مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۲/ دوره ۱۳/ شماره ۳/ صفحه ۶۷-۸۴

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/JSFM.2023.12766.3704

برآورد خطا بر مبنای بازیافت تنش در حل تطبیقی مسائل غیر خطی الاستوپلاستیک به روش ایزوژئومتریک

علی شاهینی[1]، احمد گنجعلی[2,*] ابوذر میرزاخانی[2]

[1] دانشجوی دکتری ، گروه مهندسی عمران، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران.

[2] استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران.

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۳/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۸

چکیده

در این پژوهش، به بررسی کارایی برآورد خطا مبتنی بر دو روش بازیافت تنش تعادل وصله‌ها و نقاط فوق همگرا در هدایت حل تطبیقی مسائل غیرخطی به روش ایزوژئومتریک، پرداخته شده است. همچنین با تحلیل مسائل الاستوپلاستیک مبتنی بر خواص مصالح و حل تطبیقی به روش گرادیان حرارتی، روند بهبود تنش مورد بررسی قرار گرفته است. نحوه عملکرد حل تطبیقی این پژوهش بر مبنای حرکت دهی نقاط کنترلی است و در بازیافت تنش بکار گرفته شده، با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش دقیق و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان بدست آمده است. بدین منظور مدلسازی دو مسئله در محدوده غیر خطی که دارای حل دقیق است، مورد توجه قرار گرفته است. نتایج نشان داده‌اند مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی در هر دو روش بازیافت تنش بکار گرفته شده بیش از ۳۳ درصد و در جهت بهبود شبکه نقاط کنترلی است. همچنین روش تعادل وصله‌ها نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، کارایی مؤثرتری را داشته که از آن می‌توان به عنوان راه حلی مناسب جهت بهبود میدان تنش، بهره برد.

کلمات کلیدی: برآورد خطا؛ تعادل وصله‌ها؛ نقاط فوق همگرا؛ تحلیل ایزوژئومتریک؛ بهبود شبکه نقاط کنترلی.

Error estimation based on stress recovery by adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behavior by isogeometric method

Ali Shahini[1], Ahmad Ganjali[2,*] Aboozar Mirzakhani[2]

[1] Ph.D. Student, Department Of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

[2] Assist. Prof, Department Of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

Abstract

In this research, the efficiency of error estimation based on two methods of recovering the equilibrium stress of patches and superconvergent points in guiding the adaptive solution of nonlinear problems by isogeometric method has been investigated. Also, by analyzing elasto-plastic problems, and adaptive solution by temperature gradient method, the stress improvement process has been investigated. The method of the adaptive solution of this research is based on the movement of control points and it is used in stress recovery, taking into account the difference between the exact stress level and the stress level obtained from the isogeometric analysis for each element, as a criterion to determine the amount of error in it. The element is obtained. For this purpose, the modeling of two problems in the non-linear range, which has an exact solution, has been considered. The results have shown that the total norm difference of exact and approximate error in both stress recovery methods used is more than 33% and in the direction of improving the network of control points. Also, the method by equilibrium patches is more effective than the method based on superconvergent points, which can be used as a suitable solution to improve the stress field.

Keywords: Equilibrium Patches; Superconvergent Points; Error Estimation; Isogeometric Analysis; Improving the Network of Control Points.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۵۵۱۱۲۱۴۳؛ فکس: ۰۲۳۳۲۳۹۰۵۳۷

آدرس پست الکترونیک: Ahmad.ganjali@iau-shahrood.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه با پیشرفت‌های چشمگیر در علم مدلسازی هندسه به کمک رایانه[1]، ایجاد هندسه مسائل مهندسی دقیق‌تر شده است، که از مهمترین این روش‌ها می‌توان به روش ایزوژئومتریک که بر اساس استفاده از توسعه توابع نربز (بی-اسپیلاین‌های نسبی غیر یکنواخت[2]) بنیان نهاده شده است، اشاره کرد[۱]. در قرن حاضر استفاده از ظرفیت حداکثری مصالح و ایجاد طراحی‌های مقرون به صرفه و در عین حال ایمن سبب گسترش روش‌های تحلیلی در حیطه رفتار غیر خطی سازه‌ها شده است. در این راستا محققین زیادی، جهت ساده‌سازی روابط ریاضی و تبدیل ساده آن به برنامه‌های کامپیوتری، از الگوریتم‌های عددی مانند نیوتن-رافسون که توسط ترنر و همکاران [۲] و اگریس [۴و۳] پایه‌گذاری شده است الگوبرداری کرده‌اند. و در ادامه این تحقیقات محققینی مانند مالت و مارکل [۵]، ادن [۶]، رضایی پژند و همکاران [۷-۸] و زینکوویچ [۹] به توسعه روش‌های غیر خطی در روش اجزای محدود پرداختند. همچنین بربیا و کانر [۱۰]، مفهوم اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را معرفی کردند. همچنین با تأسی از این روش و توسعه روش ایزوژئومتریک در حل مسائل غیر خطی ویسی آرا و همکاران [۱۱]، آنالیز ارتعاش صفحات سوراخ شده را بررسی کردند. همچنین هوین و همکاران [۱۲] نشان دادند که روش ایزوژئومتریک غیرخطی در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ و الاستوپلاستیک پوسته های نازک بسیار موثر بوده است.

همیشه خطا بخش جدانشدنی تحلیل های عددی به شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. پاین و بته در روش اجزای محدود نسبت به استفاده از المان ۴ گره‌ای چهار وجهی[۱۳] و بکارگیری نیرو-های وارده به نقاط گرهی اقدام کردند[۱۴]. و نشان دادند که در هر دو روش علاوه بر بهبود تنش مبتنی بر برآورد خطای کمتر، هزینه محاسباتی پایین‌تری را نیز ایجاد می‌کنند.

باتوجه به رهیافت‌های گذشته و اینکه برآوردهای خطای مبتنی بر بازیافت تنش در حل مسائل خطی بهترین عملکرد را از خود نشان دادند[۱۵و۱۶]، لذا در این پژوهش حل مسائل غیرخطی مبتنی بر ارزیابی خطا و معیار نرم خطای انرژی، مورد بررسی قرار گرفته است.

امروزه در علوم مهندسی، حل تطبیقی مسائل به جهت دستیابی به حل دقیق‌تر مسائل بسیارمؤثر بوده و تلاش‌هایی نیز در بکارگیری آن در تحلیل ایزوژئومتریک صورت گرفته است، اما همه این روش‌های حل تطبیقی کارایی متفاوتی را بر اساس نوع بکارگیری روش‌های تحلیلی ابداعی از خود نشان داده‌اند [۱۸-۱۷]، در میان این روش‌ها، روش تظریف r (*r*-refinement)[3] که از جمله روش‌های حل تطبیقی بر اساس الگوی جابجایی نقاط کنترلی است، توسط چانگ ژو و همکاران[۱۸] و وای جی و همکاران[۲۰ و ۱۹] توصیه شده است و اثر بخشی آن در تحلیل به روش ایزوژئومتریک مورد ارزیابی قرارگرفته است. همچنین میرزاخانی و همکاران تظریف t-r (*t-r*-refinement)[4]را بر اساس جابجایی نقاط کنترلی مبتنی بر گرادیان حرارتی و روش ایزوژئومتریک (در مسائل خطی و با بکار گیری نقاط فوق همگرا) ارائه دادند[۲۱] و نشان دادند بهبود تنش در این روش مطلوب و تظریف بکار گرفته شده اثر بخش است.

در این پژوهش کارایی روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش[۲۲-۲۶]، در تحلیل مسائل غیر خطی به روش ایزوژئومتریک بررسی شده است. همچنین بر اساس مفاهیم تعادل وصله‌ها[5] (RNIEP) و مفاهیم نقاط فوق همگرا[6] (RNISP)، اثر تظریف بر اساس جابجایی نقاط کنترلی مبتنی بر گرادیان حرارتی (t-r-refinement)، بهبود داده شده و توسعه روابط ریاضی مسائل در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه-ای انجام شده است. همچنین نتایج تحلیل، جهت صحت سنجی با حل کلاسیک آن که در محیط برنامه فرترن کد نویسی شده، مقایسه شده و در دو مسئله نمونه کارایی آن مورد بررسی قرار گرفته است.

[1] CAD (Computer Aided Design)
[2] Non-Uniform Rational B-splines (NURBS)
[3] Remesh Refinement
[4] Thermal Gradient based Remesh Refinement
[5] Recovery Stress in Nonlinear Isogeometric by Equilibrium Patches Analysis
[6] Recovery Stress in Nonlinear Isogeometric by Superconvergent Points Analysis

۲- استخراج روابط و معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱- روش تحلیل ایزوژئومتریک غیرخطی

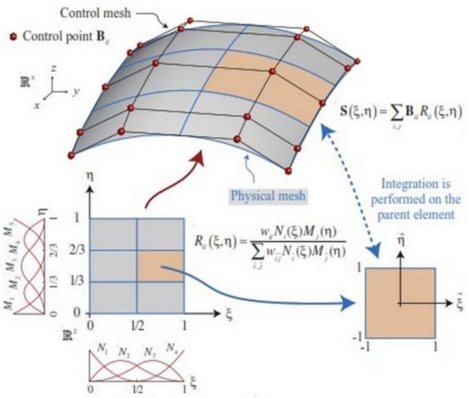
به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در روش ایزوژئومتریک، باید آن محیط را به یک محیط گسسته، متشکل از دهانه های گره‌ای[1] با فواصل مشخصی تبدیل نمود. این عمل در روش ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی[2] نربز صورت می‌پذیرد [۲۷]. یک سطح نربز بصورت رابطه (۱-۴) تعریف می‌شود [۲۷] . در شکل ۱ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است[۱].

$$R_{i,j}(x,h)=\frac{N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(x)N_{l,q}(h)w_{k,l}} \tag{۱}$$

$$S(x,h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(x,h)P_{i,j} \tag{۲}$$

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{u\,i,j}\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{v\,i,j}\end{Bmatrix} \tag{۳}$$

$$\bar{\mathbf{u}}=\bar{\mathbf{R}}\,.\,\bar{\mathbf{P}}\quad,\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}\,.\,\bar{\mathbf{u}} \tag{۴}$$



شکل ۱- نمایش شبکه نقاط کنترلی و فضای پارامتری نربز[۱]

رابطهٔ بین تنش‌ها و کرنش‌های غیرخطی بصورت رابطه (۵) زیر محاسبه می‌شود[۲۸]:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0 \tag{۵}$$

$$\mathbf{D}_{ep}=\left[\mathbf{D}-\frac{\mathbf{d}_D.\mathbf{d}_D^{\,T}}{\mathbf{H}'+\mathbf{d}_D^{\,T}.\mathbf{a}}\right];\ \mathbf{d}_D=\mathbf{D.a} \tag{۶}$$

با استفاده رابطه (۷) [۲۳] داریم:

$$\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_{ep}\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}}\,d\Omega-\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_{ep}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,d\Omega+\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{d}\Omega-\int_\Omega \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{b}\,d\Omega-\int_\Gamma \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{t}\,d\Gamma=0 \tag{۷}$$

که در آن $\mathbf{B}$ مشتقات ماتریس توابع شکل نربز به صورت زیر تعریف می شود [۲۳].

$$\mathbf{B}=\mathbf{LR}=\begin{bmatrix}\frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \cdots\\ \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & \cdots\end{bmatrix} \tag{۸}$$

همچنین $\mathbf{B}$ مشتق توابع شکل نربز و $\varepsilon=\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}}$ است وبرای حل مسائل غیرخطی با استفاده از روش نیوتن رافسون، [۳۰] را داریم.

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}^{i-1}=\mathbf{F}^{ext}-\int_V \mathbf{B}^T.\,\boldsymbol{\sigma}^{i-1}\,.dV,\\ &\delta\mathbf{U}=-\left[\mathbf{K}_{ep}\left(\mathbf{U}^{i-1}\right)\right]^{-1}.\,\mathbf{R}^{i-1}\\ &\mathbf{U}^i=\mathbf{U}^{i-1}+\delta\mathbf{U}\end{aligned} \tag{۹}$$

همچنین بر اساس روابط (۴ و ۹) در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه، داریم:

$$\delta\mathbf{U}=\bar{\mathbf{R}}.\delta\bar{\mathbf{P}}^{i-1}=-\left[\mathbf{K}_T\left(\mathbf{U}^{i-1}\right)\right]^{-1}.\,\mathbf{F}_e^{\,i-1} \tag{۱۰}$$

رابطه (۱۱) تعریف می شود:

$$\mathbf{K}_T=\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_{ep}\mathbf{B}d\Omega \tag{۱۱}$$

[1] Knot spans

[2] Control point

و در نهایت با توجه به بازنویسی روابط(۱۰) و (۱۱) بر اساس مرجع [۲۲] وحل معادلات حاصل از رابطه (۱۱) سختی هر وصله از المان در تکرار مورد نظر با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس در دستگاه مختصات نرمال بصورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود (جهت روشن شدن روند توسعه روابط بالا، مطالعه مرجع [۳۰] توصیه می‌شود).

$$\mathbf{K}_{T(patch)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}^{T}\left(r,s\right)\mathbf{D}_{ep}\mathbf{B}\left(r,s\right)detJ_{1}detJ_{2}w_{i}w_{j} \qquad (۱۲)$$

۲-۲-روش RNISP در تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی

اساس این روش برمبنای استفاده ازنقاطی که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد(نقاط گوسی). در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است[۲۲و۲۳و۳۰]. دراین روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و گروه المان‌های متصل به هر گره ، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. به‌طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی درنظر گرفته شده است. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده‌اند، بدست آمده است. با توجه به توابع شکل نربز می‌توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت رابطه (۱۳) بیان کرد[۲۳]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{R}_{i,j}(u,v).\mathbf{P}_{i,j} \qquad (۱۳)$$

و داریم[۲۱]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\boldsymbol{\sigma}^{*}_{i,j} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i,j})^{2} \qquad (۱۴)$$

در نهایت با مشتق گیری از تابع $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته مطابق رابطه (۱۶و ۱۵) یافته بدست می‌آید[۲۳].

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}_{i,j}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad (۱۵)$$

$$\mathbf{AP} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_{i}\mathbf{R}_{i}^{T} \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_{i}.\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i} \qquad (۱۶)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید. جهت داشتن دقت بهتر در حل مسائل غیرخطی، در انتهای هر مرحله افزایش بار، تنش مربوطه در انتهای مرحله n ام، با استفاده از روش فوق الذکر بهبود داده می‌شود و همچنین می‌توان این تنش بهبود یافته را جهت همگرایی سریعتر حل مسئله در مرحله بعدی افزایش بار نیز استفاده کرد که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بهبود یافته و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی برای هر المان، به صورت تقریبی به معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان بدست می‌آید.

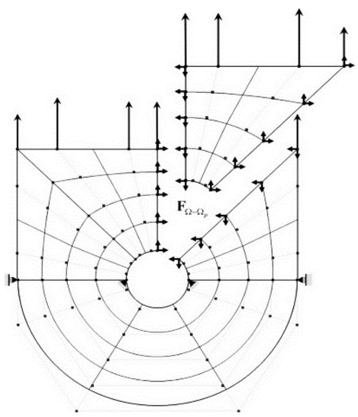
۲-۳-روش RNIEP در تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته شده است. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده‌اند، بدست آمده است[۲۵]. در این روش، مشابه روش‌هایی که جهت بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [۲۴] و [۲۵] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک وصله از فضای محاسباتی بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و میدان تنش بازیافتی، می‌توان برای هر مولفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت. با توجه به شکل ۲ در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر وصله نربز از دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی، داریم:

$$\int_{\Omega_p}\mathbf{B}^{T}(\mathbf{D}_{ep}\mathbf{BP})\,d\Omega - \int_{\Omega_p}\mathbf{R}^{T}\mathbf{b}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t^p}\mathbf{R}^{T}\mathbf{t}\,d\Gamma + \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p} = 0 \qquad (۱۷)$$

که در آن $\mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p}$ (شکل ۱) نیروهای عمل و عکس العمل بین وصله جدا شده و کل دامنه مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. و در نهایت با توجه به روابط اثبات شده در مرجع [۲۵] با مشخص شدن بردار نقاط کنترلی($\mathbf{P}_{\alpha}^{*}$) برای هر مولفه تنش، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید که این سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریک دقیق‌تر است.

$$\mathbf{P}_{\alpha}^{*}=\left[\mathbf{C}_{\alpha}{}^{T}\mathbf{C}_{\alpha}+\sum_{e=1}^{Nel}\left(\mathbf{C}_{\alpha}\mathbf{C}_{\alpha}\right)_{e}\right]^{-1}\times\left[\mathbf{C}_{\alpha}{}^{T}\mathbf{F}_{\alpha}^{iso}+\sum_{e=1}^{Nel}\left(\mathbf{C}_{\alpha}{}^{T}\mathbf{F}_{\alpha}^{iso}\right)_{e}\right] \quad (۱۸)$$



شکل ۲- وصله مجزا شده و نیروهای وارد بر آن در نقاط کنترلی [۲۵]

۲-۴- رابطه سازی تئوری رفتار مصالح الاستوپلاستیک تغییر شکل پذیر

در این پژوهش رابطه سازی تئوری رفتار مصالح الاستوپلاستیک تغییر شکل پذیر، با استفاده از قانون هوک[1] و معیار تسلیم وون میسز[2] مد نظر قرار داده شده است. همچنین جهت پایان دادن به مراحل تکرار از معیار همگرایی نیرویی رابطه (۱۹) [۲۸]، استفاده شده است.

$$\mathbf{R}=\frac{\left\|\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_{dof}}}\left(\mathbf{\Psi}^{r}{}_{\mathrm{i}}\right)^{2}\right]^{1/2}\right\|}{\left\|\left[\sum_{i=1}^{n_{dof}}(\mathbf{F}_{i})^{2}\right]^{1/2}\right\|}<TOLER \quad (۱۹)$$

۲-۵- استفاده از نرم خطای انرژی در روش ایزوژئومتریک غیر خطی

طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان در حالت غیرخطی، به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود[۳۰]:

$$\|e\|=\left[\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}-\overline{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\mathbf{D}_{ep}{}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\overline{\boldsymbol{\sigma}})\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۲۰)$$

با توجه به اینکه جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل پلاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نیست، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش، از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می شود.

در نهایت نرم خطای انرژی با استفاده ازروش انتگرال گیری گوس برای هر المان در حالت غیرخطی و در انتهای هر مرحله افزایش بار به صورت رابطه (۲۱) محاسبه شده است[۳۰]:

$$\|e^{*}\|=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{*}-\overline{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\,\mathbf{D}_{ep}{}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^{*}-\overline{\boldsymbol{\sigma}}).}{|J_{1}|.|J_{2}|\,w_{i}.w_{j}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۲۱)$$

در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

۳- حل تطبیقی با استفاده از گرادیان حرارتی

فرآیند تظریف تطبیقی در تحلیل ایزوژئومتریک، که از جمله روش‌های حرکت‌دهی شبکه نقاط کنترلی محسوب می‌شود و به دلیل اینکه در فضای پارامتری روش تحلیل ایزوژئومتریک ، المان بندی وجود ندارد، استفاده از روش جابجایی نقاط را

[1] Hook law
[2] The Von-Misses criterion

براحتی امکان پذیر می‌کند و نسبت به روش متداول غنی-سازی[1] که از لحاظ محاسباتی پر هزینه است دارای کارایی بهتری است[۳۱]. در این روش نرم خطای انرژی با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک محاسبه می‌شود و سهم هر نقطه کنترلی از مجاورت آن با استفاده از دیاگرام ورونویی[2] تعیین می‌شود. در شکل ۳ دیاگرام ورونویی، که شکل محدبی است از تقاطع عمود منصف‌های وارد بر پاره خط بین گره‌ها نشان داده شده است. این حوزه همسایگی دیاگرام ورونویی طبق رابطه زیر تعریف می‌شود[۲۱]:

$$T_i = \left\{ x \in \Re : d\left(X, X_i\right) < d\left(X, X_j\right) \forall j \neq i \right\} \qquad (۲۲)$$

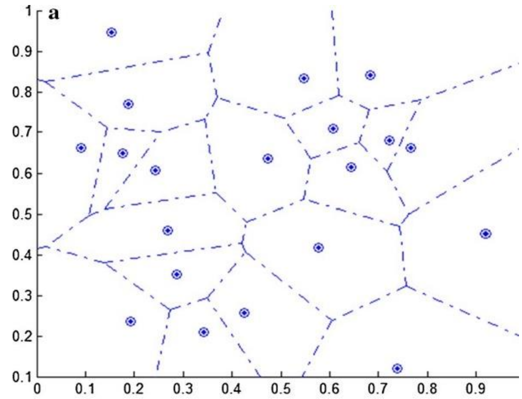
معنی رابطه‌ی بالا این است که نقاط متعلق به سلول ورونویی گره i نقاطی هستند که به این گره نزدیکترند تا سایر گره‌ها. سپس، جابجایی نقاط کنترلی با فرض یک سازه خرپایی تحت یک گرادیان حرارتی متناسب با خطاهای هرنقطه‌کنترلی تصور می‌شود. تحلیل این ساختار تحت تغییرات دما، آرایش جدیدی از نقاط کنترل را ایجاد می‌کند که در تکرارهای بعدی محاسبات ایزوژئومتریک و ترمو الاستیک نهایتاً منجر به توزیع بهتر خطاها در دامنه مسائل و یک جابجایی بهینه از نقاط کنترلی می‌شود. و داریم[۲۱]:

$$\delta = L.\alpha.\Delta T \qquad (۲۳)$$

از تبدیل رابطه بالا به نیرو داریم[۲۱]:

$$\delta = \frac{FL}{AE} \qquad (۲۴)$$

نتیجه آنکه سازه متشکل از نقاط کنترلی و اعضای متصل کننده فرضی را تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی تحلیل کرده و جابجایی ها را برای انجام مجدد تحلیل ایزوژئومتریک در نقاط کنترلی و با نسبتی معین در بردارهای گرهی اعمال می کنیم.



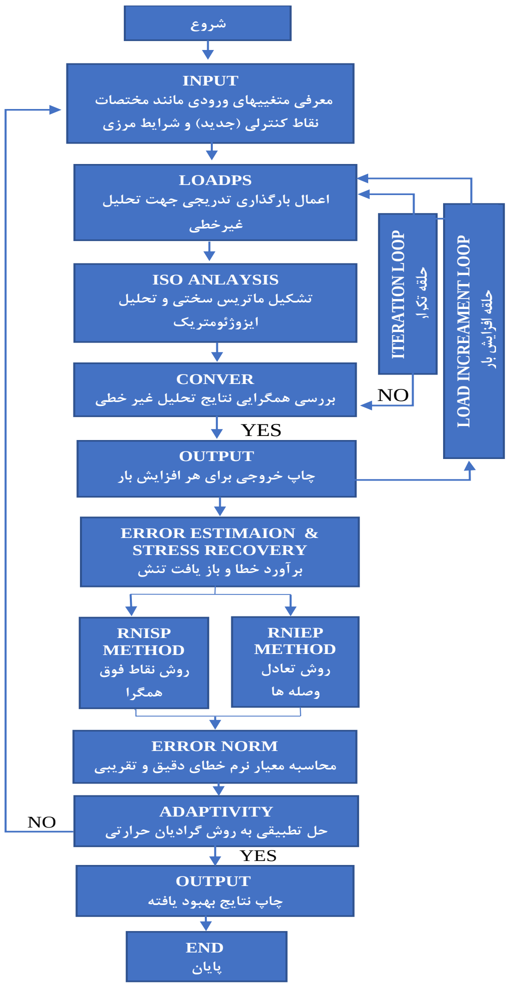
شکل ۳- دیاگرام ورونویی جهت شناسایی حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی[۲۱]

۴- الگوریتم حل تطبیقی مسائل غیرخطی الاستوپلاستیک مبتنی بر تعادل وصله‌ها و نقاط فوق همگرا به روش ایزوژئومتریک

مطابق شکل ۴ در گام اول با بکارگیری روش نیوتن رافسون و اعمال بار به صورت تدریجی تا ظرفیت نهایی مقطع میزان سختی در هر مرحله محاسبه شده و در نهایت با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک ماتریس سختی سازه و میزان جابجایی ها در هر نقطه کنترلی محاسبه شده است. در گام دوم با بکارگیری روش تعادل وصله‌ها و یا روش استفاده از نقاط فوق همگرا نسبت به بازیافت تنش و برآورد خطای حاصل از روش دقیق و تقریبی پرداخته شده است و در گام سوم به صورت مجزا برای هر دو روش بازفت تنش ارائه شده حل تطبیقی مبتنی بر گرادیان دما و بر اساس خطای بدست آمده صورت گرفته است و این چرخه تا حصول همگرایی حداکثر و کمترین میزان خطا ادامه یافته است. در نهایت میزان تنش بدست آمده از حل تطبیقی با روش‌های بازیافت تنش تعادل وصله‌ها و روش استفاده از نقاط فوق همگرا مقایسه شده است.

[1] Element subdivision (enrichment)

[2] Voronoi tessellation

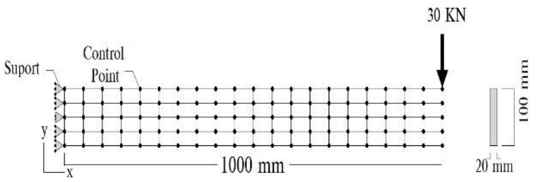


شکل ۴- الگوریتم حل تطبیقی مسائل غیرخطی الاستوپلاستیک مبتنی بر تعادل وصله‌ها و نقاط فوق همگرا به روش ایزوژئومتریک

۵- ارائه مسئله‌ها

در این قسمت با ارائه دو مسئله نمونه جهت نمایش کارایی اثر تظریف t-r در راهنمایی روش‌های بازیافت تنش با استفاده از تعادل وصله‌ها و نقاط فوق همگرا مبتنی بر تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی پرداخته شده است. همچنین جهت نشان دادن بیشتر اثر تظریف t-r از تواِبع شکل درجه یک استفاده شده و نتایج آن در بهبود تنش و برآورد خطا مقایسه شده است.

۵-۱- مسئله اول، تیر یک سرگیردار تحت اثر بار متمرکز



شکل ۵- شرایط هندسی و مرزی تیر یک سرگیردار.

در جدول ۱ مشخصات هندسی و خواص مصالح این مسئله نشان داده شده است:

جدول ۱- مشخصات هندسی و خواص مصالح تیر یک سرگیردار

طول تیر (mm)	۱۰۰۰
عرض تیر (mm)	۲۰
ارتفاع تیر (mm)	۱۰۰
تعداد کل نقاط کنترلی	۱۰۵
تعداد وصله‌ها	۱
مدول الاستیسیته (GPa)	۲۱۰
ضریب پواسون	۰/۳
تنش تسلیم (GPa)	۰/۲۴
نیروی متمرکز (KN)	۳۰

اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل الاستوپلاستیک در جدول ۲ آمده است:

جدول ۲- روش تحلیل الاستوپلاستیک

معیار تسلیم	ون میسز
تعداد افزایش بارها	۳۰
خطای مجاز	1×10^{-3}
معیار همگرایی	نیرو
روش حل	سختی مماسی KT
روش بارگذاری افزایشی	کنترل تغییر بار

۵-۱-۱- حل تحلیلی کلاسیک :

براساس حل تحلیلی کلاسیک پلاستیسته زمانی آغاز می‌شود که $F = F_E = \sigma_y \dfrac{2bc^2}{3L}$ باشد و برای هسته پلاستیک داریم:

$$y = \pm y^*_{(x)} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_y & -c \le y \le -y^*_{(x)} \\ \sigma = -\sigma_y & y^*_{(x)} \le y \le c \end{cases} \qquad (۲۵)$$

$$y = \pm y^*_{(x)} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 0 & -c \le y \le -y^*_{(x)} \\ \tau = 0 & y^*_{(x)} \le y \le c \end{cases} \qquad (۲۶)$$

برای هسته الاستیک $-y^*_{(x)} \le y \le y^*_{(x)}$ توزیع تنش σ به صورت توزیع خطی از تنش تسلیم رابطه (۲۷) و توزیع تنش τ نیز به صورت رابطه (۲۸) است:

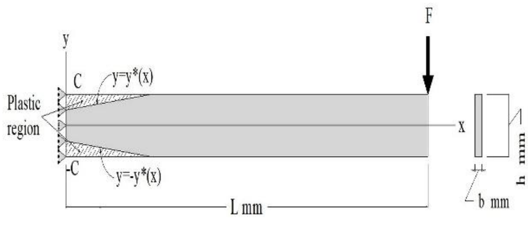
$$\sigma = -\sigma_y \left(\frac{y}{y^*_{(x)}} \right) \qquad (۲۷)$$

$$\tau = \frac{3F}{4by^*_{(x)}} \qquad (۲۸)$$

در روابط بالا مقدار مرز الاستوپلاستیک $y^*_{(x)}$ به صورت رابطه (۲۹) محاسبه شده است:

$$y^*_{(x)} = \sqrt{3\left[c^2 - \frac{F(L-x)}{b \times \sigma_y}\right]} = c\sqrt{3 - \frac{2(L-x)}{\xi}} \qquad (۲۹)$$

$$\xi = \frac{2\sigma_y bc^2}{3F} \qquad (۳۰)$$

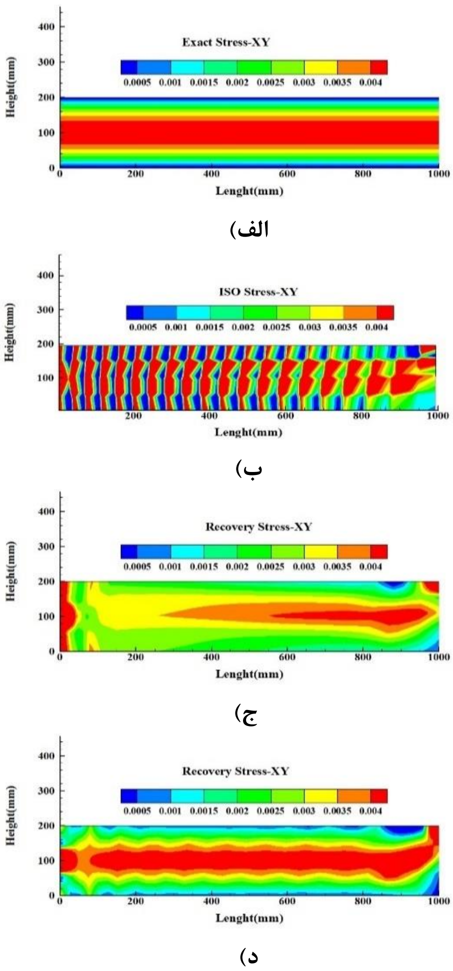


شکل ۶- نواحی پلاستیک و الاستیک در تیر یک سرگیردار[۳۲]

مقدار بار نهایی (خرابی) برابر است با:

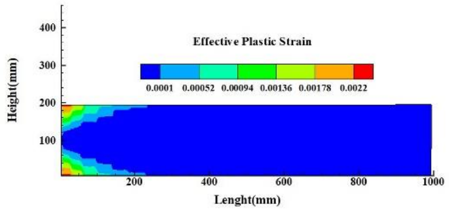
$$F = F_U = \sigma_y \frac{bc^2}{L} \qquad (۳۱)$$

که این مقدار ۱/۵ برابر بار تسلیم (F_E) است. در شکل ۷ تنش σ_{XY} الف) دقیق ب) ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های ج) RNISP و د) RNIEP در تیر یک سرگیردار نشان داده شده است.جهت اطلاعات بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص مسئله اول، به منابع [۳۲ و ۳۳] مراجعه شود.



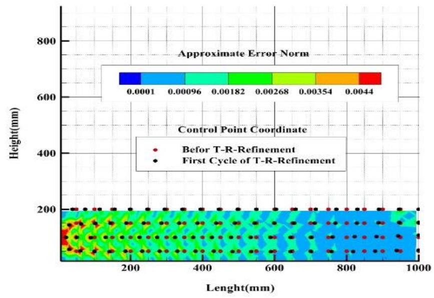
شکل ۷- نمایش تنش σ_{XY} الف) دقیق ب) ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های ج) RNISP و د) RNIEP در تیر یک سرگیردار

در شکل ۸، کرنش موثر پلاستیک برای نشان دادن کفایت حد بارگذاری و ورود به ناحیه کرنش پلاستیک نشان داده شده است (طبق معیار جدول ۱ محدودیت ورود کرنش پلاستیک: $\varepsilon = 0.00114$).

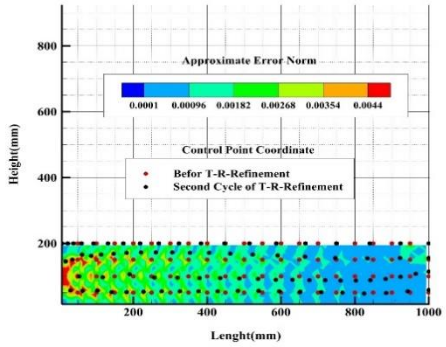


شکل ۸- کرنش مؤثر پلاستیک در تیر یک سر گیردار

اشکال ۹ و ۱۰ نرم خطای تقریبی و موقعیت نقاط کنترلی در تیر یک سرگیردار نمایش داده شده است. ملاحظه شد بعد از یک و دو مرحله تظریف t-r، برآورد کننده خطا در روش‌های RNISP و RNIEP کارایی مناسبی از خود نشان داد به نحوی که قرارگیری موقعیت جدید نقاط کنترلی پس از دو مرحله تظریف در مسیر کاهش خطا است. و برآورد کننده خطای بکار گرفته شده (روش‌های RNISP و RNIEP)، تظریف t-r را به خوبی راهنمایی کرده است.

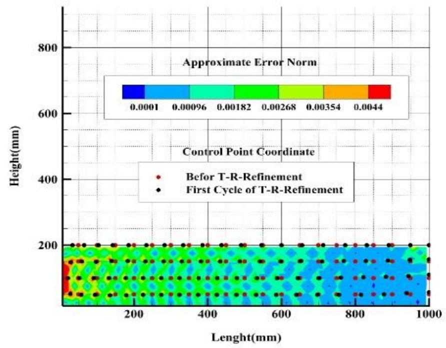


الف)

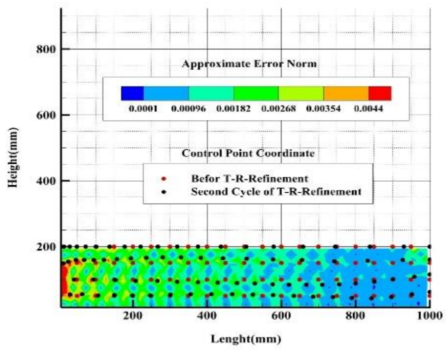


ب)

شکل ۹- تطبیق شبکه نقاط کنترلی با نرم خطای تقریبی در تیر یک سرگیردار بعد از الف) یک مرحله ب) دو مرحله حل تطبیقی به روش RNISP



الف)

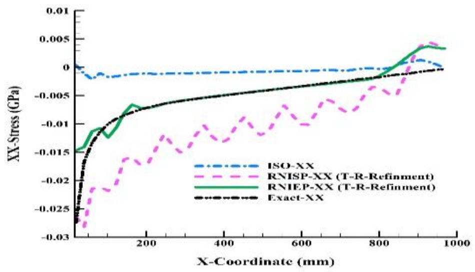


ب)

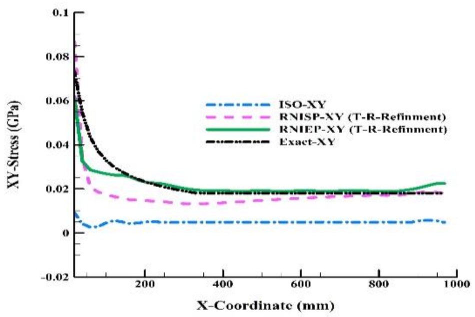
شکل ۱۰- تطبیق شبکه نقاط کنترلی با نرم خطای تقریبی در تیر یک سرگیردار بعد از الف) یک مرحله ب) دو مرحله حل تطبیقی به روش RNIEP

شکل ۱۱ مقایسه و تطابق تنش‌های σ_{XX} و σ_{XY} دقیق و ایزوژئومتریک و بهبود یافته در تیر یک سرگیردار به روش RNISP و RNIEP با بکارگیری تظریف به روش جابجایی نقاط کنترلی، نشان داده شده است و حاکی از این است که روند توزیع تنش σ_{XX} و σ_{XY} با بکارگیری تظریف به روش جابجایی نقاط کنترلی (t-r-refinement) پس از دو مرحله تظریف رو به بهبود است. و نسبت به حل ایزوژئومتریک(حل بدون بازیافت تنش و حل تطبیقی) حل دقیق‌تری را نشان داده است.

در شکل ۱۲ مقایسه نرم خطای دقیق به روش‌های RNISP و RNIEP در مقطع با مختصات (X , Y=100 mm) نشان داده شده است. مقدار مجموع نرم خطا در روش RNIEP برابر ۰/۱۶ و در روش RNISP برابر ۰/۱۷ است و این خطای کمتر در روش RNIEP نشانه دقت محاسبه گر خطا در شناسایی و نمایش دقیق‌تر خطا است. همچنین روش RNIEP، تظریف t-r را در راستای بهبود شبکه نقاط کنترلی بهتر از روشRNISP راهنمایی کرده است.



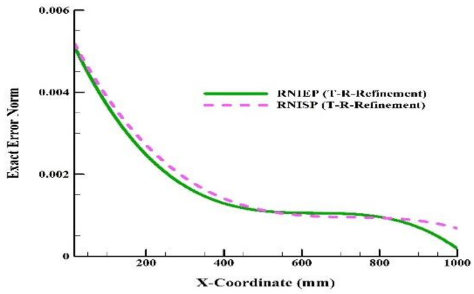
الف)



ب)

شکل ۱۱- مقایسه تطابق تنش‌های σ_{XX} و σ_{XY} دقیق و ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های الف) RNISP و ب) RNIEP در تیر یک سرگیردار(تغییرات تنش در مقطع (X, Y=100 mm) بررسی شده است)

در جدول ۳ مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی پس از دو مرحله تظریف t-r نشان داده شده است. و همان‌طور که مشاهده شده است پس از دو مرحله تظریف t-r، اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر یک سرگیردار کاهش پیدا کرده است. همچنین مقدار این خطا در روش RNIEP برابر ۰/۰۰۲ و در روش RNISP برابر ۰/۰۰۳ است و نشانه کارایی دقت محاسبه گر خطا به روشRNIEP در شناسایی و محاسبه خطا است و برآورد کننده خطا RNIEP، به درستی شبکه نقاط کنترلی را هدایت کرده است.



شکل ۱۲- مقایسه نرم خطای دقیق در تیر یک سرگیردار پس از دو مرحله بهبود شبکه نقاط کنترلی به روش RNISP و روشRNIEP (تغییرات تنش در مقطع (X, Y=100 mm) بررسی شده است)

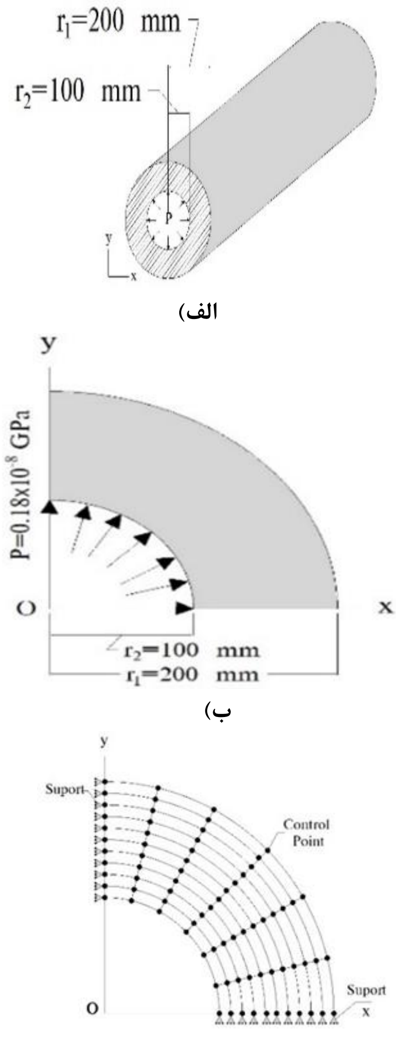
جدول ۳- مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر یک سرگیردار پس از یک و دو مرحله بهبود شبکه نقاط کنترلی به روش RNISP و روشRNIEP

مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی			
بهبود شبکه نقاط کنترلی(پس از دو مرحله تظریف)		بهبود شبکه نقاط کنترلی(پس از یک مرحله تظریف)	
RNIEP	RNISP	RNIEP	RNISP
۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۳۰	۰/۳۶

۵-۲- مسئله دوم، تحلیل الاستوپلاستیک استوانه جدار ضخیم فولادی تحت اثر فشار داخلی

در شکل ۱۳ مشخصات هندسی استوانه جدارضخیم مسئله دوم نشان داده شده است:

جهت کاهش حجم محاسبات و به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است. در جدول ۴ مشخصات هندسی و خواص مصالح مسئله دوم ارائه شده است:

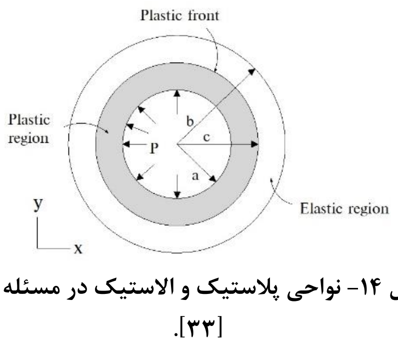


شکل ۱۳- الف) استوانه جدار ضخیم تحت اثر فشار داخلی ب) یک چهارم مقطع تحت فشار ج) هندسه و شرایط مرزی استوانه جدار ضخیم

جدول ۴- مشخصات هندسی و خواص مصالح استوانه جدار ضخیم

شعاع داخلی r_2, (mm)	۱۰۰
شعاع خارجی r1, (mm)	۲۰۰
تعداد کل نقاط کنترلی	۷۷
تعداد وصله‌ها	۲
مدول الاستیسیته (GPa)	۲۱۰
ضریب پواسون	۰/۳
تنش تسلیم (GPa)	۰/۲۴
نیروی فشاری وارد شده (GPa)	۰/۱۸×۱۰ -۸

برای تحلیل الاستوپلاستیک از اطلاعات جدول۲ با تعداد افزایش ۶ بار ، استفاده می‌شود. مطابق شکل ۱۴ و براساس حل تحلیلی کلاسیک فشار P ، که بر سطح داخلی وارد می-شود، به صورت تدریجی افزایش داده شده است تا به حد فشار نهایی (خرابی) برسد. برای استوانه جدار ضخیم، سطح تسلیم از سطح داخلی (زمانی که مختصات $r=a$ باشد) شروع و به صورت تدریجی با افزایش فشار داخلی، به شعاعی معادل $r=c$ می‌رسد. خرابی، زمانی رخ می دهد که مقدار فشار داخلی به حد نهایی آن برسد که در این حالت مقدار شعاع $c=b$ است. در این صورت کل استوانه به حالت پلاستیک رسیده است.



شکل ۱۴- نواحی پلاستیک و الاستیک در مسئله دوم [۳۳].

در حالت پلاستیک زمانی که $a \le r \le c$ باشد برای معیار ون میسز ، داریم:

$$\sigma_r = -K\left[1 - N_2 + \ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \qquad (۳۲)$$

$$\sigma_\theta = K\left[1+N_2-\ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \quad (۳۳)$$

$$\sigma_z = 2\nu K\left[N_2-\ln\left(\frac{c^2}{r^2}\right)\right] \quad (۳۴)$$

$$U_r = r\left((1-\nu)\frac{Kc^2}{Gr^2}+(1-2\nu)\frac{\sigma_r}{2G}\right) \quad (۳۵)$$

و زمانی که $c \le r \le b$ باشد ، داریم:

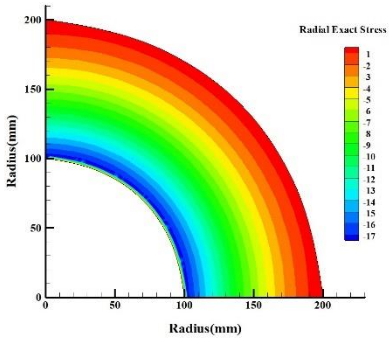
$$\sigma_r = -KN_2\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right) \quad (۳۶)$$

$$\sigma_\theta = KN_2\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right) \quad (۳۷)$$

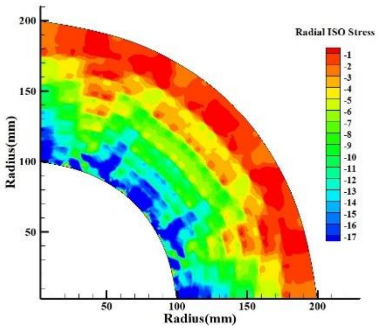
$$\sigma_Z = 2\nu KN_2 \quad (۳۸)$$

$$U_r = \frac{KN_2}{2G}\left((1-2\nu)r+\frac{b^2}{r}\right) \quad (۳۹)$$

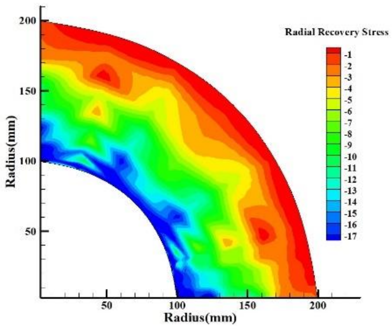
در شکل ۱۵ تنش شعاعی σ_r الف) دقیق ب) ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های ج) RNISP و د) RNIEP در استوانه جدارضخیم نشان داده شده است.جهت اطلاعات بیشتر نسبت به سایر روابط و خواص مسئله اول، به منابع [۳۲ و ۳۳] مراجعه شود.



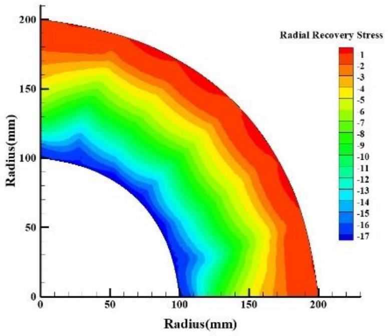
الف)



ب)



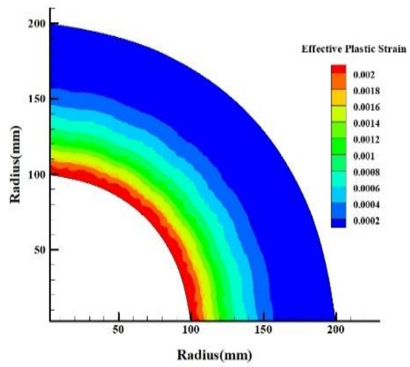
ج)



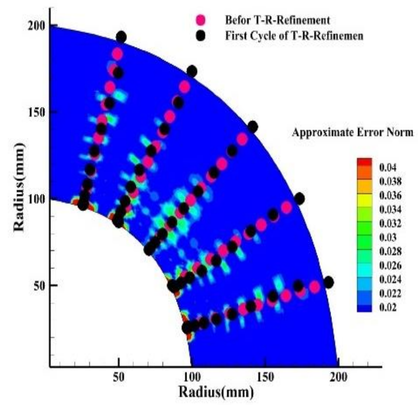
د)

شکل ۱۵- نمایش تنش شعاعی σ_r الف) دقیق ب) ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های ج) RNISP و د) RNIEP در استوانه جدارضخیم

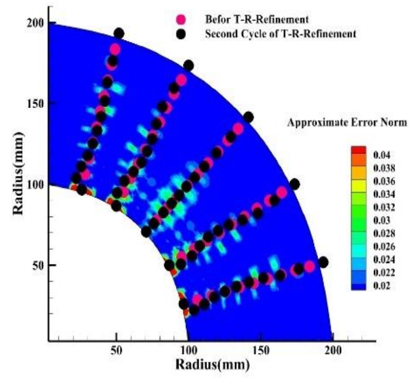
در شکل ۱۶، کرنش موثر پلاستیک برای نشان دادن کفایت حد بارگذاری و ورود به ناحیه کرنش پلاستیک نشان داده شده است (طبق معیار جدول ۵ محدودیت ورود کرنش پلاستیک: $\varepsilon = 0.00114$).



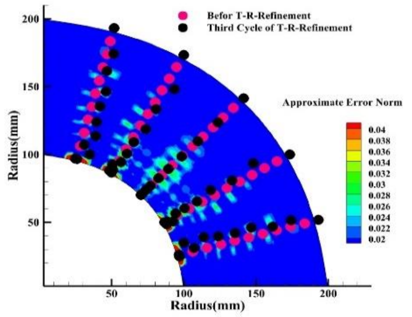
شکل ۱۶- کرنش مؤثر پلاستیک در استوانه جدار ضخیم



الف)



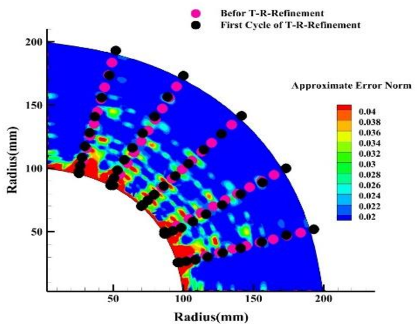
ب)



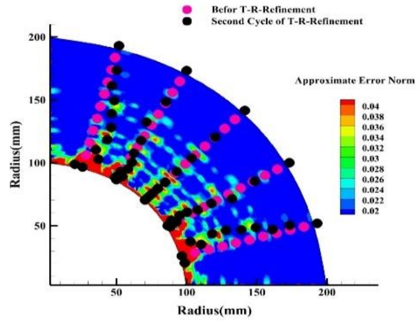
ج)

شکل ۱۷- تطبیق شبکه نقاط کنترلی با نرم خطای تقریبی در استوانه جدار ضخیم بعد از الف)یک مرحله و ب)دو مرحله حل تطبیقی به روش RNISP

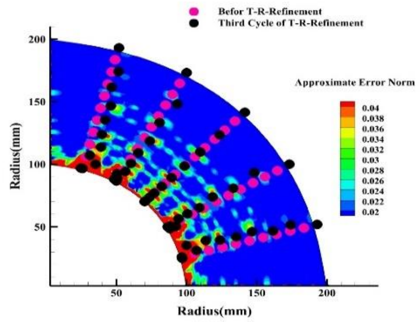
اشکال ۱۷ و ۱۸ نرم خطای تقریبی و موقعیت نقاط کنترلی در استوانه جدار ضخیم نمایش داده شده است. ملاحظه شده است که بعد از سه مرحله تظریف t-r، برآورد کننده خطا در روش‌های RNISP و RNIEP کارایی مناسبی داشته است، به نحوی که قرارگیری موقعیت جدید نقاط کنترلی پس از سه مرحله تظریف در مسیر کاهش خطا است. و برآورد کننده خطای بکار گرفته شده (روش‌های RNISP و RNIEP)، بهبود شبکه نقاط کنترلی به روش تظریف t-r را به خوبی راهنمایی کرده است.



الف)



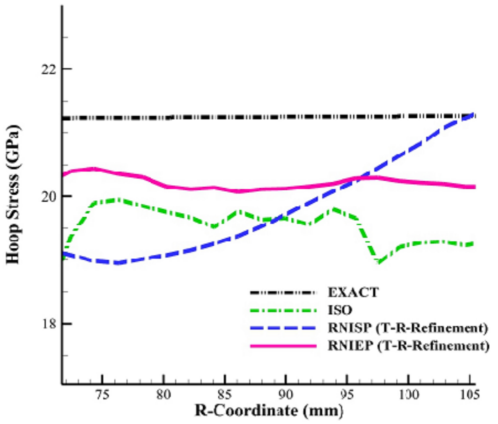
ب)



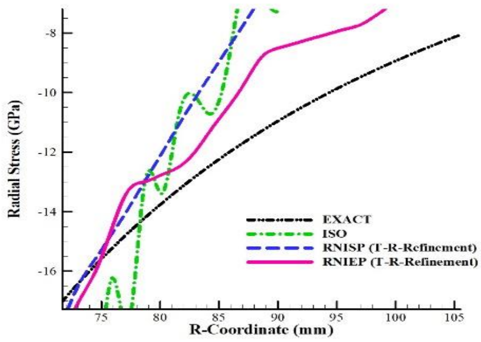
ج)

شکل ۱۸- تطبیق شبکه نقاط کنترلی با نرم خطای تقریبی در استوانه جدار ضخیم بعد از الف)یک مرحله و ب)دو مرحله حل تطبیقی به روش RNIEP

در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ مقایسه و تطابق تنش‌های σ_θ و σ_r دقیق و ایزوژئومتریک و بهبود یافته در استوانه جدار ضخیم به روشRNISP و RNIEP و بکارگیری تظریف به روش جابجایی نقاط کنترلی، نشان داده شده است و حاکی از این است که روند توزیع تنش σ_θ و σ_r پس از سه مرحله تظریف به روش جابجایی نقاط کنترلی (t-r-refinement) رو به بهبود است. و نسبت به حل ایزوژئومتریک(حل بدون بازیافت تنش و حل تطبیقی) حل دقیق‌تری را نشان می‌دهد.



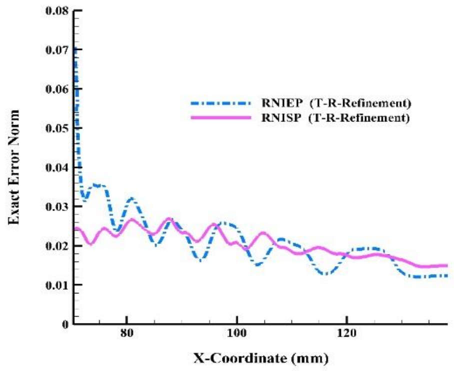
شکل ۱۹- مقایسه تطابق تنش σ_θ دقیق و ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های RNIEP و RNISP در استوانه جدار ضخیم تحت تاثیر فشار داخلی (تغییرات تنش در مقطع (R=150, θ) بررسی شده است).



شکل ۲۰- مقایسه تطابق تنش σ_r دقیق و ایزوژئومتریک و بهبود یافته با روش‌های RNIEP و RNISP در استوانه جدار ضخیم تحت تاثیر فشار داخلی (تغییرات تنش در مقطع (R, $\theta = 45^o$) بررسی شده است)

در شکل ۲۱ مقایسه نرم خطای دقیق به روش‌های RNISP و RNIEP در مقطع با مختصات (R, $\theta = 10^o$) نشان داده شده است. مقدار مجموع نرم خطا در روش RNIEP برابر ۰/۹۸ و در روش RNISP برابر ۱/۱۲ است و این خطای کمتر در روش RNIEP، نشانه دقت محاسبه گر خطا در شناسایی و نمایش دقیق‌تر خطا است. همچنین روش RNIEP، تظریف t-r را

در راستای بهبود شبکه نقاط کنترلی بهتر از روش RNISP راهنمایی کرده است.



شکل ۲۱- مقایسه نرم خطای دقیق در استوانه جدار ضخیم پس از سه مرحله بهبود شبکه نقاط کنترلی به روش RNIEP و RNISP (تغییرات تنش در مقطع ($R, \theta=10^o$) بررسی شده است)

با توجه به جدول ۵ مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی پس از سه مرحله تظریف t-r باعث کاهش مجموع مقادیر خطا در استوانه جدار ضخیم به روش‌های RNISP و RNIEP شده است. همچنین مقدار این خطا در روش RNIEP برابر ۰/۲۲ و روش RNISP برابر ۱/۰۸ است و این اختلاف کمتر نرم خطای دقیق و تقریبی، نشانه کارایی دقت محاسبه گر خطا به روش RNIEP در شناسایی و برآورد خطا است. همچنین محاسبه گر خطای بکار گرفته شده در روش RNIEP بهتر از روش RNISP شبکه نقاط کنترلی را (به روش تظریف t-r) بهبود بخشیده است.

جدول ۵- مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی پس از سه مرحله تظریف t-r

مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی					
بهبود شبکه نقاط کنترلی(پس از سه مرحله تظریف)		بهبود شبکه نقاط کنترلی(پس از دو مرحله تظریف)		بهبود شبکه نقاط کنترلی(پس از یک مرحله تظریف)	
RNIEP	RNISP	RNIEP	RNISP	RNIEP	RNISP
۰/۲۲	۱/۰۸	۰/۳۲	۱/۴۱	۱/۴۷	۲/۷۳

[1] Non-Uniform Rational
[2] B-Spline

۶- فهرست علائم و اختصارات

$R_{i,j}(x,h)$ توابع پایه ای نسبی غیر یکنواخت[1]

$N_{k,p}(x)$ ، $N_{j,q}(h)$ ، $N_{i,p}(\xi)$ توابع پایه ای بی- اسپلاین[2] از درجه p و q

$w_{i,j}$ و $w_{k,l}$ وزن نقاط کنترلی

$S(\xi,\eta)$ سطح نربز

$P_{i,j}$ و $P_{u\,i,j}$ و $P_{v\,i,j}$ بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز

$\mathbf{u}$ مؤلفه جابجایی

$\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس جابجایی

$\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه نسبی نربز

$\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس مختصات نقاط کنترلی

$\mathbf{L}$ ماتریس عملگر مشتق

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ماتریس کرنش

$\mathbf{D}_{ep}$ ماتریس خواص مصالح الاستوپلاستیک

$\boldsymbol{\sigma}_0$ تنش اولیه یا پسماند

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ کرنش اولیه یا پسماند

$\mathbf{a}$ بردار جریان (نرمال)

$\mathbf{H}'$ مدول سخت شوندگی

Γ مرزهای مسئله مورد نظر با دامنهٔ Ω

$\mathbf{b}$ نیروهای کالبدی

$\mathbf{t}$ نیروهای سطحی

$\mathbf{R}^{i-1}$ نیروهای نامتعادل کننده[3] با دامنه تکرار $i-1$

$\mathbf{F}^{ext}$ نیروهای خارجی وارد بر دامنه

$\boldsymbol{\sigma}^{i-1}$ تنش ایجاد شده در دامنه در تکرار، $i-1$

$\delta\mathbf{U}$ جابجایی ناشی از نیروهای نامتعادل کننده

$\mathbf{K}_{ep}$ سختی مماسی در تکرار $i-1$

$\mathbf{U}^{i-1}$ جابجایی ها در ابتدای تکرار i

$\mathbf{U}^{i}$ جابجایی نهایی در تکرار i

$\mathbf{K}_T^{i}$ ماتریس سختی مماسی در تکرار

[3] Unbalanced forces

$\delta\mathbf{P}^i$ مجهولات مسئله (جابجایی مولفه سوم مختصات در فضای نربز) در تکرار i

$\mathbf{F}_e^{i-1}$ بردار نیروهای باقیمانده (نیروهای نامتعادل کننده) روی دامنه در تکرار $i-1$

n تعداد نقاط کنترلی در جهت y

m تعداد نقاط کنترلی در جهت x در هر وصله

$\mathbf{R}_{i,j}$ ماتریس توابع شکل نربز

$\mathbf{P}_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش

$\boldsymbol{\sigma}^*_{i,j}$ تنش دقیق

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i,j}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک غیر خطی

k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت‌های x و y موجود در هر وصله

$\mathbf{F}_i$ نیروهای وارد شده بر هر گره

$\boldsymbol{\Psi}'^r_{\mathrm{i}}$ نیروهای باقیمانده در هر گره در درجه آزادی i

n_{dof} تعداد کل درجات آزادی سیستم

$\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق تنش

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی

Ω دامنه المان

$\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بهبود یافته

$d(x,x_i)$ فاصله (اقلیدسی) بین X_i و X

δ تغییر طول عضو

L طول اولیه عضو

α ضریب انتقال حرارت ماده

ΔT اختلاف حرارت موجود. از تغییر طول اعضای فرضی

F نیروی حاصل از اختلاف حرارت (خطا)

E ضریب الاستیسیته

A سطح مقطع اعضا

c ارتفاع تار خنثی

$y^*_{(x)}$ مرز الاستوپلاستیک

ξ طول گستره ناحیه الاستیک

P فشار داخلی

σ_r تنش شعاعی

σ_θ تنش حلقوی

σ_Z تنش محوری

U_r تغییرمکان شعاعی

r شعاع نقطه

a شعاع داخلی

b شعاع خارجی

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش با رویکرد بکارگیری روش ایزوژئومتریک در حل مسائل غیر خطی و همچنین استفاده از بازیافت تنش مبتنی بر تعادل وصله‌ها و نقاط فوق همگرا نسبت به برآورد خطا پرداخته شد و اثر برآورد کننده‌های خطای بکار گرفته شده در هدایت حل تطبیقی مبتنی بر گرادیان دما ، مورد بررسی قرار گرفت و نتایج نشان داد:

- نرم خطا پس از بازیافت تنش به روش استفاده از نقاط فوق همگرا و تعادل وصله‌ها کاهش یافته است و این امر عملکرد مطلوب بازیافت تنش را در بهبود تنش مسائل غیرخطی مبتنی بر تحلیل ایزوژئومتریک نشان داده است.

- مجموع نرم خطای دقیق در روش RNIEP نسبت به روش RNISP در مسئله تیر یک سرگیردار ۵/۸ درصد و در استوانه جدار ضخیم برابر ۱۲/۵ درصد ، کمتر است و این امر نشان دهنده عملکرد مطلوب روش RNIEP در هدایت شبکه نقاط کنترلی و بهبود تنش در هر دو مسئله ارائه شده است.

- مجموع اختلاف نرم خطای دقیق و تقریبی در روش RNIEP نسبت به روش RNISP در مسئله تیر یک سرگیردار ۳۳/۳ درصد و در استوانه جدار ضخیم برابر ۷۹/۶ درصد ، کمتر است و این امر نشان دهنده عملکرد مطلوب

روش RNIEP در هدایت شبکه نقاط کنترلی و بهبود تنش در هر دو مسئله ارائه شده است.

در نهایت می‌توان گفت روش RNIEP از روش RNISP در برآورد خطا دقیق‌تر است. همچنین روش RNIEP، استراتژی بهتری را در بهبود شبکه به روش تظریف r-t ارائه داده است و در دستیابی به جواب‌هایی دقیق‌تر، قابل اعتمادتر و کارآمدتر، بهتر از روش RNISP عمل کرده است و می‌توان از آن به عنوان راه حلی موثر و ساده جهت بهبود میدان تنش، استفاده کرد.

مراجع

[1] Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer methods in applied mechanics and engineering, 194(39-41), 4135-4195.

[2] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., & Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci., 23(9), 805-823.

[3] Argyris, J. (1964). Recent advances in matrix methods of structural analysis (Matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers). NEW YORK, MACMILLAN CO., OXFORD, PERGAMON PRESS, LTD., 1964. 187 P.

[4] Argyris, J. (1965). Continua and Discontinua, opening address to the 1-st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson AFB, Dayton, Ohio.

[5] Oden, J. T. (1967). Numerical formulation of nonlinear elasticity problems. J. Struc. Div., 93(3), 235-255.

[6] Mallett, R. H., & Marcal, P. V. (1968). Finite element analysis of nonlinear structures. J. Struct. Division, 94(9), 2081-2106.

[7] Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A. R., & Arabi, E. (2022). Improved shell element for geometrically non-linear analysis of thin-walled structures. Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings, 175(4), 347-356.

[8] Pajand, M., Masoodi, A. R., & Arabi, E. (2018). On the shell thickness-stretching effects using seven-parameter triangular element. European J. Comput. Mech., 27(2),163-185.

[9] Zienkiewicz, O. C., & Morice, P. (1971). The finite element method in engineering science (Vol. 1977): McGraw-hill London.

[10] C. Brebbia, J. Connor, Geometrically nonlinear finite-element analysis, J. Eng. Mech. Divis., 95(2) (1969) 463-483.

[11] VeisiAra, A., Mohammad-Sedighi, H., & Reza, A. (2021). Computational analysis of the nonlinear vibrational behavior of perforated plates with initial imperfection using NURBS-based isogeometric approach. J. Comput. Design Eng., 8(5), 1307-1331.

[12] Huynh, G., Zhuang, X., Bui, H., Meschke, G., & Nguyen-Xuan, H. (2020). Elasto-plastic large deformation analysis of multi-patch thin shells by isogeometric approach. Finite Elements in Analysis and Design, 173, 103389.

[13] Payen, D. J., & Bathe, K.-J. (2011). Improved stresses for the 4-node tetrahedral element. Computers & Structures, 89(13-14), 1265-1273.

[14] Payen, D. J., & Bathe, K.-J. (2011). The use of nodal point forces to improve element stresses. Computers & Structures, 89(5-6), 485-495.

[15] Wu, Z., Wang, S., Xiao, R., & Yu, L. (2020). A local solution approach for level-set based structural topology optimization in isogeometric analysis. J. Comput. Design Eng., 7(4), 514-526.

[16] CHEN, Y., DENG, Z., & HUANG, Y. (2022). RECOVERY-BASED A POSTERIORI ERROR ESTIMATION FOR ELLIPTIC INTERFACE PROBLEMS BASED ON PARTIALLY PENALIZED IMMERSED FINITE ELEMENT METHODS. Int. J. Numeric. Anal. Model. 19(1).

[17] Cottrell, J., Hughes, T., & Reali, A. (2007). Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. Computer methods in applied mechanics and engineering, 196(41-44), 4160-4183.

[18] Xu, G., Li, B., Shu, L., Chen, L., Xu, J., & Khajah, T. (2019). Efficient r-adaptive isogeometric analysis with winslow’s mapping and monitor function approach. J. Comput. Appl. Math., 351, 186-197.

[19] Ji, Y., Wang, M., Yu, Y., & Zhu, C. (2022). Curvature-Based r-Adaptive Isogeometric Analysis with Injectivity-Preserving Multi-Sided Domain Parameterization. J. Sys. Sci. Compl., 1-24.

[20] Ji, Y., Wang, M.-Y., Wang, Y., & Zhu, C.-G. (2022). Curvature-Based R-Adaptive Planar NURBS Parameterization Method for Isogeometric Analysis Using Bi-Level Approach. Computer-Aided Design, 103305.

[21] Mirzakhani, A., Hassani, B., & Ganjali, A. (2015). Adaptive analysis of three-dimensional structures using an isogeometric control net refinement approach. Acta Mechanica, 226(10), 3425-3449.

[22] Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. International J. Numeric. Methods Eng., 33(7), 1331-1364.

[23] Hassani, B., Ganjali, A., & Tavakkoli, M. (2012). An isogeometrical approach to error estimation and

stress recovery. Europ. J. Mech.-A/Solids, 31(1), 101-109.

[24] Boroomand, B., & Zienkiewicz, O. C. (1997). Recovery by equilibrium in patches (REP). Int. J. Numeric. Methods Eng., 40(1), 137-164.

[25] Ganjali, A., & Hassani, B. (2020). Error Estimation and Stress Recovery by Patch Equilibrium in the Isogeometric Analysis Method. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 12.

[26] Boroomand, B., & Zienkiewicz, O. (1999). Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. Computer methods in applied mechanics and engineering, 176(1-4), 127-146.

[27] Piegl, L., & Tiller, W. (1996). The NURBS book: Springer Science & Business Media.

[28] Owen, D. R. J., & Hinton, H. (1980). Finite elements in plasticity, theory and practice.

[29] Sheng, D., Sloan, S. W., & Abbo, A. J. (2002). An automatic Newton–Raphson scheme. The Int. J. Geomech., 2(4), 471-502.

[30] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). The finite element method: its basis and fundamentals: Elsevier.

[31] Ainsworth, M., & Oden, J. T. (1993). A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. Numerische Mathematik, 65(1), 23-50.

[32] Chakrabarty, J. (2010). Applied plasticity (Vol. 758): Springer.

[33] de Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2011). Computational methods for plasticity: theory and applications: John Wiley & Sons.