مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۲/ شماره ۰۴/ صفحه ۵۹-۷۲

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/JSFM.2022.11286.3482

دانشگاه صنعتی شاهرود

تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از یک فرمول‌بندی دوبعدی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی

مهسا نجفی[۱]، عیسی احمدی[۲،*]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۲۰

چکیده

نوشتار حاضر روشی دقیق و کارآمد برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک ارائه می‌دهد. در این روش، به منظور اعمال اثرات ابعاد کوچک، از تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن استفاده شده است. برخلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی، در تئوری حاضر میدان های جابجایی و کرنش به صورت فرم کلی در نظر گرفته شده‌اند و از کرنش برون صفحه‌ای عمودی صرفنظر نشده است. معادلات حاکم بر نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. با حل این معادلات فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای خمشی و ضخامت برای ارتعاشات آزاد نانوتیر استخراج شده است. همگرایی نتایج پیش‌بینی شده مورد مطالعه قرار گرفته و اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحلی، نسبت طول به ضخامت و ولتاژ اعمالی خارجی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به منظور صحه‌گذاری دقت روش حاضر، نتایج پیش‌بینی شده توسط این تئوری با نتایج تئوری‌های موجود در مقالات پیشین و روش المان محدود مقایسه شده‌اند. این مطالعه نشان می‌دهد، فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر در مقایسه با نتایج تئوری‌های تغییر شکل برشی کوچکتر می‌باشند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهند که فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک با افزایش ولتاژ الکتریکی اعمال شده منفی و همچنین نیروی محوری کششی و کاهش پارامتر غیرمحلی افزایش می‌یابد. نتایج حاکی از آن است که فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامتی قابل صرفنظر نمی‌باشند و برخلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی، تئوری حاضر این فرکانس‌ها را پیش‌بینی می‌کند.

کلمات کلیدی: نانوتیر پیزوالکتریک؛ ارتعاشات آزاد؛ تئوری الاستیسیته غیرمحلی؛ فرمول‌بندی دوبعدی تیر.

Free Vibration Analysis of Piezoelectric Nanobeam Based on a 2D-formulation and Nonlocal Elasticity Theory

M. Najafi[1], I. Ahmadi[2,*]

[1] Ph.D. Student, Faculty of Engineering, Mech. Eng., University of Zanjan, Zanjan, Iran

[2] Associate Professor, Faculty of Engineering, Mech. Eng., University of Zanjan, Zanjan, Iran

Abstract

The present paper presents an accurate and efficient method for the analysis of free vibration of piezoelectric nanobeam. In this method, Eringen's nonlocal elasticity theory is used to apply the small-scale effects. Despite the shear deformation theories, in the present theory, the displacement and strain fields are considered as a general form, and out-of-plane normal strain is not neglected. The governing equations of piezoelectric nanobeam are derived by employing Hamilton's principle. By solving these equations, natural frequencies related to flexural and thickness modes for the free vibration of nanobeam are obtained. The Convergence of the predicted results is studied, and the effects of various parameters such as nonlocal parameter, length to thickness ratio, and applied external voltage are investigated. To verify the accuracy of the present method, the results predicted by the present theory are compared with those of the theories available in the literature and the finite element method. This study shows that the natural frequencies predicted by the present theory are smaller than those of shear deformation theories. The results of this study show that the natural frequency of the piezoelectric nanobeam increases by increasing the negative applied electric voltage as well as tensile axial load and decreasing the nonlocal parameter. The results show that the natural frequencies related to thickness modes are not negligible and the shear deformation theories, the present theory can predict these frequencies.

Keywords: Piezoelectric nanobeam; free vibration; nonlocal elasticity theory; 2D-formulation of nanobeam.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۴-۳۳۰۵۴۰۵۸؛ فکس: ۰۲۴-۳۲۲۸۳۲۰۴

آدرس پست الکترونیک: i_ahmadi@znu.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، نانوساختارهای پیزوالکتریک، به عنوان یکی از سازه‌های هوشمند، به دلیل خواص منحصربه‌فرد الکتریکی، مکانیکی و فیزیکی توجه بسیاری از محققان را به خود جلب نموده‌اند. قابلیت تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و بالعکس در این مواد، زمینه کاربرد گسترده آن‌ها در صنعت، پزشکی، هوافضا، خودرو و غیره را فراهم آورده است. از جمله کاربردهای نانوساختارهای پیزوالکتریک می‌توان به حسگرها [۱-۳]، مبدل ها [۴-۶]، ژنراتورها [۷-۹] اشاره نمود؛ بنابراین بررسی و تحلیل رفتار مکانیکی نانوساختارهای پیزوالکتریک از اهمیت بالایی برخوردار است. مدل مورد بررسی در این پژوهش نانوتیر پیزوالکتریک است که به دلیل امکان تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی و بالعکس کاربردهای بسیاری مانند آشکارسازها و سنسورها دارد. به عنوان مثال از نانوتیر پیزوالکتریک در آشکارسازها برای بررسی و کنترل سیگنال‌های الکتریکی [۱۰]، در بیو سنسورها برای رساندن دارو به بیماران سرطانی یا رساندن شیمی درمانی به تومورها [۱۱]، در تشدیدکننده‌ها برای شناسایی طیف مادون قرمز که کاربردهای نظامی، ردیابی موشک‌ها و کاربردهای غیرنظامی مانند تصویربرداری حرارتی و تشخیص پزشکی دارند [۱۲]، در تشدیدکننده‌های نانوالکترومکانیکال برای تعیین بسیار دقیق چگالی ابرشاره‌ها یا تعیین میرایی سیالات [۱۳] استفاده می‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهند که اثرات ابعاد کوچک نقش مهمی در رفتار مکانیکی نانوساختارها دارد. تئوری کلاسیک از اثرات ابعاد کوچک صرفنظر می‌کند و از اینرو قادر به پیش‌بینی رفتار نانوساختارها نیست. برای اعمال اثرات ابعاد کوچک در این ساختارها دو روش مورد استفاده قرار می‌گیرد: ۱. روش اتمی مانند دینامیک مولکولی ۲. تئوری‌های مکانیک پیوسته. روش دینامیک مولکولی با وجود پیش‌بینی دقیق نتایج، در مقایسه با تئوری‌های مکانیک پیوسته زمان‌بر و پیچیده است. از جمله تئوری‌های مکانیک پیوسته پرکاربرد می‌توان به تئوری تنش کوپل [۱۴-۱۶]، تئوری تنش کوپل اصلاح شده [۱۷-۱۹]، تئوری گرادیان کرنش [۲۰-۲۲]، تئوری الاستیسیته سطحی [۲۳-۲۵] و تئوری الاستیسیته غیرمحلی [۲۶-۲۸] اشاره کرد. در میان تئوری‌های مکانیک پیوسته، تئوری الاستیسیته غیرمحلی که توسط ارینگن ارائه شده است، رفتار مکانیکی نانوساختارها را به خوبی پیش‌بینی می‌نماید. مقالات بسیاری با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی و تئوری غیرمحلی به بررسی و مطالعه رفتار مکانیکی نانوتیرهای پیزوالکتریک پرداخته‌اند که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود. کی و همکاران [۲۹-۳۰]، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی و تئوری تیر تیموشنکو و روش مربعات دیفرانسیلی به بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی نانوتیر پیزوالکتریک تحت ولتاژ اعمالی و دمای یکنواخت پرداختند. آن‌ها نشان دادند که افزایش پارامتر غیرمحلی موجب کاهش میزان فرکانس خطی و غیرخطی نانوتیر می‌شود. لیو و همکاران [۳۱] کمانش و پس کمانش نانوتیرهای پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکتریکی، مکانیکی و حرارتی را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن و تئوری تیموشنکو بررسی نمودند. کاغذیان و همکاران [۳۲] به بررسی ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک پرداختند و با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی و تئوری اویلر-برنولی روابط را استخراج کردند. رفتار دینامیکی نانوتیرهای پیزوالکتریک روی بستر وینکلر-پاسترناک بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی توسط رگب و همکاران [۳۳] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها نشان دادند که افزایش تغییرات دما، ولتاژ الکتریکی اعمالی، پارامتر غیرمحلی و نسبت طول به ضخامت باعث کاهش فرکانس طبیعی نانوتیر می‌شوند. محتشمی و طادی بنی [۳۴] با استفاده از روش المان محدود و مدل نانوتیر اویلر-برنولی غیرمحلی به مطالعه ارتعاشات و کمانش نانوتیر پیزوالکتریک پرداختند. ابراهیمی و براتی [۳۵]، کمانش نانوتیر مدرج تابعی پیزوالکتریک روی بستر الاستیک را با استفاده از تئوری مراتب بالاتر برشی و تئوری غیرمحلی ارینگن مورد مطالعه قرار دادند. ژانگ و همکاران [۳۶]، به بررسی ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک روی بستر ویسکوالاستیک تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی پرداختند. هاو-نان وهمکاران [۳۷]، ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک تابعی دوار را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته و تئوری تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند. لی و همکاران [۳۸] با به کاربردن تئوری تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیته غیرمحلی به بررسی خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیرهای مگنتوالکتروالاستیک پرداختند. الطاهر و همکاران [۳۹] با استفاده از روش المان محدود، تئوری اویلر-برنولی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی و با در نظر گرفتن اثر الاستیسیته سطح به بررسی خمش و ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک

پرداختند. طادی بنی [۴۰] با استفاده از تئوری اویلر-برنولی معادلات غیرخطی خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک تابعی را به دست آوردند. قربانپور آرانی و همکاران [۴۱] با به کار بردن تئوری ردی و تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی به بررسی کمانش نانوتیر پیزوالکتریک روی بستر الاستیک پرداختند. مطالعات انجام شده در زمینه نانوتیرهای پیزوالکتریک عمدتاً از تئوری‌های تغییر شکل برشی غیرمحلی برای بررسی رفتار مکانیکی این ساختارها استفاده نموده‌اند. همانطور که پیش‌تر اشاره شد، تئوری‌های تغییر شکل برشی، فرم ساده و یا از پیش تعیین شده‌ای برای میدان‌های جابجایی و کرنش در نظر می‌گیرند و از بعضی مولفه‌های کرنش صرف-نظر می‌کنند؛ بنابراین نتایج پیش‌بینی شده توسط این تئوری‌ها مخصوصا برای نانوتیرهای ضخیم ممکن است، دقت قابل قبول نداشته باشد [۴۲]؛ همچنین با توجه به فرضیات این تئوری‌ها پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی وابسته به مدهای ارتعاشی ضخامت امکان‌پذیر نیست. در حالیکه این مدهای ارتعاشی اهمیت بالایی داشته و صرفنظر از آن‌ها ممکن است، باعث کاهش دقت یا خطا در تحلیل رفتار مکانیکی نانوتیرها شود.

در این پژوهش برای بالا بردن دقت نتایج، فرمول‌بندی جدیدی بر اساس یک فرمول‌بندی دوبعدی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای بررسی و تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک ارائه شده است. در این تئوری فرم کلی برای میدان‌های جابجایی و کرنش در نظر گرفته شده است. به منظور به دست آوردن معادلات حاکم بر مساله از اصل همیلتون استفاده شده است. همگرایی نتایج مورد بررسی قرار گرفته و نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری ارائه شده با نتایج موجود در پژوهش‌های پیشین مقایسه می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی مربوط به مد خمشی و مدهای ضخامت نانوتیر پیزوالکتریک با حل معادلات حاکم بر مساله با استفاده از روش ناویر برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده به دست می‌آیند. اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحلی، نسبت طول به ضخامت نانوتیر و ولتاژ اعمالی خارجی بر ارتعاشات آزاد نانوتیر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. مقایسه نتایج نشان می‌دهد، مقادیر فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر نسبت به مقادیر پیش‌بینی شده توسط تئوری‌های تغییر شکل برشی کوچکتر هستند. بعلاوه، با توجه به در نظر گرفتن فرم کلی میدان‌های جابجایی و کرنش توسط تئوری حاضر، علاوه بر پیش‌بینی فرکانس‌های مربوط به مد خمشی، امکان پیش بینی فرکانس‌های مربوط به مدهای ضخامت نیز وجود دارد.

۲- تئوری الاستیسیته غیرمحلی

تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن بیان می‌کند که تنش در یک نقطه مشخص (x)، برخلاف تنش محلی، تابعی از کرنش تمامی نقاط (x') ماده است. بر اساس این تعریف معادلات ساختاری غیرمحلی نانوتیر پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شوند. ([۲۶-۲۸])

$$\sigma_{ij}(x)=\int_V \alpha(|x'-x|,\tau)(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(x') - e_{mij}\,E_m\,(x'))dV\,(x') \quad (1)$$

$$D_i(x)=\int_V \alpha(|x'-x|,\tau)(e_{ikl}\,\varepsilon_{kl}\,(x') + s_{im}E_m(x'))dV\,(x') \quad (2)$$

که در این معادلات C_{ijkl}، ماتریس ضرایب الاستیک، e_{mij} ماتریس ضرایب پیزوالکتریک و s_{im} ماتریس ضرایب دی‌الکتریک می‌باشند؛ همچنین ε_{kl} تانسور کرنش، E_m میدان الکتریکی، σ_{ij} تانسور تنش و D_i جابجایی الکتریکی می‌باشند. در معادله‌های (۱) و (۲)، تابع وزن $\alpha(|x'-x|,\tau)$ مدول غیرمحلی و $|x'-x|$ فاصله اقلیدسی بین نقاط x و x' است. بعلاوه τ ثابتی است که رابطه بین طول‌های داخلی و خارجی را بیان می‌کند و به صورت $\tau=e_0a/L_e$ تعریف می‌شود که در آن e_0 ثابت ماده است که با روش‌های تجربی تعیین می‌شود، a طول مشخصه داخلی و L_e طول مشخصه خارجی است. استفاده از روابط انتگرالی غیرمحلی پیچیده و دشوار است، به همین دلیل معمولا از فرم دیفرانسیلی روابط بالا استفاده می‌شود. معادلات دیفرانسیلی غیرمحلی برای نانوتیر پیزوالکتریک به صورت زیر نوشته می‌شود. [۲۹]

$$\sigma_{ij}-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{mij}\,E_m \quad (3)$$

$$D_i-(e_0a)^2\nabla^2D_i=e_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}+s_{im}E_m \quad (4)$$

در این معادلات ∇^2 عملگر لاپلاسین بوده و به صورت $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2$ تعریف می‌شود؛ همچنین فرم ماتریسی معادلات (۳) و (۴) به شکل (۵) نوشته می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}-(e_0a)^2\nabla^2(\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}) = \begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0\\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \bar{C}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xz}\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & \bar{e}_{33}\\ \bar{e}_{15} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

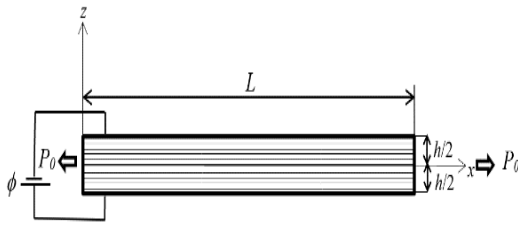
$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_z\end{Bmatrix}-(e_0a)^2\nabla^2(\begin{Bmatrix}D_x\\ D_z\end{Bmatrix}) = \begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{15}\\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{33} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xz}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{s}_{11} & 0\\ 0 & \bar{s}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_z\end{Bmatrix} \qquad (۶)$$

که در این معادلات ضرایب به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}&\bar{C}_{11}=C_{11}-\frac{C_{12}^2}{C_{22}},\bar{C}_{13}=C_{13}-\frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}},\bar{C}_{33}=C_{33}-\frac{C_{23}^2}{C_{22}}\\ &\bar{C}_{55}=C_{55},\bar{e}_{31}=e_{31}-\frac{C_{12}e_{32}}{C_{22}},\bar{e}_{33}=e_{33}-\frac{C_{23}e_{32}}{C_{22}},\bar{e}_{15}=e_{15}\\ &\bar{s}_{11}=s_{11},\bar{s}_{33}=s_{33}+\frac{e_{32}^2}{C_{22}}\end{aligned} \qquad (۷)$$

۳- معادلات حاکم بر نانوتیرهای پیزوالکتریک

نانوتیر پیزوالکتریک به طول L، ضخامت h، تحت بارگذاری محوری P_0 و تحت اختلاف پتانسیل الکتریکی خارجی $2V_E$ بین سطح بالا و پایین تیر مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- هندسه نانوتیر پیزوالکتریک تحت بارگذاری محوری و ولتاژ الکتریکی

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، محورهای مختصات x، y و z به ترتیب در راستای طول، عرض و ضخامت تیر در نظر گرفته شده‌اند. در این مقاله فرض می‌شود که نانوتیر از N لایه فرضی تشکیل شده است که لایه عددی نامیده می‌شوند که با در نظر گرفتن سطح بالا و پایین در مجموع $N+1$ سطح عددی (سطح مشترک لایه‌های عددی و سطوح پایین و بالای تیر) در تیر وجود خواهد داشت. جابجایی در راستای x با $u(x,z,t)$ و در راستای z با $w(x,z,t)$ نشان دادخ می‌شود. با فرض اینکه $U_k(x,t)$ و $W_k(x,t)$ جابجایی سطح عددی k اُم در راستای طول و ضخامت تیر باشد، میدان جابجایی تیر بصورت (۸) قابل بیان خواهد بود [۴۲].

$$\begin{aligned}u(x,z,t)&=\sum_{k=1}^{N+1}U_k(x,t)\Phi_k(z)\\ w(x,z,t)&=\sum_{k=1}^{N+1}W_k(x,t)\Phi_k(z)\end{aligned} \qquad (۸)$$

که $\Phi_k(z)$ تابع درونیاب لاگرانژی از z است که در سطح k اُم دارای مقدار برابر یک و در سایر سطوح دارای مقدار صفر است و به صورت (۹) تعریف می‌شود.

$$\Phi_k=\begin{cases}0 & z\le z_{k-1}\\ \dfrac{z-z_{k-1}}{h_{k-1}} & z_{k-1}\le z\le z_k\\ \dfrac{z_{k+1}-z}{h_k} & z_k\le z\le z_{k+1}\\ 0 & z\ge z_{i+1}\end{cases} \qquad k=1,2,\dots,N+1 \qquad (۹)$$

در معادله (۹)، h_k ضخامت لایه عددی k اُم و z_k مختصه z سطح عددی k اُم را نشان می‌دهند؛ همچنین فرم کلی پتانسیل الکتریکی اعمال شده بر نانوتیر پیزوالکتریک با توجه به معادلات ماکسول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\phi(x,z,t)=\Phi_k^E(x,t)\Phi_k(z)+\frac{2z}{h}V_E \qquad k=1,2,\dots,N+1 \qquad (۱۰)$$

که در معادله (۱۰)، V_E پتانسیل اولیه الکتریکی روی سطح بالای تیر ($z=h/2$)، $-V_E$ پتانسیل اولیه الکتریکی روی سطح پایین تیر ($z=-h/2$) و $\Phi^E_k(x,t)$ توزیع پتانسیل الکتریکی می‌باشند. با توجه به اینکه ترم خطی $2zV_E/h$ شرایط اعمال پتانسیل در سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌کند، لذا در معادله (۱۰) پتانسیل لایه‌ای $\Phi^E_k(x,t)$ در سطوح بالا و پایین نانوتیر باید برابر با صفر باشد؛ یعنی $\Phi_1^E(x,t)=\Phi_{N+1}^E(x,t)=0$. با استفاده از رابطه (۱۰) میدان الکتریکی در راستای x و z به صورت (۱۱) به دست می‌آید.

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\Phi_k^E}{\partial x}\Phi_k(z) \qquad (۱۱)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\Phi_k^E \frac{d\Phi_k(z)}{dz} - \frac{2V_E}{h}$$

با توجه به روابط کرنش-جابجایی، کرنش‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای به صورت (۱۲) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U_k}{\partial x}\Phi_k \\ \varepsilon_z &= \frac{d\Phi_k}{dz}W_k \\ \gamma_{xz} &= \frac{d\Phi_k}{dz}U_k + \frac{\partial W_k}{\partial x}\Phi_k \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

براساس اصل همیلتون معادلات حاکم بر مساله نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از معادله (۱۳) استخراج می‌شوند.

$$\delta \Pi = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T)dt \qquad (۱۳)$$

که در معادله (۱۳) U، V و T به ترتیب انرژی کرنشی، کار نیروهای خارجی و انرژی جنبشی است. انرژی کرنشی نانوتیر پیزوالکتریک به صورت (۱۴) تعریف می‌شود. [۲۹]

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz} + \\ \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz})dxdydz \\ - \int_V (D_x\delta E_x + D_z \delta E_z)\, dxdydz \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با قرار دادن میدان کرنش و میدان الکتریکی، معادله (۱۴) به شکل (۱۵) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_V (\sigma_{xx}\frac{\partial \delta U_k}{\partial x}\Phi_k(z) + \sigma_{zz}\frac{d\Phi_k(z)}{dz}\delta W_k + \\ \sigma_{xz}\frac{d\Phi_k(z)}{dz}\delta U_k + \sigma_{xz}\frac{\partial \delta W_k}{\partial x}\Phi_k(z))dxdydz \\ + \int_V (D_x \frac{\partial \delta \Phi_k^E}{\partial x}\Phi_k(z) + D_z \delta\Phi_k^E \frac{d\Phi_k(z)}{dz})dxdydz \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

همچنین کار نیروهای خارجی پتانسیل الکتریکی و نیروی محوری با معادله (۱۶) به دست می‌آید. [۲۹]

$$\begin{aligned} \delta V = \int_0^L (N_{xx}^M + N_{xx}^E)\,(\frac{\partial W_{N_c}}{\partial x}\delta\frac{\partial W_{N_c}}{\partial x})dx = \\ \int_0^L (N_{xx}^M + N_{xx}^E)\,(\frac{\partial^2 \delta W_{N_c}}{\partial x^2}\delta W_{N_c})dx \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در این معادله N_c شماره سطح میانی تیر است. بعلاوه $N_{xx}{}^M$ و $N_{xx}{}^E$ به ترتیب نیروی محوری حاصل از بارگذاری مکانیکی P_0 و نیروی حاصل از اعمال پتانسیل الکتریکی خارجی اولیه $2V_E$ است که به صورت (۱۷) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} N_{xx}^M &= P_0 \\ N_{xx}^E &= 2\bar{e}_{31}V_E \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

همچنین انرژی جنبشی تیر به صورت (۱۸) استخراج می‌شود.[۲۹]

$$\begin{aligned} \delta T = \\ \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)((\Phi_j \frac{\partial U_j}{\partial t})\left(\Phi_k \delta \frac{\partial U_k}{\partial t}\right) + \\ (\Phi_j \frac{\partial W_j}{\partial t})(\Phi_k \delta\frac{\partial W_k}{\partial t}))dzdx \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

برای ساده‌سازی فرمول‌بندی منتجه‌های $M_x{}^k$، $R_x{}^k$، $N_z{}^k$، $Q_x{}^k$، $\widetilde{M}_x^k$، $\widetilde{N}_z^k$ و E_{kj} مطابق زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (M_x^k, \widetilde{M}_x^k, R_x^k) &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, D_x, \sigma_{xz})\Phi_k\, dz \\ (N_z^k, \widetilde{N}_z^k, Q_x^k) &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{zz}, D_z, \sigma_{xz})\frac{d\Phi_k}{dz}dz \\ E_{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)\Phi_k(z)\Phi_j(z)dz \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن معادله (۱۹) در معادلات (۱۵) و (۱۸)، این معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L (M_x^k \frac{\partial \delta U_k}{\partial x} + N_z^k \delta W_k + Q_x^k \delta U_k + \\ R_x^k \frac{\partial \delta W_k}{\partial x})dx + \int_0^L (\widetilde{M}_x^k \frac{\partial \delta \Phi_k^E}{\partial x} + \widetilde{N}_z^k \delta \Phi_k^E)\, dx = \\ \int_0^L ((Q_x^k - \frac{\partial M_x^k}{\partial x})\delta U_k + (N_z^k - \frac{\partial R_x^k}{\partial x})\delta W_k + (\widetilde{N}_z^k - \\ \frac{\partial \widetilde{M}_x^k}{\partial x})\delta\Phi_k^E)dx + M_x^k \delta U_k|_0^L + R_x^k \delta W_k|_0^L + \\ \widetilde{M}_x^k \delta \Phi_k^E|_0^L \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L E_{kj}\,(\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}\delta U_k + \\ \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2}\delta W_k)\, dxdt \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با قرار دادن معادلات (۱۶)، (۲۰) و (۲۱) در معادله (۱۳) معادلات حاکم بر مساله مانند (۲۲) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x^k}{\partial x} - Q_x^k &= E_{kj}\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\ \frac{\partial R_x^k}{\partial x} - N_z^k &= E_{kj}\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} - (N_{xx}^M + N_{xx}^E)\,(\frac{\partial^2 W_{N_c}}{\partial x^2}) \\ \frac{\partial \widetilde{M}_x^k}{\partial x} - \widetilde{N}_z^k &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با توجه به رابطه (۵) و (۶) و جاگذاری کرنش‌ها و میدان الکتریکی بر حسب جابجایی مکانیکی و پتانسیل الکتریکی، تنش و جابجایی الکتریکی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_{xx}=\bar{C}_{11}\frac{\partial U_j}{\partial x}\Phi_j+\\ \bar{C}_{13}\frac{d\Phi_j}{dz}W_j+\bar{e}_{31}\Phi_k^E\frac{d\Phi_k}{dz}+\bar{e}_{31}\frac{2V_E}{h}\,\sigma_{zz}-\\ (e_0a)^2\nabla^2\sigma_{zz}=\bar{C}_{13}\frac{\partial U_j}{\partial x}\Phi_j+\bar{C}_{33}\frac{d\Phi_j}{dz}W_j+\\ \bar{e}_{33}\Phi_k^E\frac{d\Phi_k}{dz}+\bar{e}_{33}\frac{2V_E}{h}\,\sigma_{xz}-(e_0a)^2\nabla^2\sigma_{xz}=\\ \bar{C}_{55}\frac{d\Phi_j}{dz}U_j+\bar{C}_{55}\frac{\partial W_j}{\partial x}\Phi_j+\bar{e}_{15}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\Phi_j\;D_x-\\ (e_0a)^2\nabla^2D_x=\bar{e}_{15}\frac{d\Phi_j}{dz}U_j+\bar{e}_{15}\frac{\partial W_j}{\partial x}\Phi_j-\\ \bar{s}_{11}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\Phi_j\;D_z-(e_0a)^2\nabla^2D_z=\bar{e}_{31}\frac{\partial U_j}{\partial x}\Phi_j+\\ \bar{e}_{33}\frac{d\Phi_j}{dz}W_j-\bar{s}_{33}\Phi_j^E\frac{d\Phi_j}{dz}-\bar{s}_{33}\frac{2V_E}{h}\end{gathered} \tag{۲۳}$$

با انتگرال‌گیری از مولفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی در راستای ضخامت پارامترهای تعریف شده در معادله (۱۹) به فرم زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{gathered}M_x^k-(e_0a)^2\nabla^2M_x^k=D_{11}^{kj}\frac{\partial U_j}{\partial x}+B_{13}^{kj}W_j+\\ {}_eB_{31}^{kj}\Phi_j^E+\;{}_eB_{31}^{k}\frac{2V_E}{h}\\ N_z^k-(e_0a)^2\nabla^2N_z^k=B_{13}^{jk}\frac{\partial U_j}{\partial x}+A_{33}^{kj}W_j+\\ +\,{}_eA_{33}^{kj}\Phi_j^E+\;{}_eA_{33}^{k}\frac{2V_E}{h}\,Q_x^k-(e_0a)^2\nabla^2Q_x^k=\\ A_{55}^{kj}U_j+B_{55}^{jk}\frac{\partial W_j}{\partial x}+\;{}_eB_{15}^{jk}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\\ R_x^k-(e_0a)^2\nabla^2R_x^k=B_{55}^{kj}U_j+D_{55}^{kj}\frac{\partial W_j}{\partial x}+\\ {}_eD_{15}^{kj}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\\ \widetilde{M}_x^k-(e_0a)^2\nabla^2\widetilde{M}_x^k=\;{}_eB_{15}^{kj}U_j+\;{}_eD_{15}^{kj}\frac{\partial W_j}{\partial x}-\\ {}_sD_{11}^{kj}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\,\widetilde{N}_z^k-(e_0a)^2\nabla^2\widetilde{N}_z^k=\;{}_eB_{31}^{jk}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\\ {}_eA_{33}^{kj}W_j-\;{}_sA_{33}^{kj}\Phi_j^E-\;{}_sA_{33}^{k}\frac{2V_E}{h}\end{gathered} \tag{۲۴}$$

در این معادلات ماتریس‌های $A_{ab}{}^{kj}$، ${}_eA_{ab}{}^{k}$، ${}_sA_{ab}{}^{k}$، ${}_eB_{ab}{}^{k}$، $B_{ab}{}^{kj}$، $D_{ab}{}^{kj}$، ${}_eA_{ab}{}^{kj}$، ${}_eB_{ab}{}^{kj}$، ${}_eD_{ab}{}^{kj}$، ${}_sA_{ab}{}^{kj}$ و ${}_sD_{ab}{}^{kj}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{gathered}(D_{ab}^{kj},\;{}_eD_{ab}^{kj},\;{}_sD_{ab}^{kj})=\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\bar{C}_{ab},\bar{e}_{ab},\bar{s}_{ab})\Phi_k(z)\Phi_j(z)dz\\ (B_{ab}^{kj},\;{}_eB_{ab}^{kj})=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\bar{C}_{ab},\bar{e}_{ab})\Phi_k(z)\frac{d\Phi_j(z)}{dz}dz\\ (A_{ab}^{kj},\;{}_eA_{ab}^{kj},\;{}_sA_{ab}^{kj}=\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\bar{C}_{ab},\bar{e}_{ab},\bar{s}_{ab})\frac{d\Phi_k(z)}{dz}\frac{d\Phi_j(z)}{dz}dz\\ (\;{}_eA_{ab}^{k},\;{}_sA_{ab}^{kj})=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\bar{e}_{ab},\bar{s}_{ab})\frac{d\Phi_k(z)}{dz}dz\\ {}_eB_{ab}^{k}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{e}_{ab}\Phi_k(z)dz\end{gathered} \tag{۲۵}$$

که اندیس a و b می‌توانند اعداد ۱، ۳ و یا ۵ باشند. با قراردادن پارامترهای معادله (۲۵) در معادلات حاکم بر مساله، این معادلات برای نانوتیر پیزوالکتریک بر حسب U_j، W_j و Φ_j^E که شامل $(3N+3)$ معادله است، استخراج می‌شود.

$$\begin{gathered}D_{11}^{kj}\frac{\partial^2U_j}{\partial x^2}+B_{13}^{kj}\frac{\partial W_j}{\partial x}\\ +\,{}_eB_{31}^{kj}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}-A_{55}^{kj}U_j\\ -B_{55}^{jk}\frac{\partial W_j}{\partial x}-\;{}_eB_{15}^{jk}\frac{\partial\Phi_j^E}{\partial x}\\ =(1-(e_0a)^2\nabla^2)(E_{kj}\frac{\partial^2U_j}{\partial t^2})\;B_{55}^{kj}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\\ D_{55}^{kj}\frac{\partial^2W_j}{\partial x^2}+\;{}_eD_{15}^{kj}\frac{\partial^2\Phi_j^E}{\partial x^2}\\ -B_{13}^{jk}\frac{\partial U_j}{\partial x}-A_{33}^{kj}W_j-\;{}_eA_{33}^{kj}\Phi_j^E-\;{}_eA_{33}^{k}\frac{2V_E}{h}\\ =(1-(e_0a)^2\nabla^2)(E_{kj}\frac{\partial^2W_j}{\partial t^2}-(N_{xx}^M+\\ N_{xx}^E)(\frac{\partial^2W_{N_c}}{\partial x^2})\;\;{}_eB_{15}^{kj}\frac{\partial U_j}{\partial x}+\;{}_eD_{15}^{kj}\frac{\partial^2W_j}{\partial x^2}-\\ {}_sD_{11}^{kj}\frac{\partial^2\Phi_j^E}{\partial x^2}-\;{}_eB_{31}^{jk}\frac{\partial U_j}{\partial x}-\;{}_eA_{33}^{kj}W_j+\;{}_sA_{33}^{kj}\Phi_j^E+\\ {}_sA_{33}^{k}\frac{2V_E}{h}=\{0\}\end{gathered} \tag{۲۶}$$

۴- حل ارتعاشات نانوتیرهای پیزوالکتریک

شرایط مرزی برای نانوتیر با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned}&\delta U_k=0\;or\;M_x^k=0;\\ &\delta W_k=0\;or\;R_x^k=0;at\;x=0\;and\;x=L\\ &\delta\Phi_E^k=0\;or\;\widetilde{M}_x^k=0;\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با توجه به شرایط مرزی پاسخ معادله به صورت زیر انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی را ارضا می‌نماید.

$$\begin{aligned}\{U(x,t)\}&=\{\bar{U}\}_m\,cos(\frac{m\pi x}{L})e^{i\omega_{mp}t}\\ \{W(x,t)\}&=\{\bar{W}\}_m\,sin(\frac{m\pi x}{L})e^{i\omega_{mp}t}\\ \{\Phi^E(x,t)\}&=\{\bar{\Phi}^E\}_m\,sin(\frac{m\pi x}{L})e^{i\omega_{mp}t}\end{aligned} \tag{۲۸}$$

در این معادله m و p شماره مد ارتعاشی بوده و ω_{mp} فرکانس ارتعاشی است؛ همچنین {U(x,t)}، {W(x,t)} و {Φ^E(x,t)} ماتریس‌های ستونی مجهولات هرکدام با N+1 مولفه و $\{\bar{U}\}_m$، $\{\bar{W}\}_m$ و $\{\bar{\Phi}^E\}_m$ ماتریس‌هایی با ضرایب ثابت می‌باشند. به عنوان مثال {U(x,t)} و $\{\bar{U}\}_m$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\{U(x,t)\}^T=\{U_1(x,t),U_2(x,t),\ldots,U_{N+1}(x,t)\} \quad (۲۹)$$

$$\{\bar{U}\}^T=\{\bar{U}_1,\bar{U}_2,\ldots,\bar{U}_{N+1}\} \quad (۳۰)$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ترم‌های غیر همگن در معادله (۲۶) که همگی دارای ترم V_E هستند، در نظر گرفته نمی‌شوند؛ چرا که این ترم‌ها نقشی در فرکانس طبیعی ندارند. حال با جایگذاری معادله (۲۸) در معادله (۲۶) و جداسازی ضرایب مولفه‌ها، معادله (۳۱) حاصل می‌شود.

$$[A]\begin{Bmatrix}\{\bar{U}\}_m\\\{\bar{W}\}_m\\\{\bar{\Phi}^E\}_m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\\{0\}\\\{0\}\end{Bmatrix} \quad (۳۱)$$

که {0} ماتریس ستونی صفر با $N+1$ مولفه است. برای استخراج آوردن فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک و تعیین جواب غیر صفر معادله (۳۱)، دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده می‌شود.

$$|[A]|=0 \quad (۳۲)$$

برای هر شماره مد m، $(3N+3)$ فرکانس طبیعی ω_{mp} محاسبه می‌شوند. مد ارتعاشی مربوط به $p=1$ مد خمشی و مد ارتعاشی مربوط به $p>1$ مد ضخامت نامیده می‌شوند ([۴۳] و [۴۴]). تئوری ارائه شده در این پژوهش برخلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی قادر است، فرکانس‌های ارتعاشی مرتبط با مدهای ضخامت را نیز پیش‌بینی نماید، در حالی که تئوری‌های پیشین مانند تئوری‌های تغییر شکل برشی به دلیل در نظر گرفتن فرم ساده برای میدان جابجایی و میدان کرنش نمی‌توانند فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت را پیش‌بینی نمایند.

۵- نتایج و بحث

در این بخش ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک بررسی می‌شود. نتایج عددی شامل فرکانس‌های طبیعی نانوتیر ارائه می‌شوند که توسط تئوری مطرح شده در این پژوهش پیش‌بینی شده‌اند. نانوتیر پیزوالکتریک از PZT-4 تشکیل شده که خواص آن در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- خواص ماده PZT-4 ([۴۵] و [۴۶])

پارامتر	واحد	مقدار
$C_{11}=C_{22}$	GPa	۱۳۲
C_{12}	GPa	۷۱
C_{13}	GPa	۷۳
C_{33}	GPa	۱۱۵
$C_{44}=C_{55}$	GPa	۲۶
C_{66}	GPa	۳۰/۶
e_{31}	C/m^2	-۴/۱
e_{33}	C/m^2	۱۴/۱
e_{15}	C/m^2	۱۰/۵
s_{11}	$10^{-9}CV^{-1}m^{-1}$	۵/۸۴۱
s_{33}	$10^{-9}CV^{-1}m^{-1}$	۷/۱۲۴
ρ	kg/m^3	۷۵۰۰

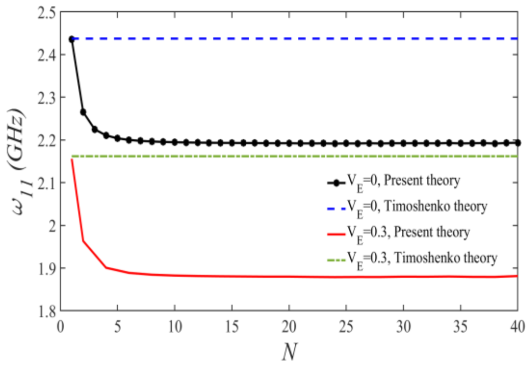
نانوتیر تحت پتانسیل خارجی الکتریکی و بار مکانیکی قرار دارد. در ادامه اثرات پارامترهای مختلف مانند نسبت طول بر ضخامت نانوتیر، پارامتر غیرمحلی، پتانسیل خارجی الکتریکی و بار مکانیکی محوری بر ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرکانس بی‌بعد نانوتیر پیزوالکتریک به صورت رابطه (۳۳) تعریف می‌شوند.

$$\omega^*=\omega_{mp}L\sqrt{\frac{\rho}{\bar{C}_{11}}} \quad (۳۳)$$

۵-۱- بررسی همگرایی نتایج

در این قسمت اثر تعداد لایه‌های عددی بر دقت نتایج در تئوری حاضر مورد بحث قرار می‌گیرد. همگرایی نتایج برای نانوتیر پیزوالکتریک با L=80nm، L/h=10، e_0a=0/2L، $Kw=Kp=P0=0$ برای دو مقدار ولتاژ الکتریکی خارجی V_E=0V و V_E=0/3V در شکل ۲ بررسی شده است. نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر با مرجع [۲۹] (تئوری تیر

تیموشنکو) مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل ۲ مشاهده می‌شود که در تعداد لایه عددی N=1 مقادیر فرکانس پیش‌بینی شده توسط هر دو تئوری با دقت بالایی یکسان می‌باشند، در حالیکه با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار فرکانس پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر کمتر از مقدار آن در تئوری تیموشنکو است. این تفاوت به دلیل در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان جابجایی و میدان کرنش است؛ همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار فرکانس طبیعی کاهش یافته و همگرایی در حدود N=15 رخ می‌دهد.



شکل ۲- همگرایی فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک برای مقدار ولتاژالکتریکی خارجی V_E=0V و V_E=0/3V

۲-۵- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبارسنجی روش معرفی شده در این مقاله، فرکانس‌های طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر با نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری تیموشنکو برای مقادیر مختلف e_0a/L در جدول ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. پارامترهای هندسی در این نانوتیر شامل h=10nm و L=80nm می‌باشند. مقادیر فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر برای مقادیر مختلف لایه‌های عددی با فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری تیموشنکو غیرمحلی [۲۹] مقایسه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود، در تعداد لایه‌های عددی پایین (N=1)، فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده توسط تئوری ارائه شده در این مقاله با دقت خوبی نزدیک به مقادیر فرکانس پیش‌بینی شده توسط تئوری تیموشنکو غیرمحلی است. روش حاضر با افزایش لایه‌های عددی کاهش یافته و تقریبا برای N=15 همگرایی رخ داده است و همانگونه که در بررسی همگرایی نتایج در شکل (۲) ملاحظه شد، پیش‌بینی روش حاضر برای N=15 و بالاتر تقریبا با یکدیگر برابر است و از پیش‌بینی انجام شده توسط تئوری تیموشنکو غیرمحلی [۲۹] پایین‌تر است. با توجه به اینکه نتایج پیش‌بینی تئوری تیموشینکو برای فرکانس‌های طبیعی تیر یک پیش‌بینی حدبالا است؛ لذا پایین بودن پیش‌بینی روش حاضر نسبت به مدل تیموشینکو کاملا منطقی و قابل پیش‌بینی است. همچنین نتایج پیش‌بینی شده برای ارتعاشات نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از روش حاضر و پیش‌بینی روش المان محدود که توسط محتشمی و طادی بنی [۳۴] ارائه شده است، در جدول ۳ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود، در تعداد لایه عددی N=1 نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر و روش المان محدود بسیار نزدیک به یکدیگرند. با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده توسط روش حاضر کاهش یافته و مشاهده می‌شود برای N=30 مقادیر پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر کمتر از مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش المان محدود با تعداد المان مختلف می‌باشند.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانوتیر پیزوالکتریک به ازای h=10nm، L=80nm و m=1

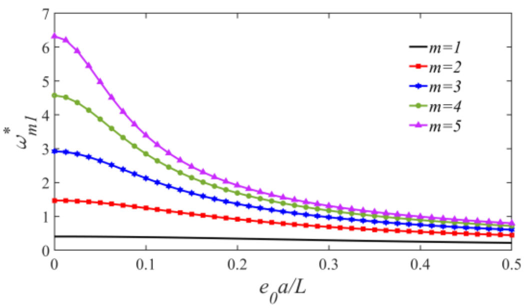
e₀a/L	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
N=۱	۲/۸۶۳۷	۲/۷۳۱۲	۲/۴۲۴۸	۲/۰۸۴۰	۱/۷۸۳۲
N=۵	۲/۵۹۱۲	۲/۴۷۲۰	۲/۱۹۴۰	۱/۸۸۵۷	۱/۶۱۳۵
N=۱۵	۲/۵۷۹۱	۲/۴۶۰۵	۲/۱۸۳۸	۱/۸۷۶۹	۱/۶۰۶۰
N=۲۵	۲/۵۷۸۲	۲/۴۵۹۹	۲/۱۸۳۰	۱/۸۷۶۲	۱/۶۰۵۵
N=۳۰	۲/۵۷۸۱	۲/۴۵۹۶	۲/۱۸۳۵	۱/۸۷۶۱	۱/۶۰۵۲
[۲۹]	۲/۸۷۸۶	۲/۷۴۶۳	۲/۴۳۷۴	۲/۰۹۴۸	۱/۷۹۲۴
٪ خطا	۱۰/۴۴	۱۰/۴۴	۱۰/۴۱	۱۰/۴۴	۱۰/۴۴

جدول ۳- فرکانس طبیعی تیر پیزوالکتریک (×10¹⁰ 1/s) به ازای L=10nm و e_0a=0

		L/h=۱۵	L/h=۲۰	L/h=۳۰
مرجع	2 Elements	۷/۹۹۹۹	۵/۹۹۹۹	۴/۰۰۰۰
[۳۴]	3 Elements	۷/۹۷۴۹	۵/۹۸۱۲	۳/۹۸۷۵
FEM	5 Elements	۷/۹۶۹۳	۵/۹۸۷۰	۳/۹۸۴۷
روش	N=۱	۷/۹۱۱۸	۵/۹۵۲۳	۳/۹۷۷۰
حاضر	N=۲	۷/۲۸۳۳	۵/۴۷۷۴	۳/۶۵۸۸
	N=۳۰	۷/۰۵۹۲	۵/۳۰۶۴	۳/۵۵۲۴
اختلاف (%)		۱۱/۵۰	۱۱/۳۷	۱۰/۸۵

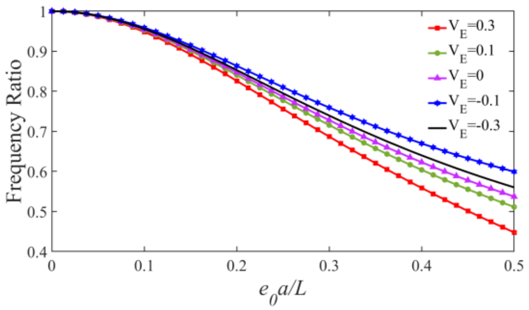
همچنین با توجه به این که همگرایی نتایج عددی روش ارائه شده در بخش ۵-۱ آمده است و مشاهده شده است که نتایج عددی تئوری حاضر با افزایش تعداد لایه‌های عددی بسرعت به عدد مشخص همگرا شده است، می‌توان نتیجه گرفت دقت روش حاضر در تعیین مقادیر فرکانس طبیعی قابل قبول بوده و از اینرو می‌توان اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری حاضر مورد بررسی قرار داد.

اثر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد نانوتیر پیزوالکتریک در شکل ۳ مورد مطالعه قرار گرفته است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، افزایش پارامتر غیرمحلی در تمامی مدهای ارتعاشی موجب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد نانوتیر پیزوالکتریک می‌گردد. با افزایش مد ارتعاشی تاثیر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد بیشتر شده و مشاهده می‌گردد، مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد در مد پنجم با شیب بیشتر نسبت به مد اول کاهش می‌یابد. به عنوان مثال برای مد اول خمشی، با افزایش نسبت پارامتر غیرمحلی بر طول از صفر تا 0/5 فرکانس طبیعی بی بعد 46 درصد کاهش یافته $\left(\frac{0/1910-0/3557}{0/3557}\times 100\right)$ و برای مد پنجم خمشی، با افزایش نسبت پارامتر غیرمحلی بر طول از صفر تا ۰/۵ فرکانس طبیعی بی بعد 87 درصد $\left(\frac{0/6660-5/2728}{5/2728}\times 100\right)$ کاهش یافته است. در واقع با افزایش پارامتر غیرمحلی سفتی نانوتیر پیزوالکتریک کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

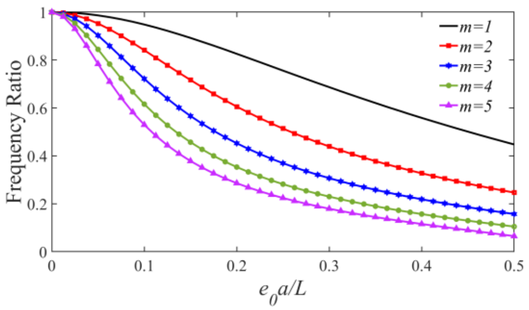


شکل۳- اثر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی بی بعد نانوتیر پیزوالکتریک (L=60nm، L/h=6، V_E=P_0=0)

اثر پارامتر غیرمحلی بر نسبت فرکانس در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. نسبت فرکانس طبیعی غیرمحلی بر فرکانس طبیعی محلی $\left(\frac{\omega_{mp}(e_0a\neq0)}{\omega_{mp}(e_0a=0)}\right)$ را نسبت فرکانس تعریف می‌کنند. در شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود که نسبت فرکانس در e_0a/L=۰ برابر یک بوده و با افزایش پارامتر غیرمحلی کاهش می‌یابد؛ نتیجه گرفته می‌شود که تئوری محلی مقدار فرکانس را بیشتر از مقدار آن در حالت غیرمحلی پیش‌بینی می‌نماید؛ لذا صرفنظر نمودن از پارامتر غیرمحلی، مخصوصا در مدهای ارتعاشی بالاتر به پیش‌بینی بالاتر از مقدار واقعی فرکانس طبیعی می‌انجامد. به عنوان مثال در مد اول، با افزایش نسبت پارامتر غیرمحلی بر طول از صفر تا ۰/۵، نسبت فرکانس غیرمحلی بر فرکانس طبیعی از یک به ۰/۵۳کاهش می‌یابد. همانطور که پیش‌تر اشاره شد، استفاده از مدل غیر محلی باعث کاهش مقدار فرکانس پیش‌بینی شده برای نانوتیر می‌شود.



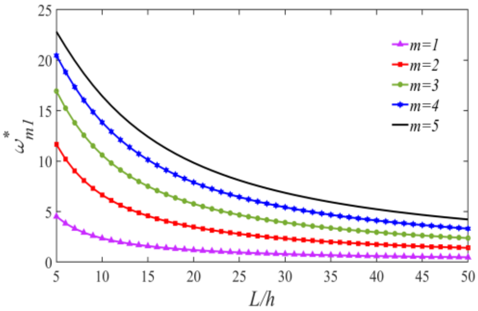
شکل۴- اثر پارامتر غیرمحلی بر نسبت فرکانس در ولتاژهای الکتریکی مختلف (L=60nm، L/h=6، m=p=1، P_0=0)



شکل۵- اثر پارامتر غیرمحلی بر نسبت فرکانس در مدهای طولی ارتعاشی مختلف (L=60nm، L/h=6، V_E=P_0=0)

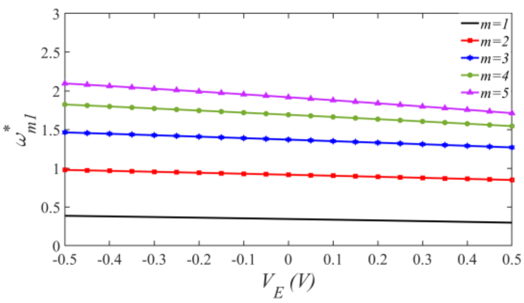
شکل ۶ اثر نسبت L/h را بر فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت L/h فرکانس طبیعی در تمامی مدهای ارتعاشی کاهش می‌یابد؛

همچنین با افزایش L/h اثر شماره مد بر فرکانس ارتعاشی کاهش یافته و مقادیر به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند.



شکل۶- اثر نسبت طول به ضخامت نانوتیر بر فرکانس طبیعی ($V_E=P_0=0$ ،$e_0a=0.2L$ ،$L=60$nm)

اثر ولتاژ الکتریکی اعمال شده بر نانوتیر پیزوالکتریک (**$P_0=0$ ،$e_0a=0.2L$ ،$L=60$nm, $L/h=6$**) بر فرکانس طبیعی بی‌بعد در شکل ۷ بررسی شده است. مشاهده می‌شود، افزایش ولتاژ الکتریکی مثبت اعمال شده بر نانوتیر پیزوالکتریک موجب کاهش فرکانس طبیعی نانوتیر می‌شود، درحالیکه افزایش مقادیر منفی ولتاژ الکتریکی باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود. در واقع اعمال ولتاژ الکتریکی مثبت مانند اعمال نیروی مکانیکی محوری فشاری بر نانوتیر بوده و اعمال ولتاژ الکتریکی منفی مانند اعمال نیروی مکانیکی محوری کششی است. به عنوان مثال در مد اول، با افزایش ولتاژ مثبت از 0 تا 0/5 ولت، فرکانس طبیعی بی‌بعد 2/36 درصد کاهش می‌یابد و با افزایش ولتاژ منفی از 0 تا -0/5 ولت، فرکانس طبیعی بی‌بعد 2/32 درصد افزایش می‌یابد.



شکل۷- اثر ولتاژ اعمالی بر نانوتیر پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد در مدهای مختلف

اثر نیروی مکانیکی محوری P_0 بر فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک در مدهای مختلف ارتعاشی در جدول ۴ آمده است. مشاهده می‌شود با افزایش نیروی کششی فرکانس طبیعی افزایش یافته و با افزایش نیروی فشاری کاهش می‌یابد. به عنوان مثال در V_E=0/3V، و m=1 با افزایش نیروی کششی از 0 تا 1N/m مقدار فرکانس طبیعی 3/63 درصد افزایش یافته است، در حالیکه با افزایش نیروی فشاری از 0 تا 1- مقدار فرکانس طبیعی 3/76 درصد کاهش یافته است.

جدول ۴- اثر نیروی مکانیکی اعمال شده P_0 (N/m) بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای مدهای ارتعاشی m و ولتاژهای الکتریکی V_E(V) مختلف به ازایL/h=6 ، L=60nm ،e_0a=0/2L

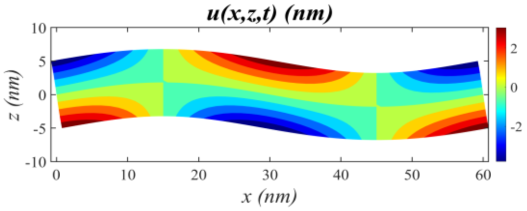
V_E	M	P_0				
		-1	-0.5	0	0.5	1
۰/۳	۱	/۳۳۸۱ ۰	/۳۴۵۷ ۰	/۳۵۳۱ ۰	/۳۶۰۴ ۰	/۳۶۷۵ ۰
	۲	/۹۳۱۹ ۰	/۹۴۲۶ ۰	/۹۵۳۳ ۰	/۹۶۳۹ ۰	/۹۷۴۳ ۰
	۳	/۳۹۰۴ ۱	/۴۰۶۳ ۱	/۴۲۲۱ ۱	/۴۳۷۶ ۱	/۴۵۳۰ ۱
۰	۱	/۳۵۵۱ ۰	/۳۶۲۳ ۰	/۳۶۹۴ ۰	/۳۷۶۴ ۰	/۳۸۳۲ ۰
	۲	/۹۵۶۲ ۰	/۹۶۶۷ ۰	/۹۷۷۱ ۰	/۹۸۷۴ ۰	/۹۹۷۶ ۰
	۳	/۴۲۶۳ ۱	/۴۴۱۹ ۱	/۴۵۷۲ ۱	/۴۷۲۳ ۱	/۴۸۷۳ ۱
-۰/۳	۱	/۳۷۱۳ ۰	/۳۷۸۲ ۰	/۳۸۵۰ ۰	/۳۹۱۷ ۰	/۳۹۸۳ ۰
	۲	/۹۷۹۹ ۰	/۹۹۰۲ ۰	/۰۰۰۳ ۱	/۰۱۰۴ ۱	/۰۲۰۳ ۱
	۳	/۴۶۱۴ ۱	/۴۷۶۵ ۱	/۴۹۱۴ ۱	/۵۰۶۲ ۱	/۵۲۰۸ ۱

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک برای مقادیر مدهای m و p و مقادیر مختلف نسبت طول به ضخامت و پارامتر غیرمحلی ارائه می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، برای e_0a =0 و L/h=5 فرکانس طبیعی ω_{21} کوچکتر از ω_{13}، ω_{22} کوچکتر از ω_{15}، ω_{23} کوچکتر از ω_{16} و فرکانس طبیعی ω_{31} کوچکتر از ω_{17} است. بعلاوه، برای L/h=10 فرکانس طبیعی ω_{21}

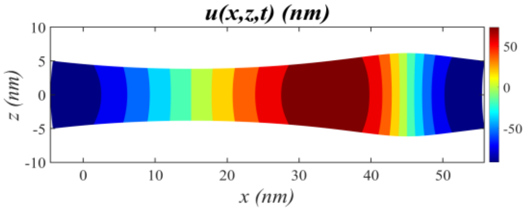
کوچکتر از ω_{14} است. برای e_0a=0.2L و L/h=5 فرکانس طبیعی ω_{21} کوچکتر از ω_{17} است؛ بنابراین از مقایسه فرکانس‌های طبیعی در مقادیر مختلف m و p نتیجه می‌شود که برخی فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ارتعاشی ضخامت با $p>1$ مهم‌تر از فرکانس‌های طبیعی با مد ارتعاشی خمشی p=1 هستند. به نظر می‌رسد اهمیت این مدهای ارتعاشی در نانوتیرهای پیزوالکتریک با نسبت طول به ضخامت کمتر بیشتر است. در شکل‌های ۸ الی شکل ۱۰ توزیع جابجایی‌های $w(x,z)$ و $u(x,z)$ و همچنین $\phi(x,z)$ برای نانوتیر پیزوالکتریک (L/h=8, L=80nm، e_0a=0.2L، V_E=0، P_0=0) در مدهای ارتعاشی مختلف ارائه شده است. در این شکل ها جابجایی $w(x,z)$ و $u(x,z)$ و $\phi(x,z)$ مربوط به مدهای ارتعاشی خمشی و ضخامتی m=2 و p=1,2,3 نشان داده شده‌اند. اگرچه تغییر شکل نانوتیر مربوط به مدهای ارتعاشی m=2 و $p>1$ توسط تئوری‌های تغییر شکل برشی قابل پیش‌بینی نیست، اما همانطور که ملاحظه می‌گردد، این تغییر شکل قابل صرفنظر نیست و با در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان‌های جابجایی و کرنش، پیش‌بینی تغییر شکل نانوتیر مربوط به مدهای ارتعاشی ضخامت ($p>1$) توسط تئوری حاضر امکان‌پذیر است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی بی‌بعد برای مدهای ارتعاشی m و p مختلف به ازای L=60nm، V_E=-0.3V و P_0 =0

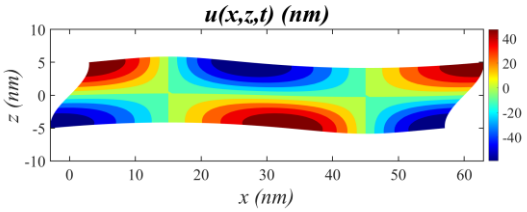
e_0a	L/h	M	p=1	p=2	p=3
۰	۵	۱	۰/۴۹۵۳	۲/۷۸۱۰	۹/۰۵۳۴
		۲	۱/۶۹۹۶	۵/۴۳۳۸	۱۰/۲۴۷۰
		۳	۳/۲۶۸۷	۷/۷۶۲۳	۱۱/۷۷۲۶
		۴	۴/۹۹۷۰	۹/۴۹۸۴	۱۳/۳۸۹۶
		۵	۶/۷۸۹۷	۱۰/۶۷۲۸	۱۴/۹۶۶۲
		۶	۸/۶۰۲۲	۱۱/۶۶۲۴	۱۶/۴۳۸۱
		۷	۱۰/۴۱۱۹	۱۲/۷۰۱۱	۱۷/۷۹۹۲
	۱۰	۱	۰/۳۰۵۰	۲/۷۹۵۷	۱۷/۳۹۸۹
		۲	۱/۰۲۰۶	۵/۵۶۲۱	۱۸/۱۰۶۹
		۳	۲/۰۹۷۴	۸/۲۶۶۳	۱۹/۱۷۴۹
		۴	۳/۴۳۴۱	۱۰/۸۶۷۶	۲۰/۴۹۴۰
		۵	۴/۹۴۷۵	۱۳/۳۱۱۲	۲۱/۹۷۳۴
		۶	۶/۵۷۷۸	۱۵/۵۲۴۷	۲۳/۵۴۵۳
		۷	۸/۲۴۴۸	۱۷/۴۳۱۹	۲۵/۱۵۹۶
۰/۲L	۵	۱	۰/۴۲۴۵	۲/۳۵۴۸	۷/۶۶۵۸
		۲	۱/۰۷۵۳	۳/۳۸۳۵	۶/۳۸۰۵
		۳	۱/۵۶۵۲	۳/۶۳۷۸	۵/۵۱۷۲
		۴	۱/۹۰۰۹	۳/۸۸۳۲	۴/۹۵۰۲
		۵	۲/۱۳۶۱	۴/۱۲۶۵	۴/۴۵۱۶
		۶	۲/۳۰۵۸	۴/۳۶۷۸	۴/۲۲۵۵
		۷	۲/۴۲۹۰	۴/۶۱۴۷	۳/۹۷۹۲
	۱۰	۱	۰/۲۷۴۴	۲/۳۶۷۲	۱۴/۷۲۸۷
		۲	۰/۶۹۱۳	۳/۴۶۳۴	۱۱/۲۷۴۶
		۳	۱/۰۸۴۴	۳/۸۷۴۰	۸/۹۸۶۵
		۴	۱/۴۲۱۴	۴/۰۱۷۷	۷/۵۷۶۹
		۵	۱/۷۰۸۰	۴/۰۳۷۴	۶/۶۶۵۲
		۶	۱/۹۵۴۵	۴/۰۵۵۴	۶/۰۳۶۹
		۷	۲/۱۶۹۳	۴/۰۷۲۳	۵/۵۷۸۱



(الف)

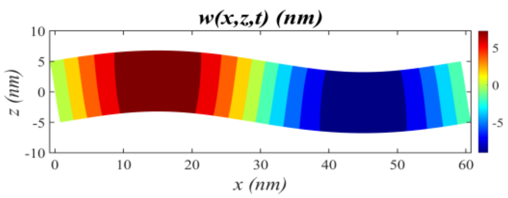


(ب)

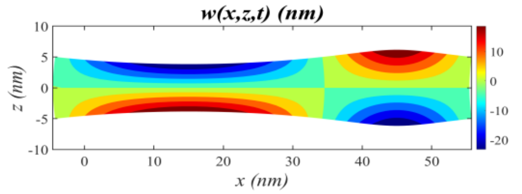


(ج)

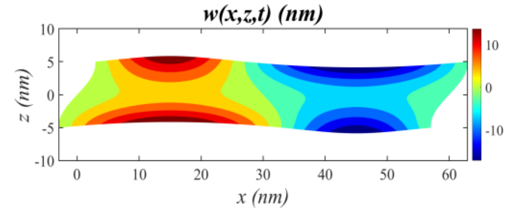
شکل ۸- توزیع جابجایی u(x,z) مربوط به مدهای ارتعاشی m=2 و الف) p=1 ب) p=2 ج) p=3



(الف)

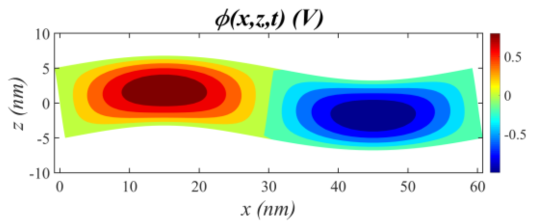


(ب)

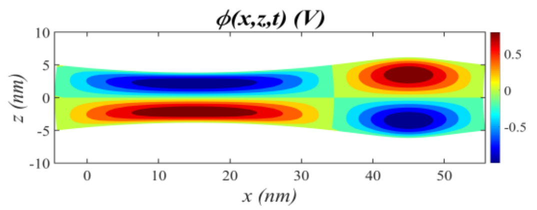


(ج)

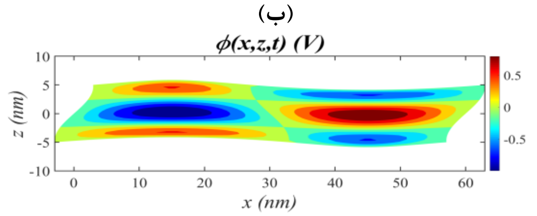
شکل ۹- توزیع جابجایی w(x,z) مربوط به مدهای ارتعاشی $m=2$ و الف) $p=1$ ب) $p=2$ ج) $p=3$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۰- توزیع جابجایی ϕ (x,z) مربوط به مدهای ارتعاشی $m=2$ و الف) $p=1$ ب) $p=2$ ج) $p=3$

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک تئوری دوبعدی برای حل ارتعاشات آزاد نانوتیرهای پیزوالکتریک بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارائه شده است. تئوری حاضر با در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان‌های جابجایی و کرنش و میدان الکتریکی، در مقایسه با سایر تئوری‌ها، مانند تئوری‌های تغییر شکل برشی، دقت بالاتری در پیش‌بینی مقادیر فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک دارد. معادلات حاکم بر مساله با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده و با اعمال شرایط مرزی و استفاده از روش حل ناویر مقادیر فرکانس طبیعی برای نانوتیر پیزوالکتریک استخراج شده است. به منظور صحه‌گذاری تئوری حاضر، نتایج پیش‌بینی شده با نتایج روش المان محدود و تئوری‌های تغییر شکل برشی موجود در مقالات و پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که با افزایش لایه‌های عددی مقادیر فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده کاهش یافته و فرکانس طبیعی به مقداری کمتر از نتایج تئوری‌های تغییر شکل برشی و المان محدود همگرا می‌شود که نشان دهنده دقت بالای این تئوری است؛ چرا که تئوری‌های برشی در پیش‌بینی فرکانس طبیعی تیر مقادیر بزرگتر از واقعیت را پیش‌بینی می‌کنند. در پایان نتایج پیش‌بینی شده برای نانوتیر پیزوالکتریک PZT-4 آمده است و اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی آن در جداول و نمودارهای مختلف ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است. فرکانس طبیعی نانوتیر پیزوالکتریک با افزایش ولتاژ الکتریکی اعمال شده مثبت کاهش یافته و با افزایش ولتاژ الکتریکی منفی افزایش می‌یابد؛ همچنین مقدار فرکانس طبیعی با افزایش نیروی مکانیکی کششی اعمال شده بر نانوتیر پیزوالکتریک افزایش یافته و با افزایش نیروی مکانیکی فشاری، کاهش می‌یابد. تئوری حاضر برخلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی می‌تواند فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ارتعاشی ضخامت را پیش‌بینی نماید. فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ارتعاشی ضخامت در نانوترهای ضخیم اهمیت بالایی داشته و به منظور تحلیل دقیق رفتار دینامیکی نانوتیر نمی‌توان از آن‌ها صرفنظر نمود. فرض‌هایی که در تئوری‌های تغییر شکل برشی وجود دارد باعث صرفنظر از این فرکانس‌ها در این تئوری‌ها می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که این فرکانس ها مخصوصا در تیرهای ضخیم می‌تواند نقش موثری در رفتار دینامیکی تیر ایفا کند.

مراجع

[1] Pohanka, M. (2017) The piezoelectric biosensors: Principles and applications. Int. J. Electrochem. Sci. 12: 496-506.

the basis of modified couple stress theory. Compos. Struct. 120: 65-78.
[18] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., and Tong, P. (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int. J. Solids Struct. 39(10): 2731-2743.
[19] Park, S. K., and Gao, X. L. (2006) Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory. J. Micromech. Microeng. 16(11): 2355.
[20] Mindlin, R. D., and Eshel, N. N. (1968) On first strain-gradient theories in linear elasticity. Int. J. Solids Struct. 4(1): 109-124.
[21] Wang, J., Shen, H., Zhang, B., Liu, J., and Zhang, Y. (2018) Complex modal analysis of transverse free vibrations for axially moving nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory. Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostructures. 101: 85-93.
[22] Ebrahimi, F. and Barati, M.R. (2016) Wave propagation analysis of quasi-3D FG nanobeams in thermal environment based on nonlocal strain gradient theory. Appl. Phys. A 122(9): 843.
[23] Ansari, R., Pourashraf, T. and Gholami, R. (2015) An exact solution for the nonlinear forced vibration of functionally graded nanobeams in thermal environment based on surface elasticity theory. Thin-Walled Struct. 93: 169-176.
[24] Wang, G. F., Feng, X. Q., and Yu, S. W. (2007) Surface buckling of a bending microbeam due to surface elasticity. EPL 77(4): 44002.
[25] Sahmani, S., Aghdam, M.M. and Bahrami, M. (2015) On the free vibration characteristics of postbuckled third-order shear deformable FGM nanobeams including surface effects. Compos. Struct. 121: 377-385.
[26] Eringen, A. C., and Edelen, D. G. B. (1972) On nonlocal elasticity. Int. J. Eng. Sci. 10(3): 233-248.
[27] Eringen, A. C. (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J. Appl. Phys. 54(9): 4703-4710.
[28] Eringen, A.C. and Wegner, J.L. (2003) Nonlocal continuum field theories. Appl. Mech. Rev. 56(2): B20-B22.
[29] Ke, L.L. and Wang, Y.S. (2012) Thermoelectric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory. Smart Mater. Struct. 21(2): 025018.
[30] Ke, Liao-Liang, Yue-Sheng Wang, and Zheng-Dao Wang. (2012) Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory. Compos. Struct. 94(6): 2038-2047.
[31] Liu, C., Ke, L.L., Wang, Y.S., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2014) Buckling and post-buckling of size-dependent piezoelectric Timoshenko nanobeams subject to thermo-electro-mechanical loadings. Int. J. Struct. Stab. Dyn. 14(03): 1350067.
[32] Kaghazian, A., Hajnayeb, A. and Foruzande, H. (2017) Free vibration analysis of a piezoelectric nanobeam using nonlocal elasticity theory. Struct. Eng. Mech. 61(5): 617-624.
[2] Elahi, H., Munir, K., Eugeni, M., Abrar, M., Khan, A., Arshad, A., and Gaudenzi, P. (2020) A review on applications of piezoelectric materials in aerospace industry. Integr. Ferroelectr. 211(1): 25-44.
[3] Li, Z.X., Yang, X.M. and Li, Z. (2006) Application of cement-based piezoelectric sensors for monitoring traffic flows, J. Transp. Eng. 132(7): 565-573.
[4] Uchino, K. (2008) Piezoelectric actuators. J. Electroceramics 20(3-4): 301-311.
[5] Yeh, C.H., Su, F.C., Shan, Y.S., Dosaev, M., Selyutskiy, Y., Goryacheva, I., and Ju, M.S. (2020) Application of piezoelectric actuator to simplified haptic feedback system. Sens. Actuator A Phys. 303: 111820.
[6] Gao, X., Yang, J., Wu, J., Xin, X., Li, Z., Yuan, X., Shen, X., and Dong, S. (2020) Piezoelectric actuators and motors: materials, designs, and applications. Adv. Mater. Technol. 5(1): 1900716, 2020.
[7] Spanner, K. and Koc, B. (2016) Piezoelectric motors, an overview. Actuators 5(1): 6.
[8] Schöner, H.P. (1992) Piezoelectric motors and their applications. Int. Trans. Electr. 2(6): 367-371.
[9] Uchino, K. (2008) Piezoelectric motors and transformers. In Piezoelectricity, Springer, Berlin, Heidelberg.
[10] Jiang, W., Mayor, F.M., Patel, R.N., McKenna, T.P., Sarabalis, C.J. and Safavi-Naeini, A.H. (2020) Nanobenders as efficient piezoelectric actuators for widely tunable nanophotonics at CMOS-level voltages. Commun. Phys. 3(1): 1-9.
[11] SoltanRezaee, M. and Bodaghi, M. (2020) Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor. Sci. Rep. 10(1): 1-14.
[12] Hui, Y., Gomez-Diaz, J.S., Qian, Z., Alu, A. and Rinaldi, M. (2016) Plasmonic piezoelectric nanomechanical resonator for spectrally selective infrared sensing. Nat. Commun. 7(1): 1-9.
[13] Bradley, D.I., George, R., Guénault, A.M., Haley, R.P., Kafanov, S., Noble, M.T., Pashkin, Y.A., Pickett, G.R., Poole, M., Prance, J.R. and Sarsby, M. (2017) Operating nanobeams in a quantum fluid. Sci. Rep. : 7(1), 1-8.
[14] Mindlin, R. D. and Tiersten, H. F. (1962) Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal 11: 415–448.
[15] Toupin, R.A. (1964) Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Ration. Mech. Anal. 17(2): 85-112.
[16] Hadi, A., Nejad, M.Z., Rastgoo, A., and Hosseini, M. (2018) Buckling analysis of FGM Euler-Bernoulli nano-beams with 3D-varying properties based on consistent couple-stress theory. Steel and Compos. Struct. 26(6): 663-672.
[17] Beni, Y.T., Mehralian, F. and Razavi, H. (2015) Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on

[33] Ragb, O., Mohamed, M. and Matbuly, M.S. (2019) Free vibration of a piezoelectric nanobeam resting on nonlinear Winkler-Pasternak foundation by quadrature methods. Heliyon 5(6): 01856.

[34] Mohtashami, M. and Beni, Y.T. (2019) Size-dependent buckling and vibrations of piezoelectric nanobeam with finite element method. IJST-T CIV. ENG. 43(3): 563-576.

[35] Ebrahimi, F. and Barati, M.R. (2017) Buckling analysis of nonlocal third-order shear deformable functionally graded piezoelectric nanobeams embedded in elastic medium. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 39(3): 937-952.

[36] Zhang, D., Liu, M., Wang, Z., and Lei, Y. (2021) Thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams resting on a viscoelastic foundation. J. Phys. Conf. Ser. 1759(1): 012029, 2021.

[37] Hao-nan, L., Cheng, L., Ji-ping, S., and Lin-quan, Y. (2021) Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Piezoelectric Nanobeams Based on the Nonlocal Elasticity Theory. J. Vib. Eng. Technol.:1-19.

[38] Li, Y.S., Ma, P. and Wang, W. (2016) Bending, buckling, and free vibration of magnetoelectroelastic nanobeam based on nonlocal theory. J. Intell. Mater. Syst. Struct. 27(9): 1139-1149.

[39] Eltaher, M.A., Omar, F.A., Abdalla, W.S. and Gad, E.H. (2019) Bending and vibrational behaviors of piezoelectric nonlocal nanobeam including surface elasticity. Waves Random Complex Media 29(2): 264-280.

[40] Tadi Beni, Y. (2016) Size-dependent electromechanical bending, buckling, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric nanobeams. J. Intell. Mater. Syst. Struct. 27(16): 2199-2215.

[۴۱] قربانپور آرانی، ع.، عبدالهیان، م.، و کلاهچی، ر. (۱۳۹۳) کمانش الکتروترمومکانیکی نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری های الاستیسیته گرادیان کرنشی و تیر ردی. نشریه علمی مکانیک سازه ها و شاره ها، ۳۳-۲۳ :(۳)۴

[42] Najafi, M. and Ahmadi, I. (2021) A nonlocal Layerwise theory for free vibration analysis of nanobeams with various boundary conditions on Winkler-Pasternak foundation. STEEL COMPOS. STRUCT. 40(1): 101-119.

[43] Srinivas, S., Rao, C. J., and Rao, A. K. (1970) An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. J. SOUND VIB. 12(2): 187-199.

[44] Aimmanee, S., and Batra, R. C. (2007) Analytical solution for vibration of an incompressible isotropic linear elastic rectangular plate, and frequencies missed in previous solutions. J. SOUND VIB. 302(3) 613-620.

[45] Dong, K. and Wang, X. (2006) Influences of large deformation and rotary inertia on wave propagation in piezoelectric cylindrically laminated shells in thermal environment. INT. J. SOLIDS STRUCT. 43(6): 1710-1726.

[46] Liu, Y.F. and Wang, Y.Q. (2019) Thermo-electro-mechanical vibrations of porous functionally graded piezoelectric nanoshells. J. Nanomater. 9(2): 301.

۱