مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۲/ شماره ۴/ صفحه ۱۰۳-۱۱۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2022.11043.3438

دانشگاه صنعتی شاهرود

تاثیر انرژی سطح بر ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج ترکدار بر اساس تئوری رایلی میله‌ها

رضا ناظم‌نژاد[۱،*]، حسن شکراللهی[۲]

[۱] دانشیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه دامغان، دامغان

[۲] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۰۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۲۴

چکیده

هدف این پژوهش، بررسی تاثیر انرژی سطح بر ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج ترکداری است که بر اساس تئوری رایلی میله‌ها مدل شده‌اند. در تئوری رایلی، اثر اینرسی جابجایی‌های جانبی علاوه بر اینرسی محوری در نظر گرفته می‌شود. فرض شده است، جنس نانومیله در راستای طول خود تابعی مدرج باشد و بر اساس رابطه توانی تغییر نماید. ترک نیز، با یک فنر خطی مدل شده است که سفتی آن متناسب با شدت ترک است. انرژی سطح نیز شامل تاثیر پارامترهای چگالی سطح، تنش سطح و ثابت لامه سطح می‌باشند. بدلیل در نظر گرفتن اثر پارامترهای انرژی سطح، معادلات حرکت و شرایط مرزی بصورت ناهمگن ظاهر شده‌اند که به منظور حل آنها، ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب، تبدیل به معادلات همگن شده‌اند. سپس با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک، فرکانس‌های طبیعی به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد استخراج شده‌اند. علاوه بر نوع شرط مرزی، تاثیر عواملی مانند طول و شعاع نانومیله، شدت و محل ترک، و شماره مود فرکانسی بر فرکانس‌های طبیعی نانومیله تابعی مدرج ترکدار در حضور انرژی سطح بررسی و گزارش شده است.

کلمات کلیدی: تئوری رایلی میله‌ها؛ ترک؛ انرژی سطح؛ ارتعاشات آزاد محوری؛ مواد تابعی مدرج.

Surface Energy Effect on Free Axial Vibration of Cracked Nanorods Made of Functionally Graded Materials Based on Rayleigh Theory

R. Nazemnezhad[1*], H. Shokrollahi[2]

[1] Assoc. Prof., Mech. Eng., Damghan Univ., Damghan, Iran

[2] Assis. Prof., Mech. Eng., Kharazmi Univ., Tehran, Iran

Abstract

The aim of this research is investigation of surface enerfy effet on free axial vibration of cracked functionally graded nanorods modelled based on the Rayleigh theory of rods. In Rayleigh theory, the effect not only of the axial inertia but also of the inertia of lateral motions are considered. It is assumed that the material of nanorod is functionally graded in its length direction and varies as power low relation. The crack is also modelled as a linear spring in which its stiffness is proporsional to crack severity. The surface energy is included effects of the surface density, surface stress and surface Lame constants parameters. Due to considering the effect of surface energy parameters, the governing equations of motions and corresponding boundary conditions become inhomogeneous in which to solve them, they are converted to homogeneus ones using an appropriate change of variable, firstly. Then, the natural frequencies of fixed-fixed and fixed-free nanorods are extracted using the method of harmonic differential quadrature. In addition to type of boundary condition, effects of parameters like length and radius of nanorod, severe and location of crack, and mode number on natural axial frequencies of cracked functionally graded nanorods in presence of surface energy are investigated.

Keywords: Rayleigh Theory; Crack; Surface Energy; Free Axial Vibration; Functionally Graded Materials.

* نویسنده مسئول؛ تلفن/فکس: ۰۲۳۳۵۲۲۰۴۱۴

آدرس پست الکترونیک: rnazemnezhad@du.ac.ir

۱- مقدمه

المان‌های یک بعدی یکی از المان‌های کلیدی در ایجاد سازه ها و ماشین‌ها می‌باشند. این المان‌ها می‌توانند در مقیاس‌های مختلف ماکرو، میکرو و نانو مورد استفاده قرار بگیرند. نتایج تجربی و آزمایشگاهی نشان داده است که رفتار المان‌ها در مقیاس میکرو و نانو متفاوت از رفتار آنها در مقیاس ماکرو است که دلیل آن وابسته به اندازه بودن رفتار المان‌ها در مقیاس میکرو و نانو است. به همین دلیل، برای طراحی و ساخت ماشین‌ها و سازه‌های میکرو یا نانو مقیاس، نمی‌توان به نتایج بدست آمده از تحلیل‌های انجام گرفته در مقیاس ماکرو اکتفا نمود.

تاکنون به منظور بررسی رفتار المان‌ها در مقیاس نانو و میکرو، تئوری‌های مختلفی پیشنهاد شده است و پژوهش‌های متنوعی توسط این تئوری‌ها انجام گرفته است. از تئوری‌های پیشنهاد شده، می‌توان به تئوری الاستیسیته غیرمحلی، تئوری گرادیان کرنش، تئوری تنش کوپل، تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری الاستیسیته سطح اشاره نمود. با استفاده از تئوری های فوق، تقریبا بسیاری از رفتارهای المان‌های یک بعدی مانند ارتعاشات عرضی، ارتعاشات پیچشی، ارتعاشات محوری، کمانش، پایداری و ناپایداری بررسی شده است. در میان پژوهش‌های مختلف، رفتار محوری نانومیله‌ها توسط تئوری های الاستیسیته غیرمحلی و تئوری گرادیان کرنش بیشتر از تئوری الاستیسیته سطح بررسی شده است. با توجه به اینکه، اساس این تئوری‌ها با یکدیگر متفاوت می‌باشند لازم است رفتار سازه‌های میکرو و نانو مقیاس با استفاده از هر یک از تئوری های مختلف بررسی شود تا در آینده با گسترش تجهیزات آزمایشگاهی و در دسترس شدن آن برای همگان، بتوان تئوری یا تئوری‌های مناسب برای تحلیل رفتار نانومقیاس‌ها را ارایه نمود.

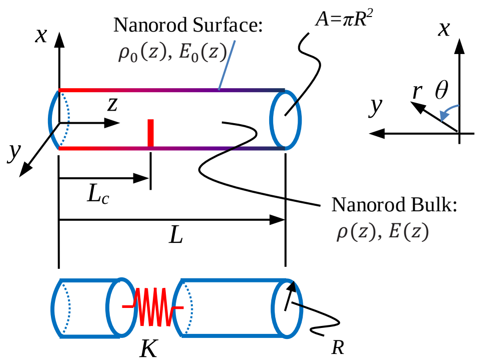
با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح، اسدی و فرشی [۱] انتشار موج عرضی و محوری را در نانوتیوب‌ها بررسی کردند. در این پژوهش، از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده شده است. در پژوهش دیگری، حسینی هاشمی و همکاران [۲] ارتعاشات محوری نانوتیرهای آلومینیومی را با استفاده از دو روش تئوری الاستیسیته سطح و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بررسی نمودند. آنها در این پژوهش، میزان تاثیرگذاری مدول الاستیک سطح و چگالی سطح را بر فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله بررسی نمودند. همچنین نشان دادند که مدل اصلاح شده تئوری الاستیسیته کلاسیک، به خوبی می‌تواند رفتار ارتعاشات محوری نانومیله‌های آلومینیومی را پیش‌بینی نماید. تئوری میله استفاده شده در این پژوهش، ساده‌ترین تئوری ارایه شده برای میله‌ها بوده است. در ادامه، ناظم‌نژاد و همکاران [۳]، تاثیر انرژی سطح بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری غیرخطی و همچنین رزونانس‌های درونی نانومیله‌های مدل شده با استفاده از تئوری ساده میله‌ها را بررسی نمودند. در پژوهش فوق نشان داده شد که انرژی سطح می‌تواند شرایط رزونانس درونی نانومیله‌ها را تغییر دهد. در پژوهش دیگری، ناظم‌نژاد و شکراللهی [۴] تاثیر انرژی سطح بر ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های مدل شده با استفاده از تئوری ساده میله ها را بررسی نمودند. در این پژوهش فرض شده است جنس نانومیله بصورت تابعی مدرج در راستای طول خود باشد. در پژوهش مشابه دیگری در این زمینه، ناظم‌نژاد و شکراللهی [۵] پژوهش پیشین را توسعه داده، و تاثیر ترک را نیز در معادلات لحاظ نمودند. در تمامی پژوهش‌های اشاره شده، نشان داده شده است که انرژی سطح تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها داشته که این امر، اهمیت بررسی تاثیر انرژی سطح را نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در پژوهش‌های انجام گرفته در زمینه ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها که باید به آن اشاره نمود، این است که پژوهش‌هایی که بر اساس تئوری‌هایی مانند الاستیسیته غیرمحلی یا گرادیان کرنش انجام گرفته است در آنها تقریبا از تمامی تئوری‌های معرفی شده برای مدلسازی رفتار ارتعاشات آزاد محوری میله ها (که عبارتند از تئوری ساده، تئوری رایلی و تئوری بیشاپ) استفاده شده است [۶-۱۲]؛ اما در پژوهش‌هایی که بر اساس تئوری الاستیسیته سطح انجام گرفته است فقط از تئوری ساده میله‌ها استفاده شده است. به بیان دیگر، از سایر تئوری میله ها، مانند تئوری رایلی و بیشاپ برای مدلسازی رفتار ارتعاشات آزاد محوری میله‌ها استفاده نشده است. قابل ذکر است، در تئوری رایلی میله‌ها، تاثیر اینرسی جابجایی جانبی علاوه بر تاثیر اینرسی محوری در معادلات حرکت لحاظ می‌شود. در تئوری بیشاپ نیز، علاوه بر تاثیر اینرسی جابجایی‌های جانبی، تاثیر سفتی برشی نیز در نظر گرفته می‌شود [۱۳].

با توجه به توضیحات ارایه شده و عدم بررسی تاثیر اینرسی جابجایی‌های جانبی بر رفتار ارتعاشات آزاد محوری

نانومیله با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح، در این پژوهش سعی شده است این خلاء پوشش داده شود. علاوه بر این، به منظور ارایه یک پژوهش کامل‌تر، فرض شده است نانومیله شامل ترک بوده و جنس آن بصورت تابعی مدرج باشد. در این راستا، ابتدا معادلات حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده، سپس فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک بدست آمده‌اند. به منظور ارایه تحلیل کامل، تاثیر عوامل مختلف مانند انرژی سطح، اینرسی جابجایی‌های جانبی، قطر و طول نانومیله، مقدار شاخص توانی، و محل و شدت ترک بررسی شده است. نتایج این پژوهش می تواند در طراحی میکروسکوپ نیروی اتمی، و مته‌های نانومقیاس مورد استفاده قرار بگیرد.

۲- استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله

نانو میله FG به طول L ($0\le x\le L$) و مقطع A، در مختصات کارتزین xyz و مختصات قطبی $r\theta z$، مشابه شکل ۱ در نظر بگیرید. محل ترک همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است $x = L_C$ است.



شکل ۱- شماتیک نانو میله تابعی مدرج ترکدار

بر اساس تئوری رایلی میله‌ها، مولفه‌های مختلف جابجایی (u، v و w) به صورت زیر است [۱۳]:

$$u_z = u(r,\theta,z,t) = u(z,t) \tag{۱}$$

$$u_\theta = v(r,\theta,z,t) = 0 \tag{۲}$$

$$u_r = w(r,\theta,z,t) = -\nu r\,\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \tag{۳}$$

که در این روابط، t زمان بر حسب ثانیه است. با داشتن جابجایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها به صورت زیر است (طبق تئوری رایلی فقط اثر تنش و کرنش محوری در نظر گرفته می‌شود):

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \tag{۴}$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{zr} = \gamma_{z\theta} = \gamma_{r\theta} = 0 \tag{۵}$$

$$\sigma_{zz} = E(z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \tag{۶}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \tag{۷}$$

معادلات (۴) تا (۷) کرنش‌ها و تنش‌های مربوط به ماده بالک نانو میله را ارائه می‌دهد. اگر اثر انرژی سطح را نیز در نظر بگیریم، مولفه‌های تنش سطحی و کرنش سطحی نیز باید استخراج شوند. برای این منظور، از تئوری الاستیسیته سطح استفاده می‌شود. در تئوری الاستیسیته سطح که توسط گورتین و مورداک [۱۴] ارائه شده است، رابطه بین تنش و کرنش سطحی به این صورت ارائه شده است:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta}{}^{\pm} = \tau_0{}^{\pm}\delta_{\alpha\beta} + (\mu_0{}^{\pm} - \tau_0{}^{\pm})(u^{\pm}_{\alpha,\beta} &\\ + u^{\pm}_{\beta,\alpha}) &\\ + (\lambda_0{}^{\pm} + \tau_0{}^{\pm})u_{m,m}\delta_{\alpha\beta} &\\ + \tau_0{}^{\pm}u_{\alpha,\beta} &\end{aligned} \tag{۸}$$

$$\tau_{\alpha r}{}^{\pm} = \tau_0{}^{\pm}u_{r,\alpha} \tag{۹}$$

که در آن $\tau_0{}^{\pm}$ تنش سطحی پسماند مربوط به حالت بدون کرنش است، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر، $\lambda_0{}^{\pm}$ و $\mu_0{}^{\pm}$ ثوابت لامه، $u_{\alpha,\beta}$ مولفه‌های جابجایی سطحی و $\alpha,\beta = z,\theta$. لازم به ذکر است که علامت‌های مثبت و منفی برای سطوح بالایی و پایینی نانو میله با هندسه مستطیلی یا چهار وجهی است. برای مطالعه حاضر که مقطع دایره‌ای مورد بررسی است، علامت‌های مثبت و منفی نادیده گرفته می‌شود. با استفاده از معادلات (۱) تا (۳)، تنش‌های سطحی برای نانو میله به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{zz} = \tau_0(z) + \big(2\mu_0(z) + \lambda_0(z)\big)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \tag{۱۰}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{rr} = \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0 \tag{۱۱}$$

خواص نانومیله تابعی مدرج ($\mu_0(z)$، $\lambda_0(z)$، $\tau_0(z)$، $\rho_0(z)$، $E(z)$، $G(z)$ و $\rho(z)$) به صورت توانی فرض می‌شود:

$$\begin{aligned}&f(z) = (f_L - f_R)\left(\frac{z}{L}\right)^m + f_R;\\ &f(z) = \lambda_0(z) \text{ or } \mu_0(z) \text{ or } \tau_0(z) \text{ or } \rho_0(z)\\ &\text{or } E(z) \text{ or } G(z) \text{ or } \rho(z)\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن m شاخص توانی خواص مکانیکی مواد تابعی مدرج است. برای رسیدن به معادلات حاکم و شرایط مرزی، تنش‌ها و کرنش‌های بالک و سطحی باید در اصل همیلتون استفاده شوند. دلیل استفاده از اصل همیلتون، این است که بصورت

همزمان، هم معادلات حرکت و هم شرایط مرزی قابل استخراج می‌باشند. مطابق رابطه (۱۳)،

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta KE-\delta PE)dt=0 \tag{۱۳}$$

در وریشن انرژی جنبشی، داریم:

$$\begin{aligned}\delta KE&=\delta KE+\delta KE_0\\&=\int_0^L\left[\rho(z)A\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right)\right.\\&\left.+\rho(z)v^2I_P\left(\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial z\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial z\partial t}\right)\right]dz\\&+\int_0^L\left[\rho_0(z)S\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right)\right.\\&\left.+\rho_0(z)v^2I_{P0}\left(\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial z\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial z\partial t}\right)\right]dz\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در آن $I_P=\int_A r^2dA$ و $I_{P0}=\int_S r^2dS$ به ترتیب گشتاور قطبی اینرسی بالک و سطحی است، ρ و ρ_0 چگالی بالک و سطحی است و A و S سطح مقطع و محیط نانو میله است. با جایگزینی معادلات (۴) تا (۱۰) و (۱۳) تا (۱۶) در رابطه انرژی پتانسیل، وریشن انرژی پتانسیل به این صورت است:

$$\begin{aligned}\delta PE&=\delta PE+\delta PE_0\\&=\int_V\sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz}dV+\int_A\tau_{zz}\delta\varepsilon_{zz}dA\\&=\int_0^L E(z)A\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\delta\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right)dz\\&+\int_0^L\left[\frac{1}{2}\tau_0(z)\right.\\&+\big(2\mu_0(z)\\&\left.+\lambda_0(z)\big)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right]S\,\delta\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right)dz\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با جایگزینی رابطه (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۳) و انتگرالگیری جزء به جزء، معادله حاکم و شرایط مرزی برای میله تابعی مدرج با در نظر گرفتن انرژی سطح به صورت رابطه (۱۶) و (۱۷) خواهد بود.

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial z}\left(E(z)A\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right.\\&\left.+S\left[\frac{1}{2}\tau_0(z)+\big(2\mu_0(z)+\lambda_0(z)\big)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right]\right)\\&+(\rho(z)A+\rho_0(z)S)\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial t^2}\\&-\frac{\partial}{\partial z}\left((\rho(z)v^2I_P+\rho_0(z)v^2I_{P0})\frac{\partial^3u(z,t)}{\partial z\partial t^2}\right)\\&=0\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}&\left\{E(z)A\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right.\\&+S\left[\frac{1}{2}\tau_0(z)+\big(2\mu_0(z)+\lambda_0(z)\big)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right]\\&+(\rho(z)v^2I_P\\&\left.+\rho_0(z)v^2I_{P0})\frac{\partial^3u(z,t)}{\partial z\partial t^2}\right\}\delta u(z,t)\Bigg|_0^L=0\end{aligned} \tag{۱۷}$$

مطابق رابطه (۱۷) دو حالت برای شرایط مرزی وجود دارد؛ گیردار-گیردار و گیردار-آزاد.

با در نظر گرفتن یک فنر خطی با سفتی K در موقعیت ترک ($x=L_C$)، دو نانومیله به صورت متصل به هم در نظر گرفته می‌شود؛ برای دو نانو میله $0\le z<L_C$ و $L_C<z\le L$، روابط (۱۶) و (۱۷) باید اعمال شود. معادله (۱۶) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}S\frac{d\tau_0(z)}{dz}-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{\partial u_1(z,t)}{\partial z}&-C_1(z)\frac{\partial^2u_1(z,t)}{\partial z^2}\\&+C_2(z)\frac{\partial^2u_1(z,t)}{\partial t^2}\\&-\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{\partial^3u_1(z,t)}{\partial z\partial t^2}\\&-C_3(z)\frac{\partial^4u_1(z,t)}{\partial z^2\partial t^2}\\&=0;\quad 0\le z<L_C\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}S\frac{d\tau_0(z)}{dz}-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{\partial u_2(z,t)}{\partial z}&-C_1(z)\frac{\partial^2u_2(z,t)}{\partial z^2}\\&+C_2(z)\frac{\partial^2u_2(z,t)}{\partial t^2}\\&-\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{\partial^3u_2(z,t)}{\partial z\partial t^2}\\&-C_3(z)\frac{\partial^4u_2(z,t)}{\partial z^2\partial t^2}\\&=0;\quad L_C<z\le L\end{aligned} \tag{۱۹}$$

که در این معادلات،

$$\begin{aligned}C_1(z)&=E(z)A+S\big(2\mu_0(z)+\lambda_0(z)\big)\\C_2(z)&=\rho(z)A+\rho_0(z)S\\C_3(z)&=v^2\big(I_P\rho(z)+I_{P0}\rho_0(z)\big)\end{aligned} \tag{۲۰}$$

و در محل ترک $z=L_C$ ، شرط پیوستگی باید برقرار باشد:

$$\begin{aligned}K\big(u_1(L_C,t)-u_2(L_C,t)\big)&=-\tau_0S\\&-C_1(L_C)\frac{\partial u_1(L_C,t)}{\partial z}\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\frac{\partial u_1(L_C,t)}{\partial z}=\frac{\partial u_2(L_C,t)}{\partial z} \tag{۲۲}$$

همچنین، شرایط مرزی در دو انتهای میله، برای شرط مرزی گیردار- گیردار و گیردار- آزاد به ترتیب مطابق با روابط (۲۳) و (۲۴) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} &u_1(0,t)=0\\ &u_2(L,t)=0 \end{aligned}$$ (۲۳)

$$\begin{aligned} &u_1(0,t)=0\\ &\frac{1}{2}S\tau_0(L)+C_1(L)\frac{\partial u_2(L,t)}{\partial z}\\ &\qquad +C_3(L)\frac{\partial^3 u_2(L,t)}{\partial z\partial t^2}=0 \end{aligned}$$ (۲۴)

باتوجه به معادلات (۲۱) و (۲۴)، مشاهده می‌شود که شرط مرزی تکیه‌گاه آزاد و شرط پیوستگی نیرویی در محل ترک، غیرهمگن است. در نتیجه برای حل معادلات حاکم، در ابتدا باید این معادلات، به فرم همگن تبدیل شوند. لازم به ذکر است که چنین رویکردی تاکنون در مطالعات تاثیرات سطحی بر روی رفتار مکانیکی نانو سازه‌ها ارائه نشده است و این موضوع از نوآوری‌های پژوهش حاضر است.

برای مطالعه ارتعاشات آزاد نانو میله ترکدار، لازم است روابط (۱۸) تا (۲۲) به همراه روابط (۲۳)، برای شرایط مرزی گیردار- گیردار، یا روابط (۲۴)، برای شرایط مرزی گیردار-آزاد، حل شود. در ابتدا همگن سازی معادلات باید انجام شود. برای این منظور، در ابتدا جابجایی به صورت رابطه (۲۵) و (۲۶) فرض می‌شود.

$$u_1(z,t)=u_1^h(z,t)+\tilde{u}_1(z)$$ (۲۵)

$$u_2(z,t)=u_2^h(z,t)+\tilde{u}_2(z)$$ (۲۶)

با جایگذاری $u_1^h(x,t)$ و $u_2^h(x,t)$ در معادلات (۱۸) تا (۲۴)، معادلات مربوط به $\tilde{u}_1(x)$ و $\tilde{u}_2(x)$ به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}S\frac{d\tau_0(z)}{dz}-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{d\tilde{u}_1(z)}{dz}\\ &\qquad -C_1(z)\frac{d^2\tilde{u}_1(z)}{dz^2}\\ &\qquad =0;\quad 0\le z<L_C \end{aligned}$$ (۲۷)

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}S\frac{d\tau_0(z)}{dz}-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{d\tilde{u}_2(z)}{dz}\\ &\qquad -C_1(z)\frac{d^2\tilde{u}_2(z)}{dz^2}\\ &\qquad =0;\quad L_C<z\le L \end{aligned}$$ (۲۸)

$$\begin{aligned} &K\big(\tilde{u}_1(L_C)-\tilde{u}_2(L_C)\big)\\ &\qquad =-\tau_0 S\\ &\qquad -C_1(L_C)\frac{d\tilde{u}_1(L_C)}{dz} \end{aligned}$$ (۲۹)

$$\frac{d\tilde{u}_1(z)}{dz}=\frac{d\tilde{u}_2(z)}{dz}$$ (۳۰)

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1(0)=0\\ &\tilde{u}_2(L)=0: \text{گیردار}\\ &\frac{1}{2}S\tau_0(L)+C_1(L)\frac{d\tilde{u}_2(L)}{dz}=0: \text{آزاد} \end{aligned}$$ (۳۱)

با حل معادلات (۲۷) تا (۳۱)، جابجایی‌های $\tilde{u}_1(x)$ و $\tilde{u}_2(x)$ به دست می‌آید. با قرار دادن نتیجه به دست آمده در معادلات (۱۸) تا (۲۴)، معادلات همگن به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{\partial u_1^h(z,t)}{\partial z}-C_1(z)\frac{\partial^2 u_1^h(z,t)}{\partial z^2}\\ &\qquad +C_2(z)\frac{\partial^2 u_1^h(z,t)}{\partial t^2}\\ &\qquad -\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{\partial^3 u_1^h(z,t)}{\partial z\partial t^2}\\ &\qquad -C_3(z)\frac{\partial^4 u_1^h(z,t)}{\partial z^2\partial t^2}\\ &\qquad =0;\quad 0\le z<L_C \end{aligned}$$ (۳۲)

$$\begin{aligned} &-\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{\partial u_2^h(z,t)}{\partial z}-C_1(z)\frac{\partial^2 u_2^h(z,t)}{\partial z^2}\\ &\qquad +C_2(z)\frac{\partial^2 u_2^h(z,t)}{\partial t^2}\\ &\qquad -\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{\partial^3 u_2^h(z,t)}{\partial z\partial t^2}\\ &\qquad -C_3(z)\frac{\partial^4 u_2^h(z,t)}{\partial z^2\partial t^2}\\ &\qquad =0;\quad L_C<z\le L \end{aligned}$$ (۳۳)

$$\begin{aligned} &K\left(u_1^h(L_C,t)-u_2^h(L_C,t)\right)\\ &\qquad =-C_1(L_C)\frac{\partial u_1^h(L_C,t)}{\partial z} \end{aligned}$$ (۳۴)

$$\frac{\partial u_1^h(L_C,t)}{\partial z}=\frac{\partial u_2^h(L_C,t)}{\partial z}$$ (۳۵)

$$\begin{aligned} &u_1^h(0,t)=0\\ &u_2^h(L,t)=0: \text{گیردار} - \text{گیردار}\\ &C_1(L)\frac{\partial u_2^h(L,t)}{\partial z}+C_3(L)\frac{\partial^3 u_2^h(L,t)}{\partial z\partial t^2}\\ &\qquad =0: \text{گیردار} - \text{آزاد} \end{aligned}$$ (۳۶)

با فرض جابجایی هارمونیک، داریم:

$$u_1^h(z,t)=U_1^h(z)T(t)=U_1^h(z)e^{i\omega t}$$ (۳۷)

$$u_2^h(z,t)=U_2^h(z)T(t)=U_2^h(z)e^{i\omega t}$$ (۳۸)

در نتیجه، روابط (۳۲) تا (۳۶)، به این صورت خواهند بود

$$\begin{aligned} &\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{dU_1^h(z)}{dz}+C_1(z)\frac{d^2U_1^h(z)}{dz^2}\\ &\qquad +\omega^2\Bigg(C_2(z)U_1^h(z)\\ &\qquad -\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{dU_1^h(z)}{dz}\\ &\qquad -C_3(z)\frac{d^2U_1^h(z)}{dz^2}\Bigg)\\ &\qquad =0;\quad 0\le z<L_C \end{aligned}$$ (۳۹)

$$\frac{dC_1(z)}{dz}\frac{dU_2^h(z)}{dz}+C_1(z)\frac{d^2U_2^h(z)}{dz^2}+\omega^2\left(C_2(z)U_2^h(z)-\frac{dC_3(z)}{dz}\frac{dU_2^h(z)}{dz}-C_3(z)\frac{d^2U_2^h(z)}{dz^2}\right)=0;\quad L_C<z\le L \tag{۴۰}$$

$$K\left(U_1^h(L_C)-U_2^h(L_C)\right)=-C_1(L_C)\frac{dU_1^h(L_C)}{dz} \tag{۴۱}$$

$$\frac{dU_1^h(L_C)}{dz}=\frac{dU_2^h(L_C)}{dz} \tag{۴۲}$$

$$U_1^h(0)=0$$
$$U_2^h(L)=0:\ \text{گیردار} - \text{گیردار}$$

$$C_1(L)\frac{dU_2^h(L)}{dz}-\omega^2C_3(L)\frac{dU_2^h(L)}{dz}=0:\ \text{گیردار} - \text{آزاد} \tag{۴۳}$$

لازم به ذکر است که در روابط فوق، با قرار دادن $C_3(z)=0$ روابط مربوط به تئوری میله ساده به دست خواهد آمد که نتایج آن در این مطالعه با نتایج حاصل از تئوری میله رایلی، مقایسه می‌شود.

همانطور که فرم معادلات (۳۹) تا (۴۳) نشان می‌دهد، بدلیل اینکه ضرایب معادلات، وابسته به متغیر مکانی z می باشند یافتن پاسخ تحلیلی برای این معادلات در حالت کلی بسیار مشکل خواهد بود و یا عملا امکانپذیر نیست. به همین دلیل، برای حل این معادلات از روش عددی استفاده می‌شود. در این مطالعه از روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک برای حل معادلات و استخراج فرکانس‌های طبیعی نانو میله ترکدار استفاده شده است. روش فوق یکی از پرکاربردترین و دقیق ترین روش‌ها در بین روش‌های عددی می‌باشد که همگرایی نتایج به ازای تعداد نقاط گرهی پایینی حاصل می‌شود. همچنین این روش نشان داده است که برای تمامی شرایط مرزی، دقت بسیار بالایی ارایه می‌دهد. نحوه استفاده از روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک در مراجع [۹ و ۱۵] بیان شده است که به صورت مختصر در اینجا نیز ارائه شده است. در این روش، مشتق جزیی یک تابع نسبت به متغیر مکانی در یک نقطه گسسته، با جمع خطی مقادیر تابع وزنی در تمام نقاط مجزا در میدان متغیر تقریب زده می‌شود. به عنوان مثال، اگر $F(x)$ یک تابع در محدوده $0<x<L$ باشد و در این محدوده N نقطه گسسته تعریف شده باشد، مشتق مرتبه n ام در نقطه x_i به صورت رابطه (۴۴) بیان می‌شود.

$$\frac{d^nF(x_i)}{dx^n}=\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^{(n)}F(x_k)\,;\ n=1,2,\dots,N-1; \tag{۴۴}$$

که در آن $A_{ik}^{(n)}$ ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه n ام تابع $F(x)$ است. جزئیات بیشتر در رابطه با روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک و چگونگی انتخاب نقاط گرهی با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف، در مرجع [۱۵] ارائه شده است. اکنون با اعمال روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک، معادلات حاکم به صورت گسسته‌سازی شده بدست می‌آید. با جداسازی جابجایی مربوط به نقاط مرزی و درونی میله، معادله کوپل شده به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix}[K_{bb}] & [K_{bd}]\\ [K_{db}] & [K_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{d^b\}\\ \{d^d\}\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{Bmatrix}0\\ \{d^d\}\end{Bmatrix} \tag{۴۵}$$

که d^b و d^d به ترتیب جابجایی نقاط مرزی و نقاط داخلی میله هستند. پس از ساده‌سازی رابطه (۴۵)، یک مسأله مقدار ویژه استاندارد مطابق رابطه (۴۶) به دست می‌آید که با حل آن فرکانس‌های طبیعی نانو میله ترکدار حاصل می‌شود.

$$\left[[K_{dd}]-[K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]\right]\{d^d\}=\omega^2\{d^d\} \tag{۴۶}$$

بر مبنای فرمول‌بندی ارائه شده، یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب نوشته شده است که خروجی آن فرکانس‌های طبیعی نانومیله ترکدار مورد مطالعه است.

۳- نتایج و بحث

۳-۱- اعتبارسنجی

پس از استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی، و حل آن‌ها، ابتدا با مقایسه نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش‌های مشابه، اعتبار روابط ارایه شده و دقت نتایج، بررسی می‌گردد. در این راستا، نتایج این پژوهش با نتایج دو مقاله مقایسه شده است. در جدول ۱ نتایج سه فرکانس اول نانومیله تابعی مدرج به ازای چهار طول مختلف ارایه شده است. فرکانس‌های ارایه شده شامل فرکانس‌های تئوری‌های ساده و رایلی استخراج شده از پژوهش حاضر و فرکانس گزارش شده در مرجع [۴] بر اساس تئوری ساده میله‌ها می‌باشد. همان طور که جدول ۱ نشان می دهد نتایج مرجع [۴] در تمامی طول‌ها و مودهای فرکانسی بسیار نزدیک به نتایج پژوهش حاضراست که بر اساس تئوری ساده گزارش شده است؛ اما اختلاف نتایج مرجع [۴] با نتایج

پژوهش حاضر که بر اساس تئوری رایلی ارایه شده است مخصوصا در شماره مودهای بالاتر و طول‌های کوچک‌تر، قابل توجه است. دلیل اختلاف نتایج ارایه شده بر اساس تئوری ساده، در نوع روش استفاده شده برای حل معادله حرکت می باشد. در مرجع [۴]، از روش گلرکین و در مطالعه فعلی از روش عددی مربعات دیفرانسیل هارمونیک استفاده شده است. لازم به ذکر است که با افزایش تعداد نقاط گرهی روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک و افزایش تعداد جملات روش گلرکین، نتایج کاملا یکسانی به‌دست خواهد آمد، اما با توجه به در نظر گرفتن حد همگرایی یکسان در دو روش، نتایج ارائه شده دو روش، اختلاف ناچیزی با هم دارند؛ همچنین دلیل اختلاف نتایج مرجع [۴] با نتایج پژوهش حاضر که بر اساس تئوری رایلی ارایه شده است علاوه بر تفاوت در روش حل معادله حرکت، مربوط به در نظر گرفتن اینرسی ناشی از جابجایی‌های جانبی نانومیله می‌باشد.

در مقایسه دوم، در جدول ۲، نتایج حاصل از پژوهش حاضر با نتایج گزارش شده در مرجع [۵] که رفتار ارتعاشات آزاد نانومیله‌های تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری ساده را بررسی نموده است مقایسه شده است. نتایج گزارش شده در جدول ۲، نسبت‌های فرکانسی است که از تقسیم فرکانس‌های طبیعی با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح و اثر ترک بر فرکانس‌های طبیعی بدون در نظر گرفتن عوامل فوق بدست می‌آید. در هر دو پژوهش، از روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک برای استخراج نتایج استفاده شده است. همان‌طور که جدول ۲ نشان می‌دهد، اختلاف بین نتایج هر دو پژوهش کمتر از ۰/۱ درصد است که دلیل آن تفاوت در نوع تئوری استفاده شده در دو پژوهش است.

با تایید صحت روابط استخراج شده، در ادامه نتایج جدید برای رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی ارایه می‌گردد.

۳-۲- ارایه نتایج جدید

در ادامه مطالعات پارامتریک ارائه می‌شود که بدین منظور از تعاریف زیر و خواص مکانیکی داده شده در جدول ۳ استفاده شده است:

- Fr : فرکانس بدون در نظر گرفتن اثر ترک و انرژی سطح (فرکانس کلاسیک)
- Fr (SE) : فرکانس با در نظر گرفتن فقط اثر انرژی سطح
- Fr (C) : فرکانس با در نظر گرفتن فقط اثر ترک
- Fr (C,SE) : فرکانس با در نظر گرفتن هر دو اثر ترک و انرژی سطح

در گام اول، مطالعاتی بصورت جداگانه برای بررسی اثر مولفه‌های انرژی سطح و اثر ترک انجام می‌پذیرد تا دید کلی نسبت به آنها ایجاد شود. سپس با انتخاب مقادیر مناسب، مطالعاتی انجام می‌شود که هر دو اثر ترک و انرژی سطح بصورت همزمان لحاظ شده باشد.

جدول ۱- مقایسه فرکانس‌های طبیعی نانومیله تابعی مدرج بر اساس تئوری‌های مختلف (R=1 nm and m=2)

طول (nm)	شماره فرکانس	گیردار-گیردار			گیردار-آزاد		
		مرجع [۴] (تئوری ساده)	مطالعه حاضر (تئوری ساده)	مطالعه حاضر (تئوری رایلی)	مرجع [۴] (تئوری ساده)	مطالعه حاضر (تئوری ساده)	مطالعه حاضر (تئوری رایلی)
۱۰	۱	۳۲۷/۷۴۵	۳۲۷/۷۱۷	۳۲۶/۷۲۷	۱۷۶/۷۵۴	۱۷۶/۷۷۳	۱۷۶/۶۴۲
	۲	۶۶۴/۳۱۵	۶۶۴/۲۵۸	۶۵۶/۳۵۷	۵۰۵/۰۹۱	۵۰۵/۱۵۳	۵۰۱/۷۸۴
	۳	۹۵۳/۹۹۸	۹۹۸/۸۶۸	۹۷۲/۶۶۵	۸۳۶/۹۸۱	۸۳۷/۰۸۸	۸۲۱/۷۴۷
۱۵	۱	۲۱۸/۴۹۷	۲۱۸/۴۸۹	۲۱۸/۱۹۴	۱۱۷/۸۳۶	۱۱۷/۸۴۲	۱۱۷/۸۰۳
	۲	۴۴۲/۸۷۷	۴۴۲/۸۶۰	۴۴۰/۴۹۹	۳۳۶/۷۲۷	۳۳۶/۷۴۶	۳۳۵/۷۴۳
	۳	۶۶۵/۹۶۹	۶۶۵/۹۴۴	۶۵۸/۰۳۲	۵۵۷/۹۸۷	۵۵۸/۰۱۹	۵۵۳/۴۱۴
۲۰	۱	۱۶۶۳/۸۷۳	۱۶۳/۸۶۹	۱۶۳/۷۴۵	۸۸/۳۷۷	۸۸/۳۷۹	۸۸/۳۶۳
	۲	۳۳۲/۱۵۸	۳۳۲/۱۵۰	۳۳۱/۱۵۱	۲۵۲/۵۴۵	۲۵۲/۵۵۳	۲۵۲/۱۲۹
	۳	۴۹۹/۴۷۷	۴۹۹/۴۶۶	۴۹۶/۱۰۶	۴۱۸/۴۹۱	۴۱۸/۵۰۴	۴۱۶/۵۵۲
۳۰	۱	۱۰۹/۲۴۸	۱۰۹/۲۴۸	۱۰۹/۲۱۱	۵۸/۹۱۸	۵۸/۹۱۹	۵۸/۹۱۴
	۲	۲۲۱/۴۳۸	۲۲۱/۴۳۶	۲۲۱/۱۴۰	۱۶۸/۳۶۴	۱۶۸/۳۶۶	۱۶۸/۲۴۰
	۳	۳۳۲/۹۸۴	۳۳۲/۹۸۱	۳۳۱/۹۸۱	۲۷۸/۹۹۴	۲۷۸/۹۹۸	۲۷۸/۴۱۷

جدول ۲- مقایسه نسبت فرکانس‌های طبیعی نانومیله تابعی مدرج ترکدار(R=0.5 nm, Lc=L/2, L=30 nm)

نوع شرط مرزی	شماره مود فرکانسی	شدت ترک	m=0			m=1			m=10		
			مرجع [۵] (تئوری ساده)	پژوهش حاضر (تئوری رایلی)	اختلاف (٪)	مرجع [۵] (تئوری ساده)	پژوهش حاضر (تئوری رایلی)	اختلاف (٪)	مرجع [۵] (تئوری ساده)	پژوهش حاضر (تئوری رایلی)	اختلاف (٪)
گیردار-گیردار	۱	۰	۰/۸۴۶۶	۰/۸۴۵۷	۰/۱۱	۰/۷۵۸۹	۰/۷۵۹۱	۰/۰۳	۰/۷۴۵۲	۰/۷۴۵۸	۰/۰۸
		۱	۰/۸۴۶۶	۰/۸۴۶۶	۰/۰۰	۰/۷۱۹۵	۰/۷۱۹۴	۰/۰۱	۰/۷۳۵۳	۰/۷۳۵۳	۰/۰۰
	۲	۰	۰/۸۴۶۶	۰/۸۴۶۵	۰/۰۱	۰/۷۵۸۲	۰/۷۵۸۱	۰/۰۱	۰/۷۳۶۰	۰/۷۳۵۹	۰/۰۱
		۱	۰/۵۲۴۹	۰/۵۲۵۰	۰/۰۲	۰/۴۷۷۱	۰/۴۷۷۲	۰/۰۲	۰/۴۲۹۲	۰/۴۲۹۳	۰/۰۲
گیردار-آزاد	۱	۰	۰/۸۴۶۶	۰/۸۴۷۰	۰/۰۵	۰/۷۱۲۱	۰/۷۱۱۹	۰/۰۳	۰/۷۰۸۶	۰/۷۰۸۴	۰/۰۳
		۱	۰/۵۳۷۴	۰/۵۳۷۴	۰/۰۰	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۴۷	۰/۰۵	۰/۳۶۲۸	۰/۳۶۲۸	۰/۰۰
	۲	۰	۰/۸۴۶۶	۰/۸۴۶۸	۰/۰۲	۰/۷۵۱۳	۰/۷۵۱۳	۰/۰۰	۰/۷۱۴۲	۰/۷۱۴۱	۰/۰۱
		۱	۰/۶۳۸۰	۰/۶۳۸۰	۰/۰۰	۰/۶۱۳۶	۰/۶۱۳۷	۰/۰۲	۰/۵۳۰۲	۰/۵۳۰۲	۰/۰۰

۳-۲-۱- اثر پارامترهای مختلف انرژی سطح بر ارتعاشات محوری نانومیله‌های تابعی مدرج

در ابتدا اثر پارامترهای مختلف انرژی سطح بر فرکانس طبیعی اول نانومیله بررسی می‌شود. فرض شده است، ترک در نانومیله وجود نداشته باشد و جنس نانومیله همگن باشد؛ لذا نتایج برای نانومیله به ازای هر دو جنس، با در نظر گرفتن تاثیر پارامترهای مختلف انرژی سطح بصورت جداگانه در جدول ۴ ارایه شده است. در این قسمت سعی بر ارایه دلایل فیزیکی و مکانیکی پدیده‌های مختلف است تا در ادامه نتایج، صرفا به گزارش مشاهدات اکتفا شود. نکاتی که از جدول ۴ قابل دریافت است عبارتند از:

- تاثیر ضرایب لامه سطحی وابسته به جنس نانومیله بوده اما مستقل از شماره فرکانس و نوع شرط مرزی می‌باشد. برای نانومیله از جنس آلومینیوم، بدلیل اینکه مجموع مقادیر ثوابت لامه سطحی مثبت است؛ بنابراین تاثیری افزایشی بر فرکانس‌های محوری نانومیله آلومینیومی دارند. این در حالیست که بدلیل اینکه مجموع مقادیر ثوابت لامه سطحی سیلیکون منفی است، تاثیری کاهشی بر فرکانس‌های محوری مشاهده می‌شود.
- تنش پسماند سطحی هیچ تاثیری بر فرکانس‌های محوری نانومیله ندارد.
- چگالی سطح دارای اثر کاهشی بر فرکانس‌های طبیعی است. دلیل اثر کاهشی چگالی سطح این است که فرکانس، نسبت عکس با جرم سیستم دارد و چگالی سطح با علامت مثبت، سبب افزایش جرم سیستم می‌شود. میزان تاثیر کاهشی چگالی سطح، وابسته به مقدار چگالی سطح می باشد و هر چه مقدار آن بیشتر باشد، اثر کاهشی آن بیشتر است (از آنجا که چگالی سطح آلومینیوم بیشتر از سیلیکون است، تاثیر کاهشی آن بر فرکانس‌های محوری نانومیله از جنس آلومینیوم بیشتر است.). نتیجه دیگری که در رابطه با تاثیر چگالی سطح می‌توان بیان نمود، این است که تاثیر کاهشی چگالی سطح برای نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد است؛ همچنین تاثیر کاهشی چگالی سطح بر فرکانس‌های محوری، در شماره مودهای فرکانسی بالاتر بیشتر می‌شود. دلیل این امر را می توان به نوع شکل مود در شماره مودهای بالاتر دانست که با برجسته‌تر شدن تاثیر اینرسی جابجایی‌های جانبی، سبب تاثیرگذاری بیشتر بر فرکانس‌های محوری می‌شود.

جدول ۳- خواص مکانیکی نانو میله

	E (GPa)	ρ (kg/m^3)	ρ_0 (kg/m^2)	λ_0 (N/m)	μ_0 (N/m)	τ_0 (N/m)
ماده سمت راست در شکل (۱) (آلومینیوم)	۷۰	۲۷۰۰	۵,۴۶×۱۰۷-	۶/۸۴۲۰	-۰/۸۲۶۹	۰/۵۶۸۹
ماده سمت چپ در شکل (۱) (سیلیکون)	۲۱۰	۲۳۷۰	۳,۱۷×۱۰۷-	-۵/۰۹۸۵	-۲/۷۷۷۹	۰/۶۰۵۶

جدول ۴- تاثیر پارامترهای مختلف انرژی سطح بر چهار نسبت فرکانسی اول نانومیله به ازای حالت‌های مختلف (L=15 nm, R=2 nm, m=0, C=0)

شرط مرزی	فرکانس مورد مطالعه (Fr_a)	آلومینیوم (Fr_a/Fr)				سیلیکون (Fr_a/Fr)			
		مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴
گیردار-گیردار	بدون اثرات سطحی (*Fr*)	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
	چگالی سطحی (*Fr_SD*)	۰/۹۱۱۴	۰/۹۰۹۷	۰/۹۰۷۰	۰/۹۰۳۵	۰/۹۳۸۷	۰/۹۳۷۵	۰/۹۳۵۵	۰/۹۳۳۰
	ضرایب لامه سطحی (*Fr_SL*)	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳
	تنش پسماند سطحی (*Fr_SR*)	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
	تمام اثرات سطحی (*Fr_SE*)	۰/۹۴۴۶	۰/۹۴۲۸	۰/۹۴۰۰	۰/۹۳۶۴	۰/۹۱۴۶	۰/۹۱۳۴	۰/۹۱۱۵	۰/۹۰۹۰
گیردار-آزاد	بدون اثرات سطحی (*Fr*)	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
	چگالی سطحی (*Fr_SD*)	۰/۹۱۱۹	۰/۹۱۰۷	۰/۹۰۸۴	۰/۹۰۵۳	۰/۹۳۹۱	۰/۹۳۸۲	۰/۹۳۶۶	۰/۹۳۴۳
	ضرایب لامه سطحی (*Fr_SL*)	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۱/۰۳۶۴	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۴۳
	تنش پسماند سطحی (*Fr_SR*)	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
	تمام اثرات سطحی (*Fr_SE*)	۰/۹۴۵۱	۰/۹۴۳۸	۰/۹۴۱۵	۰/۹۳۸۳	۰/۹۱۴۹	۰/۹۱۴۱	۰/۹۱۲۵	۰/۹۱۰۳

- بر اساس نتایج بیان شده قبلی و بر اساس نوع جنس نانومیله، می‌توان نتیجه گرفت که برای نانومیله آلومینیومی، از آنجا که تاثیر کاهشی چگالی سطح بیشتر از تاثیر افزایشی ثوابت لامه سطح می‌باشد و از طرفی بی‌تاثیر بودن تنش پسماند سطح، در حالت کلی، انرژی سطح تاثیر کاهشی بر فرکانس‌های محوری نانومیله آلومینیومی دارد. برای نانومیله سیلیکونی می‌توان اینگونه بیان نمود که تاثیر کاهشی چگالی سطح با تاثیر کاهشی ثوابت لامه سطح در کنار بی‌تاثیر بودن پارامتر تنش پسماند سطح، سبب می‌شود انرژی سطح اثری کاهشی بر فرکانس‌های محوری نانومیله سیلیکونی داشته باشد. این نتیجه‌گیری برای هر دو شرط مرزی و شماره فرکانس‌های مختلف، صادق است.

۳-۲-۲- اثر ترک به صورت کلی

در گام بعدی، علاوه بر در نظر گرفتن تاثیر انرژی سطح، فرض می‌شود ترکی در میله وجود دارد و جنس نانومیله همگن در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، جدول ۵ به ازای دو مقدار متفاوت برای شدت ترک ($C = KL/EA = 0.2;\ 2.0$) تهیه شده است که نتایج حاصل از آن عبارتند از:

- اثر کاهشی ترک مستقل از جنس نانومیله است.

جدول ۵- تاثیر ترک و انرژی سطح بر چهار نسبت فرکانسی اول نانومیله به ازای حالت‌های مختلف (L = 15 ،R = 2 nm ،m=0، L_c = 0.4L ،nm)

شرط مرزی	فرکانس مورد مطالعه (Fr_a)	آلومینیوم $\frac{Fr_a}{Fr}$				سیلیکون $\frac{Fr_a}{Fr}$			
		مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴
گیردار-گیردار	بدون اثرات سطحی و بدون ترک (*Fr*)	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
	با اثرات سطحی و بدون ترک (*Fr_SE*)	۰,۹۴۴۶	۰,۹۴۲۸	۰,۹۴۰۰	۰,۹۳۶۴	۰,۹۱۴۶	۰,۹۱۳۴	۰,۹۱۱۵	۰,۹۰۹۰
	بدون اثرات سطحی و با ترک (*Fr_C*)؛ C=0.2	۰,۹۸۲۲	۰,۸۸۷۷	۰,۹۱۹۱	۰,۹۸۳۱	۰,۹۸۲۲	۰,۸۸۷۷	۰,۹۱۹۱	۰,۹۸۳۱
	بدون اثرات سطحی و با ترک (*Fr_C*)؛ C=2	۰,۹۰۱۷	۰,۶۸۱۳	۰,۸۵۲۶	۰,۹۵۱۲	۰,۹۰۱۷	۰,۶۸۱۳	۰,۸۵۲۶	۰,۹۵۱۲
	با اثرات سطحی و با ترک (*Fr_SE&C*)؛ C=0.2	۰,۹۲۶۶	۰,۸۳۱۱	۰,۸۶۱۶	۰,۹۱۹۹	۰,۸۹۹۱	۰,۸۱۵۳	۰,۸۴۰۴	۰,۸۹۴۵
	با اثرات سطحی و با ترک (*Fr_SE&C*)؛ C=2	۰,۸۴۸۹	۰,۶۴۰۱	۰,۸۰۱۹	۰,۸۹۱۰	۰,۸۲۶۸	۰,۶۲۵۳	۰,۷۷۸۴	۰,۸۶۵۵
گیردار-آزاد	بدون اثرات سطحی و بدون ترک (*Fr*)	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
	با اثرات سطحی و بدون ترک (*Fr_SE*)	۰,۹۴۵۱	۰,۹۴۳۸	۰,۹۴۱۵	۰,۹۳۸۳	۰,۹۱۴۹	۰,۹۱۴۱	۰,۹۱۲۵	۰,۹۱۰۳
	بدون اثرات سطحی و با ترک (*Fr_C*)؛ C =0.2	۰,۸۸۷۸	۰,۹۸۰۹	۰,۸۵۷۶	۰,۹۸۵۸	۰,۸۸۷۸	۰,۹۸۰۹	۰,۸۵۷۶	۰,۹۸۵۸
	بدون اثرات سطحی و با ترک (*Fr_C*)؛ C =2	۰,۵۰۸۴	۰,۸۸۹۳	۰,۶۹۷۹	۰,۹۶۲۴	۰,۵۰۸۴	۰,۸۸۹۳	۰,۶۹۷۹	۰,۹۶۲۴
	با اثرات سطحی و با ترک (*Fr_SE&C*)؛ C=0.2	۰,۸۳۲۴	۰,۹۲۴۶	۰,۸۰۱۸	۰,۹۲۴۴	۰,۸۱۶۸	۰,۸۹۷۶	۰,۷۸۷۷	۰,۸۹۸۰
	با اثرات سطحی و با ترک (*Fr_SE&C*)؛ C=2	۰,۴۶۷۶	۰,۸۳۶۹	۰,۶۵۶۹	۰,۹۰۳۱	۰,۴۷۴۴	۰,۸۱۵۱	۰,۶۳۹۰	۰,۸۷۶۷

- ترک اثری کاهشی بر فرکانس‌های محوری دارد و تاثیر آن علاوه بر مقدار شدت ترک به شماره مود فرکانسی و نوع شرط مرزی وابسته است. هر چه شدت ترک بیشتر باشد، تاثیر کاهشی آن نیز بیشتر می‌شود که دلیل آن کاهش سفتی نانومیله است؛ اما وابستگی تاثیر ترک به شماره فرکانس و نوع شرط مرزی، الگوی ثابتی ندارد.

۳-۲-۳- اثر موقعیت ترک

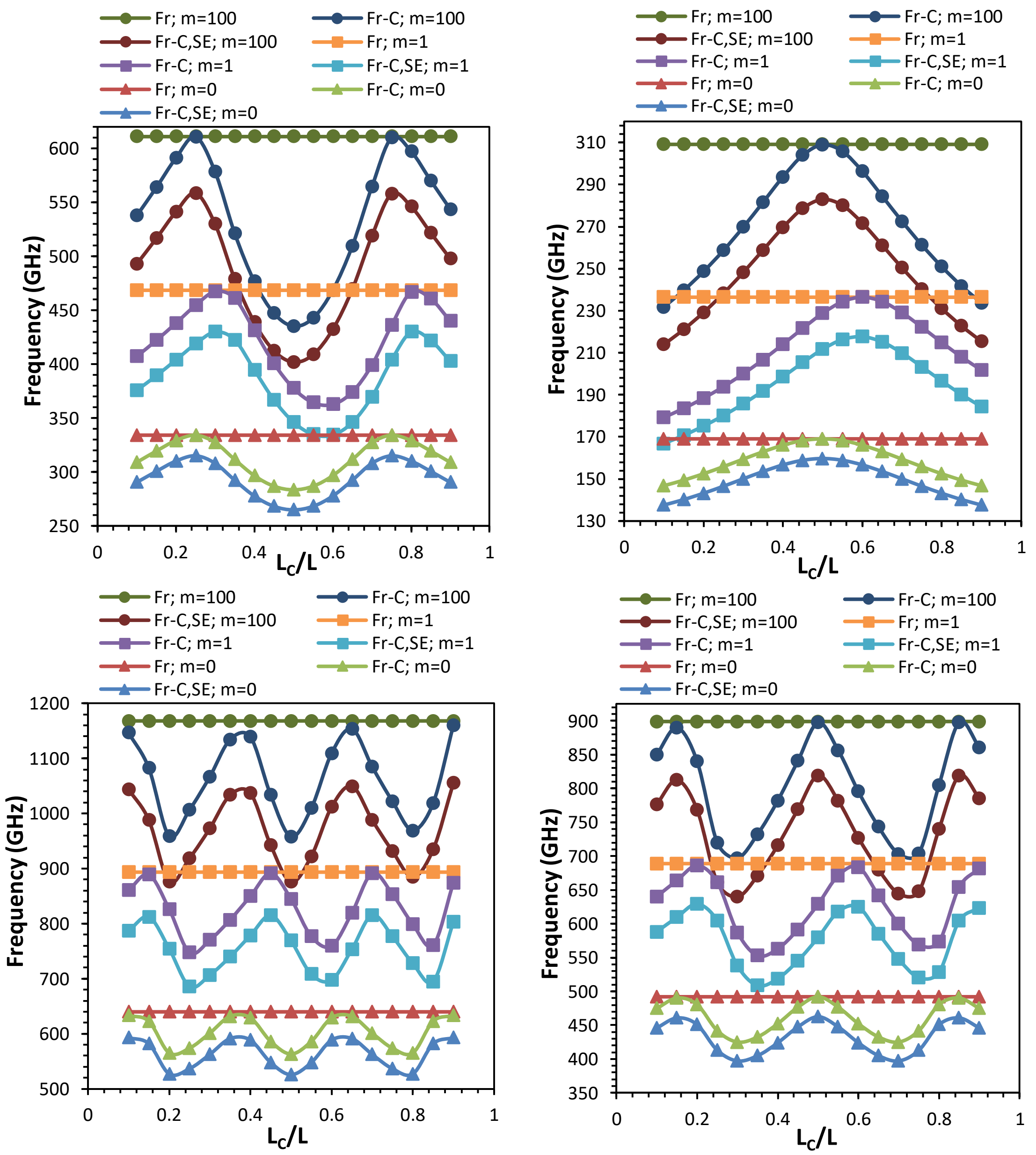
بخش بعدی نتایج به بررسی اثر موقعیت ترک بر فرکانس‌های محوری طبیعی نانومیله تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح می‌پردازد. در این راستا، شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب برای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد رسم شده‌اند. در این شکل‌ها، مقدار شدت ترک بصورت $C = KL/E_R A$ در نظر گرفته شده است. به منظور پرهیز از تکرار، صرفا نتایجی ارایه می‌شود که پیشتر به آن اشاره نشده است. شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهد، موقعیت ترک به شدت بر فرکانس‌های محوری نانومیله تابعی مدرج تاثیر می‌گذارد، به نحوی که هر کجا جابجایی نانومیله صفر باشد، میزان تاثیر کاهشی ترک، حداکثر است و بالعکس، در هر موقعیتی که میزان جابجایی نانومیله ماکزیمم باشد، اثر کاهشی ترک، حداقل است. به بیان دیگر، تاثیر کاهشی ترک بستگی به محل قرارگیری ترک و نوع شکل مود فرکانسی دارد. شکل‌های فوق همچنین نشان می‌دهند که وقتی جنس نانومیله همگن است (m=0, 100) شکل مود نانومیله نیز متقارن است و ترک و انرژی سطح نیز بصورت متقارن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تاثیر می‌گذارند؛ اما وقتی جنس نانومیله، تابعی مدرج (m=1) می‌شود، ترک و انرژی سطح نیز بصورت نامتقارن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تاثیر می‌گذارند. نکته دیگر اینکه با تغییر جنس نانومیله از آلومینیوم (m=0) به سیلیکون (m=100)، مقدار فرکانس افزایش می‌یابد و تغییرات فرکانس با در نظر اثر ترک و انرژی سطح نیز بیشتر می‌شود.

۳-۲-۴- اثر طول نانومیله

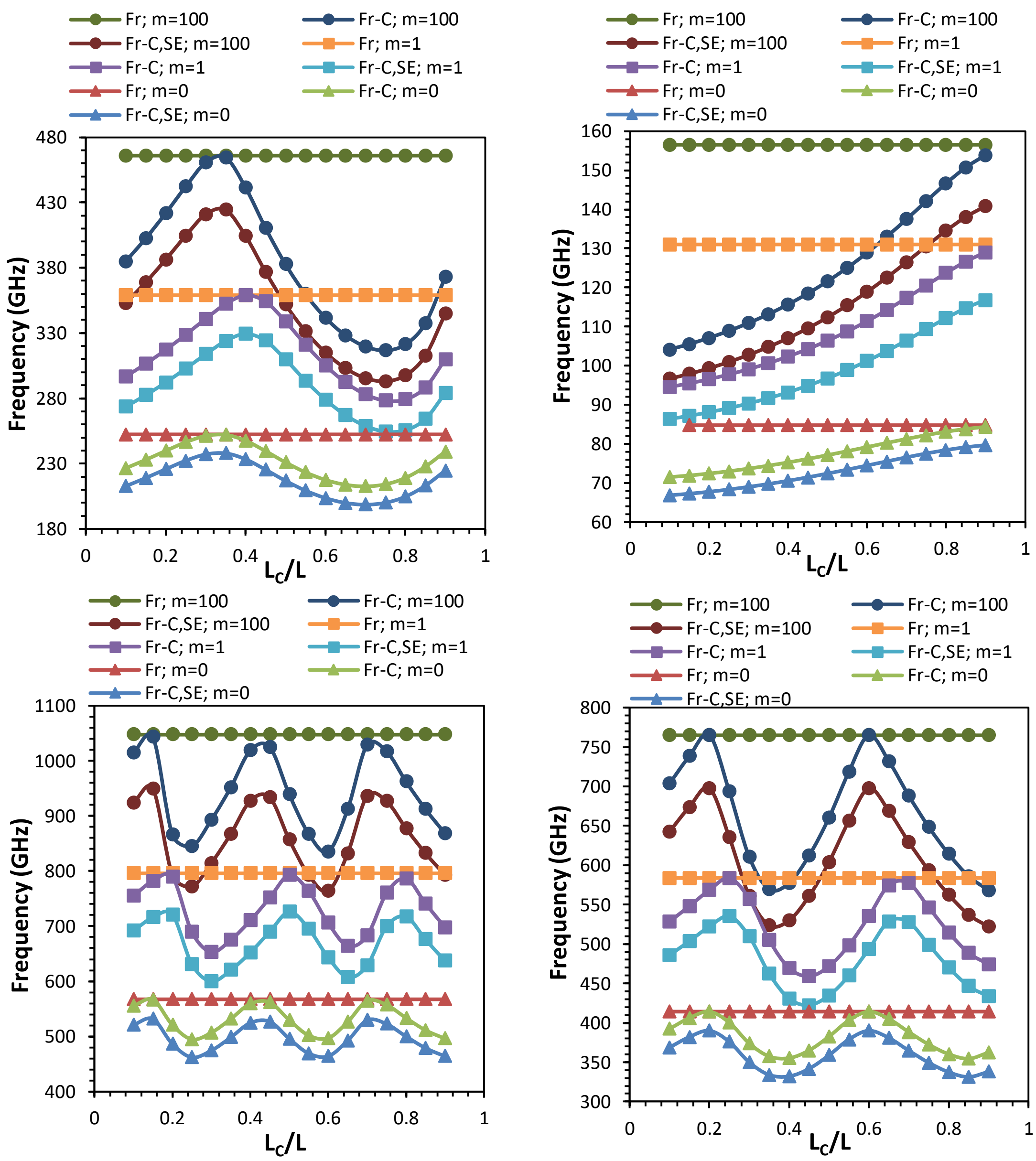
پارامتر دیگری که تاثیر آن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار بررسی شده است طول نانومیله می‌باشد. بدین منظور، در جدول ۶ نسبت فرکانسی اول نانومیله برای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد و به ازای سه حالت، فقط با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح، فقط با در نظر گرفتن اثر ترک، و با در نظر گرفتن همزمان تاثیر ترک و انرژی سطح لیست شده است. جدول ۶ نشان می‌دهد که تاثیر ترک و انرژی سطح بر فرکانس‌های اول نانومیله مدل شده بر اساس تئوری ساده، تقریبا مستقل از طول آن است، درحالیکه اگر نانومیله بر اساس تئوری رایلی مدل شده باشد، وابستگی فرکانس به طول برجسته‌تر است؛ اما تاثیرپذیری فرکانس‌های نانومیله‌های مدل شده بر اساس تئوری‌های ساده و رایلی از ترک و انرژی سطح، علاوه بر اینکه وابسته به مقدار عدد توان تابعی مدرج است، وابسته به نوع شرط مرزی نیز است. نکته قابل توجه از جدول ۶ این است که تاثیر کاهشی انرژی سطح بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی بیشتر از حالتی است که نانومیله بر اساس تئوری ساده مدل شده باشد. در حالیکه تاثیر کاهشی ترک بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی کمتر از حالتی است که نانومیله بر اساس تئوری ساده مدل شده باشد. در حالت کلی وقتی هر دو تاثیر ترک و انرژی سطح بصورت همزمان در نظر گرفته شده باشد، نمی‌توان رفتار کلی به ازای مقادیر مختلف عدد توان تابعی مدرج مشاهده نمود، چرا که تاثیرگذاری انرژی سطح وابسته به مقدار پارامترهای انرژی سطح است.

۳-۲-۵- اثر قطر نانومیله

آخرین پارامتری که تاثیر آن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار بررسی شده است قطر نانومیله می‌باشد. بدین منظور، نسبت فرکانسی اول نانومیله به ازای حالت‌های مختلف در جدول ۷ ارایه شده است. از جدول ۷ نتایجی مشاهده می‌شود که در بعضی موارد متفاوت از نتایج بدست آمده از جدول ۶ است.



شکل ۲- تاثیر موقعیت ترک بر چهار فرکانس اول محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار با شرایط مرزی گیردار-گیردار(C = 0.2; R = 2 nm; L = 15 nm)



شکل ۳- تاثیر موقعیت ترک بر چهار فرکانس اول محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار با شرایط مرزی گیردار-آزاد(C = 0.2; R = 2 nm; L = 15 nm)

جدول ۷ نشان می‌دهد که تاثیرگذاری ترک بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری ساده، مستقل از قطر نانومیله است، اما تاثیرگذاری انرژی سطح وابسته به قطر است. این در حالیست که هم تاثیرگذاری ترک و هم انرژی سطح بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی، وابسته به قطر است. نکته دیگری که جدول ۷ بیان می‌کند، این است که تاثیرگذاری ترک و انرژی سطح، هم وابسته به نوع شرط مرزی و هم وابسته به مقدار عدد توان تابعی مدرج است. نکته دیگری که از جدول ۷ قابل مشاهده است، این است که با ضخیم‌تر شدن نانومیله، تاثیر کاهشی ترک بر نانومیله رایلی بیشتر می‌شود، اما برای نانومیله ساده، تاثیر قابل توجهی مشاهده نمی‌شود؛ همچنین با ضخیم

تر شدن نانومیله، تاثیر کاهشی انرژی سطح بر نانومیله رایلی و ساده کمتر می‌شود که دلیل آن افزایش نرخ انرژی ذخیره شده در حجم در مقایسه با انرژی ذخیره شده در سطح می‌باشد. در حالت کلی وقتی تاثیر ترک و انرژی سطح بصورت همزمان در نظر گرفته شده باشد، بدلیل وابستگی تاثیر انرژی سطح به مقادیر مشخصات مکانیکی سطح، نمی‌توان رفتار مشخصی برای نحوه تاثیرپذیری فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار از انرژی سطح و ترک تعریف نمود.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تاثیر انرژی سطح بر ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های تابعی مدرج ترکدار که بر اساس تئوری رایلی میله ها مدل شده‌اند بررسی شده است. معادله حاکم بر حرکت و روابط شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. فرکانس‌های محوری با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیل هارمونیک بدست آمده‌اند. نتایج زیر از این پژوهش بدست آمده است:

جدول ۶- تاثیر طول میله بر نسبت فرکانسی اول نانومیله به ازای حالت‌های مختلف (L_c = 0.3L ،C = 0.2 ،R = 1.5 nm)

شرط مرزی	m	طول (nm)	$\frac{Fr\_SE}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_SE}{Fr}$ تئوری رایلی	$\frac{Fr\_Cr}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_Cr}{Fr}$ تئوری رایلی	$\frac{Fr\_SE\&Cr}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_SE\&Cr}{Fr}$ تئوری رایلی
گیردار-گیردار	۰	۱۰	۰/۹۳۰۳۱	۰/۹۲۹۳۳	۰/۹۴۲۴۹	۰/۹۴۳۰۱	۰/۸۷۲۵۳	۰/۸۷۲۲۴
	۰	۲۰	۰/۹۳۰۳۱	۰/۹۳۰۰۶	۰/۹۴۲۴۹	۰/۹۴۲۶۲	۰/۸۷۲۵۳	۰/۸۷۲۴۶
	۱	۱۰	۰/۸۹۸۶۸	۰/۸۹۷۸۲	۰/۸۴۵۰۱	۰/۸۴۶۰۹	۰/۷۶۸۰۱	۰/۷۶۸۳۷
	۱	۲۰	۰/۸۹۸۶۸	۰/۸۹۸۴۶	۰/۸۴۵۰۴	۰/۸۴۵۳۱	۰/۷۶۸۰۶	۰/۷۶۸۱۶
	۱۰۰	۱۰	۰/۸۹۰۹۳	۰/۸۹۰۲۸	۰/۸۷۱۸۱	۰/۸۷۲۸۳	۰/۷۸۱۷۰	۰/۷۸۲۱۳
	۱۰۰	۲۰	۰/۸۹۰۹۶	۰/۸۹۰۷۹	۰/۸۷۱۸۱	۰/۸۷۲۰۷	۰/۷۸۱۷۲	۰/۷۸۱۸۳
گیردار-آزاد	۰	۱۰	۰/۹۳۰۳۱	۰/۹۳۰۰۶	۰/۸۶۸۹۱	۰/۸۶۹۱۷	۰/۷۹۸۵۷	۰/۷۹۸۶۸
	۰	۲۰	۰/۹۳۰۳۱	۰/۹۳۰۲۴	۰/۸۶۸۹۱	۰/۸۶۸۹۷	۰/۷۹۸۵۷	۰/۷۹۸۶۰
	۱	۱۰	۰/۸۷۸۴۴	۰/۸۷۸۲۱	۰/۷۵۶۲۷	۰/۷۵۶۷۳	۰/۶۷۰۳۳	۰/۶۷۰۶۲
	۱	۲۰	۰/۸۷۸۳۸	۰/۸۷۸۳۲	۰/۷۵۶۲۹	۰/۷۵۶۴۰	۰/۶۷۰۳۱	۰/۶۷۰۳۹
	۱۰۰	۱۰	۰/۸۸۸۷۳	۰/۸۸۸۵۶	۰/۷۰۸۳۷	۰/۷۰۸۸۱	۰/۶۴۰۷۴	۰/۶۴۱۰۶
	۱۰۰	۲۰	۰/۸۸۸۷۳	۰/۸۸۸۶۹	۰/۷۰۸۳۷	۰/۷۰۸۴۸	۰/۶۴۰۷۴	۰/۶۴۰۸۲

جدول ۷- تاثیر قطر بر نسبت فرکانسی اول نانومیله به ازای حالت‌های مختلف ($L_c = 0.3L$ ،$C = 0.2$ ،$L = 10$ nm)

شرط مرزی	m	قطر (nm)	$\frac{Fr\_SE}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_SE}{Fr}$ تئوری رایلی	$\frac{Fr\_Cr}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_Cr}{Fr}$ تئوری رایلی	$\frac{Fr\_SE\&Cr}{Fr}$ تئوری ساده	$\frac{Fr\_SE\&Cr}{Fr}$ تئوری رایلی
گیردار-گیردار	۰	۱	۰,۸۴۶۵۹۴	۰,۸۴۶۳۸۴	۰,۹۴۲۴۹۳	۰,۹۴۲۵۵۱	۰,۷۸۶۶۳۹	۰,۷۸۶۵۳۱
	۰	۳	۰,۹۳۰۳۰۵	۰,۹۲۹۳۲۹	۰,۹۴۲۴۹۳	۰,۹۴۳۰۱۴	۰,۸۷۲۵۲۹	۰,۸۷۲۲۴۲
	۱	۱	۰,۷۵۸۹۳۳	۰,۷۵۸۷۷۲	۰,۸۴۵۰۴۳	۰,۸۴۵۱۶۳	۰,۶۶۳۴۶۱	۰,۶۶۳۴۳۰
	۱	۳	۰,۸۹۸۶۸۰	۰,۸۹۷۸۲۰	۰,۸۴۵۰۱۰	۰,۸۴۶۰۸۶	۰,۷۶۸۰۰۶	۰,۷۶۸۳۷۲
	۱۰۰	۱	۰,۷۲۴۰۵۱	۰,۷۲۳۹۱۵	۰,۸۷۱۸۱۴	۰,۸۷۱۹۲۸	۰,۶۴۳۹۷۰	۰,۶۴۳۹۴۹
	۱۰۰	۳	۰,۸۹۰۹۳۲	۰,۸۹۰۲۷۵	۰,۸۷۱۸۱۴	۰,۸۷۲۸۲۹	۰,۷۸۱۷۰۲	۰,۷۸۲۱۳۳
گیردار-آزاد	۰	۱	۰,۸۴۶۵۹۴	۰,۸۴۶۵۴۱	۰,۸۶۸۹۰۵	۰,۸۶۸۹۳۴	۰,۷۰۹۷۹۱	۰,۷۰۹۷۸۹
	۰	۳	۰,۹۳۰۳۰۵	۰,۹۳۰۰۵۹	۰,۸۶۸۹۰۵	۰,۸۶۹۱۷۰	۰,۷۹۸۵۶۹	۰,۷۹۸۶۷۵
	۱	۱	۰,۷۱۲۱۱۴	۰,۷۱۲۰۷۲	۰,۷۵۶۲۹۲	۰,۷۵۶۳۴۳	۰,۵۵۳۴۷۰	۰,۵۵۳۴۸۵
	۱	۳	۰,۸۷۸۴۴۱	۰,۸۷۸۲۰۸	۰,۷۵۶۲۶۹	۰,۷۵۶۷۳۱	۰,۶۷۰۳۲۵	۰,۶۷۰۶۲۲
	۱۰۰	۱	۰,۷۱۹۱۰۸	۰,۷۱۹۰۷۲	۰,۷۰۸۳۶۸	۰,۷۰۸۴۱۷	۰,۵۳۷۹۵۶	۰,۵۳۷۹۷۵
	۱۰۰	۳	۰,۸۸۸۷۳۳	۰,۸۸۸۵۶۲	۰,۷۰۸۳۶۷	۰,۷۰۸۸۰۸	۰,۶۴۰۷۳۶	۰,۶۴۱۰۵۷

• در نظر گرفتن مولفه تنش سطحی، سبب ناهمگن شدن رابطه شرط مرزی تکیه‌گاه آزاد و شرط پیوستگی نیرویی در محل ترک می‌شود. برای همگن کردن روابط فوق، از تغییر متغیر مناسب استفاده شده است.

• تنس پسماند سطحی، تاثیری بر ارتعاشات محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار ندارد. لذا در مطالعات بعدی، می‌توان این مولفه را در استخراج معادلات در نظر نگرفت.

• تاثیر انرژی سطح بر فرکانس‌های محوری نانومیله تابعی مدرج ترکدار، وابسته به مقدار و علامت پارامترهای انرژی سطح است. برای جنس آلومینیوم و سیلیکون، مشاهده شده است که انرژی سطح، تاثیری کاهشی بر فرکانس‌های محوری نانومیله داشته و این تاثیر کاهشی برای جنس سیلیکون بیشتر از جنس آلومینیوم است.

• اثر کاهشی ترک مستقل از جنس نانومیله است.

• وابستگی تاثیر ترک به شماره فرکانس و نوع شرط مرزی، الگوی ثابتی ندارد.

• وقتی جنس نانومیله همگن است (m=0, 100) شکل مود نانومیله نیز متقارن است و ترک و انرژی سطح نیز بصورت متقارن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تاثیر می‌گذارند؛ اما وقتی جنس نانومیله، تابعی مدرج (m=1) می‌شود، ترک و انرژی سطح نیز بصورت نامتقارن بر فرکانس‌های محوری نانومیله تاثیر می‌گذارند.

• تاثیر کاهشی انرژی سطح بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی بیشتر از حالتی است که نانومیله بر اساس تئوری ساده مدل شده باشد. در حالیکه تاثیر کاهشی ترک بر فرکانس نانومیله تابعی مدرج ترکدار مدل شده بر اساس تئوری رایلی کمتر از حالتی است که نانومیله بر اساس تئوری ساده مدل شده باشد.

مراجع

[1] Assadi A, Farshi B (2011) Size-dependent longitudinal and transverse wave propagation in embedded nanotubes with consideration of surface effects. Acta Mech 222(1): 27-39.

[2] Hosseini-Hashemi S, Fakher M, Nazemnezhad R (2017) Longitudinal vibrations of aluminum nanobeams by applying elastic moduli of bulk and surface: molecular dynamics simulation and continuum model. Mater Res Express 4(8): 085036.

[3] Nazemnezhad R, Mahoori R, Samadzadeh A (2019) Surface energy effect on nonlinear free axial vibration and internal resonances of nanoscale rods. Eur J Mech A Solids 77: 103784.

[4] Nazemnezhad R, Shokrollahi H (2019) Free axial vibration analysis of functionally graded nanorods using surface elasticity theory. Modares Mech Eng 18(9): 131-141.

[5] Nazemnezhad R, Shokrollahi H (2020) Free axial vibration of cracked axially functionally graded nanoscale rods incorporating surface effect. Steel Compos Struct 35(3): 449-462.

[6] Karličić DZ, Ayed S, Flaieh E (2019) Nonlocal axial vibration of the multiple Bishop nanorod system. Math Mech Solids 24(6): 1668-1691.

[7] Babaei A (2019) Longitudinal vibration responses of axially functionally graded optimized MEMS gyroscope using Rayleigh–Ritz method, determination of discernible patterns and chaotic regimes. SN App Sci 1(8): 831.

[8] Yayli MÖ (2018) Free longitudinal vibration of a nanorod with elastic spring boundary conditions made of functionally graded material. Micro Nano Lett 13(7): 1031-1035.

[9] Nazemnezhad R, Kamali K (2018) Free axial vibration analysis of axially functionally graded thick nanorods using nonlocal Bishop's theory. Steel Compos Struct 28(6): 749-758.

[10] Aydogdu M, Arda M, Filiz S (2018) Vibration of axially functionally graded nano rods and beams with a variable nonlocal parameter. Adv nano res 6(3): 257.

[11] Akgöz B, Civalek Ö (2013) Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM). Compos Part B-Eng 55: 263-268.

[12] Şimşek M (2012) Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods. Comp Mater Sci 61: 257-265.

[13] Rao SS. Vibration of continuous systems: Wiley Online Library, 2007.

[14] Yayli MÖ (2020) Axial vibration analysis of a Rayleigh nanorod with deformable boundaries. Microsyst Technol: 26:2661-2671.

[15] Civalek Ö (2004) Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. Eng Struct 26(2): 171-186.