



تحلیل ترموالاستیک غیرخطی استوانه FG با خواص تابع دما بر پایه تئوری اغتشاش و روش مربعات دیفرانسیلی

مهدی دهقان^۱، بهروز شهریار^{۲*}، امین موسائی^۳

^۱ پژوهشگر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک، اصفهان، ایران

^۲ استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک، اصفهان، ایران

^۳ دانشیار، دانشگاه یاسوج، دانشکده مهندسی مکانیک، یاسوج، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۰۹

چکیده

در این مقاله تحلیل ترموالاستیسیته غیرخطی یک استوانه جدارضخیم تحت فشار داخلی انجام شده است. خواص ماده به صورت مدرج تابعی در راستای شعاعی و تابع دما در نظر گرفته می‌شود که سبب غیرخطی شدن معادلات انتقال حرارت هدایتی در استوانه می‌شود. در این تحقیق از تئوری اغتشاش برای حل معادلات غیرخطی انتقال حرارت استوانه استفاده می‌شود. شرایط مرزی دمایی استوانه به طور کاملاً دلخواه و به صورت ترکیبی از تحریک دما و شار حرارتی در نظر گرفته شده است. با استخراج میدان دمایی در ضخامت استوانه و اعمال تاثیر آن در معادلات تعادل الاستیسیته، میدان تنش و جابجایی در استوانه بدست می‌آید. برای گسسته‌سازی معادلات تعادل الاستیسیته حاکم بر مسئله و شرایط مرزی از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQ) استفاده می‌شود. جهت اعتبارسنجی روش، نتایج حاصل از حل معادلات در حالت خطی با نتایج مستخرج از منابع علمی دیگر مقایسه شده است که دارای انطباق قابل قبول و همگرایی مناسب است. پس از آن تقریب‌های مرتبه صفر، مرتبه اول و مرتبه دوم دمایی استخراج و تاثیر آن بر تغییرات خواص مکانیکی ماده وابسته به دما و نیز توزیع تنش در راستای شعاعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش اختلاف دما مابین سطوح داخلی و خارجی استوانه و برای رسیدن به دقت مناسب برای استخراج توزیع دما، باید از ترم‌های بیشتر از سری اغتشاشی استفاده نمود.

کلمات کلیدی: تئوری اغتشاش؛ روش مربعات دیفرانسیلی (DQ)؛ استوانه FG؛ خواص وابسته به دما؛ تحلیل ترموالاستیک.

Nonlinear Thermo-Elastic Analysis of FG Cylinder with Temperature-Dependent Properties with Perturbation and Differential Quadrature Methods

Mahdi Dehghan¹, Behrouz Shahriari^{2,*}, Amin Mosaei³

¹Ph.D., Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

²Assist. Prof., Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

³Assoc. Prof., Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran

Abstract

In this article, thermo-elastic analysis of a thick hollow cylinder under internal pressure is investigated. The material properties are considered to be temperature-dependent and functionally graded in radial direction. This temperature dependency caused the heat conduction equations to be nonlinear. The perturbation theory is performed for solving nonlinear heat conduction equations of the cylinder. Arbitrary combined thermal boundary conditions containing temperature and temperature gradient are considered. As the temperature field is extracted, it can be used to solve decoupling thermal stress governing equations. These thermo-elastic equations and related boundary conditions are discretized in strong form using differential quadrature method. Numerical results extracted from the suggested semi-analytical approach in a linear regime are then compared to the existing results. It is depicted that the presented method benefits from the low computational and high convergence behavior. The stress distribution of the cylinder is computed by considering the approximation of the temperature in zeroth-order, one-order as well as second-order. In order to achieve proper accuracy, more terms of the perturbation approximation series should be considered for the higher temperature difference between the inner and outer surfaces of the cylinder.

Keywords: Perturbation theory; Differential quadrature (DQ) method; FG cylinder; Temperature-dependent material properties; Thermo-elastic analysis.

۱- مقدمه

در حیطه‌ی مهندسی مدرن، شرایط خاصی وجود دارند که مواد همگن ساده مانند فولاد نمی‌توانند تمام نیازمندی‌های فنی ایجاد شده به دلیل کاربردهای مداوم در شرایط مختلف دمایی را فراهم آورند. راه‌حلی جدید برای این مسائل، استفاده از کامپوزیت‌های پیشرفته با نام مواد مدرج تابعی^۱ (FGMs) است. این مواد معمولاً همسانگرد بوده و همیشه ناهمگن هستند. یعنی مشخصات مواد به طور مداوم در یک یا چند جهت در حال تغییر هستند تا اهداف معینی در فرایند طراحی به دست آید. در مسائل مهندسی در دنیای واقعی فرضیه‌ی کلاسیک استقلال خواص مواد از دما مشکل‌ساز است که اغلب در محاسبات مهندسی استفاده می‌شود. مخصوصاً زمانی که ساختار، تفاوت‌های دمایی بسیار زیادی را تجربه می‌کند. این وابستگی خواص به دما باعث غیرخطی شدن معادلات انتقال حرارتی حاکم بر مسأله خواهد شد. حل مسائل غیرخطی تاکنون مورد توجه محققان بسیاری بوده است [۱-۳].

یک ویژگی مهم از FGMها مقاومت در برابر دمای بالا و تنش‌های حرارتی القاء شده است؛ بنابراین تحلیل حرارتی و در نهایت، تحلیل ترموالاستیک ساختارهای برگرفته از FGMها اهمیت چشمگیری دارد. از موارد کاربرد این مواد هدفمند، می‌توان به موتورهای توربین گاز هوایی اشاره نمود. در موتورهای توربین گاز هوایی جهت کاهش وزن و افزایش عملکرد موتور، به جای طراحی روتور شامل چندین ردیف دیسک که وزن زیادی را به سیستم تحمیل می‌کنند، از یک استوانه دوار جهت نگهداری پره‌ها در موقعیت مورد نظر استفاده می‌شود. این استوانه درام نام دارد. درام تحت بار حرارتی و اختلاف فشار ناشی از دوران پره‌ها در محیط خارجی و بارهای ناشی از فشار هوای متراکم قرار دارد. ساخت درام از مواد FGM می‌تواند عملکرد بدون عیب موتور توربین گازی را در شرایط حرارتی و فشار محیطی تضمین کند [۴-۶].

مخازن تحت فشار راکتور از اجزاء اصلی یک نیروگاه هسته‌ای محسوب می‌شود. این مخازن در شرایط عملیاتی بسیار سخت از جمله دمای بالا و فشار بالا کار می‌کنند. از آنجاییکه غالب این مخازن به صورت استوانه‌ای ساخته می‌شود، روابط ترموالاستیک یک استوانه جدارضخیم تحت فشار داخلی بر آن حاکم است [۷]. این روابط در مقاله حاضر با استفاده از

روش نیمه-تحلیلی اغتشاشات و مربعات دیفرانسیلی برای یک استوانه جدار ضخیم تحلیل شده است.

لیو و همکاران [۸] در دو حالت تحریک دمایی متقارن و نامتقارن محوری، حل تحلیلی برای بررسی تنش‌های حرارتی در یک استوانه توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را ارائه دادند. تحلیل ترموالاستیک غیرخطی برای یک کره تراکم‌ناپذیر با خواص مدرج تابعی و وابسته به دما با استفاده از تئوری اغتشاش توسط موسائی و پناهی [۹] انجام شده است. یک روش عددی نوین مبتنی بر الگوریتم المان مرزی در شبه-سازی و مدلسازی غیرخطی تنش‌های حرارتی در یک کامپوزیت با خواص غیرهمسانگرد مدرج تابعی و تابع دما توسط فهمی [۱۰] معرفی شده است. خواص مدرج تابعی وابسته به دما توسط نجیبی و همکاران [۱۱] در تحلیل غیرخطی ترموالاستیک یک استوانه کوتاه در نظر گرفته شد. دهقان و همکاران [۱۲] با استفاده از ترکیب روش المان محدود و تبدیل انتگرال توانستند تحلیل ترموالاستیک استوانه جدارضخیم با شرایط مرزی دمایی نامتقارن محوری را انجام دهند. شاهزادگان و همکاران [۱۳] از سه روش کدنویسی المان محدود، نرم افزار انسیس (APDL) و روش تحلیلی در بررسی تنش‌های حرارتی در یک دیسک جدارضخیم ساخته شده از ماده FG بهره گرفتند.

با استفاده از تئوری اغتشاش، تحلیل غیرخطی حرارتی یک استوانه تراکم‌ناپذیر جدارضخیم نیمه‌بی‌نهایت با خواص وابسته به دما توسط موسائی [۱۴] انجام شده است. جباری و همکاران [۱۵] حل تحلیلی معادله حرارت هدایتی و معادلات لامه ناویر برای یک استوانه جدار ضخیم را انجام دادند. تحلیل غیرخطی تنش‌های حرارتی در یک کره ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از روش شبه-طیفی چپایشف توسط یلدیریم و همکاران [۱۶] انجام شد. عارفی [۱۷] رفتار غیرخطی یک استوانه پیزوالکتریک هدفمند تحت بارهای الکتریکی، حرارتی و مکانیکی را مورد بررسی قرار داد. تاثیر تغییرات محوری بارهای مکانیکی و حرارتی بر رفتار ترموالاستیک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند توسط عارفی و همکاران [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. روش المان محدود و توابع شکل لاگرانژ مرتبه بالا توسط شجاعی فرد و نجیبی [۱۹] برای تحلیل انتقال حرارت گذرا در یک استوانه جدار ضخیم با

^۱ Functionally Graded Materials

$$\lambda_t = \lambda_t(\vartheta, r) = (\lambda_{t0} - \lambda_{t1}\vartheta) \left(\frac{r}{R_0}\right)^{m_3} \quad (3)$$

که در این روابط ϑ معرف میدان دمایی و E ، α و λ به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی هستند. R_0 شعاع خارجی استوانه و E_1 ، E_0 ، E_2 ، α_1 ، α_0 ، λ_{t1} ، λ_{t0} ثوابت ماده می‌باشند. نسبت پواسون (ν) برای ماده FG ثابت در نظر گرفته شده است.

معمولاً λ_{t1} در مقایسه با λ_{t0} بسیار کوچک است؛ یعنی $\lambda_{t1} \ll \lambda_{t0}$. در این صورت می‌توان گفت که ضریب هدایت گرمایی با کمترین تغییرات دما دچار اغتشاش می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر میدان دما، با استفاده از قانون پایستگی انرژی، معادله متشکله فوریه برای هدایت حرارتی به صورت معادله (۴) به دست می‌آید.

$$\nabla \cdot (\lambda_t \nabla \vartheta) = 0 \quad (4)$$

نماد ∇ در رابطه بالا بیانگر گرادیان در مختصات قطبی می‌باشد. لذا برای معادله (۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda_t(\vartheta, r) \frac{d\vartheta}{dr} \right) = 0 \quad (5)$$

با به کارگیری قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق و جایگذاری (۳) در (۵)، معادله (۶) حاصل می‌شود.

$$\left[(1 + m_3)(\lambda_{t0} - \lambda_{t1}\vartheta) - r \lambda_{t1} \frac{d\vartheta}{dr} \right] \frac{d\vartheta}{dr} + r(\lambda_{t0} - \lambda_{t1}\vartheta) \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = 0 \quad (6)$$

معادله (۶) نشان می‌دهد که در نظر گرفتن وابستگی ضریب هدایت حرارتی به دما، باعث می‌شود تا معادله حاکم غیرخطی شود. شرایط مرزی متناظر با معادله (۶) به فرم عمومی روابط (۷) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{cases} H_{11}\vartheta(r=r_i) + H_{12}\vartheta'(r=r_i) = f_1 \\ H_{21}\vartheta(r=r_o) + H_{22}\vartheta'(r=r_o) = f_2 \end{cases} \quad (7)$$

خواص وابسته به دما مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن، مدل مادی Mori-Tanaka در تحلیل غیرخطی تنش‌های حرارتی برای استوانه توخالی با طول بلند بکار گرفته شد [۲۰]. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و تئوری برشی مرتبه سه توسط جعفری و سبحانی [۲۱] در تحلیل ترموالاستیک استوانه طویل با خواص وابسته به دما مورد بررسی قرار گرفت. حسینی و همکاران [۲۲] با استفاده از روش تحلیلی و توابع بسل، انتقال حرارت هدایتی گذرا در یک استوانه با خواص تابعی را بررسی کردند. آزادی و شریعت [۲۳] توانستند با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و المان محدود، انتقال حرارت گذرای استوانه FG با خواص تابع دما را مورد تحلیل قرار دهند. تحلیل ارتعاشات دامنه بالا حاصل از تحریک حرارتی در یک استوانه با خواص تابع دما و با استفاده از روش ریتز توسط اسماعیلی و همکاران [۲۴] انجام شد. تاکنون روش‌های تحلیلی مختلفی در بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای جدارضخیم مورد استفاده قرار گرفته است [۲۵-۲۸].

در این مقاله، مسئله‌ی هدایت حرارتی و ترموالاستیسیته متقارن محوری یک استوانه‌ی ساخته‌شده از مواد FG با خواص مواد وابسته به دما، به صورت نیمه تحلیلی مطالعه شده است. بدین منظور، روش پوینکر^۱ برای مسائل با اغتشاش عادی^۲ استفاده می‌شود.

۲- معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- حل معادله غیرخطی هدایت حرارتی

در این بخش، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله‌ی هدایت گرمایی در یک استوانه توخالی ساخته‌شده از FGM با خواص وابسته به دما به همراه شرایط مرزی دلخواه در نظر گرفته می‌شود. این معادله برای به‌دست آوردن میدان دمای موجود در استوانه توخالی استخراج می‌شود. در اینجا خواص ماده به صورت مدرج تابعی در راستای شعاعی و تابعی از میدان دمایی در نظر گرفته شده و به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$E = E(\vartheta, r) = (E_0 - E_1\vartheta - E_2\vartheta^2) \left(\frac{r}{R_0}\right)^{m_1} \quad (1)$$

$$\alpha = \alpha(\vartheta, r) = (\alpha_0 + \alpha_1\vartheta) \left(\frac{r}{R_0}\right)^{m_2} \quad (2)$$

² Regular Perturbation

¹ Poincare Method

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left[r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \right] \\ & + \varepsilon^1 \left[r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_1}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_1}{dr} \right. \\ & \left. - \hat{\vartheta}_0 \left(r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \right) \right. \\ & \quad \left. - r \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_2}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_2}{dr} \right. \\ & \left. - \hat{\vartheta}_0 \left(r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_1}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_1}{dr} \right) \right. \\ & \left. - \hat{\vartheta}_1 \left(r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2r \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} \frac{d \hat{\vartheta}_1}{dr} \right] \\ & + O(\varepsilon^3) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

از آنجاکه رابطه بالا باید برای مقادیر دلخواه از ε برقرار باشد، لذا هر یک از ضرایب درون براکت‌ها باید برابر صفر باشد. ابتدا حل معادله کاهش یافته^۱ (ضریب ε^0) انجام می‌شود.

$$r \frac{d^2 \hat{\vartheta}_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d \hat{\vartheta}_0}{dr} = 0 \quad (14)$$

معادله (۱۴) یک معادله کوشی-اویلر همگن است که دارای حل عمومی به فرم رابطه (۱۵) است:

$$\hat{\vartheta}_0(r) = C_1^0 + \frac{C_2^0}{r^{m_3}} \quad (15)$$

با ارضای شرایط مرزی رابطه (۷) برای تابع $\hat{\vartheta}_0$ ، ثوابت رابطه بالا به فرم زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} C_1^0 = & (R_i^{m_3+1} H_{21} f_1 R_o - R_i^{m_3+1} H_{22} f_1 m_3 \\ & - R_o^{m_3+1} H_{11} f_2 R_i \\ & + R_o^{m_3+1} H_{12} f_2 m_3) \\ & / (H_{21} H_{11} R_o R_i^{m_3+1} - H_{22} H_{11} m_3 R_i^{m_3+1} \\ & - H_{21} H_{11} R_i R_o^{m_3+1} \\ & + H_{12} H_{21} m_3 R_o^{m_3+1}) \end{aligned} \quad (16)$$

که H_{ij} و f_i مجموعه‌ای از ثوابت هستند. این معادله، حالات مختلفی از شرایط مرزی دمایی شامل دمای معین و ترکیب دما و شار حرارتی سطح داخل و یا خارج استوانه را نتیجه می‌دهد.

در ادامه با استفاده از تئوری اغتشاش به حل معادله حرارت هدایتی غیرخطی پرداخته می‌شود. با تقسیم دو طرف رابطه (۶) بر ثابت λ_0 و تعریف پارامتر کوچک $\varepsilon = \frac{\lambda_{t1}}{\lambda_{t0}} \ll 1$ معادله (۸) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \left[(1 + m_3)(1 - \varepsilon \vartheta) - \varepsilon r \frac{d \vartheta}{dr} \right] \frac{d \vartheta}{dr} \\ & + r(1 - \varepsilon \vartheta) \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

معادله (۸)، یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی است و روش اغتشاش (تکنیک پوینکر) برای حل آن به کار گرفته می‌شود. به این منظور، میدان دمای ϑ بر حسب ε بسط داده می‌شود:

$$\vartheta = \hat{\vartheta}_0 + \varepsilon \hat{\vartheta}_1 + \varepsilon^2 \hat{\vartheta}_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{\vartheta}_k \quad (9)$$

برش‌های مختلفی از این بسط شامل مراتب متنوعی از پارامتر ε را می‌توان برای تقریب میدان دمایی در نظر گرفت.

$$\vartheta_0 = \hat{\vartheta}_0 \quad (10)$$

$$\vartheta_1 = \hat{\vartheta}_0 + \varepsilon \hat{\vartheta}_1 \quad (11)$$

$$\vartheta_2 = \hat{\vartheta}_0 + \varepsilon \hat{\vartheta}_1 + \varepsilon^2 \hat{\vartheta}_2 \quad (12)$$

با جایگذاری بسط رابطه (۹) در معادله (۸) و مرتب‌سازی روابط برای مراتب مختلف پارامتر ε خواهیم داشت:

^۱ Reduced equation

$$\begin{aligned}
 C_2^1 &= -\frac{1}{2}(r_i^{m_3}(C_2^0)^2 r_o^{m_3}(r_o^{(2m_3+1)} r_i H_{11} H_{21} \\
 &- 2r_o^{(2m_3+1)} H_{12} H_{21} m_3 \\
 &- r_o r_i^{(2m_3+1)} H_{11} H_{21} \\
 &+ 2m_3 r_i^{(2m_3+1)} H_{11} H_{22})) \\
 &/ (r_i^{(2m_3)} r_o^{(2m_3)} (r_o^{m_3+1} r_i H_{21} H_{11} \\
 &- r_o^{m_3+1} H_{12} H_{21} m - H_{21} H_{11} r_o r_i^{m_3+1} \\
 &+ H_{22} H_{11} m_3 r_i^{m_3+1}))
 \end{aligned}$$

نهایتاً با برابر صفر قرار دادن ضریب پارامتر ε^2 در رابطه (۱۳)، معادله (۲۰) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 r \frac{d^2 \vartheta_2}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_2}{dr} \\
 = \vartheta_0 \left(r \frac{d^2 \vartheta_1}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_1}{dr} \right) \\
 + \vartheta_1 \left(r \frac{d^2 \vartheta_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_0}{dr} \right) \\
 + 2r \frac{d\vartheta_0}{dr} \frac{d\vartheta_1}{dr}
 \end{aligned} \quad (20)$$

این معادله با در نظر گرفتن معادلات (۱۴) و (۱۷) به شکل معادله (۲۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}
 r \frac{d^2 \vartheta_2}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_2}{dr} \\
 = r \vartheta_0 \frac{d\vartheta_0}{dr} \frac{d\vartheta_0}{dr} + 2r \frac{d\vartheta_0}{dr} \frac{d\vartheta_1}{dr} \\
 = r \frac{d\vartheta_0}{dr} \left(\vartheta_0 \frac{d\vartheta_0}{dr} + 2 \frac{d\vartheta_1}{dr} \right)
 \end{aligned} \quad (21)$$

این معادله نیز یک معادله کوشی-اویلر ناهمگن است که جواب عمومی آن از دو قسمت جواب همگن و جواب خصوصی تشکیل می‌شود.

$$\vartheta_2(r) = C_1^2 + \frac{C_2^2}{r^{m_3}} + \frac{\gamma}{2r^{2m_3}} + \frac{(C_2^0)^3}{2r^{3m_3}} \quad (22)$$

که

$$\gamma = C_2^0 (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1) \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 C_2^0 &= (R_i^{m_3+1} R_o^{m_3+1} (H_{11} f_2 - H_{21} f_1)) \\
 &/ (H_{21} H_{11} R_i^{m_3+1} R_o - H_{22} H_{11} m_3 R_i^{m_3+1} \\
 &- H_{21} H_{11} R_i R_o^{m_3+1} + H_{12} H_{21} m_3 R_o^{m_3+1})
 \end{aligned}$$

اکنون ضریب عبارت ε^1 در رابطه (۱۳) را برابر صفر قرار داده تا رابطه زیر حاصل شود:

$$\begin{aligned}
 r \frac{d^2 \vartheta_1}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_1}{dr} = \\
 \vartheta_0 \left(r \frac{d^2 \vartheta_0}{dr^2} + (1 + m_3) \frac{d\vartheta_0}{dr} \right) + r \frac{d\vartheta_0}{dr} \frac{d\vartheta_0}{dr}
 \end{aligned} \quad (17)$$

ترم اول از سمت راست معادله (۱۷) با استناد به رابطه (۱۴) برابر صفر است. معادله باقی‌مانده یک معادله کوشی-اویلر ناهمگن است که جواب عمومی آن از دو قسمت جواب همگن و جواب خصوصی تشکیل می‌شود.

$$\vartheta_1(r) = C_1^1 + \frac{C_2^1}{r^{m_3}} + \frac{(C_2^0)^2}{2r^{2m_3}} \quad (18)$$

ثوابت C_1^1 و C_2^1 با ارضای فرم همگن شرایط مرزی رابطه (۷) برای تابع ϑ_1 ، به فرم رابطه (۱۹) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}
 C_1^1 &= -\frac{1}{2}((C_2^0)^2 (r_o^{m_3+1} r_i^{(2m_3+1)} H_{11} H_{21} \\
 &- 2r_o^{m_3} r_i^{(2m_3+1)} H_{11} H_{22} m_3 \\
 &- r_o^{m_3+1} r_i^{(2m_3)} H_{12} H_{21} m_3 \\
 &+ 2r_o^{m_3} r_i^{(2m_3)} H_{12} H_{22} m_3^2 \\
 &- r_o^{(2m_3+1)} r_i^{m_3+1} H_{11} H_{21} \\
 &+ r_o^{(2m_3)} H_{22} H_{11} m_3 r_i^{m_3+1} \\
 &+ 2r_o^{(2m_3+1)} r_i^{m_3} H_{12} H_{21} m_3 \\
 &- 2r_o^{(2m_3)} r_i^{m_3} H_{12} H_{22} m_3^2)) \\
 &/ (r_o^{(2m_3)} r_i^{(2m_3)} (r_o^{(m_1+1)} H_{11} H_{21} r_i \\
 &- r_o^{m_3+1} H_{12} H_{21} m_3 \\
 &- H_{21} H_{11} r_o r_i^{m_3+1} \\
 &+ m_3 r_i^{(m_3+1)} H_{22} H_{11}))
 \end{aligned} \quad (19)$$

لازم به توضیح است که حل معادله حرارتی غیر خطی به فرم بالا برای $m_3 \neq 0$ معتبر است. حل این معادله برای مواد همگن با خواص تابع دما که در آن $m_3 = 0$ است، نیازمند ملاحظات ویژه است. در این حالت، برای معادله مرتبه صفر (کاهش یافته) می توان نوشت:

$$\vartheta_0(r) = C_1^0 + C_2^0 \ln r, \quad (25)$$

و برای ثوابت C_1^0 و C_2^0 نتیجه می شود:

$$C_1^0 = \frac{M_o f_1 - M_i f_2}{H_{11} M_o - H_{21} M_i}, \quad C_2^0 = \frac{H_{11} f_2 - H_{21} f_1}{H_{11} M_o - H_{21} M_i} \quad (26)$$

که

$$M_i = H_{11} \ln r_i + \frac{H_{12}}{r_i}, \quad M_o = H_{21} \ln r_o + \frac{H_{22}}{r_o} \quad (27)$$

همچنین حل معادله مرتبه اول را می توان به فرم رابطه (28) بیان نمود.

$$\vartheta_1(r) = C_1^1 + C_2^1 \ln r + \frac{(C_2^0)^2}{2} \ln^2 r \quad (28)$$

با اعمال شرایط مرزی، ثوابت C_1^1 و C_2^1 به صورت روابط (29) و (30) استخراج می شود.

$$C_1^1 = \frac{M_o S_i - M_i S_o}{H_{11} M_o - H_{21} M_i}, \quad C_2^1 = \frac{H_{11} S_o - H_{21} S_i}{H_{11} M_o - H_{21} M_i} \quad (29)$$

که

$$S_i = -(C_2^0)^2 \left(\frac{H_{11}}{2} \ln^2 r_i + H_{12} \frac{\ln r_i}{r_i} \right), \quad S_o = -(C_2^0)^2 \left(\frac{H_{21}}{2} \ln^2 r_o + H_{22} \frac{\ln r_o}{r_o} \right) \quad (30)$$

نهایتاً حل معادله مرتبه دوم به صورت رابطه (31) است.

$$\vartheta_2(r) = C_1^2 + C_2^2 \ln r + \frac{C_2^0 (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1)}{2} \ln^2 r \quad (31)$$

ثوابت C_1^2 و C_2^2 با ارضای فرم همگن شرایط مرزی رابطه (7) برای تابع ϑ_2 ، به فرم روابط (24) قابل محاسبه اند.

$$C_1^2 = -((C_2^0)^2 (r_o^{3m_3} r_i^{5m_3} H_{11} H_{21} C_2^0 r_i r_o - 3r_o^{3m_3} r_i^{5m_3} H_{11} H_{22} C_2^0 m_3 r_i - r_o^{3m_3} r_i^{5m_3} H_{12} H_{21} C_2^0 m_3 r_o + 3r_o^{3m_3} r_i^{5m_3} H_{12} H_{22} C_2^0 m_3^2 + 3r_o^{4m_3} r_i^{5m_3} H_{11} H_{21} C_1^0 r_i r_o - 6r_o^{4m_3} r_i^{5m_3} H_{11} H_{22} C_1^0 m_3 r_i - 3r_o^{4m_3} r_i^{5m_3} H_{12} H_{21} C_1^0 m_3 r_o + 6r_o^{4m_3} r_i^{5m_3} H_{12} H_{22} C_1^0 m_3^2 - r_o^{5m_3} r_i^{3m_3} H_{11} H_{21} C_2^0 r_i r_o + r_o^{5m_3} r_i^{3m_3} H_{11} H_{22} C_2^0 m_3 r_i + 3r_o^{5m_3} r_i^{3m_3} H_{12} H_{21} C_2^0 m_3 r_o - 3r_o^{5m_3} r_i^{3m_3} H_{12} H_{22} C_2^0 m_3^2 - 3r_o^{5m_3} r_i^{4m_3} H_{11} H_{21} C_1^0 r_i r_o + 3r_o^{5m_3} r_i^{4m_3} H_{11} H_{22} C_1^0 m_3 r_i + 6r_o^{5m_3} r_i^{4m_3} H_{12} H_{21} C_1^0 m_3 r_o - 6r_o^{5m_3} r_i^{4m_3} H_{12} H_{22} C_1^0 m_3^2)) / (6r_o^{5m_3} r_i^{5m_3} (r_o^{m_3} H_{11} H_{21} r_i r_o - r_o^{m_3} H_{12} H_{21} m_3 r - H_{21} r_o r_i^{m_3} H_{11} r_i + H_{22} m_3 r_i^{m_3} H_{11} r_i)) \quad (24)$$

$$C_2^2 = -(r_i^{m_3} r_o^{m_3} (C_2^0)^2 (r_o^{5m_3} r_i^{2m_3} H_{11} H_{21} C_2^0 r_i r_o - 3r_o^{5m_3} r_i^{2m_3} H_{12} H_{21} C_2^0 m_3 r_o + 3r_o^{5m_3} r_i^{3m_3} H_{11} H_{21} C_1^0 r_i r_o - 6r_o^{5m_3} r_i^{2m_3} H_{12} H_{21} C_1^0 m_3 r_o - r_o^{2m_3} H_{21} C_2^0 r_o r_i^{5m_3} H_{11} r_i + 3r_o^{2m_3} H_{22} C_2^0 m_3 r_i^{5m_3} H_{11} r_i - 3r_o^{3m_3} H_{21} C_1^0 r_o r_i^{5m_3} H_{11} r_i + 6r_o^{3m_3} H_{22} C_1^0 m_3 r_i^{5m_3} H_{11} r_i)) / (6r_o^{5m_3} r_i^{5m_3} (r_o^{m_3} H_{11} H_{21} r_i r_o - r_o^{m_3} H_{12} H_{21} m_3 r_o - H_{21} r_o r_i^{m_3} H_{11} r_i + H_{22} m_3 r_i^{m_3} H_{11} r_i))$$

که σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ به ترتیب تنش‌های شعاعی و محیطی هستند. در حالتی که بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی متقارن محوری هستند، تنها مولفه غیر صفر از میدان جابجایی مولفه شعاعی آن یعنی u است. در این شرایط روابط سینماتیکی کرنش-جابجایی به صورت رابطه (۳۵) است.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (35)$$

روابط متشکله تنش-کرنش با فرض حالت کرنش-صفحه-ای برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu)\alpha\vartheta(r) \\ \sigma_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu)\alpha\vartheta(r) \end{aligned} \quad (36)$$

که در این روابط

$$\lambda = \frac{\nu E(\vartheta, r)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E(\vartheta, r)}{2(1 + \nu)} \quad (37)$$

با جایگذاری روابط (۱)، (۲) و (۲۵) تا (۲۷) در معادله (۲۴)، معادله لامه-ناویر ترموالاستیک حاکم بر استوانه جدارضخیم با خواص تابعی و وابسته به دما به صورت معادله (۳۸) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{d\lambda}{dr} + 2 \frac{d\mu}{dr} + \frac{\lambda}{r} + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{du}{dr} \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r^2} \lambda - \frac{2\mu}{r^2} \right) u = \left[\left(3 \frac{d\lambda}{dr} + 2 \frac{d\mu}{dr} \right) \alpha \right. \\ \left. + (3\lambda + 2\mu) \frac{d\alpha}{dr} \right] \vartheta + (3\lambda + 2\mu) \frac{d\vartheta}{dr} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\beta) \\ \frac{d\mu}{dr} &= \frac{1}{2(1 + \nu)} (\beta) \\ \frac{d\alpha}{dr} &= \alpha_1 \frac{d\vartheta}{dr} \left(\frac{r}{R} \right)^{m_2} \\ &\quad + \frac{m_2}{R_0} (\alpha_0 + \alpha_1 \vartheta) \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_2-1} \end{aligned} \quad (39)$$

$$+ \frac{(C_2^0)^3}{2} \ln^3 r$$

اکنون با تاثیر شرایط مرزی، ثابت به صورت رابطه (۳۲) حاصل می‌گردد.

$$C_1^2 = \frac{M_o Z_i - M_i Z_o}{H_{11} M_o - H_{21} M_i}, \quad C_2^2 = \frac{H_{11} Z_o - H_{21} Z_i}{H_{11} M_o - H_{21} M_i} \quad (32)$$

که

$$\begin{aligned} Z_i &= - \frac{H_{12} C_2^0 (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1)}{r_i} \ln r_i \\ &\quad - \left(\frac{H_{11} C_2^0}{2} (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3H_{12} (C_2^0)^3}{2r_i} \right) \ln^2 r_i \\ &\quad - \frac{H_{11} (C_2^0)^3}{2} \ln^3 r_i, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} Z_o &= - \frac{H_{22} C_2^0 (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1)}{r_o} \ln r_o \\ &\quad - \left(\frac{H_{21} C_2^0}{2} (C_1^0 C_2^0 + 2C_2^1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3H_{22} (C_2^0)^3}{2r_o} \right) \ln^2 r_o \\ &\quad - \frac{H_{22} (C_2^0)^3}{2} \ln^3 r_o \end{aligned}$$

۲-۲- تحلیل ترموالاستیک با روش DQ

تنش‌های حرارتی به دلیل میدان دمای به دست آمده و با فرض تئوری کرنش-صفحه‌ای در اینجا در نظر گرفته می‌شوند. مدول الاستیک E و ضریب انبساط حرارتی α مطابق با رابطه (۲) و (۳) تابعی از دما و متغیر مکانی در جهت شعاعی r هستند. درحالی‌که ضریب پواسون ν ثابت در نظر گرفته می‌شود. معادله تعادل حاکم بر تنش‌های حرارتی متقارن محوری در یک استوانه‌ی توخالی به صورت معادله (۲۴) است.

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (34)$$

که ضرایب $A_{ij}^{(m)}$ وزن در نقطه i ام از دامنه است. بر اساس روش DQ ضرایب وزن اشاره شده، با استفاده از روابط بازگشتی (۴۲) و (۴۳) قابل استخراج است.

$$A_{ij}^{(m)} = m \left(A_{ii}^{(m-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(m-1)}}{r_i - r_j} \right) \quad (42)$$

$$\text{For } i \neq j, m = 2, 3, \dots, N_r - 1, i, j = 1, 2, \dots, N_r, \quad (43)$$

$$A_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_r} A_{ij}^{(m)} \quad \text{For } i = 2, 3, \dots, N_r$$

که رابطه (۴۴) برای $A_{ij}^{(1)}$ تعریف می‌شود:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(r_i)}{(r_i - r_j)M^{(1)}(r_j)} \quad \text{For } i \neq j, \quad (44)$$

که $M^{(1)}$ با رابطه (۴۵) نشان داده می‌شود:

$$M^{(1)}(r_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_r} (r_i - r_j) \quad \text{For } i = 1, 2, \dots, N_r. \quad (45)$$

۳- بحث و بررسی نتایج

در این بخش برخی از نتایج منتخب به دست آمده از حل نیمه‌تحلیلی پیشنهادی ارائه شده است. نتایج ارائه شده در این بخش با استفاده از ثوابت ماده زیر به دست آمده است.

$$E_0 = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}, \quad E_1 = 27.5 \text{ MPa/}^\circ\text{C},$$

$$E_2 = 0.141 \text{ MPa/}^\circ\text{C}^2,$$

$$\alpha_0 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_1 = 1 \times 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}, \quad (46)$$

$$\lambda_{t0} = 50.16 \text{ W/m}^\circ\text{C}, \quad \lambda_{t1} = 0.0293 \text{ W/m}^\circ\text{C}^2$$

این ثوابت نزدیک به واقعیت و به منظور نمایش بهتر نتایج و بررسی عملکرد روش نیمه تحلیلی انتخاب می‌شوند. حال آن که هر مجموعه ثوابت دیگری نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. جهت بررسی اعتبار روش نیمه‌تحلیلی معرفی شده، ابتدا نتایج حاصله برای شرایط مرزی زیر با نتایج حاصل از حل تحلیلی [۱۵] مقایسه و در شکل ۲ و شکل ۳ ارائه شده است.

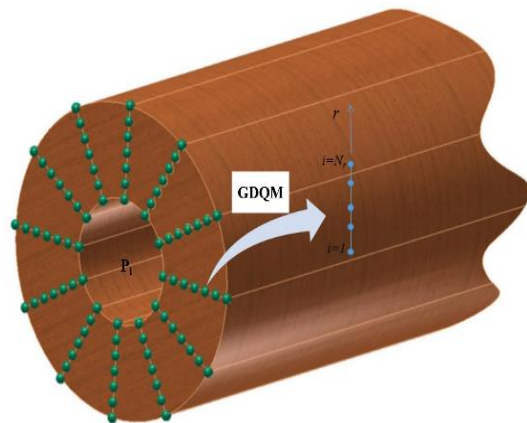
$$\beta = \left[\left(-E_1 \frac{d\vartheta}{dr} - 2E_2\vartheta \frac{d\vartheta}{dr} \right) \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_1} + \frac{m_1}{R_0} (E_0 - E_1\vartheta - E_2\vartheta^2) \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_1-1} \right] \quad (40)$$

در این مقاله از روش عددی مربعات دیفرانسیلی^۱ (DQ) به منظور گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ترموالاستیک استوانه استفاده می‌شود. دو مزیت عمده روش DQ در مقایسه با روش‌های عددی دیگر عبارتند از این‌که اولاً این روش توابع را در فرم قوی معادلات و با استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا تقریب می‌زند و ثانیاً، این روش مستقیماً توابع را در یک نقطه و با استفاده از مقادیر تابع در نقاط دیگر از دامنه تقریب می‌زند. در این روش مشتقات فضایی تابع با استفاده از سری‌هایی شامل ضرایب وزن و مقادیر تابع در نقاط گره‌ای از دامنه تقریب زده می‌شود. بر اساس این روش مشتق m ام تابع $u(r)$ را می‌توان به صورت رابطه (۴۱) تقریب زد.

$$\frac{\partial^m u(r_i)}{\partial r^m} = u_r^m(r_i) = \sum_{j=1}^{N_r} A_{ij}^{(m)} u(r_j) \quad (41)$$

For $i, j = 1, 2, \dots, N_r$ and $m = 1, 2, \dots, N_r - 1$

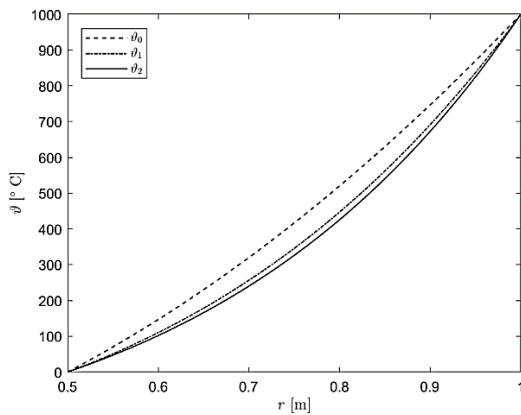
که N_r تعداد نقاط گره‌ای در جهت متغیر مکانی r است (شکل ۱).



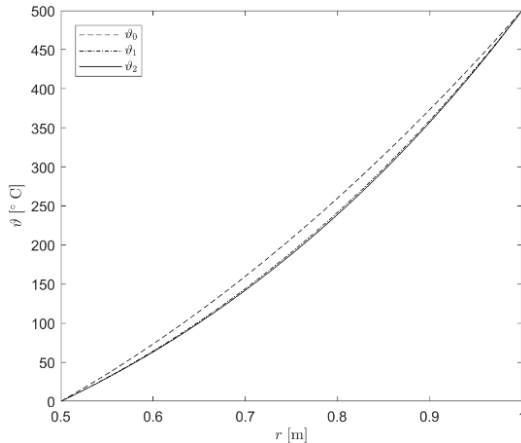
شکل ۱- شماتیک گسسته‌سازی دامنه مسئله

^۱ Differential Quadrature

به منظور بررسی تاثیر شرایط مرزی دمایی بر نحوه همگرایی روش نیمه تحلیلی حاضر، توزیع دما در ضخامت استوانه و برای $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ ، $\vartheta_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ در شکل ۵ نشان داده شده است. تقریب دمایی ϑ_1 و ϑ_2 به طور قابل ملاحظه‌ای منطبق بر یکدیگر است. این تفاوت در نحوه همگرایی نشان می‌دهد که برای تقریب میدان دمایی در شرایطی که اختلاف دمای بالای سطوح داخلی و خارجی وجود دارد، باید از ترم‌های مراتب بالاتر در روش اغتشاش استفاده نمود.



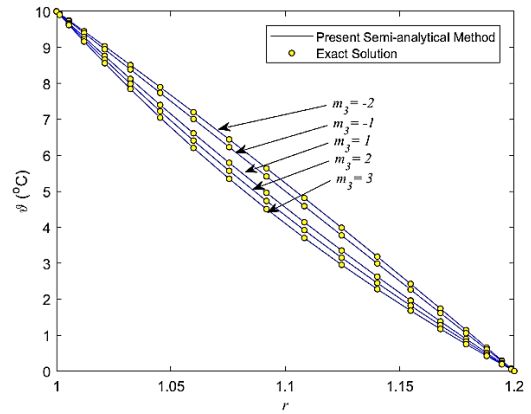
شکل ۴- تقریب‌های مختلف از توزیع دمای شعاعی استوانه برای $\vartheta_0 = 1000\text{ }^\circ\text{C}$ ، $\vartheta_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ ($m_3 = -2$)



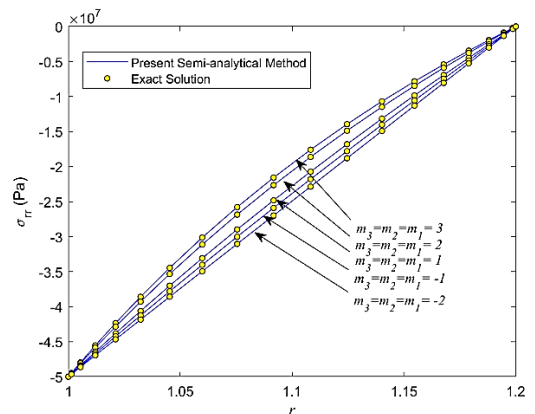
شکل ۵- تقریب‌های مختلف از توزیع دمای شعاعی استوانه برای $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ ، $\vartheta_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ ($m_3 = -2$).

با در نظر گرفتن تقریب مرتبه دوم از بسط اغتشاشی میدان دمایی و در مقادیر مختلف از توان ماده FG تغییرات دما در شکل ۶ نشان داده شده است. همان طور که از شکل بر می‌آید

$$\begin{aligned} \vartheta(r = R_i) &= 10\text{ }^\circ\text{C}, \quad \vartheta(r = R_o) = 0 \\ \sigma_{rr}(r = R_i) &= -50\text{ MPa}, \quad \sigma_{rr}(r = R_o) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$



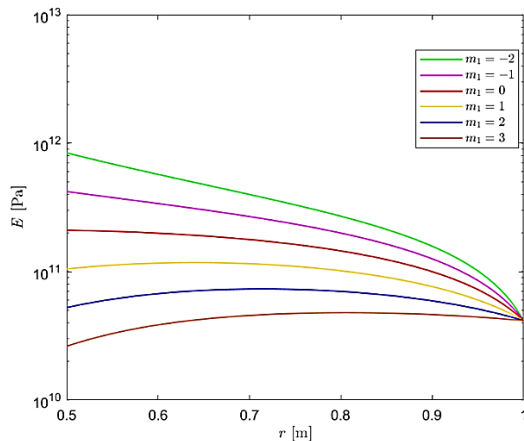
شکل ۶- توزیع دما در راستای شعاعی



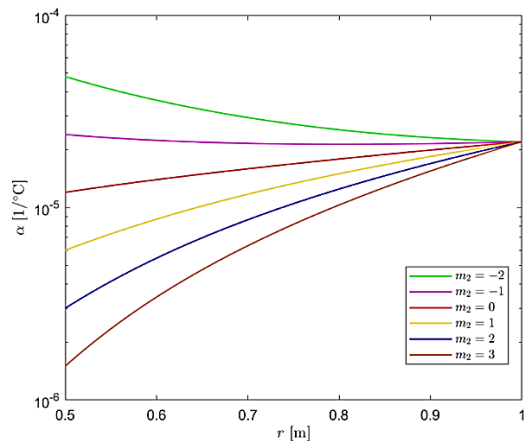
شکل ۷- توزیع تنش شعاعی در ضخامت استوانه

در ادامه و با در نظر گرفتن شرایط مرزی دمایی و مکانیکی زیر برای استوانه، نتایج توزیع دما در تقریب‌های مختلف بر حسب پارامتر ε متناسب با رابطه (۱۰) تا (۱۲) در شکل ۴ ارایه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش مرتبه پارامتر اغتشاش در تقریب میدان دمایی از مرتبه صفر (حل معادله کاهش یافته) تا مراتب بالاتر، همگرایی در پاسخ نهایی اتفاق می‌افتد.

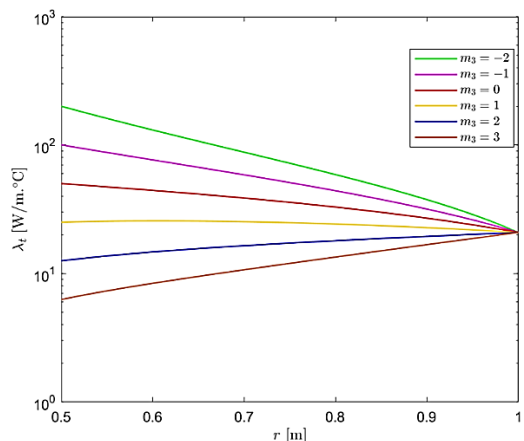
$$\begin{aligned} \vartheta(r = R_i) &= 0, \quad \vartheta(r = R_o) = 1000\text{ }^\circ\text{C} \\ \sigma_{rr}(r = R_i) &= 0, \quad \sigma_{rr}(r = R_o) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$



شکل ۷- تغییرات مدول یانگ در ضخامت استوانه و با تقریب مرتبه دوم اغتشاشی

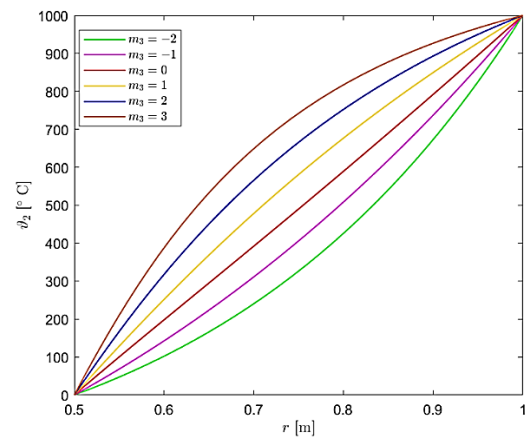


شکل ۸- تغییرات ضریب انبساط حرارتی در ضخامت استوانه و با تقریب مرتبه دوم اغتشاشی



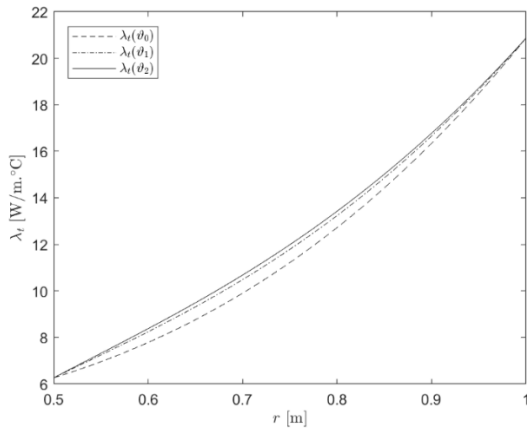
شکل ۹- تغییرات ضریب هدایت حرارتی در ضخامت استوانه و با تقریب مرتبه دوم اغتشاشی

در پروفیل دما با توان مثبت ماده FG شدت تغییرات دما یا به عبارتی گرادیان دما در سطح داخلی استوانه نسبت به سطح خارجی استوانه بیشتر است. این تغییرات در توان منفی ماده FG به طور معکوس برای سطوح داخلی و خارجی استوانه قابل مشاهده است. این رفتار را مثلاً برای m_3 های مثبت این گونه می توان توصیف کرد. ضریب هدایت حرارتی در سطح داخلی استوانه دارای حداقل مقدار است و در راستای ضخامت به سمت سطح خارجی، افزایش می یابد. از طرفی در این مسأله یک بعدی شار حرارتی ثابت است. بنابراین با افزایش λ_E در جهت شعاعی، برای ثابت ماندن شار حرارتی، باید گرادیان دما $\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)$ کاهش یابد که این تغییرات در شکل ۶ مشهود است.



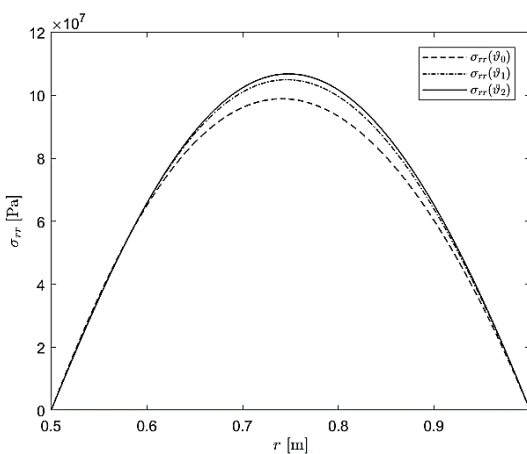
شکل ۶- تغییرات میدان دما در ضخامت استوانه و با تقریب مرتبه دوم اغتشاشی

با استخراج توزیع دما در ضخامت استوانه، اکنون می توان به بررسی تغییرات خواص مکانیکی ماده با تغییرات دما پرداخت. برای این منظور، توزیع مدول یانگ (E) در مقادیر مختلف توان ماده FG و در راستای ضخامت استوانه در شکل ۷ ارائه شده است. در اینجا با افزایش توان ماده مدرج تابعی کاهش در مقدار ضریب الاستیک ماده مشاهده می شود. به طور مشابه برای ضریب انبساط حرارتی (α) و ضریب هدایت حرارتی (λ_E) تغییرات بر حسب توان ماده مدرج تابعی در شکل ۸ و شکل ۹ قابل مشاهده است.

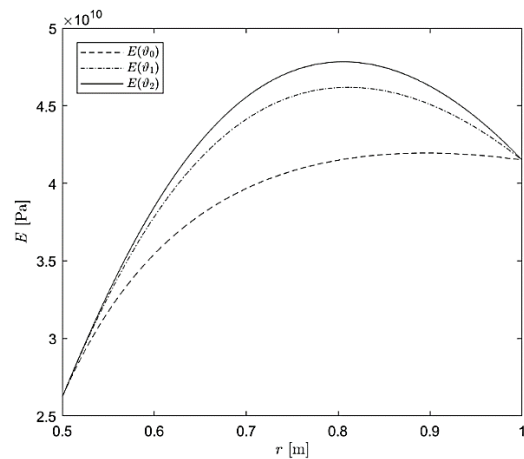


شکل ۱۲- پروفیل تغییرات ضریب هدایت حرارتی در توزیع دمایی با تقریب‌های مختلف ($m_3 = 3$)

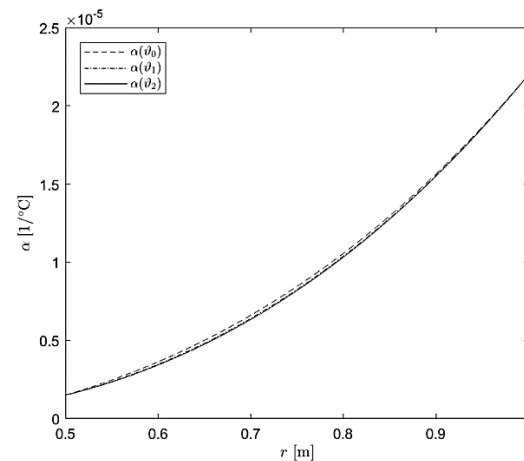
میدان تنش شعاعی استوانه با در نظر گرفتن تقریب‌های مختلف از تابع دمایی و با در نظر گرفتن مقادیر متنوعی از توان‌های ماده FG ($m_3 = m_2 = m_1 = m$) استخراج شده است. نتایج مربوط به توزیع تنش شعاعی در شکل ۱۳ تا شکل ۱۸ نشان داده شده است. از این تصاویر مشخص است که حداکثر تنش در $m = -2$ نزدیک به شعاع داخلی استوانه اتفاق افتاده است و با افزایش توان ماده هدفمند، این تنش حداکثر به سطح خارجی استوانه نزدیک می‌شود. همچنین برای ماده با $m > 0$ حداکثر تنش شعاعی مربوط به توزیع دما با تقریب مرتبه دوم است. حال آنکه در حالت $m < 0$ حداکثر میزان تنش شعاعی برای توزیع دمای خطی اتفاق می‌افتد. در نمودارهای تنش با $m < 0$ نقاط هم‌مرس تنش وجود دارد که در آن نقاط، مقادیر تنش برای تقریب‌های مختلف دمایی یکسان است.



در ادامه و در شکل ۱۰ تاثیر تقریب‌های مختلف اغتشاشی دما از مرتبه صفر (حل خطی)، مرتبه یک و تقریب مرتبه دوم بر ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی انجام شده و نتایج آن به ترتیب در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نشان داده شده است. نتایج حاکی از آن است که کمترین میزان تاثیر مربوط به ضریب انبساط حرارتی است.

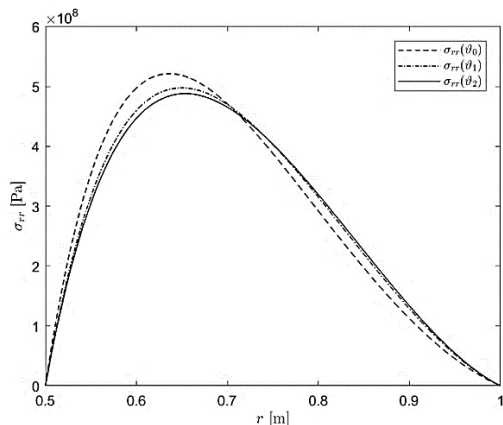


شکل ۱۰- پروفیل تغییرات مدول یانگ در توزیع دمایی با تقریب مرتبه صفر، یک و دو ($m_1 = 3$)

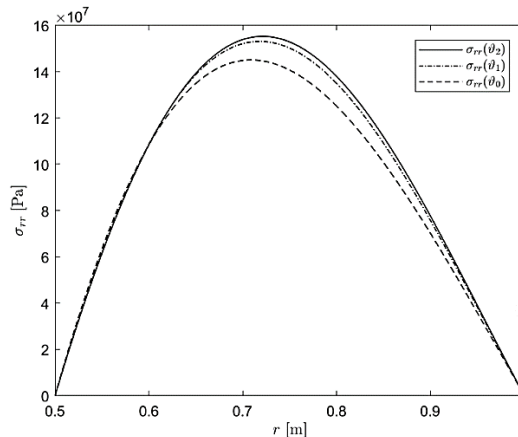


شکل ۱۱- پروفیل تغییرات ضریب انبساط حرارتی در توزیع دمایی با تقریب‌های مختلف ($m_2 = 3$)

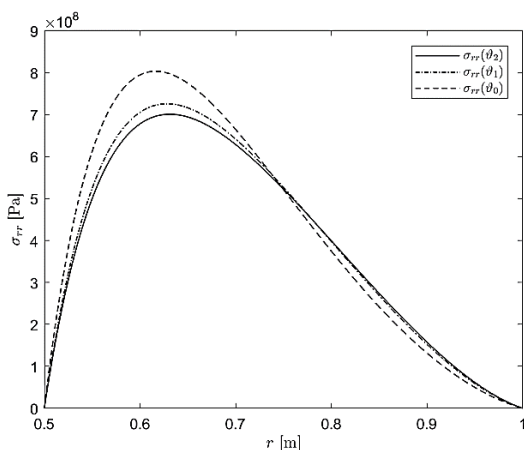
شکل ۱۶- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = 0$)



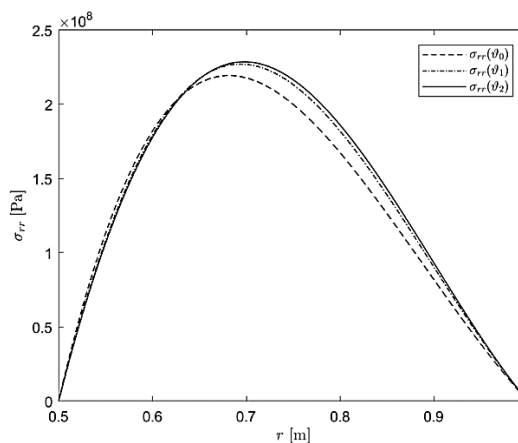
شکل ۱۳- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = 3$)



شکل ۱۷- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = -1$)

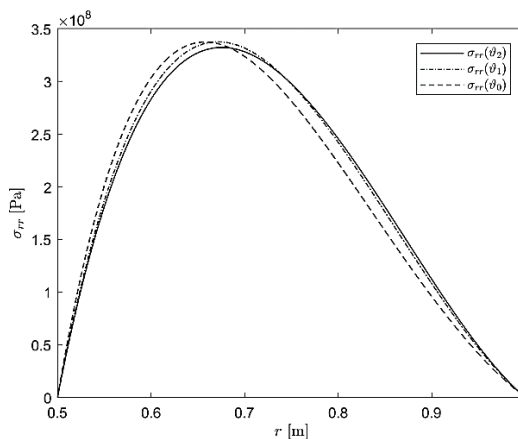


شکل ۱۴- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = 2$)



شکل ۱۸- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = -2$)

شکل ۱۵- توزیع تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف دمایی
($m = 1$)



۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق بستری مناسب بر پایه تئوری اغتشاش و روش عددی مربعات دیفرانسیلی برای تحلیل غیر خطی ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی فراهم گردیده است. خواص ماده به صورت مدرج تابعی در راستای شعاعی و تابع دما در نظر گرفته شده است. تابعیت خواص ماده به دما باعث شده تا معادلات انتقال حرارت هدایتی در استوانه، غیرخطی باشد. برای حل این معادلات از تئوری اغتشاش و روش‌های مجانبی استفاده شده است. تقریب میدان دمایی در این حالت بر حسب مراتب مختلفی از پارامتر اغتشاش انجام

- integrated with smart layers resting on Winkler-Pasternak foundation. *Smart Struct. Syst.* 16 (1): 195-211.
- [2] Arefi M, Allam M (2015) Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation. *Smart Struct. Syst.* 16 (1): 81-100.
- [3] Arefi M, Rahimi G (2012) Studying the nonlinear behavior of the functionally graded annular plates with piezoelectric layers as a sensor and actuator under normal pressure. *Smart Struct. Syst.* 9 (2): 127-143.
- [4] Shahriari B, Sadeghinezhad M, Yousefi S (2019) Thermoelastic analysis of compressor spool in turbojet engine and redesign it using functionally graded materials with optimal coefficients. *Mech. Adv. Compos. Struct.* 6 (2): 167-179.
- [5] Shahriari B, Safari M (2020) Stress analysis of FGM rotating disk subjected to mechanical and thermal loads in aircraft gas turbine engine. *Mech. Adv. Compos. Struct.* 7 (1): 1-13.
- [6] یوسفی ش، شهریار ب، صادقی نژاد م (۲۰۲۰) تحلیل الاستیک درام اسپول دوار FGM کمپرسور محوری در موتور توربین گاز هوایی. دانش و فناوری هوافضا ۸ (۲): ۵۵-۶۶.
- [7] Zhou L, Dai J, Li Y, Dai X, Xie C, Li L, Chen L (2022) Research Progress of Steels for Nuclear Reactor Pressure Vessels. *Materials* 15 (24): 8761.
- [8] Liew K, Kitipornchai S, Zhang X, Lim C (2003) Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders. *Int. J. Solids Struct.* 40 (10): 2355-2380.
- [9] Moosaie A, Panahi-Kalus H (2017) Thermal stresses in an incompressible FGM spherical shell with temperature-dependent material properties. *Thin-Walled Struct.* 120: 215-224.
- [10] Fahmy M A (2021) A new boundary element algorithm for modeling and simulation of nonlinear thermal stresses in micropolar FGA composites with temperature-dependent properties. *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.* 8 (1): 6.
- [11] Najibi A, Alizadeh P, Ghazifard P (2021) Transient thermal stress analysis for a short thick hollow FGM cylinder with nonlinear temperature-dependent material properties. *J. Therm. Anal. Calorim.* 146 (5): 1971-1982.
- [12] Dehghan M, Moosaie A, Zamani Nejad M (2022) An Approximate Thermo-Mechanical Solution of a Functionally Graded Cylinder Using Hybrid Integral Transform and Finite Element Method. *J. Solid Mech.* 14 (1): 17-36.
- [13] Shahzamani M, Shahrjerdi A, Sahari B, Wu P (2022) Steady-State Thermal Analysis of

شده است. از میدان دمایی استخراج شده در حل معادلات ترموالاستیسیته استفاده شده و معادلات مذکور و شرایط مرزی مربوطه با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی با موفقیت گسسته سازی شده است. پس از آن، نتایج توزیع میدان دمایی و تنش شعاعی در تقریب‌های مختلف و مقادیر متنوع از توان ماده FG مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین بررسی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش اختلاف دما مابین سطوح داخلی و خارجی استوانه و برای رسیدن به دقت مناسب برای استخراج توزیع دما، باید از ترم‌های بیشتر از سری اغتشاشی استفاده نمود. در بحث وابستگی خواص ماده به دما، مدول یانگ و ضریب انبساط حرارتی به ترتیب بیشترین و کمترین تاثیر را از توزیع غیرخطی دما در استوانه نشان می‌دهند. در بررسی تاثیر توان ماده هدفمند بر تغییرات تنش در ضخامت استوانه، در مقادیر منفی توان ماده هدفمند تنش ناشی از تقریب خطی میدان دمایی به عنوان تقریب حد بالای تنش خواهد بود. حال آن‌که این تقریب حد بالا در توان‌های مثبت ماده هدفمند مربوط به تنش ناشی از حل غیرخطی (تقریب مرتبه دو) میدان دمایی می‌باشد.

۵- فهرست علائم

ضرایب وزن روش مربعات دیفرانسیلی	A_{ij}
شعاع داخلی استوانه	R_i
شعاع خارجی استوانه	R_o
مدول الاستیسیته، N/m^2	E
مولفه جابجایی شعاعی، m	u
میدان دمایی، \square	ϑ
ضریب هدایت حرارتی، $W/(m \text{ } ^\circ\text{C})$	λ
ضریب پواسون	ν
ضریب انبساط حرارتی، $(1/^\circ\text{C})$	α
مولفه‌های تنش، N/m^2	σ_{ij}
مولفه‌های کرنش	ε_{ij}
زیرنویس، نماد مولفه شعاعی	rr
بالانویس، تقریب‌های مختلف میدان دمایی	\wedge

مراجع

- [1] Arefi M (2015) Nonlinear electromechanical analysis of a functionally graded square plate

- graded open cylindrical shells. *Compos. Struct.* 96: 773-785.
- [22] Hosseini S M, Akhlaghi M, Shakeri M (2007) Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method. *Heat Mass Transf.* 43 (7): 669-675.
- [23] Azadi M, Shariyat M (2010) Nonlinear transient transfinite element thermal analysis of thick-walled FGM cylinders with temperature-dependent material properties. *Meccanica* 45 (3): 305-318.
- [24] Esmaili H, Arvin H, Kiani Y (2019) Axisymmetric nonlinear rapid heating of FGM cylindrical shells. *J. Therm. Stresses* 42 (4): 490-505.
- [25] Arefi M, Nahas I (2014) Nonlinear electro thermo elastic analysis of a thick spherical functionally graded piezoelectric shell. *Compos. Struct.* 118: 510-518.
- [26] Arefi M, Rahimi G (2014) Application of shear deformation theory for two dimensional electro-elastic analysis of a FGP cylinder. *Smart Struct. Syst.* 13 (1): 1-24.
- [27] Mohammadi M, Arefi M, Dimitri R, Tornabene F (2019). Higher-order thermo-elastic analysis of FG-CNTRC cylindrical vessels surrounded by a Pasternak foundation. *Nanomaterials* 9 (1): 79.
- [28] Rahimi G, Arefi M, Khoshgoftar M (2012) Electro elastic analysis of a pressurized thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder using the first order shear deformation theory and energy method. *Mechanics* 18 (3): 292-300.
- Functionally Graded Rotating Disks Using Finite Element and Analytical Methods. *Materials* 15 (16): 5548.
- [14] Moosaie A (2016) A nonlinear analysis of thermal stresses in an incompressible functionally graded hollow cylinder with temperature-dependent material properties. *Eur. J. Mech. A/Solids* 55: 212-220.
- [15] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami M (2002) Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 79 (7): 493-497.
- [16] Yildırım A, Yarımşapuc D, Arıkan V, Eker M, Celebi K (2022) Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded spherical pressure vessels. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 200:104830.
- [17] Arefi M (2013) Nonlinear thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder. *Acta Mech.* 224 (11): 2771-2783.
- [18] Arefi M, Faegh R K, Loghman A (2016) The effect of axially variable thermal and mechanical loads on the 2D thermoelastic response of FG cylindrical shell. *J. Therm. Stresses* 39 (12): 1539-1559.
- [19] Shojaeefard M H, Najibi A (2014) Nonlinear transient heat conduction analysis for a thick hollow 2D-FGM cylinder with finite length. *Arab. J. Sci. Eng.* 39 (12): 9001-9014.
- [20] Najibi A, Talebitooti R (2017) Nonlinear transient thermo-elastic analysis of a 2D-FGM thick hollow finite length cylinder. *Compos. B. Eng.* 111: 211-227.
- [21] Mehrabadi S J, Aragh B S (2013) On the thermal analysis of 2-D temperature-dependent functionally