.

### Abstract

This paper aims to investigate the influence of bearing elastic properties on nonlinear dynamics of unbalanced rotors. Accounting for the influence of asymmetric magnetic pull, the governing equations of motion associated with the rotor are obtained using the nonlinear Euler-Bernoulli beam theory. Adopting the Galerkin projection method, the reduced equations of motion are extracted and then solved analytically through the method of multiple time scales for the cases of free vibrations and primary resonances. Aside from the numerical simulations, the present findings are compared and successfully validated by those published in the previous studies. Afterward, a detailed parametric study is conducted to assess the influences of asymmetric magnetic pull, nonlinear stiffnesses of the bearings and the eccentricity on nonlinear dynamics of the system. Results reveal that accounting for the influence of asymmetric magnetic pull decreases the natural frequencies of the system. In addition, it is observed that increasing the eccentricity increases the amplitudes of vibrations and also broadens the bistable resonance zone.

**Keywords:** Nonlinear dynamics; Induction motors shaft; Asymmetric magnetic pull; Nonlinear stiffnesses of bearings; Eccentricity.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۸۱۴۴۰۱۲۸۰۵؛ فکس: ۰۵۱۴۴۴۱۰۳۰۰

آدرس پست الکترونیک: [ar.askari@hsu.ac.ir](mailto:ar.askari@hsu.ac.ir)

## ۱- مقدمه

## ۱-۱- پیش زمینه

روتور در سیستم دوار به عنوان اصلی‌ترین بخش مجموعه شناخته می‌شود؛ چراکه تبدیل انرژی به عنوان اساسی‌ترین وظیفه ماشین‌های دوار، به وسیله دوران روتور انجام می‌گردد. یکی از پرکاربردترین سیستم‌های دوار، موتورهای الکتریکی القایی می‌باشند که در صنایع مختلفی نظیر راه آهن، هوافضا، رباتیک و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ارتعاش همواره به عنوان اثر مخرب در موتورهای القایی شناخته می‌شود. عوامل مختلفی نظیر نامتوازن جرمی، عدم همراستایی محورهای متصل به هم و به‌طور کلی خروج از مرکزی، موجب بروز ارتعاشات ناخواسته در سیستم شده و حرکت ایده آل روتور را تحت تأثیر قرار می‌دهد و موجب کاهش راندمان سیستم می‌گردد.

عدم دقت کافی هنگام مونتاژ قطعات، نظیر ثابت نشدن دقیق روتور در یاتاقان‌ها و همچنین یکسان نبودن فاصله میان روتور و استاتور سبب ایجاد ناهمراستایی در سیستم می‌شود. این موضوع موجب اصطکاک و برخورد اجزا با یکدیگر خواهد شد. علاوه بر موارد ذکر شده، هنگامی که مرکز روتور با مرکز استاتور منطبق نباشد، سبب حرکت شلاقی روتور هنگام دوران می‌شود [۱]. حرکت شلاقی روتور، باعث بوجود آمدن ضربه، خستگی و در نهایت شکست روتور می‌شود؛ در نتیجه خسارات جبران‌ناپذیری در سیستم بروز خواهد کرد.

## ۱-۲- بیان مساله

شناخت عوامل نامطلوب در سیستم، تحلیل رفتار دینامیکی آن و پایش وضعیت اجزاء یکی از مسائل حائز اهمیت در موتورهای الکتریکی القایی است. به طوری که جهت تحلیل صحیح رفتار ارتعاشی سیستم، بایستی مدل‌سازی سیستم را تا حد ممکن به شرایط واقعی نزدیک نمود و تأثیر پارامترهای گوناگون ارتعاشی را مد نظر قرار داد. در این صورت می‌توان با پیش‌بینی دقیق شرایط کاری نامطلوب (فرکانس‌های خطرناک) و دوری گزیدن از آن‌ها موجب افزایش راندمان سیستم و افزایش طول عمر آن شد. از این رو اکثر تحقیقات در زمینه ارتعاشات موتورهای الکتریکی بر حذف یا کاهش حرکات ناخواسته روتور، پایدار سازی سیستم و افزایش راندمان آن از طریق بررسی تأثیر پارامترهای گوناگون ارتعاشی متمرکز شده‌اند.

## ۱-۳- مرور ادبیات

تاکاشی [۲] با در نظر گرفتن روتور به صورت تیر تیموشنکو، با استفاده از روش المان محدود به تحلیل ارتعاش آزاد روتور پرداخت. او با تقسیم‌بندی تیر به چند المان کوچک‌تر و استفاده از اصل همپلتون، معادله حاکم بر سیستم را استخراج نمود. تاکاشی تنها تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در تغییرات فرکانس پیش‌رو مطالعه نمود. او با استفاده از نمودار تغییرات فرکانس بر حسب سرعت دورانی روتور (نمودار کمپل)، دریافت که با افزایش تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی، فرکانس پیش‌رو افزایش می‌یابد. ملانسون و زو [۳] با مدل‌سازی روتور به صورت تیر تیموشنکو با ۶ شرایط مرزی کلاسیک (لولایی-لولایی)، (لولایی-آزاد)، (آزاد-آزاد)، (گیردار-گیردار)، (آزاد-گیردار) و (لولایی-گیردار) برای تکیه‌گاه‌ها، ارتعاش آزاد روتور را مورد بررسی قرار دادند. آنها تنها با در نظر گرفتن تأثیر میرایی داخلی، معادلات دینامیک حرکت را استخراج نمودند. ملانسون و زو [۳]، حل دقیقی به فرم مختلط، برای محاسبه فرکانس و مودهای نرمال هر ۶ شرط مرزی تیر ارائه دادند. با استفاده از نتایج بدست آمده دریافتند که اثر میرایی داخلی، سبب ایجاد پایداری سیستم در سرعت‌های کمتر از سرعت بحرانی می‌شود. در حالی که اثر میرایی داخلی برای سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی، تأثیری در پایداری سیستم ایجاد نخواهد کرد. حسینی و خادم [۱] با صرف نظر از تأثیر کشش سطح میانی، ارتعاشات آزاد غیرخطی روتورها را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند، در روتورها عملاً کشیدگی سطح میانی رخ نداده و غیرخطی بودن رفتار سیستم در حالت لنگ زدن بدلیل غیرخطی بودن شعاع انحنا و اینرسی سیستم است. بر اساس این نظریه، حسینی و خادم به ترتیب به تحلیل ارتعاشات اجباری روتور در حالت رزونانس ترکیبی [۴]، اولیه [۵] و ثانویه [۶] با صرف نظر از کشش سطح میانی توسط روش مقیاس‌های زمانی چندگانه پرداختند. در مرجع [۴] شعاع انحنا و اینرسی به عنوان عوامل غیرخطی در نظر گرفته شده است که تنها در صورت اندک بودن میزان عوامل غیرخطی نتایج حاصل قابل قبول می‌باشند. در مرجع [۵] هندسه به عنوان عامل غیرخطی لحاظ شده و از تغییر شکل برشی صرف نظر شده است. نتایج به دست آمده حاکی از رفتار سخت شونده‌گی سه شکل موج ابتدایی روتور بر اثر عامل غیرخطی است که این اثر با افزایش

گسسته‌سازی مطابق روش گالربین، توسط روش رانج-کوتا حل شدند. افتخاری و همکارانش [۱۲] با در نظر گرفتن تأثیر جملات غیرخطی هندسی ناشی از انحنای اینرسی، اثر میدان مغناطیسی استاتور را بر ارتعاشات محور موتورهای القایی در اثر وجود توزیع نایکنواخت جرم مورد مطالعه قرار دادند. شایان ذکر است در تمامی پژوهش‌های فوق‌یاتاقان‌ها به‌صورت صلب در نظر گرفته شده بودند. به‌منظور بررسی تأثیر خاصیت ارتجاعی یاتاقان‌ها بر ارتعاشات غیرخطی روتورها، فاداتار و همکارانش [۱۳] علاوه بر در نظر گرفتن تأثیر جملات غیرخطی انحنای اینرسی هنگام وقوع حرکت بزرگ دامنه، یاتاقان‌ها را نیز به‌صورت تکیه‌گاه الاستیک با ضریب فنریت غیرخطی مدل‌سازی کردند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، علی‌رغم وجود پژوهش‌های بسیاری در زمینه‌ی تحلیل دینامیک غیرخطی روتورها، اثر همزمان انحنای اینرسی غیرخطی روتور، یاتاقان‌های الاستیک با ضریب فنریت غیرخطی و تحریک مغناطیسی استاتور بر پاسخ سیستم مورد مطالعه قرار نگرفته است؛ لذا پژوهش حاضر بر تحلیل تأثیر همزمان خاصیت ارتجاعی غیرخطی یاتاقان‌ها و روتور متمرکز شده و در استخراج پاسخ دینامیکی سازه، جاذبه مغناطیسی استاتور را نیز در نظر می‌گیرد.

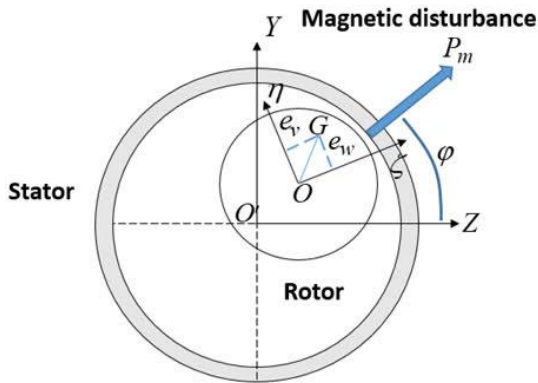
#### ۱-۴- دورنما

در این پژوهش، بخش ۲ به مدل‌سازی روتور با در نظر گرفتن خاصیت ارتجاعی یاتاقان‌ها اختصاص داده می‌شود؛ به‌طوری‌که، معادلات حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج خواهند شد. در بخش ۳ تابع شکل مود مجموعه روتور-یاتاقان بدست آمده و معادلات با استفاده از روش گالربین گسسته‌سازی می‌شوند. سپس با استفاده از روش مقیاس زمانی چندگانه پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم تعیین می‌شود. در بخش ۴ با بررسی رفتار ارتعاشی سیستم در حالت تشدید اولیه، پاسخ فرکانسی سیستم استخراج می‌شود. نتایج حاصل از تحلیل دینامیک غیرخطی مجموعه‌ی روتور-یاتاقان نیز در بخش ۵ ارائه می‌گردند. خلاصه نتایج و دست‌آوردهای پژوهش پیش‌رو نیز در بخش ۶ گزارش می‌شود.

خروج از مرکزی در گراف‌های مربوط قابل مشاهده است. با بررسی نتایج مربوط به پارامتر تنظیم در مرجع [۶] می‌توان علت وقوع رزونانس ترکیبی دوگانه به ازای پارامتر تنظیم ثابت را تنها خروج از مرکزی و ضریب میرایی در بازه‌ای معین دانست. حسینی و زمانیان [۷] به تحلیل ارتعاشات اجباری روتور در حالت رزونانس اولیه با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه پرداختند. آن‌ها نشان دادند، اگرچه هر دو مود پیش‌رو و پس‌رو در ارتعاشات آزاد سیستم مؤثر هستند، اما در ارتعاشات اجباری تنها مود پیش‌رو تحریک می‌شود. خادم و همکارانش [۸] تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی روتور بسیار باریک را مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش با توجه به باریک بودن روتور، از اثر برشی صرف نظر شده و تنها تأثیر اینرسی دورانی، ژبروسکوپ و میرایی خارجی در معادله همیلتون، جهت بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت در نظر گرفته شد. سپس، معادلات حاکم بر حرکت از طریق روش گالربین گسسته‌سازی شدند. خادم و همکارانش [۸] با بهره‌گیری از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، فرکانس‌های پیش‌رو و پس‌رو را بدست آوردند. نتایج بدست آمده از نمودار کمپل در این پژوهش برای دو مود اولیه، حاکی از آن بود که افزایش سرعت دورانی روتور، سبب افزایش فرکانس غیرخطی پیش‌رو و کاهش فرکانس غیرخطی پس‌رو خواهد شد. شایان ذکر است، فرکانس غیرخطی پیش‌رو و پس‌رو در اولین شکل مود ارتعاشی، دارای اختلاف کمتری نسبت به شکل مود دوم می‌باشند؛ همچنین با افزایش میرایی خارجی، مقادیر فرکانس غیرخطی پیش‌رو و پس‌رو، به سمت حالت خطی پیش می‌روند. ونگ و همکارانش [۹] انرژی پتانسیل مغناطیسی را در یک موتور الکتریکی محاسبه نموده و سپس رفتار دینامیکی یک مدل جفکات<sup>۲</sup> تحت تحریک مغناطیسی را مورد مطالعه قرار دادند. عنایت-حسین [۱۰] نیز پاسخ غیرخطی یک روتور منعطف را تحت تحریک مغناطیسی یاتاقان‌ها به صورت عددی بررسی کرد. در این تحلیل، جملات غیرخطی تحریک مغناطیسی و فاصله هوایی میان روتور و استاتور بر دینامیک سیستم مورد مطالعه قرار گرفت. ونگ و لو [۱۱] ارتعاشات غیرخطی روتورها را تحت تحریک الکترومغناطیسی به صورت عددی بررسی کردند. در این پژوهش با صرف نظر از اثرات ژبروسکویی و غیرخطی هندسی روتور، معادلات حاکمه پس از

<sup>2</sup> Jeffcott

روتور و استاتور به وسیله پارامتر خروج از مرکزی  $e$  تعیین می‌شود.



شکل ۳- نمایش مراکز روتور، استاتور و دوران در حضور تحریک مغناطیسی

شایان ذکر است در این مدل‌سازی، خروج از مرکزی به صورت دینامیکی در نظر گرفته شده است؛ همچنین باتوجه به شکل ۳، مرکز جرم روتور نیز بر مرکز هندسی آن منطبق نمی‌باشد و توسط دو مولفه  $e_v$  و  $e_w$  تعریف می‌گردد؛ همچنین میزان پیشش سطح مقطع روتور توسط زاویه  $\varphi$  تعیین می‌گردد.

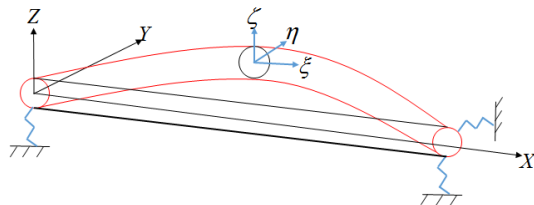
همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، مطابق با شکل ۱، چارچوب  $XYZ$ ، منطبق بر مرکز روتور بوده و به عنوان چارچوب مرجع در نظر گرفته می‌شود. جهت محور  $X$  در راستای طول روتور است و همچنین جهت دو محور  $Y$  و  $Z$  طبق قانون دست راست تعیین می‌شود. باتوجه به فرضیه‌ی تغییر شکل بزرگ روتور هنگام دوران، می‌توان به‌منظور بیان جابجایی هر نقطه دلخواه در طول روتور، از چارچوب محلی  $\xi\eta\zeta$  استفاده نمود. بردارهای یک‌ه‌ی چارچوب مرجع  $XYZ$  و چارچوب محلی  $\xi\eta\zeta$  به ترتیب به صورت  $[e_x \ e_y \ e_z]^T$  و  $[e_\xi \ e_\eta \ e_\zeta]^T$  بیان می‌شوند.

با استفاده از زوایای  $\theta$  و  $\psi$  دوران  $xyx$  اوپلر می‌توان میان دو چارچوب مرجع و محلی (تغییر شکل یافته) ارتباط ایجاد نمود. در ابتدا چارچوب  $XYZ$  حول محور  $Z$  به میزان  $\psi$  دوران نموده تا چارچوب  $X_1Y_1Z_1$  تولید گردد، سپس چارچوب  $X_2Y_2Z_2$  حول محور  $Y_1$  به میزان  $\theta$  دوران نموده تا چارچوب  $X_2Y_1Z_2$  تولید گردد و درنهایت چارچوب  $X_2Y_1Z_2$  حول محور  $X$  به

## ۲- مدل‌سازی ریاضی و استخراج معادلات حاکم بر سیستم

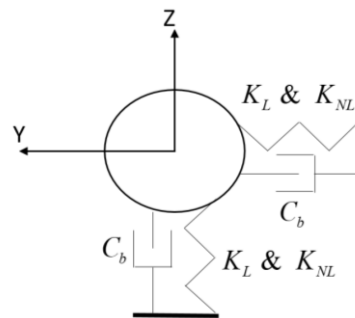
### ۲-۱- مدل‌سازی مجموعه‌ی روتور-یاتاقان

شکل ۱ روتور یک موتور الکتریکی را به صورت تیری به طول  $L$  و جرم  $M$  به‌همراه تکیه‌گاه الاستیک در دو انتها نمایش می‌دهد. همان‌طور که از این شکل دیده می‌شود، به‌منظور تعیین مدل دینامیکی سیستم، از دو دستگاه مختصات مرجع (دستگاه  $XYZ$  که به تار میانی روتور در سمت چپ متصل شده و همراه با آن دوران می‌کند) و محلی (دستگاه  $\xi\eta\zeta$  که به تار میانی در سطح مقطع روتور چسبیده، به‌طوری‌که جهت محور  $\xi$  همواره عمود بر سطح مقطع است) استفاده شده است.



شکل ۱- مدل‌سازی روتور و یاتاقان و نمایش چارچوب مرجع و محلی

شکل ۲ مدل الاستیک یاتاقان‌ها را به تصویر می‌کشد. بر اساس این شکل، یاتاقان‌ها به صورت مجموعه‌ای از فنرهای خطی و غیرخطی به همراه یک میراگر مدل‌سازی شده‌اند.



شکل ۲- مدل‌سازی یاتاقان به صورت فنر غیرخطی و دمپر

مطابق با شکل ۳،  $O$  و  $O'$  به ترتیب مراکز روتور و استاتور می‌باشند. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، دو مرکز روتور و استاتور بر هم منطبق نبوده، لذا فاصله‌ی میان مراکز

که در آن هر یک از مؤلفه‌های  $\rho_1$ ،  $\rho_2$  و  $\rho_3$  مطابق با رابطه‌ی (۷) قابل محاسبه می‌باشند [۱۵]:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\dot{\psi}s(\theta) + \dot{\varphi} + \Omega \\ \rho_2 &= \dot{\psi}c(\theta)s(\varphi) + \dot{\theta}c(\varphi) \\ \rho_3 &= \dot{\psi}c(\theta)c(\varphi) - \dot{\theta}c(\varphi) \end{aligned} \quad (7)$$

شایان ذکر است، علامت "''" به معنای مشتق مکانی نسبت به متغیر  $\xi$  می‌باشد.

جابجایی نقاط مختلف سطح مقطع روتور دوار در راستای محورهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  نسبت به زمان به ترتیب توسط متغیرهای  $u(s,t)$ ،  $v(s,t)$  و  $w(s,t)$  بیان می‌گردد. پارامتر  $s$  طول انحناء ایجاد شده در روتور و  $t$  ثابت زمانی است. با توجه به شکل ۴ و در نظر گرفتن فرضیه‌ی عدم تغییر شکل برشی، می‌توان زوایای اویلر  $\psi$  و  $\theta$  را طبق رابطه‌ی (۸) بر حسب مشتق مکانی متغیرهای وابسته  $v$  و  $w$  بیان نمود [۱۲].

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{v}}{1+\dot{u}}\right), \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{w}}{(1+\dot{u})^2+\dot{w}^2}\right) \quad (8)$$

لذا با مشتق گرفتن از رابطه (۸) می‌توان مشتقات مکانی و زمانی زوایای اویلر  $\psi$  و  $\theta$  را مطابق با روابط (۹) و (۱۰) تعیین نمود.

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{-\dot{u}'\dot{v} + \dot{v}'\dot{u} + \dot{v}''}{(1+\dot{u})^2 + \dot{v}''}, \\ \dot{\psi} &= \frac{-u''v' + v''u' + v'''}{(1+\dot{u})^2 + \dot{v}''} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{u'w'\dot{u} + v'w'\dot{v} + \dot{w}'\dot{u}' - w'[(1+\dot{u})^2 + \dot{v}]}{[(1+\dot{u})^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2]\sqrt{(1+\dot{u})^2 + \dot{v}^2}}, \\ \dot{\theta} &= \frac{u'w'u'' + v'w'v'' + \dot{w}u'' - w''[(1+\dot{u})^2 + \dot{v}^2]}{[(1+\dot{u})^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2]\sqrt{(1+\dot{u})^2 + \dot{v}^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین مؤلفه‌های بردارهای سرعت زاویه‌ای و شعاع انحناء برحسب جابجایی‌های  $u$ ،  $v$  و  $w$  و زاویه پیش  $\varphi$  به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) تعیین می‌گردند.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= vw + \varphi + \Omega. \\ \omega_2 &= -\dot{w}' + \dot{w}\dot{u}' + \varphi\dot{v}' + \dot{u}\dot{w}' \\ &+ \frac{1}{2}\dot{v}^2\dot{w}' + \dot{v}\dot{w}\dot{v}' + \dot{w}'\dot{w}^2 + \frac{1}{2}\varphi^2\dot{w}'. \\ \omega_3 &= \dot{v}' - \dot{v}\dot{u}' + \varphi\dot{w}' - \dot{u}\dot{v}' \\ &- \frac{1}{2}\dot{w}^2\dot{v}' - \dot{v}'\dot{v}^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\dot{v}'. \end{aligned} \quad (11)$$

میزان  $\varphi$  دوران نموده تا به چارچوب محلی  $\xi\eta\zeta$  رسید. با استفاده از رابطه‌ی (۱)، ماتریس دوران  $R_{zyx}$  چارچوب محلی  $\xi\eta\zeta$  را بر چارچوب مرجع  $XYZ$  منطبق می‌سازد [۱۴].

$$R_{zyx} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta c\varphi + s\psi s\varphi \\ s\psi c\theta & -s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\varphi & -s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه فوق به منظور سهولت در نگارش  $\sin=s(\cdot)$  و  $\cos=c(\cdot)$  در نظر گرفته شده است.

همچنین می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲)، به صورت معکوس ارتباط میان چارچوب محلی و چارچوب مرجع را نیز بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = R_{zyx}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2)$$

با تعیین ماتریس دوران به عنوان برقرارکننده‌ی ارتباط میان چارچوب‌ها، هر یک از متغیرها در چارچوب مورد نظر به سادگی تعریف خواهند شد. از این رو می‌توان بردار سرعت زاویه‌ای را به ترتیب طبق روابط (۳) و (۴)، در چارچوب مرجع  $XYZ$  و چارچوب محلی  $\xi\eta\zeta$  بیان نمود [۱۵]:

$$\omega = \dot{\psi}(t)e_z + \dot{\theta}(t)e_{y1} + (\dot{\varphi}(t) + \Omega)e_{x2} \quad (3)$$

$$\omega = \omega_1 e_\xi + \omega_2 e_\eta + \omega_3 e_\zeta \quad (4)$$

شایان ذکر است علامت "''" استفاده شده در روابط فوق به معنای مشتق زمانی است.

با استفاده از رابطه‌ی (۵)، می‌توان هر یک از سرعت‌های زاویه‌ای  $\omega_1$ ،  $\omega_2$  و  $\omega_3$  را محاسبه نمود [۱۵]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\psi}s(\theta) + \dot{\varphi} + \Omega \\ \omega_2 &= \dot{\psi}c(\theta)s(\varphi) + \dot{\theta}c(\varphi) \\ \omega_3 &= \dot{\psi}c(\theta)c(\varphi) - \dot{\theta}c(\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

پس از تعیین بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$ ، می‌توان بردار شعاع انحناء  $\rho$  را در چارچوب  $\xi\eta\zeta$  طبق رابطه (۶)، بیان نمود.

$$\rho = \rho_1 e_\xi + \rho_2 e_\eta + \rho_3 e_\zeta \quad (6)$$

(۱۶) به عنوان یک تحریک خارجی بر سیستم اثر می‌گذارد  
[۹].

$$P_m = \lambda_m e \left( \frac{1 - e^2}{C_e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (۱۶)$$

در رابطه‌ی فوق تأثیر پارامترهای  $\lambda_m, C_e$  و  $e$  بر نیروی الکترومغناطیس قابل بررسی است؛ همچنین می‌توان طبق رابطه ۱۷، فاصله میان مراکز روتور و استاتور را بیان نمود

$$e = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (۱۷)$$

پارامتر الکترومغناطیس  $\lambda_m$  طبق رابطه‌ی (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$\lambda_m = \frac{\pi B_0^2 R}{\mu_0 C_e} \quad (۱۸)$$

همانطور که در رابطه‌ی فوق مشاهده می‌شود، پارامتر الکترومغناطیس نیز خود تابعی از شار مغناطیسی، شعاع روتور و پارامتر رسانایی است.

با مراجعه به شکل ۳ مشاهده می‌شود، در نقطه‌ی  $C_e$  نیروی الکترومغناطیس به صورت عرضی بر روتور اعمال می‌شود؛ همچنین این نیرو نسبت به محور  $y$  دارای زاویه  $\varphi$  است. از این رو نیروی الکترومغناطیس دارای دو مولفه در راستای  $y$  و  $z$  بوده که این دو مولفه طبق رابطه (۱۹) بیان خواهند شد:

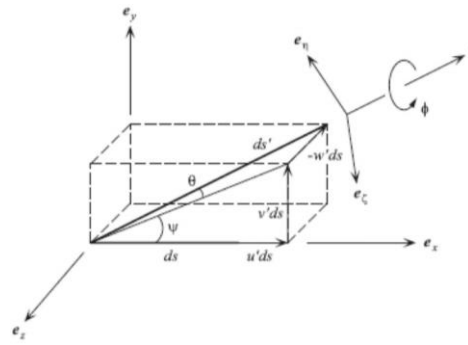
$$\begin{aligned} P_{my}(s, t) &= P_m \cos(\varphi_m) \\ &= \lambda_m v(s, t) \left( 1 - \frac{v^2(s, t) + w^2(s, t)}{C_e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ P_{mz}(s, t) &= P_m \sin(\varphi_m) \\ &= \lambda_m w(s, t) \left( 1 - \frac{v^2(s, t) + w^2(s, t)}{C_e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (۱۹)$$

با استفاده از بسط تیلور می‌توان نیروی الکترومغناطیس غیر خطی را طبق رابطه‌ی (۲۰) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} P_{my}(s, t) &= \\ \lambda_m \left( v(s, t) + \frac{3v^3(s, t)}{2C_e^2} + \frac{3v(s, t)w^2(s, t)}{2C_e^2} \right) & \quad (۲۰) \\ P_{mz}(s, t) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= v''w' + \varphi' \\ \rho_2 &= -w'' + \dot{w}u'' + \varphi v'' + \dot{u}w'' \\ &+ \frac{1}{2}\dot{v}^2w'' + \dot{v}\dot{w}v'' + w''\dot{w}^2 + \frac{1}{2}\varphi^2w'' \\ \rho_3 &= v'' - \dot{v}u'' + \varphi w'' - \dot{u}v'' \\ &- \frac{1}{2}\dot{w}^2v'' - v''\dot{v}^2 - \frac{1}{2}\varphi^2v'' \end{aligned} \quad (۱۲)$$

بر اساس شکل ۴، می‌توان ارتباط میان المان اولیه و المان تغییر شکل یافته در روتور را مطابق با رابطه‌ی (۱۳) بیان نمود [۱۲]:



شکل ۴- نمایش زوایای اولیه و المان تغییر شکل یافته [۱۲].

$$ds' = ds \sqrt{(1 + \dot{u})^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2} \quad (۱۳)$$

که در آن  $s$  فاصله یک نقطه‌ی مادی دلخواه روی تار میانی از مبدا مختصات است. با توجه به فرض عدم تغییر طول روتور، رابطه‌ی (۱۴) از معادله‌ی (۱۳) به عنوان معادله‌ی قید استخراج می‌گردد:

$$(1 + \dot{u})^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = 1 \quad (۱۴)$$

این رابطه با استفاده از بسط تیلور، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \quad (۱۵)$$

## ۲-۲- نیروی الکترومغناطیس

با توجه به عدم توزیع یکنواخت میدان مغناطیسی در فضای میان روتور و استاتور، نیروی الکترومغناطیس طبق رابطه‌ی

(۲۴) ضرب شده و معادله قید  $G^*$  در معادله لاگرانژ استفاده خواهد شد.

$$G^* = \frac{1}{2} \int_0^L \lambda(s,t) [1 - (1 + \dot{u})^2 - \dot{v}^2 - \dot{w}^2] ds \quad (25)$$

با در نظر گرفتن تأثیر ضریب لاگرانژ، معادله لاگرانژ  $L$  [۱۶]، طبق رابطه (۲۶) بازنویسی می‌شود

$$L^* = T_T + U_T + G^* \quad (26)$$

در رابطه فوق،  $T_T$  انرژی جنبشی کل و  $U_T$  انرژی پتانسیل کل سیستم می‌باشند.

باتوجه به تغییر شکل بزرگ روتور هنگام دوران، انرژی جنبشی کل، طبق رابطه (۲۷) شامل دو اثر دورانی و جانبی است.

$$T_T = T_{tr} + T_{ro} \quad (27)$$

انرژی جنبشی جانبی سیستم را می‌توان طبق رابطه (۲۸) محاسبه نمود:

$$T_{tr} = \frac{1}{2} m \int_0^L V_G^2 ds \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)،  $V_G$  بردار سرعت مرکز جرم روتور در چارچوب  $\xi, \eta, \zeta$  است. در این صورت، فرم ساده شده معادله انرژی جنبشی جانبی  $T_{tr}$ ، طبق رابطه (۲۹) بیان می‌شود:

$$T_{tr} = \frac{1}{2} m \int_0^L [u_G^2(s,t) + v_G^2(s,t) + w_G^2(s,t)] ds \quad (29)$$

در رابطه فوق  $\dot{u}_G, \dot{v}_G, \dot{w}_G$  به ترتیب سرعت مرکز جرم روتور در راستای  $\xi, \eta, \zeta$  است.

انرژی جنبشی دورانی سیستم نیز طبق رابطه (۳۰) محاسبه می‌گردد:

$$T_{ro} = \frac{1}{2} m \int_0^L [I_1 \omega_1^2(s,t) + I_2 \omega_2^2(s,t) + I_3 \omega_3^2(s,t)] ds \quad (30)$$

$$I_1 = \iint_A \rho (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \quad (31)$$

$$\lambda_m \left( w(s,t) + \frac{3w^3(s,t)}{2C_e^2} + \frac{3w(s,t)v^2(s,t)}{2C_e^2} \right)$$

### ۲-۳- اثر فنریت غیرخطی یاتاقان‌ها

از آنجایی که در پژوهش حاضر یاتاقان‌ها به صورت فنر و دمپر مدل شده‌اند، لذا برای محاسبه نیروی فنر-دمپر ذکر شده می‌توان از روابط (۲۱) و (۲۲)، در دو جهت  $Y$  و  $Z$  استفاده نمود:

$$F_{spring} = \left( K_l v + K_{nl} v^3 \right) \delta(x) + \left( K_l w + K_{nl} w^3 \right) \delta(x-L) \quad (21)$$

$$F_{damping} = (C + C_b)(\dot{v} + \dot{w})\delta(x) + (C + C_b)(\dot{v} + \dot{w})\delta(x-L) \quad (22)$$

در روابط فوق  $\delta$  تابع دیراک است که باتوجه به پیوسته بودن محور در روابط تعریف شده است.

### ۲-۴- معادله دینامیک حرکت

مطابق با اصل همیلتون، طبق رابطه (۲۳)، می‌توان با محاسبه معادله لاگرانژ، کار نیروهای خارجی و با استفاده از اصل حساب تغییرات، معادلات دینامیک حرکت سیستم روتور-یاتاقان را استخراج نمود:

$$\int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} (L + W_{ex}) dt \quad (23)$$

در ادامه، به محاسبه معادله لاگرانژ و کار نیروهای خارجی پرداخته می‌شود.

باتوجه به عدم تغییر طول تار میانی روتور، معادله قید حرکتی به فرم انتگرالی، طبق رابطه (۲۴) بیان می‌شود.

$$G = \frac{1}{2} \int_0^L [1 - (1 + \dot{u})^2 - \dot{v}^2 - \dot{w}^2] ds \quad (24)$$

شایان ذکر است به منظور حل رابطه ۲۴ طبق اصل حساب تغییرات، از ضریب لاگرانژ<sup>۲</sup> استفاده می‌شود [۱۶]. در این صورت مطابق با رابطه (۲۵)، ضریب لاگرانژ  $\lambda$  در رابطه

<sup>3</sup> Lagrange multiplier

$$U_{strain} = \frac{1}{2} \int_0^L (D_{11}\rho_1^2 + D_{22}\rho_2^2 + D_{33}\rho_3^2) ds \quad (35)$$

در رابطه‌ی فوق مقادیر  $D_{11}$ ،  $D_{22}$  و  $D_{33}$  طبق رابطه‌ی (۳۶) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \iint_A G(\eta^2 + \zeta^2) dA \\ D_{22} &= \iint_A E\zeta^2 dA \quad D_{33} = \iint_A E\eta^2 dA \end{aligned} \quad (36)$$

در رابطه‌ی (۳۶)،  $E$  مدول یانگ و  $G$  مدول برشی می‌باشند. پس از محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل کل، کار نیروهای خارجی محاسبه می‌گردد. با توجه به در نظر گرفتن خاصیت کشسانی یاتاقانها و تأثیر کشیدگی مغناطیسی به عنوان هدف اصلی پژوهش حاضر و ساده‌سازی فرضیات از بررسی اثر نیروی گرانش صرف نظر شده است [۱۲و۵]؛ لذا تنها تأثیر نیروی الکترومغناطیس، نیروی میرایی داخلی و خارجی به عنوان نیروهای اثرگذار بر سیستم بررسی خواهند شد. از این رو کار انجام شده توسط نیروهای ذکر شده، طبق رابطه‌ی (۳۷) محاسبه می‌گردد:

$$W_{ex} = P_{my} + P_{mz} - c(\dot{v} + \dot{w}) - c_b(\dot{v} + \dot{w})\delta(s) - c_b(\dot{v} + \dot{w})\delta(s - L) \quad (37)$$

ضرایب  $c_b$  و  $c$  به ترتیب ضریب میرایی خارجی و داخلی در سیستم روتور-یاتاقان است.

با جایگذاری روابط (۲۶) و (۳۷) در رابطه‌ی (۲۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta T_{tr} + \delta T_{ro} - \delta U_{strain} - \delta U_{spring} \right) dt \\ &+ \delta G^* + \delta W_{ex} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۳۸) به صورت جزء به جزء و استفاده از اصل حساب تغییرات، روابط (۳۹-۴۲) استخراج می‌شود:

$$\delta u: \quad (\lambda + \lambda \dot{u})' + D_{22}(w'''w')' + D_{22}(v'''v')' = m\ddot{u} \quad (39)$$

$$\delta \varphi: \quad [D_{11}(v''w') + (D_{11} + D_{22} - D_{22})v''w']' + D_{11}\varphi'' = 0 \quad (40)$$

$$I_2 = \iint_A \rho \zeta^2 d\eta d\zeta \quad I_3 = \iint_A \rho \eta^2 d\eta d\zeta$$

در رابطه‌ی (۳۰)،  $I_1$  ممان اینرسی جرمی حول محور  $\xi$ ،  $I_2$  و  $I_3$  به ترتیب ممان اینرسی جرمی حول محورهای  $\eta$  و  $\zeta$  می‌باشند.

باتوجه به دایروی بودن سطح مقطع روتور، ممان اینرسی جرمی  $I_2$  و  $I_3$  با یکدیگر برابر می‌باشند.

به سبب خاصیت الاستیک یاتاقانها و اثر تغییر شکل در سیستم مطابق با رابطه‌ی (۳۲)، انرژی پتانسیل کل متشکل از دو انرژی پتانسیل کشسانی و انرژی کرنشی است.

$$U_T = U_{strain} + U_{spring} \quad (32)$$

باتوجه به تأثیر الاستیک یاتاقانها در دو جهت  $y$  و  $z$ ، انرژی کشسانی یاتاقانها طبق رابطه‌ی (۳۳)، قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} U_{spring} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( (K_l v + K_{nl} v^2) v \right) \delta(x) + \left( (K_l w + K_{nl} w^2) w \right) \delta(x - L) \right] ds \end{aligned} \quad (33)$$

در روابط فوق  $K_l$  و  $K_{nl}$  به ترتیب سختی خطی و سختی غیرخطی یاتاقانها می‌باشند؛ همچنین به منظور محاسبه‌ی انرژی کرنشی روتور، می‌توان از رابطه‌ی (۳۴) استفاده نمود [۱۷]:

$$U_{strain} = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA ds \quad (34)$$

در رابطه‌ی فوق،  $i = j$  تنش نرمال،  $i \neq j$  تنش برشی،  $i = j$  کرنش نرمال و  $i \neq j$  کرنش برشی است.

به منظور محاسبه‌ی کرنش نرمال و برشی می‌توان از تئوری تیرهای سه بعدی استفاده نمود [۱۸]. مطابق با تئوری تیرهای سه بعدی، کرنش نرمال و برشی بر حسب شعاع انحناء محاسبه می‌شوند.

پس از ساده‌سازی رابطه‌ی (۳۴)، انرژی کرنشی روتور طبق رابطه‌ی (۳۵) بازنویسی خواهد شد:



۲-۵- بی بعد سازی

از طریق بی بعد سازی پارامترها مطابق با عبارت الف، معادلات حرکت سیستم طبق روابط (۴۵) و (۴۶) در دو جهت  $y$  و  $z$  بدست خواهند آمد:

$$\bar{t}_1 = \frac{I_1}{mL^2} \cdot \bar{t}_2 = \frac{I_2}{mL^2} \cdot \bar{\omega} = \Omega \sqrt{\frac{mL^4}{D_{22}}}$$

$$\bar{t} = t \sqrt{\frac{D_{22}}{mL^4}} \cdot \bar{s} = \frac{S}{L} \cdot \bar{\lambda} = \frac{\lambda mL^4}{D_{22}} \cdot \bar{e}_v = \frac{e_v}{L}$$

$$\bar{e}_w = \frac{e_w}{L} \cdot \bar{u} = \frac{u}{L} \cdot \bar{w} = \frac{w}{L} \cdot \bar{v} = \frac{v}{L} \cdot \bar{C}_e = \frac{C_e}{L}$$

$$\bar{K}_l = \frac{K_l L^4}{D_{22}} \cdot \bar{K}_{nl} = \frac{2K_{nl} L^6}{D_{22}} \cdot \bar{C}_b = \frac{c_b L^2}{\sqrt{mD_{22}}}$$

$$\ddot{v} - I_2 \ddot{v}'' - I_2 \Omega \dot{w}'' + c \dot{v} + c_b \dot{v} - \Lambda_m v + v''' = \frac{3\Lambda_m w^2 v}{2C_e} + \frac{3\Lambda_m v^3}{2C_e^2} + \Omega^2 e_v \cos(\Omega t) - \Omega^2 e_w \sin(\Omega t) - v' \int_0^S [\ddot{v}'v' + \dot{v}'^2 + \ddot{w}'w' + \dot{w}'^2] ds - v'' \int_0^S \int_l^S [\ddot{v}'v' + \dot{v}'^2 + \ddot{w}'w' + \dot{w}'^2] ds ds - 4v''''v''v' - v''w''''w' - 3w''''v''v' - w''''w''v' - v''''v''^2 - v''v''^2 - v''^3 - (K_l v + 2K_{nl}v^3)\delta(x) - (K_l v + 2K_{nl}v^3)\delta(x-L).$$

$$\ddot{w} - I_2 \ddot{w}'' - I_2 \Omega \dot{v}'' + c \dot{w} + c_b \dot{w} - \Lambda_m w + w''' = \frac{3\Lambda_m v^2 w}{2C_e} + \frac{3\Lambda_m w^3}{2C_e^2} + \Omega^2 e_w \cos(\Omega t) + \Omega^2 e_v \sin(\Omega t) - w' \int_0^S [\ddot{v}'v' + \dot{v}'^2 + \ddot{w}'w' + \dot{w}'^2] ds - w'' \int_0^S \int_l^S [\ddot{v}'v' + \dot{v}'^2 + \ddot{w}'w' + \dot{w}'^2] ds ds - 4w''''w''w' - v''v''''w' - 3v''''v''w' - w''''w''^2 - w''v''^2 - w''^3 - (K_l w + 2K_{nl}w^3)\delta(x) - (K_l w + 2K_{nl}w^3)\delta(x-L).$$

۳- خطی سازی و روش مقیاس های زمانی چندگانه

روش های گوناگونی به منظور گسسته سازی<sup>۴</sup> روابط دیفرانسیل غیرخطی استفاده می شود. گالرکین یکی از روش های گسسته سازی به صورت تقریبی است. در این روش، گسسته سازی توابع دو متغیره به صورت حاصل ضرب دو تابع مجزا صورت می گیرد. در پژوهش حاضر، میدان های جابجایی

$\delta v$ :

$$m\ddot{v} - I_2 \ddot{v}'' - I_2 \Omega \dot{w}'' + c \dot{v} + c_b \dot{v} \delta(x) + c_b \dot{v} \delta(x-L) - \lambda_m v + D_{22} v'''' = \frac{3\lambda_m w^2 v}{2C_e^2} + \frac{3\lambda_m v^3}{2C_e^2} + m\Omega^2 e_v \cos(\Omega t) - m\Omega^2 e_v \sin(\Omega t) - D_{11} \phi''''w' - D_{11} v''''w'^2 - 2D_{11} v''w''^2 - 2D_{11} \phi''w'' - D_{11} \phi'w'''' - 4D_{11} (v''w''w') - 2D_{11} (v''w''''w') + D_{22} (w''''w''w') + D_{22} (v''w''''w') + D_{22} (w''''w''v') + 2D_{22} \phi'w'''' + D_{22} \phi''w'''' + 8D_{22} (v''v''v') + 4D_{22} (v''''w''w') + 2D_{22} (v''w''''w') + 2D_{22} v''w''^2 + D_{33} u''''v' + 2D_{33} v''''u' - D_{33} \phi''w'' - 2D_{33} \phi'w'''' - D_{33} \phi w'''' + 2D_{33} v''''v'^2 + D_{33} v''''w''^2 + 4D_{33} u''v'''' + 3D_{33} u''''v'' + 2D_{33} v''''^3 + \lambda'v' + \lambda v'' - (K_l v + 2K_{nl}v^3)\delta(x) - (K_l v + 2K_{nl}v^3)\delta(x-L).$$

$\delta w$ :

$$m\ddot{w} - I_2 \ddot{w}'' + I_2 \Omega \dot{v}'' + c \dot{w} + c_b \dot{w} \delta(x) - \lambda_m w + c_b \dot{w} \delta(x-L) + D_{22} w'''' = \frac{3\lambda_m v^2 w}{2C_e^2} + \frac{3\lambda_m w^3}{2C_e^2} + m\Omega^2 e_w \cos(\Omega t) + m\Omega^2 e_v \sin(\Omega t) - D_{11} \phi''v'' - D_{11} w''v''^2 + D_{11} \phi'v'''' + 2D_{11} v''''w''v'' + D_{22} u''''w'' + 4D_{22} u''w'''' + 3D_{22} w''v''^2 + 3D_{22} u''''w'' + 2D_{22} w''''u' + D_{22} w''''v'^2 + 2D_{22} w''''w''^2 + 2D_{22} \phi'v'''' + D_{22} \phi v'''' + 2D_{22} w''^3 + D_{22} v''''w''v' + 3D_{22} v''''v''w'' + 4D_{22} w''''v''v'' + 3D_{22} w''v''v'''' + 8D_{22} w''''w''w'' + D_{22} \phi''v'' - D_{33} \phi v'''' - 2D_{33} \phi'v'''' - D_{33} \phi''v'' - D_{33} w''v''^2 - 2D_{33} v''''w''v'' + \lambda'w' + \lambda w'' - (K_l w + 2K_{nl}w^3)\delta(x) - (K_l w + 2K_{nl}w^3)\delta(x-L).$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۵) و انتگرال گیری از رابطه‌ی (۳۹) می توان ضریب لاگرانژ  $\lambda$  را طبق رابطه‌ی (۴۳) محاسبه نمود.

$$\lambda(s, t) = -D_{22}(w''''w' + v''''v') - \frac{1}{2}m \int_L^S \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v'^2 + w'^2) \right] ds$$

همچنین می توان با دو مرحله انتگرال گیری از رابطه‌ی (۴۰)، زاویه‌ی پیچش را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\varphi(s, t) = - \int_0^S v''w' ds$$

<sup>4</sup> Discretizing

می‌توان از روش‌های تقریبی-تحلیلی استفاده نمود. مقیاس زمانی چندگانه یکی از روش‌های تقریبی تحلیلی است که با استفاده از مقیاس زمانی به صورت  $T_n = \varepsilon^n t$  و مشتقات جزئی زمان طبق روابط (۵۱) و (۵۲) قادر به حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی است [۲۱].

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (51)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_2 + \dots \quad (52)$$

در روابط (۵۱) و (۵۲)،  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$  ( $n = 0, 1, \dots$ )،  $\varepsilon$  پارامتر ذخیره ساز<sup>۷</sup> است.

به منظور بدست آوردن پاسخ ارتعاشی سیستم تحت تشدید اولیه از روش مقیاس زمانی استفاده می‌شود. از این رو مختصه‌های معین طبق روابط (۵۳) و (۵۴) بسط داده می‌شوند [۲۱]:

$$q_v(t) = \varepsilon q_{v1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{v3}(T_0, T_2) \quad (53)$$

$$q_w(t) = \varepsilon q_{w1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{w3}(T_0, T_2) \quad (54)$$

به علت وجود جملات غیرخطی با مرتبه فرد در معادلات حرکت، از تأثیر ترم‌هایی با ضریب  $T_1$  در روابط (۴۹) و (۵۰) صرف‌نظر می‌شود. با جایگذاری بسط مختصه‌های معین و مشتقات جزئی زمان در روابط (۴۹) و (۵۰)، معادلات ارتعاشی سیستم در حالت آزاد و اجباری از طریق تفکیک ضرایب  $\varepsilon^1$  و  $\varepsilon^3$  مطابق با روابط ۵۵ و ۵۶ استخراج خواهند شد:

$$\varepsilon^1: \quad k_1 D_0^2 q_{v1} + 2\Omega k_2 D_0 q_{w1} + k_4 q_{v1} = 0 \quad (55)$$

$$k_1 D_0^2 q_{w1} - 2\Omega k_2 D_0 q_{v1} + k_4 q_{w1} = 0$$

$$\varepsilon^3: \quad k_1 D_0^2 q_{v3} + 2\Omega k_2 D_0 q_{w3} + k_4 q_{v3} = B_1 + B_2 \quad (56)$$

$$k_1 D_0^2 q_{w3} - 2\Omega k_2 D_0 q_{v3} + k_4 q_{w3} = B_3 + B_4$$

شایان ذکر است مقادیر  $B_1$ ،  $B_2$  تا  $B_4$  در پیوست ۴ آورده شده‌اند.

$W(s, t)$  و  $v(s, t)$  تابعی از زمان و طول روتور می‌باشند. در این صورت می‌توان این دو میدان را طبق روابط (۴۷) و (۴۸) با استفاده از روش گالرکین، گسسته نمود.

$$v(s, t) = q_v(t)\phi(s) \quad (47)$$

$$w(s, t) = q_w(t)\phi(s) \quad (48)$$

در روابط (۴۷) و (۴۸) متغیر  $\phi(s)$  شکل مود اول ارتعاشی سیستم روتور-یاتاقان است که نحوه‌ی استخراج آن مطابق با شرایط مرزی سیستم، در پیوست ۱ آورده شده است [۱۹].

همچنین در روابط (۴۷) و (۴۸)،  $q_w$  و  $q_v$  مختصه‌های معین<sup>۵</sup> در دو راستای  $\eta$  و  $\zeta$  می‌باشند.

با جایگذاری روابط (۴۷) و (۴۸) در روابط (۴۵) و (۴۶) و مشتق‌گیری نسبت به زمان و طول روتور، تابع وزنی  $\square(s, t)$  محاسبه خواهد شد [۲۰].

با انتگرال‌گیری از تابع وزنی، طبق رابطه‌ی  $\int_0^L \square(s, t)\phi(s)ds = 0$  معادلات حرکت سیستم مطابق با روابط (۴۹) و (۵۰) بدست خواهند آمد:

$$k_1 \dot{q}_v + 2\Omega k_2 q_w + k_3 c q_v + k_4 q_v = k_5 A_1 + k_6 A_2 - k_7 A_3 - k_8 A_4 - k_9 A'_2 + \Omega^2 e_v \cos(\Omega t) - \Omega^2 e_w \sin(\Omega t) \quad (49)$$

$$k_1 \dot{q}_w - 2\Omega k_2 \dot{q}_v + k_3 c q_w + k_4 q_w = k_5 A_5 + k_6 A_6 - k_7 A_7 - k_8 A_8 - k_9 A'_6 + \Omega^2 e_v \sin(\Omega t) + \Omega^2 e_w \cos(\Omega t) \quad (50)$$

در روابط فوق مقادیر  $A_1$ ،  $A_2$  تا  $A_8$  در پیوست ۲ و مقادیر  $k_1$ ،  $k_2$  تا  $k_8$  در پیوست ۳ آورده شده‌اند.

در روابط (۴۹) و (۵۰)،  $A'_2$  و  $A'_6$  ترم‌های غیرخطی مربوط به فنریت یاتاقان‌ها،  $A_4$  و  $A_8$  ترم‌های غیرخطی مربوط به هندسه‌ی سیستم،  $A_3$  و  $A_7$  ترم‌های غیرخطی مربوط به اثر اینرسی و  $A_1$  و  $A_5$  ترم‌های غیرخطی مربوط به نیروی الکترومغناطیسی است.

از آنجایی که روش‌های دقیق<sup>۶</sup> قادر به حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی نمی‌باشند، به منظور حل اینگونه معادلات

<sup>7</sup> Book keeping

<sup>5</sup> Exact Method

<sup>6</sup> Straight forward

$$k_1 D_0^2 q_{w3} - 2\Omega k_2 D_0 q_{v3} + k_4 q_{w3} = [C_3]e^{i\omega_1 T_2} + [C_4]e^{i\omega_2 T_2} + CC + NCT \quad (۶۳)$$

قابل توجه می‌باشد که مقادیر  $C_1$ ،  $C_2$  تا  $C_4$  در پیوست ۵ آورده شده‌اند.

در روابط فوق CC و NCT به ترتیب جملات مزدوج مختلط و جملات غیرسکیولار<sup>۹</sup> می‌باشند. به منظور بدست آوردن معادلات مدولاسیون<sup>۱۰</sup>، جملات مشکل‌ساز<sup>۱۱</sup> از طریق روابط (۶۲) و (۶۳)، حذف خواهند شد. برای این منظور می‌بایست ضریب جملات  $e^{i\omega_1 T_0}$  و  $e^{i\omega_2 T_0}$  برابر با صفر قرار داده شوند. در این صورت برای رابطه (۶۲) خواهیم داشت:

$$E_1 D_2 f_1 - E_2 f_1 - E_3 f_1^2 \bar{f}_1 + E_4 f_1 f_2 \bar{f}_2 - E_5 e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (۶۴)$$

$$E_6 D_2 f_2 - E_7 f_2 - E_3 f_2^2 \bar{f}_2 + E_4 f_2 f_1 \bar{f}_1 = 0 \quad (۶۵)$$

در روابط فوق، مقادیر  $E_1$ ،  $E_2$  تا  $E_7$  در پیوست ۶ آورده شده‌اند؛ همچنین توابع قطبی  $f_1$  و  $f_2$  طبق رابطه (۶۶) بیان می‌شوند

$$f_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{i\beta_1}, f_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{i\beta_2} \quad (۶۶)$$

با استفاده از توابع قطبی  $f_1$  و  $f_2$  می‌توان قسمت موهومی و حقیقی رابطه (۶۴) را به صورت زیر بدست آورد:

$$a_1' = F_1 a_1 + F_2 \sin(\sigma T_2 - \beta_1) \\ a_1 \beta_1' = F_3 a_1^3 + F_4 a_1 a_2^2 - F_2 \cos(\sigma T_2 - \beta_1) \quad (۶۷)$$

مقادیر  $F_1$ ،  $F_2$  تا  $F_4$  در پیوست ۷ ذکر شده‌اند. با استفاده از تغییر متغیر  $\gamma = \sigma T_1 - \beta_1$  در رابطه (۶۷)، معادلات مدولاسیون طبق رابطه (۶۸) به صورت مستقل از زمان بدست خواهد آمد.

$$a_1' = F_1 a_1 + F_2 \sin(\gamma) \\ \gamma' = \sigma - F_3 a_1^2 + F_4 a_2^2 - \frac{F_2}{a_1} \cos(\gamma) \quad (۶۸)$$

با حل رابطه‌ی (۵۵) می‌توان پاسخ ارتعاشی سیستم در حالت آزاد را طبق روابط (۵۷) و (۵۸) بدست آورد.

$$q_{v1} = f_1(T_2)e^{i\omega_1 T_0} + f_2(T_2)e^{i\omega_2 T_0} + \bar{f}_1(T_2)e^{-i\omega_1 T_0} + \bar{f}_2(T_2)e^{-i\omega_2 T_0} \quad (۵۷)$$

$$q_{w1} = -if_1(T_2)e^{i\omega_1 T_0} + if_2(T_2)e^{i\omega_2 T_0} + i\bar{f}_1(T_2)e^{-i\omega_1 T_0} - i\bar{f}_2(T_2)e^{-i\omega_2 T_0} \quad (۵۸)$$

به منظور محاسبه‌ی فرکانس‌های پیش‌رو و پس‌رو مطابق با روابط (۵۹) و (۶۰)، می‌توان از پاسخ ارتعاشی بدست آمده‌ی سیستم در حالت مانا استفاده نمود:

$$\Omega k_2 + k_1 \sqrt{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_4}{k_1}} \quad (۵۹)$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega k_2 + k_1 \sqrt{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_4}{k_1}}}{k_1} \\ \omega_2 = \frac{-\Omega k_2 + k_1 \sqrt{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 + \frac{k_4}{k_1}}}{k_1} \quad (۶۰)$$

#### ۴- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تشدید اولیه

در این بخش با محاسبه‌ی تابع پاسخ فرکانسی، می‌توان رفتار ارتعاشی سیستم را تحت تشدید اولیه مورد بررسی قرار داد؛ لذا طبق رابطه (۶۱) فرکانس طبیعی تحریک، بر حسب فرکانس طبیعی سیستم بیان می‌شود:

$$\Omega = \omega + \sigma \varepsilon^2 \quad (۶۱)$$

همانطور که مشاهده می‌شود فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی با اختلاف بسیار ناچیز نزدیک به یکدیگر می‌باشند. در معاله فوق  $\sigma$  به عنوان پارامتر تنظیم<sup>۸</sup> تعریف می‌شود.

به منظور بدست آوردن پاسخ زمانی سیستم تحت تشدید اولیه، می‌بایست روابط (۵۷) و (۵۸) را در سمت راست رابطه‌ی (۵۶) جایگذاری نموده و سپس با استفاده از رابطه‌ی (۶۱)، روابط زیر را استخراج نمود:

$$k_1 D_0^2 q_{v3} + 2\Omega k_2 D_0 q_{w3} + k_4 q_{v3} = [C_1]e^{i\omega_1 T_2} + [C_2]e^{i\omega_2 T_2} + CC + NC \quad (۶۲)$$

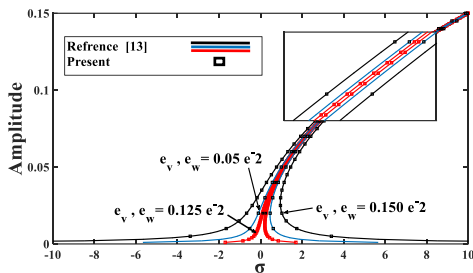
<sup>9</sup> Modulation Equation

<sup>10</sup> Troublesome terms

<sup>7</sup> Detuning parameter

<sup>8</sup> Non Secular Term

با توجه به عدم بررسی تأثیر میدان الکترومغناطیسی در تحلیل ارتعاشی مرجع [۱۳]، جهت صحت‌سنجی مقدار  $\Delta$  در پژوهش حاضر برابر صفر در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، پاسخ فرکانسی هر دو سیستم دارای رفتار سخت شونده<sup>۱۲</sup> است؛ همچنین پاسخ فرکانسی دو سیستم دارای همپوشانی قابل توجهی می‌باشند که این مهم را می‌توان به ترتیب مطابق با شکل ۵ و جدول ۲ به صورت کیفی و کمی مشاهده نمود.



شکل ۵- صحت‌سنجی از طریق پاسخ فرکانسی مربوط به سیستم مرجع [۱۳] و پژوهش حاضر

جدول ۲- مقایسه کمی دامنه تحریک و پاسخ فرکانسی پیش‌رو به ازای پارامتر مغناطیسی  $\Delta = 0$  و خروج از مرکزی  $n=1$  برای شکل موج اول  $e_{v,w} = 0,015$

پاسخ فرکانسی	پاسخ فرکانسی	پاسخ فرکانسی
پیش‌رو در مرجع	پیش‌رو در پژوهش	پیش‌رو در مرجع
[۱۳]	حاضر	[۱۳]
-۰,۶۷۲۳	-۰,۶۷۲۳	۰,۰۲ دامنه تحریک
-۰,۷۶۹۸	۰,۷۶۹۸	۰,۰۵ دامنه تحریک
۴,۲۶۹	۴,۲۶۹	۰,۱ دامنه تحریک

### ۵-۲- نتایج پژوهش

مطابق با شکل ۶، تغییرات فرکانس پیش‌رو و پس‌رو برحسب سرعت دورانی روتور برای سیستم مورد نظر، رسم شده است. با افزایش سرعت دورانی روتور، فرکانس پیش‌رو افزایش و فرکانس پس‌رو کاهش یافته است. تأثیر پارامتر الکترومغناطیسی در فرکانس‌های پیش‌رو و پس‌رو از طریق رسم نمودار کمپل سیستم مطابق با شکل ۶، مشاهده می‌شود،

تابع پاسخ فرکانسی سیستم، در حالت مانا، از طریق صفر شدن  $a_1'$  و  $\gamma'$  و استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ، طبق رابطه (۶۹) محاسبه می‌گردد:

$$\sigma = F_3 a_1^2 + F_4 a_2^2 \pm F_2 \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2} \quad (69)$$

شایان ذکر است با توجه به ارتعاشات سیستم تحت تشدید اولیه، تنها مود فرکانسی پیش‌رو تحریک می‌شود. در این صورت می‌توان  $a_2 = 0$  را نتیجه گرفت؛ همچنین می‌توان با حل معادله (۶۵) و بدست آوردن معادله مدولاسیون نیز به نتیجه مذکور رسید.

### ۵- نتایج

در این بخش پاسخ ارتعاشی روتور به صورت پارامتری تحت تشدید اولیه برای اولین مود ارتعاشی بررسی خواهد شد. علی‌رغم پژوهش‌های بسیار در زمینه ارتعاشات روتور، تأثیر همزمان خاصیت الاستیک غیرخطی یاتاقان‌ها، خروج از مرکزی و اینرسی تحت تحریک مغناطیسی صورت نگرفته است. از این رو در پژوهش حاضر به منظور افزایش دقت تحلیل دینامیکی سیستم، تأثیر همزمان پارامترهای ذکر شده در پاسخ فرکانسی سیستم بررسی خواهد شد.

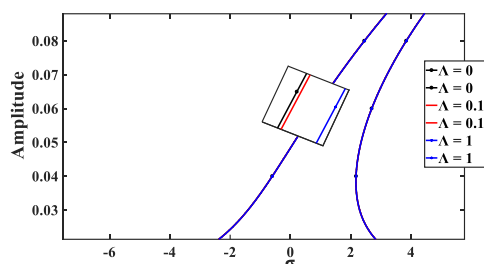
### ۵-۱- صحت‌سنجی

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاضر، مطابق با شکل ۵، نمودار پاسخ فرکانسی سیستم مورد مطالعه در مرجع [۱۳] و پژوهش حاضر، رسم شده است. مقادیر عددی پارامترهای محاسباتی، در جدول ۱ مشخص شده است.

### جدول ۱- مقادیر پارامترهای محاسباتی

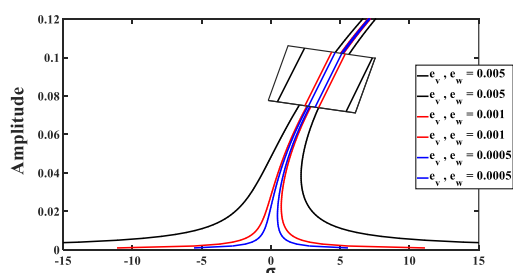
پارامتر	مقدار
$I_1$	۰/۰۰۰۶۲۵
C	۰/۰۵ N-s/m
L	۱m

<sup>11</sup> Hardening

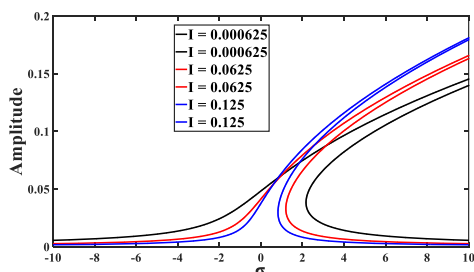


شکل ۸- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر تغییرات پارامتر الکترومغناطیس

همانطور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، افزایش پارامتر الکترومغناطیس  $\lambda$  سبب انقباض پاسخ فرکانسی می‌شود. به این معنا که با افزایش تحریک مغناطیسی در فضای میان استاتور و روتور می‌توان شاهد کاهش فرکانس ارتعاشی بود. علاوه بر موارد فوق، تأثیر خروج از مرکزی و اینرسی روتور نیز در تحلیل ارتعاشی سیستم در نظر گرفته شده است. مطابق با شکل‌های ۹ و ۱۰، پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر خروج از مرکزی و اینرسی روتور رسم شده است.

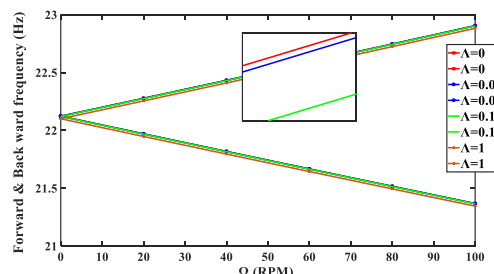


شکل ۹- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر خروج از مرکزی



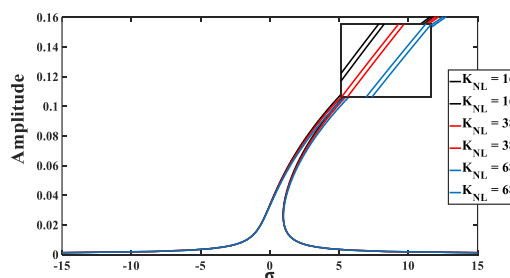
شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر تغییرات اینرسی

افزایش تدریجی پارامتر الکترومغناطیس سبب کاهش فرکانس‌های پیش‌رو و پس‌رو خواهد شد.



شکل ۶- نمودار کمپل سیستم روتور یاتاقان تحت تأثیر تغییرات پارامتر الکترومغناطیس

همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، افزایش سختی غیرخطی یاتاقان‌ها سبب افزایش سخت شونده‌گی پاسخ فرکانسی سیستم خواهد شد.



شکل ۷- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر تغییرات سختی فنریت غیرخطی یاتاقان

در این صورت شاهد کاهش فرکانس ارتعاشی سیستم خواهیم بود.

تأثیر میدان الکترومغناطیسی، یکی از پارامترهایی است که با هدف ساده‌سازی روابط، در اکثر مقالات از آن صرف‌نظر شده است. از این رو، در پژوهش حاضر مطابق با شکل ۸ به منظور افزایش دقت تحلیل دینامیکی سیستم تأثیر میدان مغناطیسی در پاسخ فرکانسی سیستم بررسی شده است.

## ۶- نتیجه گیری

علی‌رغم پژوهش‌های بسیار در زمینه تحلیل ارتعاشات روتور-یاتاقان، به منظور ساده‌سازی روابط و فرایند تحلیل، از تأثیر همزمان سختی غیرخطی یاتاقان‌ها و نیروی الکترومغناطیس به عنوان اثرات قابل توجه در تحلیل پاسخ زمانی سیستم صرف‌نظر شده است. عدم بررسی اثرات ذکر شده در تحلیل ارتعاشی سیستم، سبب کاهش دقت مدل‌سازی و نتایج خواهد شد. در این صورت استناد به نتایج بدست آمده از ضریب اطمینان پایین برخوردار خواهد بود.

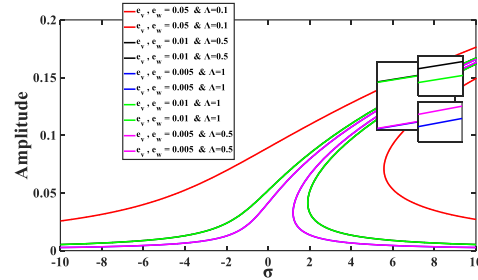
از این‌رو به منظور افزایش دقت مدل‌سازی در پژوهش حاضر نسبت به پژوهش‌های پیشین، به تحلیل دینامیک غیرخطی سیستم روتور-یاتاقان تحت تأثیر همزمان سختی غیرخطی یاتاقان‌ها و نیروی الکترومغناطیس با در نظر گرفتن خروج از مرکزی و اینرسی روتور پرداخته شده است. در پژوهش حاضر معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. شایان ذکر است، گسسته‌سازی روابط غیرخطی، از طریق روش گالرکین صورت گرفته است؛ همچنین به منظور تعیین پاسخ فرکانسی سیستم تحت تشدید اولیه از روش مقیاس زمانی چندگانه و بسط پرتربیشن استفاده شده است. به منظور تصدیق روابط و صحت‌گذاری نتایج بدست آمده پاسخ فرکانسی برای سیستم مورد مطالعه و سیستم بررسی شده در مرجع [۱۳] رسم شده است. نتایج حاکی از آن است که همپوشانی مطلوب میان نتایج پژوهش حاضر و سایر پژوهش‌ها وجود دارد.

ضمن بدست آوردن فرکانس پیش‌رو و پس‌رو، تغییرات این دو فرکانس با افزایش سرعت دوران بررسی شده است. از طریق رسم نمودار کمپل مشاهده می‌شود، افزایش سرعت دورانی سبب افزایش فرکانس پیش‌رو و کاهش فرکانس پس‌رو خواهد شد؛ همچنین با در نظر گرفتن تأثیر میدان الکترومغناطیسی، مشاهده می‌شود که از طریق افزایش پارامتر الکترومغناطیس می‌توان فرکانس پیش‌رو را کاهش داد.

در پژوهش حاضر تأثیر سختی غیرخطی یاتاقان‌ها نیز از طریق مدل‌سازی روتور-یاتاقان به صورت یک تیر با تکیه‌گاه الاستیک غیرخطی در دو انتها مورد بررسی قرار گرفت. با رسم نمودار پاسخ فرکانسی سیستم در این حالت، مشاهده می‌شود که افزایش سختی غیرخطی، سبب افزایش سخت‌شوندگی پاسخ فرکانسی سیستم خواهد شد. با مقایسه پاسخ فرکانسی

همانطور که انتظار می‌رود، کاهش خروج از مرکزی و اینرسی روتور سبب انقباض و سخت‌شوندگی پاسخ فرکانسی سیستم خواهد شد. در این صورت می‌توان شاهد کاهش فرکانس ارتعاشی سیستم بود. همانطور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، افزایش خروج از مرکزی، سبب افزایش دامنه تحریک دارد خواهد شد. چرا که نیروی معادل‌گریز از مرکز وارد شده به جرم خارج از مرکز، سبب تحریک سیستم خواهد شد. این مهم سبب افزایش دامنه ارتعاشات و افزایش رفتار غیرخطی سیستم می‌شود؛ بنابراین با افزایش رفتار غیرخطی سیستم، نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست متمایل شده و رفتار سخت‌شوندگی بیشتری از خود نشان می‌دهد، لذا ناحیه دو پایدار بزرگ تر می‌شود.

مطابق با شکل ۱۱، پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر همزمان میدان الکترومغناطیسی، سختی غیرخطی یاتاقان‌ها، خروج از مرکزی و اینرسی روتور رسم شده است.



شکل ۱۱- پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر همزمان سفتی غیرخطی یاتاقان، تحریک مغناطیسی، خروج از مرکزی و اینرسی

همانطور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، افزایش سختی غیرخطی یاتاقان‌ها و یا کاهش اینرسی روتور، سبب افزایش سختی پاسخ فرکانسی خواهد شد؛ همچنین افزایش پارامتر الکترومغناطیس و کاهش خروج از مرکزی، سبب انقباض پاسخ فرکانسی خواهد شد. شایان ذکر است، افزایش رفتار سخت‌شوندگی و انقباض پاسخ فرکانسی سبب کاهش فرکانس و دامنه نوسانات به صورت بهینه خواهد شد.

با توجه به بررسی‌های انجام شده در این بخش مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده حاکی از افزایش دقت تحلیل و بهینه شدن رفتار ارتعاشی سیستم از طریق تنظیم و کنترل پارامترهای ارتعاشی است.

$$\delta(x) \begin{cases} v'' = 0 \\ w'' = 0 \end{cases} \begin{cases} EIv'''' = -(K_1v + c\dot{v}) \\ EIv'''' = -(K_1w + c\dot{w}) \end{cases}$$

$$\delta(x-L) \begin{cases} v'' = 0 \\ w'' = 0 \end{cases} \begin{cases} EIv'''' = (K_1v + c\dot{v}) \\ EIv'''' = (K_1w + c\dot{w}) \end{cases}$$

$$d = \left( \frac{\frac{2k}{\beta} \sin(\beta) + \beta^2 \cos(\beta) - \beta^2 \cosh(\beta)}{\beta^2 \sinh(\beta) - \beta^2 \sin(\beta)} \right) \quad \text{پیوست ۱-۱}$$

$$\phi(s) = \left[ \begin{array}{c} \cosh(\beta s) + \cos(\beta s) \\ + \frac{2\beta \sin(\beta s)}{\beta^3} \\ + d(\sinh(\beta s) + \sin(\beta s)) \end{array} \right]$$

پیوست ۲

ترم های ناشی از غیرخطی یاتاقان‌ها، هندسه سیستم و نیروی الکترومغناطیسی به صورت زیر می‌باشند:

$$A_1 = q_w^2 q_v \quad \text{پیوست ۱-۲}$$

$$A_2 = q_v^3 \quad \text{پیوست ۲-۲}$$

$$A_3 = \ddot{q}_v q_v^2 + \dot{q}_v^2 q_v + \ddot{q}_w q_w q_v + \dot{q}_w^2 q_v \quad \text{پیوست ۳-۲}$$

$$A_4 = q_v^3 + q_v q_w^2 \quad \text{پیوست ۴-۲}$$

$$A_5 = q_w^2 q_w \quad \text{پیوست ۵-۲}$$

$$A_8 = q_w^3 + q_w q_v^2 \quad \text{پیوست ۸-۲}$$

$$A_6 = q_w^3 \quad \text{پیوست ۶-۱}$$

$$A_7 = \ddot{q}_w q_w^2 + \dot{q}_w^2 q_w + \ddot{q}_v q_v q_w + \dot{q}_v^2 q_w \quad \text{پیوست ۷-۲}$$

پیوست ۳

باتوجه به تابع وزنی  $\Pi(s, t)$  جهت در روابط ۴۹ و ۵۰ از مقادیر زیر استفاده می‌شود:

$$k_1 = \int_0^l \phi^2 - I_2 \phi \phi'' ds \quad \text{پیوست ۱-۳}$$

$$k_2 = \int_0^l -I_2 \phi \phi'' ds \quad \text{پیوست ۲-۳}$$

$$k_3 = \int_0^l \phi^2 + \phi^2 \delta(x) - \phi^2(x-L) ds \quad \text{پیوست ۳-۳}$$

$$k_4 = \int_0^l \left( -\Lambda_m \phi^2 + \phi \phi'''' + K_1 \phi^2 \delta(x) + K_1 \phi^2 \delta(x-L) \right) ds \quad \text{پیوست ۴-۳}$$

$$k_5 = \int_0^l \frac{3\Lambda_m}{2C_e^2} \phi^3 ds \quad \text{پیوست ۵-۳}$$

$$k_6 = \int_0^l \frac{3\Lambda_m}{2C_e^2} \phi^4 ds \quad \text{پیوست ۶-۳}$$

$$k_7 = \int_0^l \phi \phi' \int_0^s \phi^2 ds + \int_0^l \phi \phi'' \int_0^s \int_0^s \phi'^2 ds ds \quad \text{پیوست ۷-۳}$$

$$k_8 = \int_0^l -4\phi \phi''' \phi'' \phi' - \phi \phi'^2 \phi'''' - \phi \phi''^3 ds \quad \text{پیوست ۸-۳}$$

$$k_9 = \int_0^l 2K_{nl} \phi^4 \delta(x) + 2K_{nl} \phi^4 \delta(x-L) ds \quad \text{پیوست ۹-۳}$$

سیستم در دو حالت تکیه‌گاه صلب و الاستیک غیرخطی، شاهد تأثیر موثر تکیه‌گاه الاستیک در کاهش دامنه و فرکانس‌های ارتعاشی سیستم خواهیم بود.

با رسم پاسخ فرکانسی سیستم تحت تأثیر همزمان سفتی غیرخطی یاتاقان‌ها و میدان الکترومغناطیسی در حضور خروج از مرکزی و اینرسی روتور مشاهده می‌شود، افزایش سختی غیرخطی و کاهش اینرسی سبب افزایش سخت شوندگی پاسخ فرکانسی شده و همچنین کاهش خروج از مرکزی و افزایش نیروی الکترومغناطیسی سبب انقباض پاسخ فرکانسی سیستم می‌شود. در این صورت می‌توان فرکانس ارتعاشی سیستم را به صورت بهینه تنظیم و کنترل نمود. با مطالعه منابع موجود در حوزه تحلیل روتور یاتاقان [۱۲، ۱۰، ۵، ۱]، [۱۳]، تحلیل رفتار ارتعاشی روتور یاتاقان از طریق تنظیم تنها اینرسی، سفتی غیرخطی، خروج از مرکزی و نیروی الکترومغناطیسی به عنوان پارامترهای ارتعاشی، صورت گرفته است. تحلیل‌های انجام شده ممکن است، کاهش فرکانس سیستم را به همراه داشته باشد، اما نکته حائز اهمیت عدم اطلاع از میزان تأثیر پارامترهای مؤثر ارتعاشی (خروج از مرکزی، اینرسی، سفتی غیرخطی و نیروی الکترومغناطیسی) بر یکدیگر است؛ چرا که بررسی تأثیر تمامی پارامترهای مؤثر ارتعاشی به صورت همزمان رفتار سیستم روتور یاتاقان را به صورت دقیق تر مشخص خواهد کرد.

لذا برخلاف پژوهش‌های انجام شده تاکنون در پژوهش حاضر، تأثیر همزمان پارامترهای ارتعاشی قابل تنظیم در تحلیل رفتار ارتعاشی روتور یاتاقان صورت گرفته است. با قرار دادن پارامترهای اینرسی، خروج از مرکزی، سفتی غیرخطی یاتاقان و نیروی الکترومغناطیسی در یک پکیج قابل تنظیم، می‌توان فرکانس ارتعاشی روتور یاتاقان را به صورت مطلوب تنظیم و کاهش داد. در این صورت نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشی روتور یاتاقان از ضریب اطمینان بالاتری نسبت به پژوهش‌های پیشین برخوردار خواهد بود.

۶- پیوست‌ها

پیوست ۱

مطابق با شرایط مرزی روتور-یاتاقان مدل‌سازی شده در این پژوهش تابع شکل مود اولیه مطابق با پیوست ۱-۱ بدست خواهد آمد:

$$E_6 = 2i(k_2\Omega - k_1\omega_2) \quad \text{پیوست ۶-۶}$$

$$E_7 = ik_3c\omega_2 \quad \text{پیوست ۷-۵}$$

پیوست ۷

تابع پاسخ فرکانسی سیستم را می‌توان از طریق جایگذاری عبارت های زیر در رابطه ۶۹ محاسبه نمود:

$$F_1 = \frac{k_3c\omega_1}{2(k_2 - k_1\omega_1)} \quad \text{پیوست ۱-۷}$$

$$F_2 = \frac{\omega_1^2 e_v}{2(k_2 - k_1\omega_1)} \quad \text{پیوست ۲-۷}$$

$$F_3 = \frac{-(4k_9 + 4k_8 - 3k_6 - 3k_5) \frac{1}{4}}{2(k_2 - k_1\omega_1)} \quad \text{پیوست ۳-۷}$$

$$F_4 = \frac{\left( \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right) \frac{1}{4}}{2(k_2 - k_1\omega_1)} \quad \text{پیوست ۴-۷}$$

نماد	توضیح	نماد	توضیح
L	طول روتور	B <sub>0</sub>	چگالی شار
M	جرم روتور	μ <sub>0</sub>	پارامتر رسانایی
u	جابجایی در راستای x	U <sub>T</sub>	انرژی پتانسیل کل
v	جابجایی در راستای y	T <sub>T</sub>	انرژی جنبشی کل
w	جابجایی در راستای z	c <sub>b</sub>	ضریب میرایی خارجی
ψ	زاویه دوران اویلر حول z	c	ضریب میرایی داخلی
θ	زاویه دوران اویلر حول y	φ	تابع شکل مود
φ	زاویه دوران اویلر حول x	O'	مرکز استاتور
Ω	سرعت دورانی روتور	O	مرکز روتور
ω	بردار سرعت زاویه	K <sub>nl</sub>	سفتی غیرخطی
ρ	بردار شعاع انحناء	K <sub>l</sub>	سفتی خطی
I <sub>1</sub>	ممان اینرسی حول محور ξ	ε <sub>ij</sub>	گرانش
I <sub>2</sub>	ممان اینرسی حول محور η	σ <sub>ij</sub>	تنش
I <sub>3</sub>	ممان اینرسی حول محور ζ	G*	قید لاگرانژی (ضریب لاگرانژ)
λ	ضریب لاگرانژ	λ <sub>m</sub>	پارامتر الکترومغناطیسی
P <sub>m</sub>	نیرو الکترومغناطیسی	c <sub>e</sub>	کمترین فاصله هوایی
q <sub>v</sub>	مختصه معین در راستای y	q <sub>w</sub>	مختصه معین در راستای z

پیوست ۴  
با استفاده از بسط پرتربیشن، مشتقات زمانی و تفکیک ضریب  $\varepsilon^3$  جهت حل معادله ارتعاشی سیستم در حالت اجباری، عبارات زیر در سمت راست رابطه ۵۶ استفاده خواهند شد.

$$B_1 = -2k_1D_0D_2q_{v1} - 2\Omega k_2D_2q_{v1} - k_3cD_0q_{v1} - 2k_7D_0^2q_{v1}^3 + (k_5 - k_8)q_{w1}^2q_{v1} - 2k_7D_0^2q_{w1}^2q_{v1} + (k_6 - k_8 - k_9)q_{v1}^3 \quad \text{پیوست ۱-۴}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(\Omega^2 e_v(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) + i\Omega^2 e_w(e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0})) \quad \text{پیوست ۲-۴}$$

$$B_3 = -2k_1D_0D_2q_{w1} + 2\Omega k_2D_2q_{w1} - k_3cD_0q_{w1} + (k_5 - k_8)q_{v1}^2q_{w1} + (k_6 - k_8 - k_9)q_{w1}^3 - 2k_7D_0^2q_{v1}^2q_{w1} \quad \text{پیوست ۳-۴}$$

$$B_4 = \frac{1}{2}(\Omega^2 e_w(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) - i\Omega^2 e_v(e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0})) \quad \text{پیوست ۴-۴}$$

پیوست ۵

به منظور محاسبه پاسخ ارتعاشی سیستم در حالت اجباری از عبارت های زیر استفاده می‌شود.

$$C_1 = 2i(k_2\Omega - k_1\omega_1)D_2A_1(T_2) - ik_3c\omega_1A_1(T_2) - \left( \frac{1}{2}\omega_1 e_v + \frac{i}{2}\omega_1^2 e_w \right) (e^{i\Omega T_2}) - (4k_9 + 4k_8 - 3k_6 - 3k_5)A_1(T_2)^2\bar{A}_1(T_2) + \left( \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right) A_1(T_2)A_2(T_2)\bar{A}_2(T_2) \quad \text{پیوست ۱-۵}$$

$$C_2 = 2i(k_2\Omega + k_1\omega_2)D_2A_2(T_2) - ik_3c\omega_2A_2(T_2) - (4k_9 + 4k_8 - 3k_6 - 3k_5)A_2(T_2)^2\bar{A}_2(T_2) + \left( \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right) A_2(T_2)A_1(T_2)\bar{A}_1(T_2) \quad \text{پیوست ۲-۵}$$

$$C_3 = 2(k_2\Omega - k_1\omega_1)D_2A_1(T_2) - ik_3c\omega_1A_1(T_2) + i \left( \frac{4k_9 + 4k_8 - 3k_6}{-3k_5} \right) A_1(T_2)^2\bar{A}_1(T_2) + \left( \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right) iA_1(T_2)A_2(T_2)\bar{A}_2(T_2) - \left( \frac{i}{2}\omega_1 e_v + \frac{1}{2}\omega_1^2 e_w \right) (e^{i\Omega T_2}) \quad \text{پیوست ۳-۵}$$

$$C_4 = 2(k_2\Omega + k_1\omega_2)D_2A_2(T_2) - ik_3c\omega_2A_2(T_2) - i \left( \frac{4k_9 + 4k_8 - 3k_6}{-3k_5} \right) A_2(T_2)^2\bar{A}_2(T_2) + i \left( \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right) A_2(T_2)A_1(T_2)\bar{A}_1(T_2) \quad \text{پیوست ۴-۵}$$

پیوست ۶

جهت بدست آوردن معادلات مدولاسیون سیستم عبارت زیر در روابط ۶۴ و ۶۵ جاگذاری می‌شوند:

$$E_1 = 2i(k_2 - k_1\omega_1) \quad \text{پیوست ۱-۶}$$

$$E_2 = ik_3c\omega_1 \quad \text{پیوست ۲-۶}$$

$$E_3 = (4k_9 + 4k_8 - 3k_6 - 3k_5) \quad \text{پیوست ۳-۶}$$

$$E_4 = \left[ \frac{2k_7(\omega_1 + \omega_2)^2}{-(8k_9 + 8k_8 - 6k_6 - 2k_5)} \right] \quad \text{پیوست ۴-۶}$$

$$E_5 = \frac{1}{2}\omega_1^2 e_v + \frac{i}{2}\omega_1^2 e_w \quad \text{پیوست ۵-۶}$$



- magnetic bearings. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 15(3): 764-777.
- [11] Luo H, Wang Y (2012) Nonlinear vibration of a continuum rotor with transverse electromagnetic and bearing excitations. *Shock Vib* 19(6): 1297-1314.
- [12] Eftekhari M, Rahmatabadi AD, Mazidi A (2018) Nonlinear vibration of in-extensional rotating shaft under electromagnetic load. *Mech Mach Theory* 121: 42-58.
- [13] Phadatare HP, Pratiher B (2020) Nonlinear modeling, dynamics, and chaos in a large deflection model of a rotor-disk-bearing system under geometric eccentricity and mass unbalance. *Acta Mech* 231(3): 907-928.
- [14] Craig JJ (2005) *Introduction to Robotics*. 3rd edn, Pearson Education, UK.
- [15] Love AEH (2013) *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge university press, UK.
- [16] Eftekhari M (2017) The effect of damping and stiffness of bearing on the natural frequencies of rotor-bearing system. *Int J Eng* 30(3): 448-455.
- [17] Reddy JN (2017) *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Son, USA.
- [18] Gavin HP (2015) *Strain energy in linear elastic solids*. Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University: Durham, NC, USA.
- [19] Rao SS (2019) *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, USA.
- [20] Liu MF, Chang TP (2005) Vibration analysis of a magneto-elastic beam with general boundary conditions subjected to axial load and external force. *J Sound Vib* 288(1-2): 399-411.
- [21] Nayfeh AH, Mook DT (2008) *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, USA.
- ۷- مراجع
- [1] Hosseini SAA, Khadem SE (2009) Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia *Mech Mach Theory* 44(1): 272-288.
- [2] Yokoyama T (1988) Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams *Int J Mech Sci* 30(10): 743-755.
- [3] Melanson J, Zu J W (1998) Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions.
- [4] Hosseini SAA, Khadem SE (2009) Combination resonances in a rotating shaft. *Mech Mach Theory* 44(8): 1535-1547.
- [5] Khadem SE, Shahgholi M, Hosseini SAA (2010) Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft. *Mech Mach Theory* 45(8): 1067-1081.
- [6] Khadem SE, Shahgholi M, Hosseini, SAA (2011) Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude. *Nonlinear Dyn* 65: 217-233.
- [7] Hosseini SAA, Zamanian M (2013) Analytical solution for general nonlinear continuous systems in a complex form. *Appl Math Model* 37(3): 1163-1169.
- [8] Shahgholi M, Khadem SE, Bab S (2014) Free vibration analysis of a nonlinear slender rotating shaft with simply support conditions. *Mech Mach Theory* 82: 128-140.
- [9] Wang YF, Huang LH, Li Y (2007) Nonlinear vibration and stability of a Jeffcott rotor under unbalanced magnetic excitation. *Int. J Nonlinear Sci Numer* 8(3): 375-384.
- [10] Inayat-Hussain J I (2010) Nonlinear dynamics of a statically misaligned flexible rotor in active