مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۲/ دوره ۱۳/ شماره ۲/ صفحه ۸۹-۱۰۱

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

انجمن مهندسی ساخت و تولید ایران

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/JSFM.2023.10853.3401

ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌های مدرج تابعی متخلخل حامل جریان سیال

محمدعلی صباحی[۱]، علیرضا سعیدی[۲،*]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش تحلیل هموتوپی، یک حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد غیرخطی میکرولوله‌های متخلخل مدرج تابعی حامل جریان سیال ارائه شده است. معادلات حرکت بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی، تئوری تنش کوپل اصلاح شده و با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی نوشته شده‌اند. فرض می‌شود که میکرولوله متخلخل بوده و توزیع تخلخل در آن به سه صورت توزیع یکنواخت، توزیع غیریکنواخت متقارن و توزیع غیریکنواخت نامتقارن باشد. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت، از اصل همیلتون بهره گرفته شده است؛ همچنین از روش گالرکین برای تبدیل معادلات پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده شده است. درنهایت، با درنظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ثابت و استفاده از روش تحلیل هموتوپی، به حل تحلیلی معادلات حاکمه پرداخته شده است. پاسخ بدست آمده از این روش با روش عددی رانگه-کوتا راستی آزمایی شده است که نشان می‌دهد، روش تحلیل هموتوپی با در نظر گرفتن دو جمله از سری تیلور، دقت مناسبی دارد. نتایج نشان دادند که از بین طرح‌های توزیع تخلخل پیشنهادی در میکرولوله، طرح توزیع غیریکنواخت نامتقارن مناسب‌ترین است، زیرا میکرولوله در سرعت سیال بالاتری ناپایدار می‌شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیرخطی؛ میکرولوله حامل جریان سیال؛ مواد مدرج تابعی متخلخل؛ تئوری تنش کوپل اصلاح شده؛ روش تحلیل هموتوپی.

Nonlinear vibrations of functionally graded porous micropipes conveying fluid Flow

Mohammad Ali Sabahi[1], Ali Reza Saidi[2,*]

[1] Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

[2] Prof., Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

Abstract

In this paper, using homotopy analysis method, an analytical solution for the nonlinear free vibrations of the functionally graded porous micropipes conveying fluid flow is presented. The equations of motion are obtained based on Euler-Bernoulli beam theory and modified couple stress theory with consideration of geometric nonlinearity. It is assumed that the micropipe is porous and the porosity distribution is in three forms; uniform, non-uniform symmetric, and non-uniform asymmetric distributions. The Hamilton principle is used to obtain the governing equations of motion. Also, the Galerkin method is used to convert partial differential equations to ordinary differential equations. Finally, by considering immoveable simply-supported boundary conditions and using the homotopy analysis method, the analytical solution for the governing equations is performed. The results obtained from this method has been verified by the Runge-Kutta numerical method which shows that the homotopy analysis method has good accuracy by considering two terms of the Taylor series. The results showed that between the proposed porosity distribution schemes in the micropipe, the non-uniform asymmetric distribution pattern is the most suitable, because the microtube becomes unstable at a higher fluid velocity.

Keywords: Nonlinear Vibrations; Micropipe Conveying Fluid Flow; Functionally Graded Porous Materials; Modified Couple Stress Theory; Homotopy Analysis Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۴ ۳۲۱۱۱۷۶۳ ؛ فکس: ۰۳۴ ۳۲۱۱۴۰۵۰

آدرس پست الکترونیک: saidi@uk.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل میکرولوله‌های حاوی جریان سیال، به علت کاربردهای فراوان مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. از جمله کاربردهای میکرولوله‌ها می‌توان به استفاده در علم پزشکی و صنعت اشاره نمود. در علم پزشکی، از میکرولوله‌ها جهت تزریق دارو به بافت‌های سرطانی به صورت هدفمند استفاده می‌شود. با این روش، میزان مصرف دارو به حداقل رسیده و کارایی بالاتری نسبت به روش‌های سنتی دارد. استفاده از میکرولوله‌های حامل جریان سیال در حسگرهای زیستی، انتقال حرارت و نیمه هادی‌ها نمونه‌هایی از کاربرد در صنعت هستند.

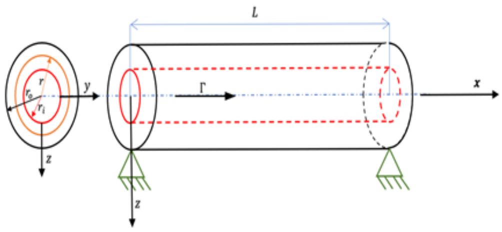
مطالعه‌های زیادی جهت مدل‌سازی ریاضی ارتعاشات و کمانش خطی انواع لوله‌ها (از اندازه بزرگ تا نانو) تحت شرایط مرزی متفاوت (گیردار، آزاد و لولا) ساخته شده از مواد مدرج تابعی و متخلخل و بر اساس تئوری‌های گوناگون انجام شده است [۱-۸]. مطالعات تجربی پیشین نشان دادند که استفاده از تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته برای تحلیل دینامیکی سازه‌های در مقیاس میکرو و نانو کارایی ندارد و به جای آن، استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده[۱] پیشنهاد شده است [۹-۱۱]؛ همچنین تئوری گرادیان کرنشی[۲] توسط یانگ و همکاران [۱۲] توسعه یافت که در آن از یک پارامتر مقیاس طولی ماده و دو پارامتر لامه استفاده شده است. این روش به صورت گسترده جهت تحلیل رفتار مکانیکی وابسته به اندازه میکروسازه‌ها مورد استفاده قرار گرفت.

تحلیل ارتعاشات و کمانش غیرخطی میکروتیرها با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی[۳] و تئوری تنش کوپل اصلاح شده بر روی بستر الاستیک غیرخطی توسط سیمسک [۱۳] انجام شده است. حل عددی برای ارتعاشات غیرخطی میکروتیرها با درنظر گرفتن حرکت سه بعدی، توسط قایش و همکاران [۱۴] صورت پذیرفته است. شافعی و همکاران [۱۵] بر روی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری بر اساس تئوری اویلر-برنولی و با درنظر گرفتن غیرخطی هندسی تحقیق نمودند. فرخی و قایش [۱۶] بر روی ارتعاشات اجباری غیرخطی میکرو ورق‌ها بر اساس تئوری برشی مرتبه اول کار کردند. تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی و کمانش میکروتیرها بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی و غیرخطی ون-کارمن[۴] توسط مجاهدی و رهایی‌فرد [۱۷] انجام شد. فرخی و همکاران [۱۸] بر روی پاسخ غیرخطی دینامیکی و استاتیکی تشدید کننده‌های پایه نانو لوله کربن[۵] تحت جریان متناوب و مستقیم برق بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی تحقیق نمودند. تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول با روش گالرکین توسط انصاری و همکاران [۱۹] صورت گرفت. قایش و همکاران [۲۰] بر روی ارتعاشات اجباری غیرخطی بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم مطالعه نمودند. بررسی تشدید غیرخطی میکروتیر تحت تحریک فرکانس چندگانه بر بستر غیرخطی وینکلر و پاسترناک[۶] توسط سعادت‌نیا و همکاران [۲۱] انجام شد. ستوده و همکاران [۲۲] به تحقیق بر روی ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی با درنظر گرفتن غیرخطی هندسی و استفاده از روش تحلیلی پرداختند. یانگ و همکاران [۲۳] بر روی حل نیمه تحلیلی ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌ها با درنظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی و تکیه‌گاه دوسر لولا مطالعه نمودند. ارتعاشات آزاد غیرخطی و خودتحریک میکرو تیر/لوله‌های حامل جریان سیال یکسر گیردار با درنظر گرفتن اثر گرانش توسط هو و همکاران [۲۴] مطالعه شده است. مشروطه و همکاران [۲۵] بر روی ارتعاشات آزاد غیرخطی میکرولوله‌های ویسکو الاستیک حامل جریان سیال با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با روش تحلیلی تکرار تغییرات[۷] مطالعه نمودند. دهرویه سمنانی و همکاران [۲۶] روی ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌ها تحت نیروی هارمونیک خارجی کار کردند. آنها معادلات بدست آمده را توسط روش عددی رانگه-کوتا حل نمودند. بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی میکرولوله‌های حامل جریان سیال با تکیه‌گاه دوسر گیردار در بستر الاستیک توسط کارل و اوزکایا [۲۷] انجام شد. شی و همکاران [۲۸] روی کمانش و ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌های مدرج تابعی با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی غیرمحلی تحقیق

[1] Modified couple stress theory
[2] Strain gradient theory
[3] Euler-Bernoulli beam theory
[4] Von-Kármán
[5] CNT-based
[6] Pasternak
[7] Variational iteration

نمودند. بابایی و همکاران [۲۹]، رفتار دینامیکی غیرخطی میکرولوله‌های منحنی تحت فشار جانبی یکنواخت را در محیط حرارتی مطالعه نمودند. ارتعاشات لوله‌های چرخان مدرج محوری حامل سیال با درنظرگیری اثرات اندازه توسط فروغی و ابراهیمی ممقانی [۳۰] ارائه شده است. خدابخش و همکاران [۳۱]، ارتعاشات غیرخطی لوله‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی و حامل جریان سیال را با روش تحلیل هموتوپی[1] تحلیل کردند. بابایی و اسلامی [۳۲] به مطالعه ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌های منحنی با توزیع تخلخل یکنواخت و استفاده از روش اغتشاشات[2] پرداختند. محمدی و همکاران [۳۳] به مطالعه رفتار دینامیکی دو لوله مستقیم مفصلی حامل جریان سیال پرداختند.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که تاکنون حل تحلیلی هموتوپی برای ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌های حامل جریان سیال ساخته شده از ماده مدرج تابعی متخلخل ارائه نشده است. در مقاله حاضر یک حل تحلیلی بر پایه هموتوپی (که روشی نسبتا جدید و قدرتمند است) برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌های حامل جریان سیال ساخته شده از ماده مدرج تابعی متخلخل ارائه می‌شود. از تئوری تیر اویلر-برنولی، با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده گردیده است. معادلات حاکم بر حرکت توسط اصل همیلتون[3] بدست آمده و با روش گالرکین جداسازی شده‌اند.



شکل ۱- مشخصات هندسی میکرولوله تحت جریان سیال

در نهایت، معادله غیرخطی بدست آمده با کمک روش تحلیل هموتوپی حل شده است.

۲- میکرولوله مدرج تابعی متخلخل

در شکل ۱، مدل میکرولوله حامل جریان سیال با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ثابت نشان داده شده است. طول، شعاع داخلی، شعاع خارجی و فاصله از مرکز میکرولوله مزبور به ترتیب برابر با L ، r_i، r_o و r است. سرعت سیال عبوری برابر Γ و محور طولی در راستای محور x است.

فرض می‌شود که میکرولوله از ماده مدرج تابعی متخلخل ساخته شده است. توزیع تخلخل برای حالت توزیع یکنواخت ، توزیع غیریکنواخت متقارن و توزیع غیریکنواخت نامتقارن به ترتیب در شکل‌های (۲- الف) تا (۲-ج) نشان داده شده است. خواص مکانیکی متناظر با این سه نوع توزیع در روابط (۱) تا (۳) آمده است. [۳۴]

$$E(z)=E_1(1-e_0\alpha) \\ G(z)=G_1(1-e_0\alpha) \\ \rho(z)=\rho_1\sqrt{1-e_m\alpha} \tag{۱}$$

$$E(z)=E_1\left(1-e_0\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{t}\right)\right) \\ G(z)=G_1\left(1-e_0\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{t}\right)\right) \\ \rho(z)=\rho_1\left(1-e_m\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{t}\right)\right) \tag{۲}$$

$$E(z)=E_1\left(1-e_0\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{2t}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ G(z)=G_1\left(1-e_0\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{t}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \rho(z)=\rho_1\left(1-e_m\cos\left(\frac{\pi\check{r}}{t}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{۳}$$

در روابط بالا، E، G، ρ و t به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی، چگالی و ضخامت جداره میکرولوله می‌باشند. E_1، G_1 و ρ_1 به ترتیب برابر با حداکثر مدول یانگ، حداکثر مدول برشی و حداکثر چگالی میکرولوله مدرج تابعی متخلخل هستند. پارامترهای $\check{r}$، e_0 و e_m به ترتیب بیانگر فاصله از وسط جداره، ضریب تخلخل و ضریب چگالی‌اند که آنها را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

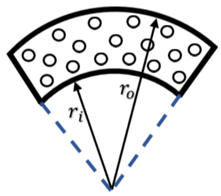
$$e_0=1-\frac{E_2}{E_1}, \qquad 0\le e_0<1 \\ e_m=1-\frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad 0\le e_m<1 \\ e_m=1-\sqrt{1-e_0} \tag{۴}$$

[1] Homotopy analysis method
[2] Perturbation method
[3] Hamilton's principle

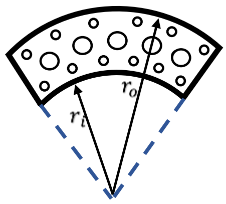
$$\breve{r} = r - \frac{r_i - r_o}{2}, \qquad r_i \le r \le r_o$$

پارامتر α در رابطه (۳)، از معادله زیر بدست می‌آید: [۳۴]

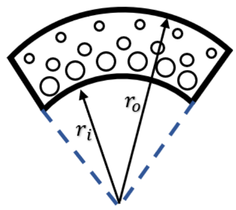
$$\alpha = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-e_0} - \frac{2}{\pi} + 1\right)^2 \qquad (۵)$$



(الف) طرح توزیع تخلخل ۱



(ب) طرح توزیع تخلخل ۲



(ج) طرح توزیع تخلخل ۳

شکل ۲- انواع طرح‌های توزیع تخلخل پیشنهادی در میکرولوله

۳- مدل سازی ریاضی

در این مقاله، از تئوری تیر اویلر-برنولی جهت مدل سازی میکرولوله حامل جریان سیال استفاده شده است. این تئوری بر اساس میدان جابجایی زیر بوده و فرض می‌شود که جابجایی میکرولوله تنها در صفحه $x-z$ است.

$$\begin{aligned} u_x(x,z,t) &= u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ u_y &= 0 \\ u_z(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، u و w به ترتیب جابجایی صفحه میانی میکرولوله در راستاهای x و z بوده و u_x، u_y و u_z جابجایی برای هر نقطه دلخواه از میکرولوله به ترتیب در جهت‌های x ، y و z می‌باشند.

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت، از اصل همیلتون استفاده شده است که به صورت زیر ارائه می‌شود

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt = 0 \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل میکرولوله حامل جریان سیال است که در کار حاضر، انرژی پتانسیل ذخیره شده در میکرولوله بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده محاسبه می‌شود. در این تئوری، انرژی کرنشی تابعی از تانسورکرنش طولی و تانسور انحنا است و آن را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$U = \int_0^L \int_A \{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij}\} dA dx, \quad i,j = 1,2,3 \qquad (۸)$$

در معادله (۸)، ε_{ij} تانسور کرنش ون-کارمن[۱]، χ_{ij} تانسور انحنای متقارن[۲] ، σ_{ij} تانسور تنش کلاسیک[۳] و m_{ij} تانسور تنش کوپل[۴] می‌باشند. با استفاده از روابط کرنش-جابجاییِ ون-کارمن، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، u_i بیانگر مولفه‌های جابجایی هستند $(i,j,k = 1,2,3)$. با جایگزینی روابط (۶) در روابط (۹) می‌توان ارتباط بین میدان جابجایی و کرنش‌های طولی را به شکل زیر نوشت [۳۱]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش برای ماده همسانگرد خطی، تنها مولفه غیر صفر تانسور تنش، از رابطه زیر بدست می‌آید

[1] Von-Kármán strain tensor
[2] Symmetric curvature tensor
[3] Classical stress tensor
[4] Couple stress tensor

$$\sigma_{xx} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \qquad (۱۱)$$

همچنین مولفه‌های تانسور انحنای متقارن و تنش کوپل از روابط زیر بدست می‌آیند [۲۲, ۳۲]

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right), \quad m_{ij} = 2Gl^2\chi_{ij} \qquad (۱۲)$$

در روابط (۱۲)، l پارامتر مقیاس طولی ماده[1] و θ_i مولفه‌های بردار چرخش است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta_i = e_{ipq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p} \qquad (۱۳)$$

e_{ipq} نماد جایگشت[2] است. با جایگذاری میدان جابجایی در روابط (۱۲) و (۱۳)، روابط بعدی بدست می‌آیند

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_{xz} = \chi_{zx} = \chi_{yz} = \chi_{zy} = 0$$
$$m_{xy} = m_{yx} = -Gl^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, m_{xz} = m_{zx} = m_{yz} = m_{zy} = 0 \qquad (۱۴)$$

با جایگزینی روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۴) در رابطه (۸)، تابع انرژی کرنشی حاصل می‌گردد.

تابع انرژی جنبشی میکرولوله حامل جریان سیال برابر است با

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L\left\{M\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] + m\left[\left(\Gamma + \frac{\partial u}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}dx \qquad (۱۵)$$

که M و m به ترتیب بیانگر جرم میکرولوله و جرم سیال بر واحد طول هستند. با جایگزینی معادلات بدست آمده برای تابع انرژی پتانسیل و تابع انرژی جنبشی میکرولوله حامل جریان سیال، در اصل همیلتون و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب δu و δw، معادلات حرکت میکرولوله به شکل زیر بدست می‌آیند

δu:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\overline{EA}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\} + m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \Gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (۱۶\text{-الف})$$

δw:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\overline{EA}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \Gamma^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\overline{EI} + \overline{GA}l^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (۱۶\text{-ب})$$

شرایط مرزی عبارتند از

$$\overline{EA}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] - m\Gamma\left(\Gamma + \frac{\partial u}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad u = u_0 \qquad (۱۷\text{-الف})$$

$$\left\{\overline{EA}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial w}{\partial x} - (\overline{EI} + \overline{GA}l^2)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - m\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad w = w_0 \qquad (۱۷\text{-ب})$$

$$(\overline{EI} + \overline{GA}l^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad (۱۷\text{-پ})$$

پارامترهای استفاده شده در معادلات بالا، برابر هستند با

$$\overline{EI} = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_o}E(r)r^2\sin^2(\theta)\,(rdrd\theta)$$
$$\overline{GA} = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_o}G(r)\,(rdrd\theta) \qquad (۱۸)$$

[1] Material length scale parameter

[2] Permutation symbol

$$\overline{EA}=\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_o}E(r)\,(rdrd\theta)$$

در معادله (۱۸)، r_i و r_o به ترتیب بیانگر شعاع داخلی و شعاع خارجی میکرولوله بوده و عبارت‌های $M(\partial^2u/\partial t^2)$ و $m(\partial^2u/\partial t^2+2\Gamma(\partial^2u/\partial x\partial t))$ به دلیل کوچک بودن، نادیده گرفته شده‌اند؛ همچنین از جمله $m\Gamma^2(\partial^2u/\partial x^2)$ در مقابل $\overline{EA}$ می‌توان صرف‌نظر کرد [۲۲]؛ بنابراین از این معادله می‌توان نتیجه گرفت که

$$\overline{EA}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)=c_1(t) \tag{۱۹}$$

با ساده سازی و اعمال شرایط مرزی در $u(x=0)=0$ و $u(x=L)=0$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}\overline{EA}&\left(u+\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right)\\&=x\left[\frac{\overline{EA}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right]\end{aligned} \tag{۲۰}$$

با جایگزین کردن رابطه (۲۰) در (۱۶-ب)، عبارت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}-&\left[\frac{\overline{EA}}{2L}\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right]\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\\&+m\left(\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+2\Gamma\frac{\partial^2w}{\partial x\partial t}+\Gamma^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\&+M\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+(\overline{EI}+\overline{GA}l^2)\frac{\partial^4w}{\partial x^4}=0\end{aligned} \tag{۲۱}$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر ساده می‌شوند

$$\begin{aligned}\frac{\overline{EA}}{2L}&\left[\int_0^L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dx\right]\frac{\partial w}{\partial x}\\&-(\overline{EI}+\overline{GA}l^2)\frac{\partial^3w}{\partial x^3}\\&-m\Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\Gamma\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\end{aligned}\qquad \text{یا}\qquad w=w_0$$

(۲۲-الف)

$$(\overline{EI}+\overline{GA}l^2)\frac{\partial^2w}{\partial x^2}=0\qquad \text{یا}\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

(۲۲-ب)

۴- روش حل

در ابتدا از روش گالرکین جهت تبدیل معادلات غیرخطی پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی استفاده شده است. این روش عبارتی به صورت زیر برای $w(x,t)$ در نظر می‌گیرد

$$w(x,t)=W(x)T(t) \tag{۲۳}$$

$W(x)$ و $T(t)$ به ترتیب تابع شکل[1] و تابع وابسته به زمان هستند. با فرض شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، می‌توان تابع شکل را به صورت $W(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ نوشت. با جایگزین کردن رابطه (۲۳) در رابطه (۲۱) و ضرب کردن عبارت حاصل شده در $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ و در نهایت با انتگرال گیری از عبارت بدست آمده نسبت به x (از صفر تا L)، معادله دافینگ[2] زیر بدست می‌آید

$$\ddot{T}+X_1\dot{T}+X_2T+X_3T^3=0 \tag{۲۴-الف}$$

$$\begin{aligned}X_1&=\frac{\int_0^L2m\Gamma W'(x)W(x)dx}{(m+M)\int_0^L\big(W(x)\big)^2dx}\\X_2&=\frac{\int_0^L[(\overline{EI}+\overline{GA}l^2)W^{(4)}(x)+m\Gamma^2W''(x)]W(x)dx}{(m+M)\int_0^L\big(W(x)\big)^2dx}\\X_3&=-\frac{\int_0^L\frac{\overline{EA}}{2L}\left[\int_0^L\big(W'(x)\big)^2dx\right]W''(x)W(x)dx}{(m+M)\int_0^L\big(W(x)\big)^2dx}\end{aligned} \tag{۲۴-ب}$$

با وارد کردن شکل مود درنظر گرفته شده در روابط (۲۴-ب) و ساده سازی، عبارت‌های زیر برای ضرایب معادله دافینگ حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}X_1&=0\\X_2&=-\frac{\pi^2(\Gamma^2L^4m-(\overline{EI}+\overline{GA}l^2)L^2\pi^2)}{L^6(m+M)}\\X_3&=\frac{\overline{EA}\pi^4}{4L^4(m+M)}\end{aligned} \tag{۲۵}$$

شرایط اولیه حاکم بر میکرولوله به شرح زیر می‌باشند

$$T(0)=a\,,\qquad \left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \tag{۲۶}$$

که a میزان جابجایی اولیه میکرولوله از حالت تعادل است. برای حل از روش تحلیل هموتوپی در ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده شده است:

$$\varphi(\tau)=T(t)\,,\qquad \tau=\omega t \tag{۲۷}$$

بنابراین معادله (۲۴-الف) و شرایط اولیه به شکل زیر تبدیل می‌شوند

[1] Shape function

[2] Duffing equation

$$\omega^2 \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + X_2\varphi(\tau) + X_3\varphi^3(\tau) = 0, \quad \varphi(0) = a, \quad \left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \qquad (۲۸)$$

معادله مرتبه صفر روش تحلیل هموتوپی برابر است با

$$(1-p)\hat{L}[\xi(\tau,p) - \varphi_0(\tau)] = ph\hat{N}[\xi(\tau,p)], \quad 0 \le p \le 1 \qquad (۲۹)$$

در این معادله، p و h به ترتیب پارامتر تعبیه[1] و پارامتر کمکی[2] غیرصفر (که پارامتر کنترل همگرایی[3] نیز نامیده می‌شود) بوده و $\hat{L}$ و $\hat{N}$ به ترتیب عملگرهای تابع کمکی خطی و تابع غیرخطی هستند. $\varphi_0(\tau)$ حدس اولیه برای $\varphi(\tau)$ و $\xi(\tau,p)$ تابع مجهول است. زمانی که p از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، $\xi(\tau,p)$ از حدس اولیه $\varphi_0(\tau)$ تا حل دقیق $\varphi(\tau)$ تغییر می‌کند. می‌توان $\xi(\tau,p)$ را با کمک بسط تیلور به صورت زیر ارائه نمود:

$$\xi(\tau,p) = \varphi_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau)\, p^k, \quad \varphi_k(\tau) = \frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k \varphi(\tau,p)}{\partial p^k}\right|_{p=0} \qquad (۳۰)$$

با در نظر گرفتن دو جمله از بسط تیلور، تابع مجهول به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\xi(\tau,p) = \varphi_0(\tau) + \varphi_1(\tau)\, p \qquad (۳۱)$$

با مشتق گرفتن از معادله (۲۹) نسبت به p و مساوی صفر قرار دادن p، معادله مرتبه یک روش تحلیل هموتوپی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{L}[\varphi_1(\tau)] = h\hat{N}[\varphi_0(\tau)] \qquad (۳۲)$$

با درنظر گرفتن عملگر کمکی خطی و عملگر غیرخطی به شکل زیر [۲۲]

$$\hat{N}[\xi(\tau,p)] = \omega^2 \frac{\partial^2\xi(\tau,p)}{\partial\tau^2} + X_2\xi(\tau,p) + X_3\xi^3(\tau,p) \qquad (۳۳\text{-الف})$$

$$\hat{L}[\xi(\tau,p)] = \omega^2 \left\{\frac{\partial^2\xi(\tau,p)}{\partial\tau^2} + \xi(\tau,p)\right\} \qquad (۳۴\text{-ب})$$

و درنظر گرفتن شرایط اولیه زیر برای φ_0 و φ_1

$$\varphi_0(0) = a, \quad \varphi_1(0) = 0 \qquad (۳۴)$$

$$\left.\frac{d\varphi_0(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad \left.\frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0$$

می‌توان نتیجه گرفت که با انتخاب $\varphi_0 = a\,cos(\tau)$، هم شرایط اولیه بیان شده در رابطه (۳۴) برآورده می‌شوند و هم در قسمت خطی معادله ($\hat{L}[\xi(\tau,0)] = \hat{L}[\varphi_0(\tau)] = 0$) صدق می‌کند [۳۵]. با استفاده از رابطه (۳۳) و جایگزینی آن در معادله مرتبه یک روش تحلیل هموتوپی (رابطه (۳۲)) و درنظر گرفتن $h = 1$، نتیجه می‌شود که

$$\omega^2 \left\{\frac{d^2\varphi_1(\tau)}{d\tau^2} + \varphi_1(\tau)\right\} = \omega^2 \frac{d^2\varphi_0(\tau)}{d\tau^2} + X_2\varphi_0(\tau) + X_3{\varphi_0}^3(\tau) \qquad (۳۵)$$

با جایگزینی $\varphi_0 = a\,cos(\tau)$ در معادله دیفرانسیل بالا و حل آن، $\varphi_1(\tau)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_1(\tau) = \frac{X_3 a^3}{8{\omega_{nl}}^2}\{\cos(\tau) - cos^3(\tau)\} + \frac{1}{8{\omega_{nl}}^2}(3X_3a^3 - 4a{\omega_{nl}}^2 + 4aX_2)\,\tau\sin(\tau) \qquad (۳۶)$$

به دلیل اینکه با افزایش τ، نباید جواب $\varphi_1(\tau)$ به سمت بی‌نهایت میل کند، بایستی ضریب $\tau\sin(\tau)$ مساوی صفر گردد. از این‌رو فرکانس طبیعی غیرخطی (ω_{nl}) به صورت زیر حاصل می‌گردد؛ همچنین با صفر در نظر گرفتن عامل غیرخطی (X_3)، فرکانس طبیعی خطی (ω_l) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_{nl} = \frac{1}{2}\sqrt{3X_3a^2 + 4X_2}, \quad \omega_l = \sqrt{X_2} \qquad (۳۷)$$

با جایگذاری رابطه (۳۶) و $\varphi_0 = a\,cos(\tau)$ در رابطه (۳۱) و درنظر گرفتن $p = 1$، نتیجه می‌گردد:

$$\varphi(\tau) \cong a\,cos(\tau) + \frac{X_3a^3}{8{\omega_{nl}}^2}\{\cos(\tau) - cos^3(\tau)\} \qquad (۳۸)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\tau = \omega t$ و قرار دادن آن در رابطه (۳۸)، عبارتی برای $T(t)$ بدین صورت حاصل می‌شود

$$T(t) = a\,cos(\omega_{nl}t) + \frac{X_3a^3}{8{\omega_{nl}}^2}\{\cos(\omega_{nl}t) - cos^3(\omega_{nl}t)\} \qquad (۳۹)$$

---

1 Embedding parameter
2 Auxiliary parameter
3 Convergence control parameter

رابطه (۳۹) نشان‌دهنده پاسخ زمانی برای ارتعاشات آزاد غیرخطی میکرولوله‌های متخلخل مدرج تابعی حامل جریان سیال است.

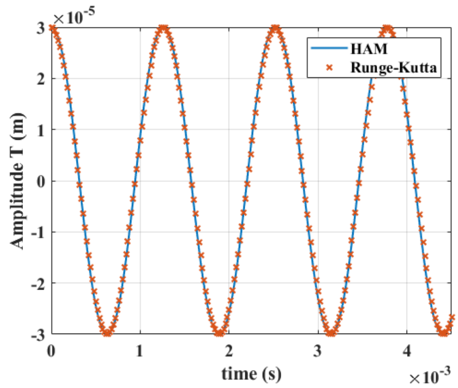
۵- راستی آزمایی

جهت بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی میکرولوله‌های مدرج تابعی متخلخل از نتایج عددی استفاده شده است. در نتایج پیش‌رو، به فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی بر حسب سرعت سیال و پاسخ زمانی به ازای تاثیر پارامترهای متفاوت پرداخته شده است. برای بدست آوردن نتایج عددی، از ماده‌ای به نام فوم فلزی حفره باز[1] (که مشخصات آن در جدول ۱ آمده) استفاده شده است [۳۴].

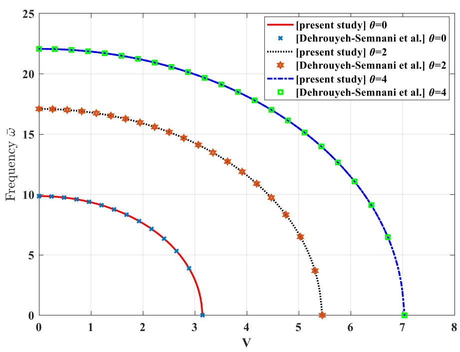
جدول ۱- مشخصات میکرولوله و سیال

نام	اندازه	نماد
شعاع داخلی میکرولوله	۲۰ μm	r_i
شعاع خارجی میکرولوله	۳۰ μm	r_o
طول میکرولوله	۱۵ mm	L
پارامتر مقیاس طولی ماده	۱۵ μm	l
حداکثر مدول یانگ میکرولوله	۲۰۰ GPa	E_1
حداکثر مدول برشی میکرولوله	۷۵ GPa	G_1
حداکثر چگالی میکرولوله	۷۸۵۰ Kg/m^3	ρ_1
چگالی سیال	۱۰۰۰ Kg/m^3	ρ
دامنه جابجایی اولیه	۳۰ μm	a
میزان تخلخل	۰/۲	e_0

در ابتدا به صحت سنجی نتایج پرداخته شده است، برای این کار، معادله دافینگ (رابطه (۲۴)) از روش عددی رانگه-کوتا حل شده است. نتایج این بررسی در شکل ۳، بیانگر قابل قبول بودن دقت روش تحلیل هموتوپی با درنظر گرفتن دوجمله از بسط تیلور است. روابط (۳۷) که نشان دهنده فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی هستند نیز توسط مرجع [۲۲] آورده شده است. نتایج فرکانس طبیعی بدون بُعد ($\bar{\omega}$) برحسب سرعت سیال بی‌بُعد (V) حاصل شده از کار حاضر با مرجع [۲۶] راستی آزمایی شده است. در این شکل θ نسبت سفتی بی‌بُعد میکرولوله است.



شکل ۳- مقایسه پاسخ زمانی بدست آمده از روش تحلیل هموتوپی و روش رانگه-کوتا برای طرح توزیع تخلخل ۳



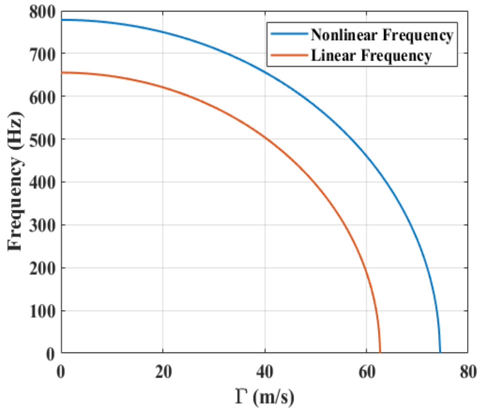
شکل ۴- مقایسه فرکانس طبیعی-سرعت سیال بدون بُعد بدست آمده از کار حاضر با مرجع [۲۶]

۶- نتایج عددی

از شکل ۵ تا ۷، با استفاده از داده‌های موجود در جدول ۱، نمودار فرکانس بر حسب سرعت سیال ارائه شده است. با دقت در این شکل‌ها دیده می‌شود که با افزایش سرعت سیال، فرکانس طبیعی میکرولوله کاهش می‌یابد تا اینکه با محور افقی برخورد نماید. در این سرعت سیال، میکرولوله ناپایدار شده که به آن سرعت بحرانی سیال گفته می‌شود. در واقع، زمانی که فرکانس سیستم پایستاری[2] به صفر برسد، ناپایداری خود را به

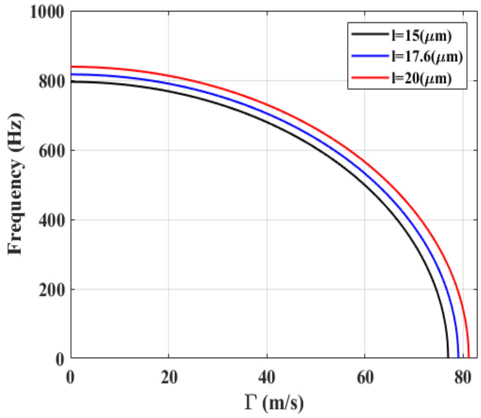
[1] Open-cell metal foam
[2] Conservative

دلیل دیورژانس[1] از دست می‌دهد. در شکل ۵، فرکانس خطی و غیرخطی میکرولوله با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همانطور که قابل مشاهده است، در یک سرعت مشخص، فرکانس طبیعی غیرخطی از فرکانس طبیعی خطی بزرگتر است و با افزایش سرعت سیال، اختلاف بین فرکانس خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد.



شکل ۵- فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی میکرولوله بر حسب سرعت سیال عبوری از آن با درنظر گرفتن طرح توزیع تخلخل ۲

شکل ۶ نشان دهنده فرکانس غیرخطی-سرعت سیال با درنظر گرفتن پارامترهای مقیاس طولی متفاوت است. در این شکل از سه پارامتر مقیاس طولی متفاوت بهره گرفته شده است که هرکدام با دیگری، اختلاف تقریبا یکسانی دارد؛ همچنین در شکل، مساوی بودن اختلاف بین دو پارامتر مقیاس طولی متوالی در سرعت سیال صفر به صورت تقریبی رعایت شده است؛ اما با افزایش سرعت سیال عبوری از میکرولوله، اختلاف بین دو نمودار متوالی، افزایش می‌یابد به

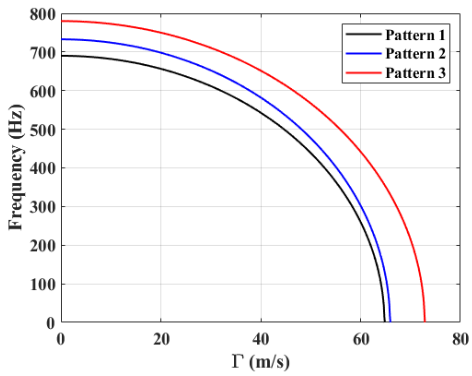


شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب سرعت سیال عبوری با درنظر گرفتن پارامترهای مقیاس طولی متفاوت و طرح توزیع تخلخل ۳

طوری که بازشدگی خطوط از یکدیگر در سرعت‌های بالای سیال عبوری به خوبی نمایان است.

در شکل ۷، به بررسی پاسخ فرکانس طبیعی غیرخطی به ازای سرعت سیال عبوری از میکرولوله با درنظر گرفتن اثر نمونه‌های توزیع تخلخل پیشنهادی، پرداخته شده است. این شکل از آن جهت اهمیت دارد که مقایسه‌ای بین طرح‌هاست و امکان انتخاب مناسب‌ترین نمونه را از بین طرح‌های توزیع تخلخل پیشنهادی می‌دهد، به عبارت دیگر، آن توزیع تخلخلی بهتر است که میکرولوله در سرعت سیال عبوری بالاتری، ناپایدار شود. همانطور که مشاهده است، میکرولوله با طرح توزیع تخلخل ۳، در سرعت سیال بالاتری ناپایدار می‌شود. به عبارت دیگر، در سرعت سیال بالاتری، ناپایداری خود را به دلیل پدیده دیورژانس از دست می‌دهد؛ بنابراین از بین نمونه‌های توزیع تخلخل پیشنهادی، طرح ۳ بهینه است.

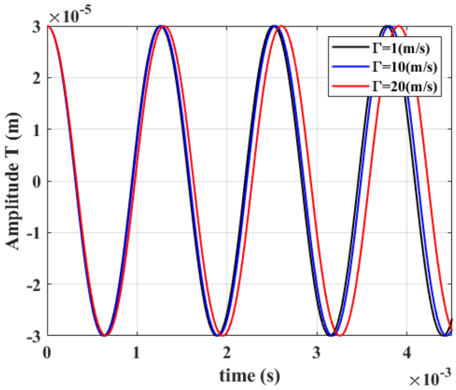
[1] Divergence



شکل ۷- مقایسه فرکانس طبیعی غیرخطی برای سه طرح توزیع تخلخل ۱، ۲ و ۳ برحسب سرعت سیال عبوری و میزان تخلخل برابر ۰/۵

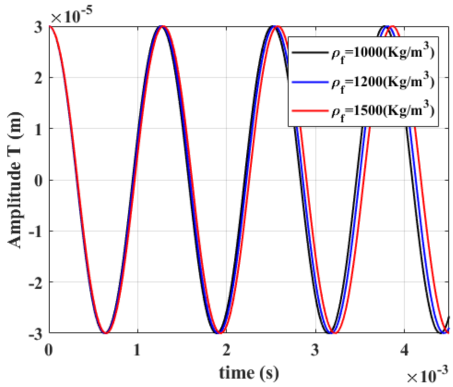
در شکل‌های ۸ تا ۱۰، پاسخ زمانی غیرخطی میکرولوله نشان داده شده است. به عبارت دیگر، این شکل‌ها جابجایی نقطه‌ی وسط صفحه میانی میکرولوله را برحسب زمان در راستای محور z نشان می‌دهند. از آنجایی که ماده سازنده میکرولوله دارای سفتی خمشی بالایی است، فرکانس طبیعی نوسانات زیاد و دوره تناوبی ارتعاشات کم است. برای ترسیم این شکل‌ها، از داده‌های موجود در جدول ۱ استفاده شده است.

در شکل ۸، پاسخ زمانی میکرولوله با درنظر گرفتن سرعت‌های مختلف سیال عبوری از آن، نشان داده شده است. همانطور که نمایان است، با افزایش سرعت سیال عبوری، دوره تناوبی ارتعاشات افزایش می‌یابد. سه سرعت سیال عبوری ۱، ۱۰ و ۲۰ متر بر ثانیه مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. با اینکه بین دو سرعت متوالی، اختلاف تقریبا یکسانی وجود دارد، اما شاهد پاسخ زمانی کاملا متفاوتی برای میکرولوله با سیال عبوری ۲۰ متر بر ثانیه نسبت به دو حالت دیگر هستیم که تفاوت زیاد به دلیل افزایشی بودن شیب نمودار فرکانس-سرعت سیال است.



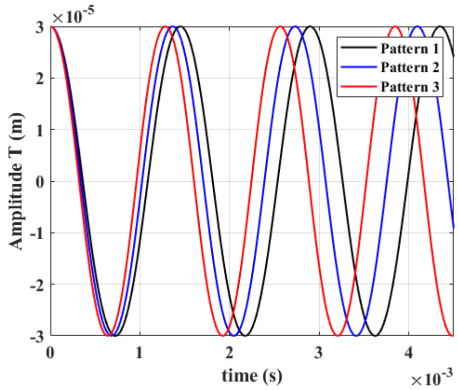
شکل ۸- پاسخ زمانی میکرولوله با درنظر گرفتن سرعت سیال عبوری متفاوت و طرح توزیع تخلخل ۳

شکل ۹ نمایانگر پاسخ زمانی میکرولوله به ازای مقادیر متفاوت چگالی سیال عبوری از آن است. با توجه به اینکه امکان عبور سیال‌های با چگالی متفاوت از میکرولوله وجود دارد، بنابراین تحلیل ارتعاشات آن ضروری می‌باشد. از شکل چنین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش چگالی سیال عبوری، دوره تناوبی ارتعاشات افزایش می‌یابد. از سرعت سیال عبوری برابر ۱ متر بر ثانیه جهت نمایش این شکل بهره گرفته شده است.



شکل ۹- پاسخ زمانی میکرولوله با درنظر گرفتن چگالی سیال‌های متفاوت و طرح توزیع تخلخل ۳ و سرعت سیال عبوری برابر با ۱ متر بر ثانیه

برای بررسی عملکرد سه طرح توزیع تخلخل پیشنهادی بر روی پاسخ زمانی میکرولوله مدرج تابعی متخلخل، شکل ۱۰ ارائه شده است. به ترتیب طرح‌های توزیع تخلخل ۱، ۲ و ۳ بیشترین دوره تناوبی را دارند.



شکل ۱۰- مقایسه پاسخ زمانی سه طرح توزیع تخلخل ۱، ۲ و ۳ با سرعت سیال عبوری برابر ۱ متر بر ثانیه عبوری و میزان تخلخل برابر ۰/۵

با توجه به شکل، اختلاف دوره تناوبی طرح‌های پیشنهادی تقریبا باهم برابر است. از شکل ۱۰ چنین نتیجه گرفته می‌شود که طرح توزیع تخلخل ۳ بهینه است؛ بنابراین با انتخاب این طرح توزیع تخلخل، شاهد دوره تناوبی کمتری نسبت به دیگر طرح‌های توزیع تخلخل خواهیم بود. سیال‌های عبوری از هر سه میکرولوله با طرح‌های توزیع تخلخل ۱، ۲ و ۳، سرعتی یکسان و برابر ۱ متر بر ثانیه دارند.

۷- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی میکرولوله‌های مدرج تابعی متخلخل با شرایط مرزی دوسر تکیه‌گاه ساده ثابت حاوی جریان سیال مورد تحلیل قرار گرفته است. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت، از تئوری تیر اویلر برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده گردیده است. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت، توسط روش گالرکین جداسازی و با اعمال شرایط مرزی و تابع شکل، به معادله دافینگ تبدیل شدند. با استفاده از روش تحلیل هموتوپی، معادله غیرخطی حل شد و فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی و همچنین پاسخ زمانی برای ارتعاشات میکرولوله بدست آمد. در ادامه به بررسی اثر مشخصه‌هایی نظیر پارامتر مقیاس طولی همچنین سرعت و چگالی سیال عبوری از آن و عملکرد سه طرح توزیع تخلخل بر روی فرکانس طبیعی و پاسخ زمانی میکرولوله پرداخته شد. برخی از نکات کلیدی بدست آمده از کار حاضر عبارتند از:

- ✓ با درنظر گرفتن شرایط مرزی تکیه گاه ساده ثابت، میرایی ناشی از سیال حذف می‌شود.
- ✓ در سیستم‌های بدون میرایی، روش تحلیل هموتوپی با درنظر گرفتن دو جمله از سری تیلور، دقت قابل قبولی در ارائه نتایج دارد.
- ✓ در یک سرعت مشخص، همواره فرکانس طبیعی خطی کمتر از فرکانس طبیعی غیرخطی است.
- ✓ با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده، سرعت سیال بحرانی افزایش می‌یابد.
- ✓ با افزایش چگالی سیال و سرعت سیال، دوره تناوبی ارتعاشات افزایش می‌یابد.
- ✓ بهینه‌ترین طرح توزیع تخلخل برای میکرولوله، طرح توزیع تخلخل غیریکنواخت نامتقارن می‌باشد.

مراجع

[1] M. Hosseini and R. Bahaadini (2016) "Size dependent stability analysis of cantilever micro-pipes conveying fluid based on modified strain gradient theory," I.J. ES, vol. 101, pp. 1-13.
[2] M. Hosseini, A. Z. B. Maryam, and R. Bahaadini (2017) "Forced vibrations of fluid-conveyed double piezoelectric functionally graded micropipes subjected to moving load," M. and N., vol. 21, no. 8, pp. 1-16.
[3] R. Bahaadini and A. R. Saidi (2018) "Stability analysis of thin-walled spinning reinforced pipes conveying fluid in thermal environment," E. J. of M.-A/Solids, vol. 72, pp. 298-309.
[4] R. Bahaadini, A. R. Saidi, and M. Hosseini (2019) "Flow-induced vibration and stability analysis of carbon nanotubes based on the nonlocal strain gradient Timoshenko beam theory," J. of V. and C., vol. 25, no. 1, pp. 203-218.
[5] A. Amiri, A. Masoumi, and R. Talebitooti (2020) "Flutter and bifurcation instability analysis of fluid-conveying micro-pipes sandwiched by magnetostrictive smart layers under thermal and magnetic field," I. J. of Mechanics and M.D., pp. 1-20.
[۶] م. سعیدیها و ا. کرمی محمدی (۲۰۱۹) "تحلیل ارتعاشات لوله حاوی جریان سیال، از جنس ماده هدفمند تابعی در راستای ضخامت," مکانیک سازه ها و شاره ها، ۹(۴) : ۱۰۷-۱۱۶.
[۷] م. حسینی و ع. زندی باغچه مریم (۲۰۱۹) "بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد ساختارهای مختلف نانو لوله های برن نیترید تحت تنش اولیه," فصلنامه م. ه، ۱۵(۳) : ۳۳-۴۶.
[8] M. Rezaee and V. Arab Maleki (2017) "Vibration Analysis of Fluid Conveying Viscoelastic Pipes

Rested on Non-Uniform Winkler Elastic Foundation," (in eng), Modares M. E., vol. 16, no. 12, pp. 87-94.

[9] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, and P. Tong (2003) "Experiments and theory in strain gradient elasticity," J. of the M. and P. of Solids, vol. 51, no. 8, pp. 1477-1508.

[10] C. Liebold and W. H. Müller (2016) "Comparison of gradient elasticity models for the bending of micromaterials," C. M. Science, vol. 116, pp. 52-61.

[11] D. Liu et al. (2013) "Toward a further understanding of size effects in the torsion of thin metal wires: an experimental and theoretical assessment," I. J. of Plasticity, vol. 41, pp. 30-52.

[12] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong (2002) "Couple stress based strain gradient theory for elasticity," International journal of solids and structures, vol. 39, no. 10, pp. 2731-2743.

[13] M. Şimşek (2014) "Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He’s variational method," C. S., vol. 112, pp. 264-272.

[14] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, and M. Amabili (2014) "In-plane and out-of-plane motion characteristics of microbeams with modal interactions," C. Part B: Eng, vol. 60, pp. 423-439.

[15] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri (2016) "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams," International Journal of Engineering Science, vol. 102, pp. 12-26.

[16] H. Farokhi and M. H. Ghayesh (2016) "Nonlinear size-dependent dynamics of an imperfect shear deformable microplate," J. of S. V., vol. 361, pp. 226-242.

[17] M. Mojahedi and M. Rahaeifard (2016) "A size-dependent model for coupled 3D deformations of nonlinear microbridges," I. J of E. S., vol. 100, pp. 171-182.

[18] H. Farokhi, M. P. Païdoussis, and A. K. Misra (2016) "A new nonlinear model for analyzing the behaviour of carbon nanotube-based resonators," J. of S. V., vol. 378, pp. 56-75.

[19] R. Ansari, R. Gholami, and A. Shahabodini (2016) "Size-dependent geometrically nonlinear forced vibration analysis of functionally graded first-order shear deformable microplates," J. of Mechanics, vol. 32, no. 5, pp. 539-554.

[20] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, and A. Gholipour (2017) "Oscillations of functionally graded microbeams," I. J. of E. S., vol. 110, pp. 35-53.

[21] Z. Saadatnia, H. Askari, and E. Esmailzadeh, (2018) "Multi-frequency excitation of microbeams supported by Winkler and Pasternak foundations," J of V. C., vol. 24, no. 13, pp. 2894-2911.

[22] A. Setoodeh and S. Afrahim (2014) "Nonlinear dynamic analysis of FG micro-pipes conveying fluid based on strain gradient theory," Com S., vol. 116, pp. 128-135.

[23] T.-Z. Yang, S. Ji, X.-D. Yang, and B. Fang, (2014) "Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes," I. J of E. S., vol. 76, pp. 47-55.

[24] K. Hu, Y. Wang, H. Dai, L. Wang, and Q. Qian (2016) "Nonlinear and chaotic vibrations of cantilevered micropipes conveying fluid based on modified couple stress theory," I. J of E. S., vol. 105, pp. 93-107.

[25] S. Mashrouteh, M. Sadri, D. Younesian, and E. Esmailzadeh (2016) "Nonlinear vibration analysis of fluid-conveying microtubes," Nonlinear Dyn, vol. 85, no. 2, pp. 1007-1021.

[26] A. M. Dehrouyeh-Semnani, M. Nikkhah-Bahrami, and M. R. H. Yazdi (2017) "On nonlinear vibrations of micropipes conveying fluid," I. J. of E. S., vol. 117, pp. 20-33.

[27] S. Kural and E. Özkaya (2017) "Size-dependent vibrations of a micro beam conveying fluid and resting on an elastic foundation," J of V. and Con, vol. 23, no. 7, pp. 1106-1114.

[28] G.-L. She, F.-G. Yuan, Y.-R. Ren, H.-B. Liu, and W.-S. Xiao (2018) "Nonlinear bending and vibration analysis of functionally graded porous tubes via a nonlocal strain gradient theory," Com S., vol. 203, pp. 614-623.

[29] H. Babaei, Y. Kiani, and M. Eslami, (2018) "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shallow curved tubes in thermal environment," Thin-Walled S., vol. 132, pp. 48-57.

[۳۰] فروغی, علی, ا. ممقانی ,علی, (۲۰۲۰)"مطالعه پارامتریک دینامیکی لوله‌های چرخان مدرج محوری حامل سیال با درنظرگیری اثرات اندازه," مکانیک سازه ها و شاره ها،۱۰(۴): ۱۴۵-۱۶۳.

[31] R. Khodabakhsh, A. R. Saidi, and R. Bahaadini (2020) "An analytical solution for nonlinear vibration and post-buckling of functionally graded pipes conveying fluid considering the rotary inertia and shear deformation effects," A. O. Res., vol. 101, p. 102277.

[32] H. Babaei and M. R. Eslami (2020) "On nonlinear vibration and snap-through stability of porous FG curved micro-tubes using two-step perturbation technique," Com S., vol. 247, p. 112447.

[۳۳] محمدی, ن. بهرامی, منصور, اشرفی و نریمان, "بررسی رفتار دینامیکی لوله‌های مفصلی حامل سیال با سرعت هارمونیک با استفاده از روش مقیاس زمانی چندگانه," مکانیک سازه ها و شاره ها، ۱۱(۳) : ۵۳-۷۰.

[34] D. Chen, S. Kitipornchai, and J. Yang (2016) "Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core," Thin-Walled S., vol. 107, pp. 39-48.

[35] M. Turkyilmazoglu (2012) "An effective approach for approximate analytical solutions of the damped Duffing equation," Phys. Scri., vol. 86, no. 1, p. 015301.