



## تحلیل دینامیکی و پایداری تیرهای رایلی مدرج تابعی متخلخل با حرکت طولی در محیط‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی

محمد رضا شهنازی<sup>۱</sup>، علی ابراهیمی ممقانی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران

<sup>۲</sup> دکتری تخصصی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۳۱

### چکیده

در این پژوهش، اثر میدان‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی بر دینامیک تیرهای مدرج تابعی متحرک محوری با در نظرگیری مدل‌های مختلف متخلخل مطالعه شده است؛ همچنین، مطالعات پارامتریک برای شفاف‌سازی اثرات فاکتور اینرسی دورانی، بستر ویسکوهیتنی، شاخص توانی مواد، نیروی پیرو و شرایط مرزی بر فرکانس‌های ارتعاشاتی و آستانه ناپایداری انجام شده‌اند. خواص مکانیکی به صورت عرضی طبق قانون توانی مدرج شده‌اند. مدل‌های مختلف متخلخل یکنواخت و غیریکنواخت در نظر گرفته شده‌اند. تیر در شرایط متغیر دمایی و رطوبتی ارتعاش می‌کند و تحت یک میدان مغناطیسی طولی خارجی قرار دارد. معادله دینامیکی سیستم براساس اصل تعمیم یافته همیلتون و فرضیات تئوری تیر رایلی استخراج شده است. با کمک روش گالرکین، مسئله مقدار ویژه حل شده است و مشخصات فرکانسی و مرزهای ناپایداری سیستم به صورت عددی مشخص شده‌اند. سرعت محوری مربوط به ناپایداری استاتیکی سیستم به صورت تحلیلی تعیین شده است. نتایج نشان داده‌اند که با افزایش تخلخل برای سیستم با توزیع متخلخل غیریکنواخت نوع اول، پایداری بهبود می‌یابد. مشاهده شده است که همانند اثرات محیط‌های رطوبتی-حرارتی، با افزایش شاخص توانی مواد مدرج، سرعت محوری بحرانی کاهش می‌یابد. اثبات شده است که با افزایش پارامتر اینرسی دورانی اعمال میدان مغناطیسی، پایداری سیستم کاهش/افزایش می‌یابد. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند برای طراحی سیستم‌های متحرک محوری غیرهمگن در محیط‌های پیچیده مفید باشند.

**کلمات کلیدی:** مواد مدرج تابعی متخلخل؛ ارتعاشات و پایداری؛ سرعت محوری بحرانی؛ بستر ویسکوهیتنی؛ حرکت طولی.

## Stability and dynamic analysis of Rayleigh functionally graded porous beams with longitudinal motion in hygro-thermo-magnetic environments

Mohammad reza shahnazi<sup>1</sup>, Ali Ebrahimi Mamaghani<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University Tehran, Iran

<sup>2</sup> Ph.D., Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

### Abstract

In this research, the influence of hygro-thermo-magnetic fields on the dynamics of axially moving functionally graded beams is investigated by considering various porosity models. Also, parametric studies are performed to clarify the effects of rotary inertia factor, visco-Hetenyi substrate, material power index, follower force, and boundary conditions on vibration frequencies and instability threshold. The mechanical properties are graded transversely according to a power law. Different uniform and non-uniform porosity models are considered. The beam vibrates in variable moisture and humidity conditions and is under an external longitudinal magnetic field. The dynamical equation is derived based on generalized Hamilton's principle and Rayleigh beam theory assumptions. With the aid of the Galerkin method, the eigenvalue problem is solved and frequency characteristics and instability boundaries are determined numerically. The axial velocity related to static instability is determined analytically. The results show that by increasing the porosity of the system with the first type of non-uniform porosity, the stability improves. Similar to hygro-thermal environments, the critical axial velocity decreases by increasing the power index. It is proved that the stability decreases/increases by increasing the rotary inertia factor/magnetic field. The results can be useful for the design of axially moving inhomogeneous systems in complex environments.

**Keywords:** Functionally graded porous materials, vibration and stability, critical axial velocity, viscoelastic medium, longitudinal motion.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های با حرکت طولی کاربردهای متعددی در صنعت از جمله تسمه‌نقاله‌ها، بازوهای رباتیکی و کابل‌های جرقه‌دار دارند [۱]. مطالعات نشان داده‌اند که در حضور حرکت انتقالی، یک جابجایی در جهت عمود بر جهت حرکت ممکن است ارتعاشات ناخواسته تولید کند؛ بنابراین مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل ارتعاشاتی این سازه‌های پرکاربرد می‌تواند نقش مهمی در بهبود عملکرد سازه‌های صنعتی داشته باشند. به‌طور مثال، سجیدعلی و هاوا [۲] ارتعاشات غیرخطی تیرهای متحرک محوری را بررسی کردند. آن‌ها با به‌کارگیری روش اختلاف محدود، اثر صلبیت خمشی و سرعت محوری را بر محدوده‌های پایداری بررسی کردند. لیو [۳] دینامیک غیرخطی تیرهای کامپوزیتی متحرک محوری با شرایط مرزی یکسرگیردار را مورد مطالعه قرار داد. او با به‌کارگیری تئوری مرتبه بالای برشی، اثرات شتاب محوری و مشخصات مادی را بر حرکت عرضی تحلیل کردند. هائو و همکارانش [۴] ارتعاشات اتفاقی تیرهای متحرک محوری ساخته‌شده از آلیاژهای حافظه‌دار را مدل کردند. آن‌ها با شبیه‌سازی مونت‌کارلو نشان دادند که با افزایش سرعت محوری، دامنه ارتعاشات جانبی افزایش می‌یابد. کلچ و ساعدپانه [۵] به بررسی کنترل ارتعاشات تیر اویلر-برنولی متحرک محوری پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با به‌کارگیری روش مرزی کنترلی برای سرعت محوری تیر می‌توان ارتعاشات ناخواسته تیر را تقلیل داد. ژانگ و همکارانش [۶] رفتار دینامیکی تیرهای متحرک محوری را با میرایی ویسکوالاستیک کسری مدل کردند. آن‌ها با استفاده از قاعده روٹ-هریوتس نشان دادند که با تنظیم میرایی می‌توان دامنه ارتعاشات را به‌طور قابل‌توجهی کاهش داد. در این میان، مقالاتی که براساس تئوری تیر رایلی، اثرات شرایط مرزی، نیروی پیرو و بسترهای ویسکوالاستیک را بر ارتعاشات و پایداری تیر متحرک محوری مدل کنند، محدود هستند.

مواد مدرج تابعی دسته‌ای از مواد مرکب هستند که خصوصیاتشان در یک یا چند راستا به‌صورت پیوسته تغییر می‌کنند. به دلیل گرادینان یکنواخت خصوصیات مکانیکی مواد مدرج تابعی، این مواد در مقایسه با مواد همگن و لایه‌ای مرسوم، خصوصیات عملکردی بهتری مانند تمرکز تنش کمتر و مقاومت حرارتی بالاتری، ارائه می‌دهند [۷]؛ در نتیجه مهندسان علاقه زیادی برای به‌کارگیری بیشتر این مواد در

سیستم‌های متحرک محوری نشان داده‌اند. در این راستا، دینامیک تیر متحرک محوری منعطف ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر اساس روش المان محدود توسط پیوان و سامپایو [۸] تحلیل شده است. نتایج آن‌ها مشخص کرد که در مقایسه با فاز سرامیک، استفاده از فلز به‌عنوان جزء اصلی، منجر به نوسانات فرکانسی کمتری خواهد شد. سویی و همکارانش [۹] دینامیک سازه‌های متحرک محوری مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تیموشنکو بررسی کردند. آن‌ها اثر پارامترهای گوناگون مانند سرعت محوری و شاخص توانی را بر روی مشخصات ارتعاشاتی مطالعه کردند. پایداری دینامیکی تیر متحرک محوری مدرج با سرعت طولی وابسته به زمان توسط یان و همکارانش [۱۰] مطالعه شد. آن‌ها برای به دست آوردن مرزهای ناپایداری از روش چندمقیاسی بهره بردند. مطالعه آن‌ها اثبات کرد که آستانه ناپایداری تیر با افزایش سرعت محوری/پارامتر سفتی تکیه‌گاه، کاهش/افزایش می‌یابد. شریعتی و همکارانش [۱۱] دینامیک تیرهای متحرک محوری را با توزیع نمایی و خطی برای مواد مدرج تابعی طولی مطالعه کردند. آن‌ها اثرات گرادینان طولی و میرایی مواد را بر مرزهای پایداری تیر تفسیر کردند. یائو و همکارانش [۱۲] ارتعاشات آزاد و انتشار موج را در میکروتیرهای متحرک محوری ساخته‌شده از مواد مدرج بررسی کردند. آن‌ها براساس تئوری تیموشنکو، فرکانس ارتعاشاتی و سرعت موج را محاسبه کردند. یکی دیگر از راهکارهای مؤثر طراحان سازه برای بهبود عملکرد سیستم‌های صنعتی، بهره‌گیری از مواد سبک متخلخل در ساخت سیستم‌های مهندسی است. مطالعات اخیر نشان داده‌اند که با مشخصه‌سازی مواد مدرج با توزیع‌های مختلف منافذ داخلی، می‌توان رفتار دینامیکی سیستم‌ها را به‌طور مؤثری تغییر داد؛ همچنین، این امکان وجود دارد که در پروسه ساخت مواد مدرج، میکروحفره‌ها و تخلخل‌هایی در سازه ایجاد شوند [۱۳]؛ بنابراین، مواد مدرج تابعی متخلخل، پتانسیل منحصربه‌فردی برای گستره بالایی از کاربردها در علوم مهندسی مخصوصاً سازه‌های متحرک فراهم می‌کنند. از این‌رو مطالعه اثرات منافذ بر ارتعاشات سیستم‌های مدرج تابعی تحت نیروی متحرک یک نیاز اساسی مهندسی است. با این‌وجود مطالعات محدودی به مطالعه اثر مواد مدرج تابعی متخلخل بر سیستم‌های متحرک محوری پرداخته‌اند. در این زمینه، وانگ و یانگ [۱۴] مشخصات ارتعاشات غیرخطی صفحات مدرج

اثرات کوپل میدان‌های مغناطیسی با بارهای حرارتی را در ادبیات فنی گزارش کرده‌اند.

براساس اطلاعات نویسندگان، رفتار ارتعاشاتی و پایداری تیرهای متحرک محوری ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی عرضی متخلخل در محیط‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی با شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی و عددی مطالعه نشده است. همچنین، اثر پارامترهای مختلف از جمله بستر ویسکوهییتی، نیروی پیرو و فاکتور اینرسی دورانی بر دینامیک سیستم‌های متحرک محوری گزارش نشده‌اند. در این مقاله، معادله دینامیکی یک تیر ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی با حرکت طولی با در نظرگیری مدل‌های توزیع تخلخل مختلف استخراج می‌شود. با حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی، پایداری سیستم آزموده می‌شود. نتایج در حالات مختلف با نتایج گزارش‌های موجود در ادبیات فنی مقایسه و اعتبارسنجی می‌شوند. در نهایت اثر پارامترهای کلیدی بر رفتار دینامیکی و پایداری سیستم بیان می‌شوند.

## ۲- فرمول‌بندی ریاضی

در شکل ۱، شماتیک یک تیر مدرج تابعی متخلخل با تکیه‌گاه ساده و تحت حرکت محوری نمایش داده شده است. طول تیر  $L$  و سرعت حرکت طولی با  $u$  نمایش داده می‌شود. تیر سطح مقطع مستطیلی دارد و بر روی بستر ویسکوهییتی قرار دارد و تحت بار فشاری پیرو  $V$  است. فرض شده است که سیستم در شرایط متغیر رطوبتی و حرارتی ارتعاش می‌کند؛ همچنین، فرض شده است که مواد تیر حساس به تغییرات شدت میدان مغناطیسی هستند و سیستم تحت یک میدان مغناطیسی طولی خارجی قرار دارد. جابجایی عرضی تیر با  $w$  بیان می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، سطح پایینی و بالایی تیر به ترتیب از فلز و سرامیک تشکیل شده‌اند؛ همچنین، ویژگی‌های مادی (یعنی چگالی  $\rho$ ، مدول یانگ  $E$ ، ضریب انبساط رطوبتی  $\beta$ ، ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  و ضریب گذردهی مغناطیسی  $\eta$ )، در راستای ضخامت برطبق قانون توزیع توانی درجه‌بندی شده است. ضمناً فرض شده است که سیستم سه نوع توزیع تخلخل مختلف در راستای ضخامت دارد. مشخصات مادی برطبق معادلات زیر داده می‌شوند [۲۳]: برای توزیع یکنواخت تخلخل:

تابعی متخلخل که در تماس با سیال هستند را ارزیابی کردند. آن‌ها پدیده تشدید داخلی در سیستم را با کمک روش تحلیل اغتشاشات گزارش کردند. اسن و ازمان [۱۵] ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات مدرج تابعی متخلخل کوچک‌مقیاس را تحت میدان الکتریکی و مغناطیسی مدل کردند. آن‌ها همچنین، نیروی بحرانی کمانش را محاسبه کردند. اسماعیل‌زاده و کدخدایان [۱۶]، ارتعاشات نانوصفحات مدرج تابعی متخلخل با حرکت طولی را شبیه‌سازی کردند. آن‌ها پاسخ گذرای سیستم را تحت نیروی دینامیکی ضربه‌ای به ازای خصوصیات مختلف هندسی و فیزیکی محاسبه کردند. یانگ و همکارانش [۱۷]، رفتار دینامیکی صفحات متحرک محوری تحت اثر ضربه ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی متخلخل را مدل کردند. آن‌ها اثر گرادیان مواد و توزیع تخلخل را بر پایداری مطالعه کردند. کاملاً شناخته‌شده است که عملکرد تجهیزات صنعتی، وابستگی بالایی به شرایط محیطی آن‌ها دارد. به‌عنوان مثال، در حضور میدان‌های حرارتی، انبساط حرارتی و در نتیجه تنش‌های فشاری حرارتی در سیستم ایجاد می‌شوند که در نهایت منجر به تغییر رفتار ارتعاشاتی سازه می‌شود. در نتیجه می‌توان گفت که با اعمال میدان‌های حرارتی می‌توان ارتعاشات سیستم را کنترل نمود [۱۸]؛ لذا پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌های صنعتی متحرک محوری در شرایط محیطی پیچیده، یک نیاز مهندسی است. در این زمینه، سرپرست و همکارانش [۱۹]، رفتار ارتعاشاتی تیرهای کوچک مقیاس متحرک محوری بر بستر پاسترناک را در محیط‌های رطوبتی-حرارتی مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که با تنظیم مشخصه‌های بستر، می‌توان اثرات مخرب محیطی را تقلیل داد. الیخ و اگبولا [۲۰]، اثر تغییرات دمایی و ترک را بر دینامیک تیرهای مدرج تابعی با حرکت محوری تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند که با تنظیم مشخصه‌های مادی سیستم، می‌توان ارتعاشات سیستم را کنترل کرد. هو و وانگ [۲۱] پدیده تشدید داخلی یک تیر متحرک محوری در یک میدان مغناطیسی را مدل کردند. آن‌ها اثر شدت میدان مغناطیسی و پارامتر میزان را بر دامنه ارتعاشات سیستم تجلیل کردند. وی و همکارانش [۲۲] پایداری تیرهای متحرک محوری ساندویچی با هسته سیال مگنتورئولوژیک را ارزیابی کردند. آن‌ها اثرات مشخصه‌های هندسی و شدت میدان مغناطیسی را بر سرعت بحرانی سیستم مطالعه کردند. لازم به ذکر است که گزارش‌های محدودی،

که در آن  $F$  مشخصه مکانیکی سیستم،  $\mu$  کسر حجمی تخلخل (پارامتر تخلخل) و  $k$  شاخص توانی غیر صفر است و برای تعیین پروفایل‌های مختلف تغییرات ماده به کار برده می‌شود. اندیس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب به فلز و سرامیک اشاره دارند. لازم به ذکر است که خصوصیات مادی سیستم به ازای  $k=0$  و  $k=\infty$ ، به ترتیب به سطح بالایی (سرامیک) و سطح پایینی (فلز) ارجاع داده می‌شوند. در شکل ۲ سطح مقطع سیستم برای توزیع‌های تخلخل مختلف نمایش داده شده است.

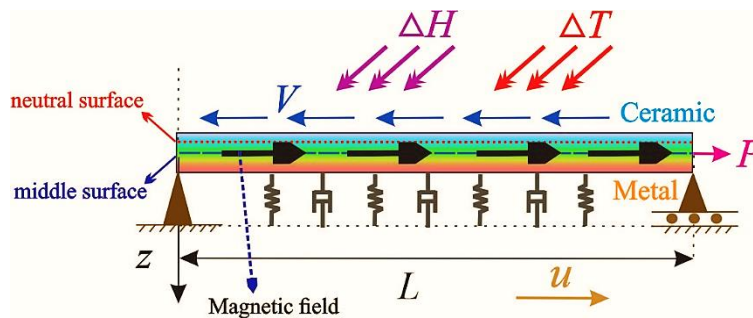
$$F(z) = \left[ F_m + (F_c - F_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \right] - \frac{\mu}{2} (F_m + F_c) \quad (1)$$

برای توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۱:

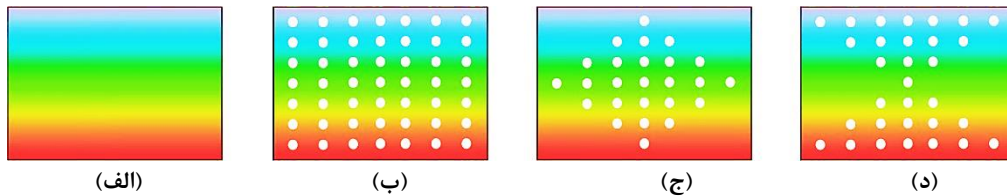
$$F(z) = \left[ F_m + (F_c - F_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \right] - \frac{\mu}{2} (F_m + F_c) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (2)$$

برای توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۲:

$$F(z) = \left[ F_m + (F_c - F_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \right] - \frac{\mu}{2} (F_m + F_c) \left( \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3)$$



شکل ۱ - شماتیک یک تیر متحرک محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی متخلخل بر روی بستر ویسکوهیتنی



شکل ۲ - سطح مقطع تیر مدرج تابعی (الف) کامل، (ب) توزیع یکنواخت تخلخل (ج) توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۱ (د) توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۲

کرنش طولی  $\epsilon_x$  و ممان خمشی  $M$  چنین بیان می‌شوند [۲۴]:

$$\epsilon_x = -(z - z_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$M = \int_A (z - z_0) \sigma_x dA \quad (6)$$

که در آن  $\sigma_x$  تنش طولی و  $A$  سطح مقطع تیر است. همچنین، تغییرات انرژی کرنشی سیستم مطابق رابطه زیر داده می‌شود [۲۵]:

از آنجاکه مشخصات مادی سیستم در راستای ضخامت تغییر می‌کنند، در نتیجه خصوصیات مادی سیستم مدرج تابعی، نسبت به سطح میانی تقارن ندارند. در این شرایط، سطح خنثی فیزیکی بر سطح هندسی میانی سیستم منطبق نیست. فاصله سطح خنثی فیزیکی و سطح هندسی میانی سیستم از رابطه ذیل مشخص می‌شود [۲۴]:

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (4)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^L (N_H + N_T + N_M) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

که در آن

$$N_H = - \int_A E(z) \beta(z) \Delta H dA \quad (15)$$

$$N_T = - \int_A E(z) \alpha(z) \Delta T dA \quad (16)$$

$$N_M = \int_A \frac{B^2}{\eta(z)} dA \quad (17)$$

و  $\Delta H$ ،  $\Delta T$  و  $B$  بیانگر تغییرات رطوبت، تغییرات دمای محیط و شدت میدان مغناطیسی خارجی است. کار نیروی کششی محوری از رابطه زیر به دست می‌آید [۳۱]:

$$W_p = \frac{1}{2} P \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (18)$$

برای استخراج معادله حاکم بر حرکت سیستم، از اصل تعمیم‌یافته همیلتون مطابق رابطه ذیل استفاده می‌شود [۳۲]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_F + W_V^c + W_V^{nc} + W_p + W_e - U) dt = 0 \quad (19)$$

با به‌کارگیری اصل همیلتون، معادله دینامیکی حاکم بر حرکت سیستم و شرایط مرزی مربوطه مطابق ذیل به دست می‌آید:

$$D_2 w'''' + m_0 (\ddot{w} + 2U\dot{w}' + U^2 w'') - m_2 (\ddot{w}'' + 2U\dot{w}''' + U^2 w'''' ) + (N_H + N_T + N_M + V(L-x) - P) w'' + k_1 w + k_2 w'''' + c(\dot{w} + uw') = 0 \quad (20)$$

برای سیستم دوسرهمفصل:

$$x = 0, L: w = w'' = 0 \quad (21)$$

برای سیستم دوسرگیردار:

$$x = 0, L: w = w' = 0 \quad (22)$$

برای سیستم یکسرمفصل-یکسرگیردار:

$$\begin{aligned} x = 0: w = w'' = 0 \\ x = L: w = w' = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن دات و پریم بیانگر مشتق‌های زمانی و مکانی هستند. برای به دست آوردن معادله دینامیکی بی‌بعد، پارامترهای بی‌بعد ذیل معرفی می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{P}{m_0^m}} \quad (24)$$

$$\delta U = \int_0^L \sigma_x \delta \varepsilon_x A dx = - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w dx \quad (7)$$

که در آن ممان خمشی این‌چنین بیان می‌شود:

$$M = -D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$D_2 = \int_A E(z) (z - z_0)^2 dA$$

و انرژی جنبشی با در نظر گیری اثرات جابجایی عرضی و چرخشی سطح مقطع، مطابق رابطه ذیل محاسبه می‌شود [۲۶]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ m_0 \left( v^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + m_2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (9)$$

که در آن  $\{m_0, m_2\} = \int_A \rho(x, z) \{1, (z - z_0)^2\} dA$  تغییرات کار خارجی توسط بستر ویسکوهیتنی این‌چنین محاسبه می‌شود [۲۷]:

$$\delta W_F = - \int_0^L N_F \delta w dx \quad (10)$$

که در آن  $N_F$  نیروی بستر چنین محاسبه می‌شود [۱۹، ۲۸]:

$$N_F = k_1 w + k_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (11)$$

مقادیر  $k_1$  و  $k_2$  به ترتیب بیانگر مدول الاستیک وینکلر و سفتی خمشی بستر هستند؛ همچنین،  $c$  میرایی بستر است. تغییرات پایستار و ناپایستار نیروی پیرو به ترتیب مطابق زیر بیان می‌شوند [۲۹]:

$$\delta W_V^c = V \int_0^L (L-x) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (12)$$

$$\delta W_V^{nc} = -V \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dx \quad (13)$$

کار خارجی میدان‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی برطبق رابطه زیر محاسبه می‌شود [۳۰]:

مقادیر  $\lambda_j$  برای شرایط مرزی یکسرگیردار یکسرمفصل و دوسرگیردار از روابط زیر محاسبه می‌شوند [۳۴]:

$$\tanh(\lambda_j) = \tan(\lambda_j) \quad (۳۰)$$

$$\cosh(\lambda_j)\cos(\lambda_j) = 1 \quad (۳۱)$$

#### ۴- روش عددی

با جایگذاری رابطه (۲۶) در معادله دینامیکی سیستم (۲۰) و سپس با ضرب شکل مود ارتعاشاتی در معادله حاصل و انتگرال‌گیری بر روی طول تیر، فرم گسسته معادله دینامیکی سیستم در قالب ماتریسی مطابق ذیل بیان می‌شود:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (۳۲)$$

که  $\mathbf{q}$  بردار مختصات تعمیم‌یافته،  $\mathbf{M}$  ماتریس جرم،  $\mathbf{C}$  ماتریس میرایی و  $\mathbf{K}$  ماتریس سفتی است و چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \quad (۳۳)$$

$$\mathbf{M}_{sr} = m_0 \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r(x) dx - \gamma m_2 \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r''(x) dx \quad (۳۴)$$

$$\mathbf{C}_{sr} = 2U \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r'(x) dx - 2\gamma m_2 U \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r'''(x) dx + c \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r(x) dx \quad (۳۵)$$

$$\mathbf{K}_{sr} = (k_f^2 D_2 - \gamma m_2 U^2 + k_2) \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r''''(x) dx + (U^2 + N_H + N_T + N_M + V - 1) \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r''(x) dx - \quad (۳۶)$$

$$V \int_0^1 x \phi_s(x)\phi_r''(x) dx + k_1 \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r(x) dx + cU \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r'(x) dx$$

با حل مسئله مقدار ویژه معادله (۳۲)، مقادیر ویژه به دست می‌آیند. قسمت موهومی مقادیر ویژه، فرکانس‌های ارتعاشاتی  $(\omega)$  و قسمت حقیقی مقادیر ویژه  $(\delta)$  بیانگر میرایی در سیستم هستند. هنگامی که یکی از فرکانس‌های طبیعی تیر و قسمت حقیقی مقدار ویژه، به ترتیب مقادیر صفر و مثبت داشته باشند، در سیستم ناپایداری استاتیکی رخ می‌دهد. همچنین، زمانی که یکی از فرکانس‌های طبیعی و قسمت

$$U^* = U \sqrt{\frac{m_0^m}{P}}, \quad \gamma = \frac{m_2^m}{m_0^m L^2}, \quad k_f = \sqrt{\frac{D_2^m}{PL^2}}$$

$$D_2^* = \frac{D_2}{D_2^m}, \quad m_0^* = \frac{m_0}{m_0^m}, \quad m_2^* = \frac{m_2}{m_2^m}$$

$$N_H = \frac{N_H}{P}, \quad N_T = \frac{N_T}{P}, \quad N_M = \frac{N_M}{P}, \quad V^* = \frac{VL}{P}$$

$$k_2^* = \frac{k_2}{PL^2}, \quad k_1^* = \frac{k_1 L^2}{P}, \quad c^* = \frac{cL}{\sqrt{m_0^m P}}$$

که در آن  $k_f$  صلبیت خمشی و  $\gamma$  فاکتور اینرسی دورانی است؛ همچنین،  $D_1^m, m_0^m$  و  $m_2^m$  به مقادیر  $D_1, m_1$  و  $m_2$  مربوط به سطح پایینی تیر ( $k=\infty$ ) اشاره دارند. با جایگذاری پارامترهای معرفی شده بی‌بعد در معادله دینامیکی و حذف بالانویس ستاره، معادله دینامیکی بی‌بعد به دست می‌آید:

$$k_f^2 D_2 w'''' + m_0 (\ddot{w} + 2U\dot{w}' + U^2 w'') - \gamma m_2 (\ddot{w}'' + 2U\dot{w}''' + U^2 w''''') + (N_H + N_T + N_M + V(1-x) - 1)w'' + k_1 w + k_2 w'''' + c(\dot{w} + uw') = 0 \quad (۲۵)$$

#### ۳- مدل مرتبه کاهش یافته

برای گسسته سازی معادله دینامیکی و به دست آوردن معادله مرتبه کاهش یافته، از روش گالرکین استفاده می‌شود. براساس این روش، جابجایی عرضی چنین تخمین زده می‌شود [۳۳]:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) q_j(t) \quad (۲۶)$$

که در آن  $\varphi$  شکل مود ارتعاشاتی است که براساس شرایط مرزی انتخاب می‌شود؛ همچنین،  $q$  مختصه تعمیم‌یافته وابسته به زمان است. ضمناً  $n$  تعداد شکل مودهای ارتعاشاتی در نظر گرفته شده است. برای شرایط دوسرهمفصل (P-P)، یکسرمفصل یکسرگیردار (C-P) و دوسرگیردار (C-C)، شکل مود ارتعاشاتی سیستم به ترتیب برابر است با [۲۶]:

$$\varphi_j(\xi) = \sqrt{2} \sin(j\pi\xi) \quad (۲۷)$$

$$\varphi_j(\xi) = \cosh(\lambda_j \xi) - \cos(\lambda_j \xi) - \frac{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)}{\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)} (\sinh(\lambda_j \xi) - \sin(\lambda_j \xi)) \quad (۲۸)$$

$$\varphi_j(\xi) = \cosh(\lambda_j \xi) - \cos(\lambda_j \xi) - \frac{\cosh(\lambda_j) - \cos(\lambda_j)}{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)} (\sinh(\lambda_j \xi) - \sin(\lambda_j \xi)) \quad (۲۹)$$

می‌شود. در این حالت، سیستم ناپایداری استاتیکی را متحمل می‌شود. در سرعت‌های محوری بیشتر، سیستم دوباره پایدار می‌شود و با افزایش بیشتر سرعت، سیستم متحمل ناپایداری دینامیکی می‌شود و دیگر پایدار نمی‌شود ( $u=5,275$ ). مطابق شکل، نتایج حاضر، انطباق مناسبی با پژوهش [۳۷] دارند.

### ۷- مطالعات پارامتریک

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و آستانه ناپایداری سیستم، مشخصات مکانیکی سیستم یعنی اکسید آلومینیوم (سرامیک) و آلومینیوم (فلز) در جدول ۲ بیان شده است.

جدول ۲- مشخصات مادی سیستم [۳۸، ۳۹]

ویژگی	آلومینیوم	اکسید آلومینیوم
مدول یانگ (GPa)	۷۰	۳۸۰
چگالی ( $\text{Kg/m}^3$ )	۲۷۰۷	۳۸۰۰
ضریب انبساط حرارتی ( $1/^\circ\text{C}$ )	$23 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-6}$
ضریب انبساط رطوبتی $1(\text{wt}\% \text{H}_2\text{O})$	۰,۴۴	۰,۰۰۱
ضریب نفوذپذیری مغناطیسی (s/m)	$28,8 \times 10^{-7}$	$12,56 \times 10^{-7}$

اثرات پارامترهای بستر بر رفتار ارتعاشاتی سیستم در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که از آنجا که سرعت محوری اثر کاهندگی بر صلبیت معادل سازه دارد، لذا با افزایش سرعت در راستای طولی، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم کاهش می‌یابند. مطابق شکل، با در نظرگیری بستر، به دلیل افزایش صلبیت مؤثر سیستم، فرکانس‌های ارتعاشاتی افزایش می‌یابند. به بیان دیگر، در مقایسه با حالت بدون بستر، سیستم همراه با بستر پایداری بهتری خواهد داشت و ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی در سرعت‌های محوری بالاتری رخ خواهند داد؛ بنابراین می‌توان انتظار داشت که با بهبود خواص مکانیکی بستر، پایداری سیستم تقویت شود؛ همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر سخت‌شوندگی پارامتر سفتی خمشی در مقایسه با اثر پارامتر مدول الاستیک وینکلر بر رفتار دینامیکی سیستم محسوس‌تر است؛ همچنین، اثر سخت‌شوندگی پارامتر سفتی خمشی بر مودهای ارتعاشاتی بالاتر ملموس‌تر است.

حقیقی مقدار ویژه مقادیر مثبت داشته باشند، سیستم متحمل ناپایداری دینامیکی (فلاتر) می‌شود [۳۰]. در این حالات، سرعت‌های محوری مربوطه را سرعت محوری بحرانی می‌نامند.

### ۵- روش تحلیلی

هنگامی که سیستم سرعت محوری بحرانی دارد، کمترین فرکانس طبیعی ارتعاشاتی سیستم صفر می‌شود. این بدان معنی است که سیستم سفتی خود را به ازای مود اول از دست می‌دهد. در نتیجه، به منظور استخراج سرعت محوری بحرانی مربوط به مود اول، معادله (۲۹) با در نظر گرفتن یک مود ( $r=s=1$ )، به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{q}_1(t) + \mathbf{C}_{11}\dot{q}_1(t) + \mathbf{K}_{11}q_1(t) = \mathbf{0} \quad (37)$$

بر طبق تئوری پایداری سیستم‌های خطی ژبروسکوپیک [۳۵]، هنگامی که مقادیر ویژه سیستم صفر شود، دترمینان ماتریس سختی صفر می‌شود؛ در نتیجه، سرعت محوری بحرانی سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}_{11} = (k_f^2 D_2 - \gamma m_2 U_d^2 + k_2)\pi^4 + k_1 - (U_d^2 + 1 + N_H + N_T + N_M + 0.5q)\pi^2 = 0 \quad (38)$$

### ۶- اعتبارسنجی مدل

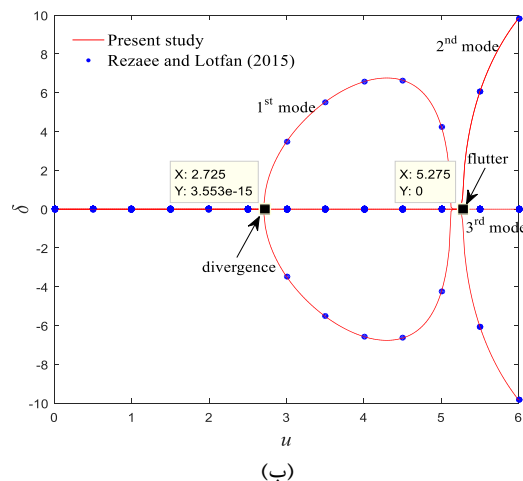
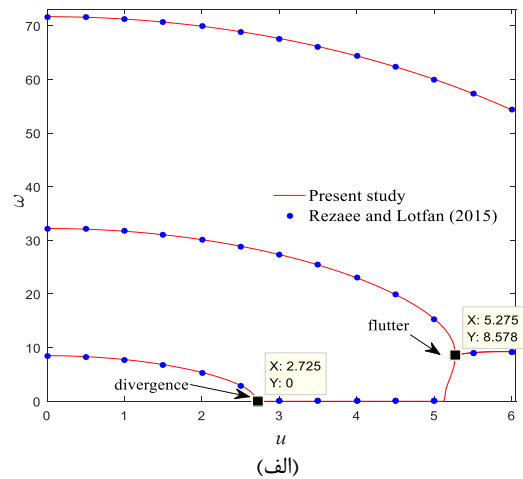
در جدول ۱، فرکانس پایه تیر مدرج تابعی برای مقادیر مختلف شاخص توانی داده شده است. مشخص است نتایج حاضر توافق نزدیکی با آنچه توسط الشوریگی و همکارانش [۳۶] گزارش شده است، دارد. برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ارتعاشاتی تیر مدرج تابعی، مشخصات مادی سیستم برای فاز فلز (فولاد)  $E_m=210 \text{ GPa}$  و  $\rho_m=7800 \text{ Kg/m}^3$  (اکسید آلومینیوم)  $E_m=390 \text{ GPa}$  و  $\rho_m=3960 \text{ Kg/m}^3$  در نظر گرفته شده‌اند.

در شکل ۳، سه فرکانس اول ارتعاشاتی یک تیر همگن متحرک محوری بر حسب سرعت طولی بدون اثرات بستر و محیط خارجی نمایش داده شده است. مطابق شکل، با افزایش سرعت محوری، فرکانس‌های ارتعاشاتی کاهش می‌یابند، در حالی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه صفر باقی می‌مانند. با افزایش سرعت محوری، فرکانس اول ارتعاشاتی در سرعت محوری بحرانی ( $u=2,725$ ) صفر می‌شود و قسمت حقیقی مثبت

جدول ۱- تغییرات فرکانس پایه تیر مدرج تابعی بدون اثرات بستر و محیط خارجی  $\gamma=0, \mu=0, V=0$

	L/h	k=0	k=0.1	k=0.2	k=0.5	k=1	k=2	k=5	k=10
مرجع [۳۶]	۲۰	۴,۳۴۲۵	۴,۲۸۱۷	۴,۲۳۱۵	۴,۱۲۶۲	۴,۰۳۵۹	۳,۹۶۸۴	۳,۹۰۷۵	۳,۸۵۷۲
پژوهش حاضر		۴,۳۳۹۵	۴,۲۸۱۹	۴,۲۳۱۱	۴,۱۲۱۹	۴,۰۳۱۷	۳,۹۶۱۸	۳,۸۹۹۹	۳,۸۵۱۲
مرجع [۳۶]	۵۰	۴,۳۴۴۴	۴,۲۸۳۶	۴,۲۳۳۳	۴,۱۲۷۹	۴,۰۳۷۷	۳,۹۷۰۱	۳,۹۰۲۹	۳,۸۵۸۹
پژوهش حاضر		۴,۳۴۱۹	۴,۲۷۸۲	۴,۲۳۲۷	۴,۱۲۰۴	۴/0315	۳,۹۶۸۲	۳,۸۹۲۹	۳,۸۵۱۷
مرجع [۳۶]	۱۰۰	۴,۳۴۴۶	۴,۲۸۳۸	۴,۲۳۳۶	۴,۱۲۸۲	۴,۰۳۷۹	۳,۹۷۰۳	۳,۹۰۹۴	۳,۸۵۹۱
پژوهش حاضر		۴,۳۳۰۴	۴,۲۸۰۲	۴,۲۳۱۹	۴,۱۲۴۳	۴,۰۳۷۱	۳,۹۶۸۱	۳,۸۹۹۱	۳,۸۵۰۴

محور افقی از دست می‌دهند. به طوری که به ازای سرعت‌های محوری کمتر از سرعت بحرانی، مقدار غیرصفر دارند.



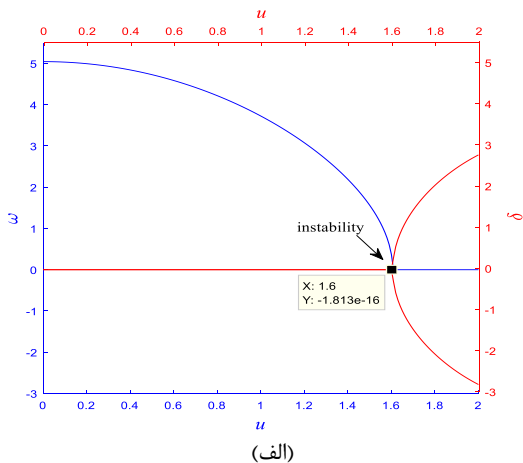
شکل ۳- فرکانس‌های ارتعاشاتی تیر همگن دوسرمفصل بر حسب سرعت طولی بدون اثرات بستر و محیط خارجی  $\gamma=V=0$  و  $k_I=0,8$

اثرات پارامترهای بستر بر رفتار ارتعاشاتی سیستم در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که از آنجا که سرعت محوری اثر کاهندگی بر صلیبیت معادل سازه دارد، لذا با افزایش سرعت در راستای طولی، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم کاهش می‌یابند. مطابق شکل، با در نظرگیری بستر، به دلیل افزایش صلیبیت مؤثر سیستم، فرکانس‌های ارتعاشاتی افزایش می‌یابند. به بیان دیگر، در مقایسه با حالت بدون بستر، سیستم همراه با بستر پایداری بهتری خواهد داشت و ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی در سرعت‌های محوری بالاتری رخ خواهند داد؛ بنابراین می‌توان انتظار داشت که با بهبود خواص مکانیکی بستر، پایداری سیستم تقویت شود؛ همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر سخت‌شوندگی پارامتر سفتی خمشی در مقایسه با اثر پارامتر مدول الاستیک وینکلر بر رفتار دینامیکی سیستم محسوس‌تر است؛ همچنین، اثر سخت‌شوندگی پارامتر سفتی خمشی بر مدهای ارتعاشاتی بالاتر ملموس‌تر است.

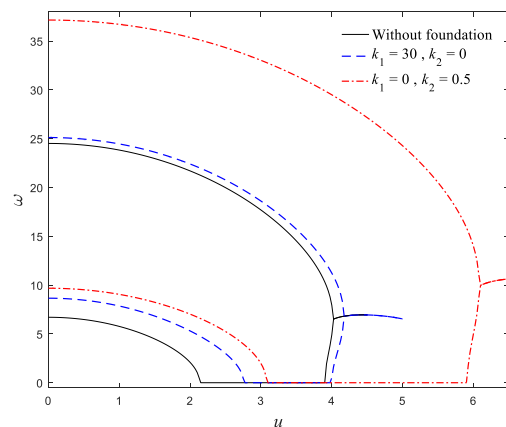
در شکل ۵، فرکانس پایه ارتعاشاتی و شاخه‌های قسمت حقیقی مقادیر ویژه سیستم بر حسب سرعت محوری بادر نظرگیری میرایی برای بستر نمایش داده شده است. مطابق شکل، با در نظرگیری میرایی برای بستر، سرعت محوری بحرانی سیستم افزایش می‌یابد؛ همچنین، فرکانس سیستم در حالت بستر میرا، کاهش می‌یابد. مطابق شکل، هنگامی که میرایی بستر نادیده گرفته می‌شود، با صفر شدن فرکانس پایه‌ای تیر، سیستم پایداری خود را از دست می‌دهد. درحالی‌که در حالت بستر میرا، با صفر شدن فرکانس پایه‌ای تیر و افزایش سرعت محوری، سیستم می‌تواند پایداری خود را حفظ کند. ضمناً شاخه‌های قسمت حقیقی مقادیر ویژه، تقارن خود را نسبت به



توسط تئوری رایلی در مقایسه با نتایج تئوری اویلر-برنولی، مقادیر کمتری داشته باشند. همان طور که در ادبیات فنی اثبات شده است، با افزایش رطوبت محیط و جذب آب، شرایط تخریب مهیا می شود و سفتی معادل کاهش می یابد. بنابراین، فرکانس ارتعاشی در محیط های رطوبتی کاهش می یابد. همچنین، با افزایش دما، تنش های حرارتی به وجود می آیند که می تواند منجر به تغییر شکل و اثرات مخرب شوند؛ بنابراین، به دلیل اثرات نرم شوندگی محیط حرارتی، صلبیت مؤثر کاهش می یابد که منجر به یک سازه نرم تر و کاهش فرکانس ارتعاشاتی می شود. از سوی دیگر، با اعمال میدان مغناطیسی، صلبیت معادل به دلیل اثرات سخت شوندگی میدان مغناطیسی بر سازه افزایش می یابد و در نتیجه، فرکانس ارتعاشاتی افزایش می یابد. بنابراین می توان گفت که برعکس میدان های رطوبتی-حرارتی، اعمال میدان مغناطیسی اثر مثبت بر رفتار ارتعاشاتی و پایداری سیستم متحرک محوری دارد. یک نکته مهم دیگر در شکل ۷ این است که مرزهای ناپایداری به ازای شرایط عملیاتی مختلف براساس روش تحلیلی محاسبه شده اند و با حل عددی مقایسه شده اند. مطابق شکل می توان فهمید که روش های عددی و تحلیلی استفاده شده تطابق خوبی باهم دارند



با مقایسه شکل های ۴ و ۵ می توان فهمید که با افزایش پارامتر صلبیت خمشی، فرکانس ارتعاشاتی و پایداری افزایش می یابد. در شکل ۶، اثر نیروی پیرو بر فرکانس پایه ای سیستم با شرایط مرزی مختلف نمایش داده شده است. مطابق شکل، چون نیروی پیرو در حالت فشاری، سفتی کلی سیستم را کاهش می دهد یا اثر نرم شوندگی بر سیستم القا می کند، لذا با افزایش نیروی پیروی فشاری، فرکانس پایه ای ارتعاشاتی سازه کاهش می یابد تا هنگامی که فرکانس پایه صفر شود، سیستم پایداری خود را از دست می دهد؛ همچنین، از آنجا که با افزایش تکیه گاه های سیستم، سفتی مؤثر سیستم بهبود می یابد، لذا می توان مشاهده کرد که شرایط مرزی دوسر مفصل و دوسر گیردار، به ترتیب کمترین و بیشترین پایداری فرکانس ارتعاشاتی را دارند. ضمناً می توان نتیجه گرفت که سیستم های دوسر گیردار و دوسر مفصل، پایدارترین و ناپایدارترین شرایط مرزی در میان شرایط مرزی دوسر بسته هستند.

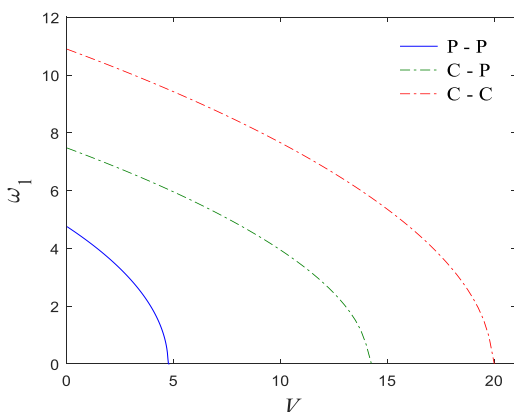


شکل ۴- فرکانس های ارتعاشاتی تیر همگن دوسر مفصل بر حسب سرعت طولی بدون اثرات میرایی و محیط خارجی به ازای  $k_1 = 0.6$  و  $\gamma = V = 0$

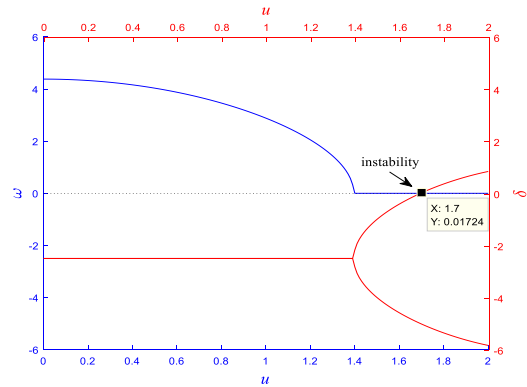
در شکل ۷، اثرات محیط های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی بر سرعت محوری بحرانی نمایش داده شده است. مطابق شکل، با افزایش فاکتور اینرسی دورانی، سرعت محوری بحرانی و آستانه ناپایداری کاهش یافته است که این اثر ناپایدارکننده را می توان به اثرات افزودگی جرم فاکتور اینرسی دورانی نسبت داد. از آنجا که در تئوری تیر اویلر-برنولی نسبت به تئوری تیر رایلی، اثرات چرخش سطح مقطع نادیده گرفته می شوند، بنابراین می توان انتظار داشت که فرکانس های ارتعاشاتی محاسبه شده

افزایش می‌یابد. درحالی‌که برای سیستم با تخلخل یکنواخت، برای مقادیر کم و زیاد شاخص توانی، فرکانس ارتعاشاتی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد؛ در نتیجه همان‌طور که در شکل‌های ۸ (الف و ب) مشاهده می‌شود، با افزایش شاخص توانی در سیستم متخلخل غیریکنواخت نوع اول، سرعت محوری بحرانی بهبود یافته است. درحالی‌که برای سیستم با تخلخل یکنواخت، به ازای مقادیر کم (زیاد) شاخص توانی، با افزایش کسر حجمی تخلخل، سرعت محوری بحرانی افزایش (کاهش) یافته است. لازم به ذکر است که روند تغییرات سرعت محوری بحرانی سیستم برای تیر متخلخل غیریکنواخت نوع دوم، مشابه سیستم متخلخل یکنواخت است. به این صورت که برای مقادیر کم شاخص توانی، منحنی سرعت بحرانی محوری تیر غیرمتخلخل پایین‌تر از منحنی سرعت محوری بحرانی تیر متخلخل است و با افزایش کسر حجمی تخلخل منحنی سرعت محوری بحرانی به سمت سرعت‌های محوری بیشتر جابجا می‌شود. درحالی‌که برای مقادیر بالای شاخص توانی در سیستم متخلخل غیریکنواخت نوع دوم، این روند معکوس می‌شود.

برای فهم بهتر اثر تخلخل بر پایداری، سرعت بحرانی محوری برحسب پارامتر تخلخل به ازای توزیع‌های مختلف تخلخل در شکل ۹ رسم شده است. مشاهده می‌شود که در مقادیر کم شاخص توانی، به ازای تمامی تخلخل‌ها، پایداری با افزایش کسر حجمی تخلخل روند افزایشی دارد. همچنین، در مقادیر زیاد شاخص توانی، پایداری برای تخلخل‌های یکنواخت و غیریکنواخت نوع دوم کاهش می‌یابد، درحالی‌که برای سیستم با تخلخل غیریکنواخت نوع اول این روند معکوس است.



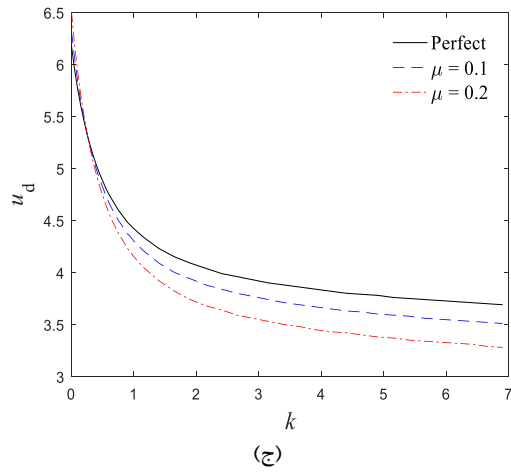
شکل ۶- فرکانس پایه ارتعاشی تیر همگن برحسب نیروی پیرو بدون اثرات میرایی و محیط خارجی  $k_1=0.5$  و  $U=1$  و  $\gamma=0$



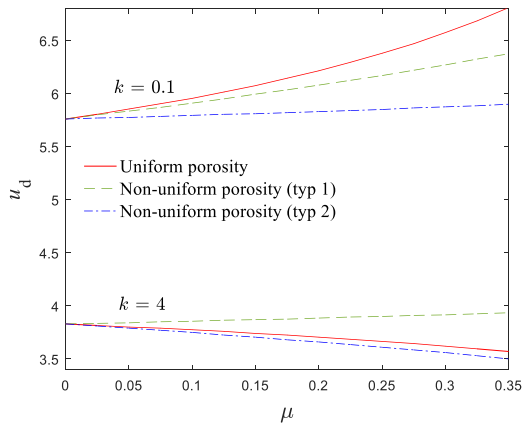
(ب)

شکل ۵- قسمت‌های (الف) حقیقی و (ب) موهومی مقادیر ویژه سیستم همگن دوسر مفصل برحسب سرعت طولی بدون اثرات محیط خارجی  $k_1=k_2=\gamma=V=0$  و  $k_1=0.4$  (الف)  $c=0$  (ب)  $c=5$

در شکل‌های ۸ و ۹، اثرات گرادیان مواد و توزیع‌های مختلف تخلخل بر مرز ناپایداری سیستم نشان داده شده‌اند. در شکل‌های ۸ (الف)، (ب) و (ج)، به ترتیب سرعت محوری بحرانی برحسب شاخص توانی به ازای توزیع‌های تخلخل یکنواخت، توزیع غیریکنواخت نوع ۱ و توزیع غیریکنواخت نوع ۲ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص توانی، سرعت محوری بحرانی کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار را می‌توان با این نکته توجیه کرد که با افزایش شاخص توانی، کسر حجمی سطح پایینی تیر یعنی فاز فلز افزایش می‌یابد و کسر حجمی سطح بالایی تیر یعنی فاز سرامیک کاهش می‌یابد؛ در نتیجه می‌توان انتظار داشت که فرکانس ارتعاشاتی کاهش یابد؛ چراکه با افزایش شاخص توانی، نسبت کاهش مدول یانگ در مقایسه با کاهش چگالی، ملموس‌تر است؛ بنابراین می‌توان گفت که افزایش شاخص توانی منجر به یک سیستم نرم‌تر خواهد شد؛ در نتیجه می‌توان انتظار داشت که با افزایش شاخص توانی، پایداری کاهش یابد. مطابق شکل با افزایش شاخص توانی، در مقادیر کم شاخص توانی ابتدا پایداری با شیب تندی کاهش می‌یابد. در شاخص‌های توانی بالاتر، نرخ کاهش پایداری کاهش می‌یابد و سرعت محوری بحرانی به سرعت محوری بحرانی سازه همگن میل می‌کند. همچنین، براساس مراجع [۲۳، ۴۰-۴۲]، با افزایش کسر حجمی تخلخل، فرکانس طبیعی ارتعاشاتی تیر متخلخل غیریکنواخت نوع اول، به ازای تمامی مقادیر شاخص توانی



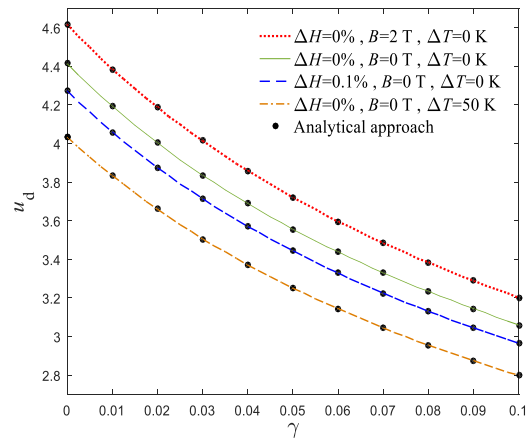
شکل ۸- سرعت بحرانی دوسرمفصل برحسب شاخص توانی بدون اثرات بستر و محیط خارجی  $k_f=1$  و  $\gamma=V=0$  (الف) توزیع یکنواخت تخلخل (ب) توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۱ (ج) توزیع غیریکنواخت تخلخل نوع ۲



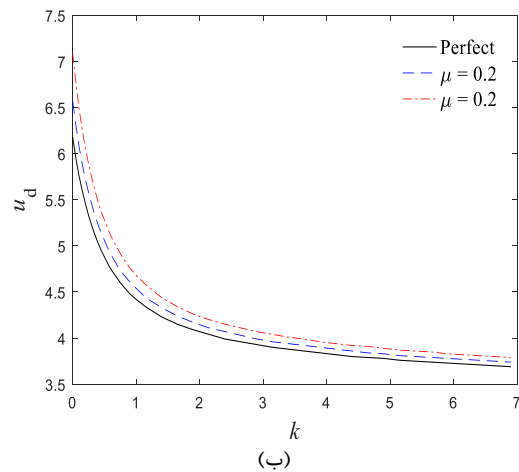
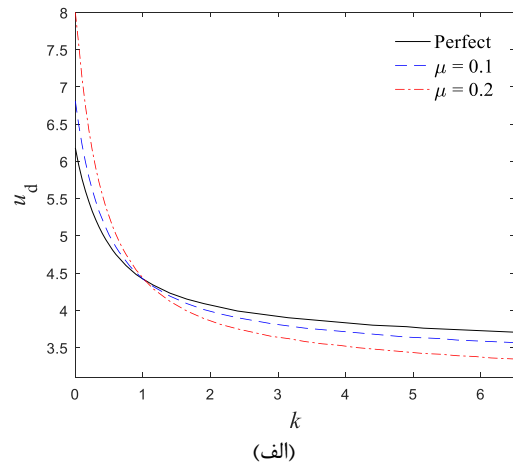
شکل ۹- سرعت بحرانی تیر مدرج دوسرمفصل برحسب پارامتر تخلخل بدون اثر بستر و محیط خارجی  $k_f=k=1$  و  $\gamma=V=0$

### ۸- نتیجه گیری

در این پژوهش، براساس تئوری تیر رایلی، ارتعاشات و پایداری تیرهای مدرج عرضی متخلخل متحرک محوری بر روی بستر ویسکوهیتنی با شرایط مرزی مختلف تحت اثر میدانهای رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی، نیروهای محوری و پیرو تحلیل شده‌اند. معادله دینامیکی براساس اصل تعمیم یافته همیلتون استخراج شده است. مدل مرتبه کاهش یافته با کمک روش گسسته سازی گالرکین به دست آمده است. با کمک روش‌های



شکل ۷- سرعت بحرانی تیر همگن دوسرمفصل برحسب فاکتور اینرسی دورانی بدون اثر بستر  $k_f=k=1$  و  $V=0$



- [6] Zhang Z, Yang H, Guo Z, Zhu L, Liu W (2022) Nonlinear Vibrations of an Axially Moving Beam with Fractional Viscoelastic Damping. *Adv Civ Eng* 4637716. doi: 10.1155/2022/4637716.
- [7] Dindarloo M, Li L (2019) Vibration analysis of carbon nanotubes reinforced isotropic doubly-curved nanoshells using nonlocal elasticity theory based on a new higher order shear deformation theory. *Compos B Eng* 175:107170.
- [44] Piovan M, Sampaio R (2008) Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials. *Thin-Walled Struct* 46(2):112-121.
- [9] Sui S, Chen L, Li C, Liu X (2015) Transverse vibration of axially moving functionally graded materials based on Timoshenko beam theory. *Math Probl Eng* 391452. doi: 10.1155/2015/391452.
- [10] Yan T, Yang T, Chen L (2020) Direct multiscale analysis of stability of an axially moving functionally graded beam with time-dependent velocity. *Acta Mech Sol Sin* 33:150-163.
- [11] Shariati A, Jung D, Mohammad-Sedighi H, Žur K, Habibi M, Safa M (2020) Stability and dynamics of viscoelastic moving rayleigh beams with an asymmetrical distribution of material parameters. *Symmetry* 12(4):586.
- [12] Yao L, Ji J, Shen J, Li C (2020) Free vibration and wave propagation of axially moving functionally graded Timoshenko microbeams. *J Braz Soc Mech Sci Eng* 42:1-14.
- [13] Majdi A, Yasin Y, Altalbawy M (2023) Size-dependent vibrations of bi-directional functionally graded porous beams under moving loads incorporating thickness effect. *Mech Base Des Struct Mach* 1-32. doi: 10.1080/15397734.2023.2165098.
- [14] Wang Y, Yang Z (2017) Nonlinear vibrations of moving functionally graded plates containing porosities and contacting with liquid: internal resonance. *Nonlinear Dynam* 90:1461-1480.
- [15] Esen I, Özmen R (2022) Free and forced thermomechanical vibration and buckling responses of functionally graded magneto-electro-elastic porous nanoplates. *Mech Base Des Struct Mach*, 1-38. doi: 10.1080/15397734.2022.2152045.
- [16] Esmaeilzadeh M, Kadkhodayan M (2019) Numerical investigation into dynamic behaviors of axially moving functionally graded porous sandwich nanoplates reinforced with graphene platelets. *Mater Res Express* 6(10):1050b7.
- [17] Yang F, Wang Y, Liu Y (2022) Low-velocity impact response of axially moving functionally graded graphene platelet reinforced metal foam plates. *Aero Sci Tech* 123:107496.
- [18] Swaminathan K, Sangeetha D (2017) Thermal analysis of FGM plates—A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Compos Struct* 160:43-60.
- عددی و تحلیلی، مشخصه‌های فرکانسی و مرزهای پایداری سیستم محاسبه شده‌اند. نتایج پژوهش حاضر با گزارش‌های موجود در ادبیات مقایسه و اعتبارسنجی شده‌اند. مهم‌ترین نتایج پژوهش حاضر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:
- ✓ با افزایش پارامترهای بستر ویسکوهیتتی، پایداری سیستم بهبود می‌یابد. همچنین، پارامتر سفتی خمشی در مقایسه با اثر پارامتر مدول الاستیک وینکلر، اثر پایداری‌کنندگی بیشتری دارد. ضمناً، با افزایش میرایی، فرکانس ارتعاشاتی سیستم کاهش می‌یابد.
- ✓ اثر کاهش نیروی پیرو بر فرکانس‌های ارتعاشاتی را می‌توان با افزایش پارامتر صلبیت خمشی و قید تکیه‌گاه‌های تیر کاهش داد.
- ✓ برعکس میدان‌های رطوبتی-حرارتی، اعمال میدان مغناطیسی موجب بهبود سرعت محوری بحرانی می‌شود.
- ✓ به دلیل اثرات افزودگی جرم اینرسی دورانی، فرکانس‌های ارتعاشاتی محاسبه شده براساس تئوری رایلی، مقادیر کمتری نسبت به نتایج تیر اوپلر-برنولی دارند.
- ✓ با افزایش شاخص توانی، پایداری سیستم کاهش می‌یابد.
- ✓ با افزایش کسر حجمی تخلخل، پایداری سیستم متخلخل نوع اول برای تمامی شاخص‌های توانی بهبود می‌یابد.
- ✓ برای تیرهای با تخلخل یکنواخت و غیریکنواخت نوع دوم، به ازای شاخص‌های توانی کم (زیاد)، آستانه ناپایداری با افزایش کسر حجمی تخلخل، افزایش (کاهش) می‌یابد.

#### مراجع

- [1] Pham P, Hong K (2020) Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dynam* 100(1): 315-349.
- [43] Ali S, Hawwa M (2023) Dynamics of axially moving beams: A finite difference approach. *Ain Shams Eng J* 14(1):101817.
- [3] Liu, Y (2022) Nonlinear Dynamic Analysis of an Axially Moving Composite Laminated Cantilever Beam. *J Vib Eng* 1-13. doi: 10.1007/s42417-022-00750-2.
- [4] Hao Y, Gao M, Gong J (2022) Parametric Random Vibration Analysis of an Axially Moving Laminated Shape Memory Alloy Beam Based on Monte Carlo Simulation. *Materials* 15(2): 562.
- [5] Kelleche A, Saedpanah F (2023) Stabilization of an Axially Moving Euler Bernoulli Beam by an Adaptive Boundary Control. *J Dyn Control Syst* 1-18. doi: 10.1007/s10883-022-09632-y.

- [31] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *J Fluid Struct* 87:150-173.
- [32] Ebrahimi-Mamaghani A, Mostoufi N, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R (2022) Vibrational analysis of pipes based on the drift-flux two-phase flow model. *Ocean Eng* 249:110917.
- [45] Ebrahimi-Mamaghani A, Koochakianfard O, Mostoufi N, Khodaparast H (2023) Dynamics of spinning pipes conveying flow with internal elliptical cross-section surrounded by an external annular fluid by considering rotary inertia effects. *Appl Math Model* 120: 330-354.
- [45] Esfahani S, Khadem S, Mamaghani A. E (2019) Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory. *Int J Mech Sci* 151:508-522.
- [35] Lancaster P (2013) Stability of linear gyroscopic systems: a review. *Lin Algebra Appl* 439(3):686-706.
- [36] Alshorbagy A, Eltaher M. A, Mahmoud F (2011) Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Appl Math Model* 35(1):412-425.
- [37] Rezaee M, Lotfan S (2015) Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity. *Int J Mech Sci* 96:36-46.
- [38] Barati M. R (2017) Magneto-hygro-thermal vibration behavior of elastically coupled nanoplate systems incorporating nonlocal and strain gradient effects. *J Braz Soc Mech Sci Eng* 39(11):4335-4352.
- [39] Zenkour A, Abbas I. A (2014) Magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder using the finite element method. *J Vib Contr* 20(12):1907-1919.
- [40] Ebrahimi F, Jafari A (2016) A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *J Eng.*
- [41] Mirjavadi S, Mohasel Afshari B, Khezeli M, Shafiei N, Rabby S, Kordnejad M (2018) Nonlinear vibration and buckling of functionally graded porous nanoscaled beams. *J Braz Soc Mech Sci Eng* 40:1-12.
- [42] She G, Yuan F. G, Karami B, Ren Y. R, Xiao W. S (2019) On nonlinear bending behavior of FG porous curved nanotubes. *Int J Eng Sci* 135:58-74.
- [19] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A (2020) Nonlocal study of the vibration and stability response of small-scale axially moving supported beams on viscoelastic-Pasternak foundation in a hygro-thermal environment. *Math Meth Appl Sci*. doi: 10.1002/mma.6859.
- [20] Elaikh T, Agboola O (2022) Investigation of Transverse Vibration Characteristics of Cracked Axially Moving Functionally Graded Beam Under Thermal Load. *Trends in Sci* 19(23):1349-1349.
- [21] Hu Y, Wang J (2017) Principal-internal resonance of an axially moving current-carrying beam in magnetic field. *Nonlinear Dynam* 90:683-695.
- [22] Wei M, Sun L, Hu G (2017) Dynamic properties of an axially moving sandwich beam with magnetorheological fluid core. *Adv Mech Eng* 9(2):1687814017693182.
- [23] Shafiei N, Mirjavadi S, MohaselAfshari B, Rabby S, Kazemi M (2017) Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams. *Comput Meth Appl Mech Eng* 322:615-632.
- [24] Şimşek M (2016) Nonlinear free vibration of a functionally graded nanobeam using nonlocal strain gradient theory and a novel Hamiltonian approach. *Int J Eng Sci* 105:12-27.
- [25] Mamaghani A, Khadem S, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynam* 86:1761-1795.
- [26] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2022) Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Base Des Struct Mach* 50(2):412-441.
- [27] Heydari A, Li L (2021) Dependency of critical damping on various parameters of tapered bidirectional graded circular plates rested on Hetenyi medium. *Proc IME C J Mech Eng Sci* 235(12):2157-2179.
- [28] Zhang H, Ma J, Ding H, Chen L (2017) Vibration of axially moving beam supported by viscoelastic foundation. *Appl Math Mech* 38(2):161-172.
- [29] Bahaadini R, Hosseini M, Jamalpoor A (2017) Nonlocal and surface effects on the flutter instability of cantilevered nanotubes conveying fluid subjected to follower forces. *Phys B Condens Matter* 509:55-61.
- [30] Bai Y, Suhatri M, Cao Y, Forooghi A, Assilzadeh H (2022) Hygro-thermo-magnetically induced vibration of nanobeams with simultaneous axial and spinning motions based on nonlocal strain gradient theory. *Eng Comput* 38:2509-2526