



## طراحی کنترل کننده مد لغزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان برای خودخلبان پیچشی

مجید یاراحمدی<sup>۱</sup> و صبا یعقوبی پور<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار ریاضی کاربردی، دانشگاه لرستان، لرستان

<sup>۲</sup> مربی، ریاضی کاربردی، دانشگاه لرستان، لرستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۵/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۶

### چکیده

در این مقاله روش غیرخطی طراحی کنترل کننده مد لغزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان برای خودخلبان پیچشی، در موشک EMRAAT با قابلیت هدایت مانور BTT، به کار گرفته می‌شود. ابتدا با معرفی سطح لغزشی متغیر با زمان و در نتیجه قابل تنظیم بودن پهنای باند شکست فرکانس، همه فرکانس‌های مدل نشده سیستم فیلتر می‌شوند. سپس با به کار بردن لایه مرزی تطبیقی در قانون کنترل و شبکه عصبی موجکی برای تقریب نامعینی‌های سیستم، تأثیرات منفی نامعینی‌ها و فرکانس‌های مدل نشده سیستم بر فرآیند کنترل کاهش داده می‌شوند. پدیده چترینگ رخ نخواهد داد و هزینه کنترل در مقایسه با دیگر روش‌ها کمتر است. ردیابی بهینه بدست می‌آید. در شبکه موجکی، موجک کلاه مکزیکی به عنوان تابع پایه‌ای انتخاب شده است. در آخر به منظور بررسی عملکرد و فواید روش ارائه شده، علاوه بر خودخلبان پیچشی، پاندول معکوس نیز به عنوان مثال دوم شبیه سازی شده است.

**کلمات کلیدی:** پهنای شکست فرکانس؛ تنظیم کننده بازگشتی؛ کنترل مد لغزشی؛ موشک؛ خودخلبان؛ لایه مرزی متغیر با زمان؛ شبکه موجکی.

## Wavelet Sliding-mode control with varying boundary layer via time-variant sliding function for autopilot

M. Yarahmadi<sup>1</sup> and S. Yaghobipour<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Assoc. Prof., Faculty of Mathematics, Lorestan University, Lorestan, Iran

<sup>2</sup> Lect., Faculty of Mathematics, Lorestan University, Lorestan, Iran

### Abstract

In this paper, the nonlinear method, "wavelet sliding-mode control with varying boundary layer via time-variant sliding function" for the pitch autopilot controlling EMRAAT missile, based on steering logic BTT is employed. Time-variant sliding surface filters all un-modeled frequencies. The adjustable boundary layer width, break-frequency bandwidth and the consequent parameters in neural wavelet approximation are tuned, to reduce the effects of the system uncertainties, un-modeled frequencies. The chattering phenomenon do not occur and control cost is lower than other methods. The tracking operation is time optimal operation. Three theorems and one lemma, which facilitate design of the employed controller, are presented. To investigation the operation of the employed method, the Mexican Hat wavelet function as wavelet basis function is selected. This method is implemented for a couple of examples, pitch autopilot control system and invert pendulum, to illustrate advantages of the proposed method..

**Keywords:** Break frequency bandwidth; Rejection regulator; Sliding Mode Control; Missile; Autopilot; Wavelet Varying Boundary Layer; Wavelet networks.

## ۱- مقدمه

اکثر سیستم‌های طبیعی در ماهیت خود غیرخطی اند و در معادلات دینامیکی خود همیشه نامعینی دارند. لذا کنترل سیستم‌های غیرخطی موضوع مهمی در کنترل سیستم‌ها می‌باشد. تا کنون کنترل تطبیقی سیستم‌های خطی و کلاس‌های خاص معینی از سیستم‌های غیر خطی به خوبی طراحی شده است. با این حال موضوع کنترل تطبیقی سیستم‌های غیر خطی عمومی هنوز چالشی است برای جامعه کنترل. روش‌های ریاضی ممکن است برای سیستم‌های پیچیده عملاً قابل دستیابی نباشد و مساله کنترل تطبیقی این سیستم‌ها آن‌طور که باید حل نشود [۱ و ۲]. طرح‌های تطبیقی غیرمستقیم امکان دستیابی به دانش قیاسی دینامیک‌های سیستم برحسب معادلات دقیق یا زبانی را فراهم می‌کند در حالی که طرح‌های تطبیقی مستقیم امکان تلفیق این کنترلگرها بر پایه دانش قیاسی را فراهم می‌آورد [۳]. طبق سیستم و شرایط آن کنترل کننده‌ی تطبیقی غیرمستقیم و مستقیم می‌توانند مفید باشد.

سیستم‌های کنترل مد لغزشی SMC، برای طراحی کنترل مقاوم جهت کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین در حضور اختلالات خارجی مطالعه شده است [۴ و ۵]. می‌دانیم در بسیاری از طرح‌ها برای اینکه ماتریس بهره پس‌خورده کنترل که مورد نیاز عملکرد سیستم است مشتق پذیر باشد، از روش کوواریانس کران بالایی استفاده می‌شود [۴]. در مرجع [۶] طرحی ارائه شده است که در واقع تلفیقی از تکنیک کنترل مد لغزشی فازی با تکنیک کنترل فازی تطبیقی تعدیل یافته می‌باشد. در این روش تنها قوانین تطبیقی تعدیل یافته، پارامترهای تطبیقی مدل فازی را تنظیم می‌کنند. بنابراین این مساله خود نوعی محدودیت در بدست آوردن عملکرد ردیابی بهینه ایجاد می‌کنند. کنترل مد لغزشی به جهت استعمال کنترل گسسته که منجر به ایجاد پدیده‌ی چترینگ و فعال شدن فرکانس‌های مدل نشده است، در عمل نامطلوب می‌باشد [۷]. به منظور جلوگیری از ایجاد چنین نواقصی، تکنیک لایه مرزی و روش‌های شناسایی در مرجع‌های [۷-۱۲] استفاده شده است. در مرجع [۱۱] کنترل کننده مد لغزشی بر اساس پهنای باند لایه مرزی متغیر فازی، بهره کنترل متغیر فازی و ضخامت لایه مرزی متغیرهای فازی طراحی شده است. کنترل کننده‌های مد

لغزشی که بر پایه لایه مرزی متغیر با زمان طراحی می‌شوند، نسبت به روش‌های لایه مرزی ثابت از نظر عملکرد ردیابی بسیار بازده بالاتری دارند.

مراجع [۳ و ۱۹-۱۳] در ساختار کنترلی خود توابع غیرخطی  $f(x)$  و  $g(x)$  را نامعین در نظر گرفته اند. یعنی برای غلبه بر تاثیر نامعینی توابع نامعلوم  $f(x)$  و  $g(x)$  را بوسیله تقریبگرهای مناسب تقریب زده‌اند. برای این منظور شبکه موجکی می‌تواند به عنوان یک تقریبگر عمومی مناسب در نظر گرفته شود. با استفاده از برخی ویژگی‌های مهم موجک مثل تجزیه، فشرده سازی، چند رانشی در کنار مفاهیم منطق فازی و شبکه عصبی، تقریب عصبی موجکی فازی به عنوان یک تقریبگر مناسب برای هر تابع غیرخطی دلخواه پیشنهاد می‌شود [۲۰]. برای محاسبه پارامتر بهره کنترل، بایستی توابع نمو یعنی  $\Delta g$  و  $\Delta f$  محاسبه شوند [۲۱]. برای تنظیم کردن پهنای باند لایه مرزی و پارامترهای دیگر پیشنهاد می‌شود که قوانین خود تنظیم که بر اساس خطای مدل بندی کراندار می‌باشد، استفاده شود [۱۰]. معادله لغزشی متغیر با زمان در روش SMC برای اولین بار در مرجع [۲۲] ارائه شده است. برای این هدف، تنظیم کننده بازگشتی برحسب پارامتر به نام «پارامتر بازگشتی» معرفی می‌شود که از این طریق می‌توان ضرایب حالات خطای سیستم را به طور هدفمندی انتخاب کرد. این معادله لغزشی، زنجیره ای متشکل از  $(n-1)$  تا فیلتر پایین گذر مرتبه اول تطبیقی است؛ که در روند کنترل و ردیابی، کلیه فرکانس‌هایی که مدل نشده‌اند فیلتر می‌کند. در واقع با تنظیم کردن این پارامتر بازگشتی می‌توان پهنای باند شکست فرکانس و همچنین ضرایب حاصل خطا را در معادله لغزشی تنظیم کرد [۲۳]. براساس قوانین تطبیقی مد لغزشی متغیر با زمان می‌توان پارامتر حاصل از ضرایب شبکه موجکی را تنظیم کرد [۲۳].

در اینجا برای اولین بار روش غیرخطی «کنترل مد لغزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان» برای خودخلبان پیچشی در موشک EMRAAT با قابلیت هدایت مانور BTT، اجرا می‌شود. البته قبلاً در مرجع [۲۴] جهت هدایت این خودخلبان روش‌هایی خطی اجرا شده است. اما ردیابی نادقیق و ناپایدار اجرا شده است و مساله چترینگ برطرف نگردیده است. در ادامه سه قضیه و یک لم که طراحی کنترلگر را سهولت می‌بخشند ارائه

تعریف دیگری از تابع لغزشی به صورت زیر است [۲۵]:

$$s \rightarrow \frac{1}{p+\lambda} \rightarrow \frac{1}{p+\lambda} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{p+\lambda} \rightarrow e$$

شکل ۱- معادله لغزشی به عنوان زنجیره‌ای از فیلترهای پایین گذر

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e \quad (۴)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل فوق را می‌توان به صورت زنجیره ای از (n-1) تا فیلتر پایین گذر با شکست فرکانس  $\lambda$  در نظر گرفت؛ به طوری که اسکالر های  $s$  و  $e$  به ترتیب ورودی و خروجی آن فیلترها هستند و  $p$  همان طور که در شکل فوق نشان داده شده است، عملگر لاپلاس می‌باشد. پارامتر  $\lambda$  باید طوری انتخاب شود که همه فرکانس های مدل نشده سیستم فیلتر شوند. لذا در زیر قضیه‌ای پیرو همین هدف آورده شده است.

**قضیه ۱:** سیستم (۱) را در نظر بگیرید. اگر  $\omega_i$  ها ریشه‌های چند جمله‌ای (۲) باشند، {فرکانس‌های مدل نشده،  $v = \inf\{\sigma, \sigma \in \mathbb{C}, P(\sigma) = 0, \omega_i < 0, i=1,2,\dots,n-1\}$  و  $\delta = \max\{\omega_i, P(\omega_i) = 0, \omega_i < 0, i=1,2,\dots,n-1\}$  عدد مثبت حقیقی دلخواه (پارامتر بازگشتی)<sup>۱</sup> باشد به طوری که  $\delta < v$  آنگاه با انتخاب  $\omega^* = v - \delta$  و  $k_j < \binom{n-1}{j} (\omega^*)^j$  برای  $j = 1, 2, \dots, n-1$  آنگاه،  $\lambda < v$  یعنی، فیلترهای مرتبه‌ی اول پایین گذر با پهناى باند شکست فرکانس  $\lambda$  همان طور که در معادله (۴) معرفی شدند، همه‌ی فرکانس‌های مدل نشده سیستم را فیلتر می‌کند.

**اثبات:** رجوع کنید به ضمیمه.

تنظیم کننده بازگشتی به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_j^n(\delta) = \binom{n-1}{j} (v-\delta)^j \quad (۵)$$

که  $\delta$  پارامتر بازگشتی است و همچنین قرارداد می‌کنیم که  $R_0^1(\delta) = 1$ .

در بیشتر سیستم‌های طبیعی توابع غیرخطی  $f$  و  $g$  نامعلوم اند. حال فرض کنید  $\hat{f}$  و  $\hat{g}$  به ترتیب تخمین‌هایی

می‌شوند. در بخش ۲، کنترل مد لغزشی که شامل دو قضیه و یک لم است ارائه می‌شود. در بخش ۳، چکیده‌ای از معرفی موجک‌ها و شبکه موجکی توضیح داده می‌شود. همچنین در ادامه قضیه‌ای آورده شده که قوانین تطبیقی را ارائه می‌دهد. در بخش ۴، به منظور بررسی فواید روش ارائه شده، دو مثال خودخلبان پیچشی و پاندول معکوس اجرا می‌شوند. در بخش ۵ نتیجه گیری کلی آورده شده است. همچنین در بخش ۶ تمام اثبات قضا یا و لم گنجانده شده است.

## ۲- کنترل مد لغزشی متغیر با زمان

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) - g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u + d \quad (۱)$$

که در آن  $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}] \in R^n$  و  $u \in R$  به ترتیب بردار حالت و خروجی کنترل سیستم هستند؛  $d$  اختشاشات کراندار خارجی می‌باشد. همچنین  $f$  و  $g$  توابع غیرخطی کراندار نامعلوم است. فرض  $\bar{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}] \in R^n$  مسیر دلخواه باشد که سیستم باید آن را ردیابی کند. هدف کنترل این است که قانون کنترل بدست آید. طوری که حالت سیستم  $\bar{x}$  بتواند مسیر دلخواه  $\bar{x}_d$  را ردیابی کند. بنابراین ابتدا بردار خطا را به صورت  $\bar{e} = \bar{x}_d - \bar{x} = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]$  معرفی می‌کنیم طوری که  $e = x_d - x$  برای رسیدن به هدف کنترل مورد نظر باید روند کنترل را طوری طراحی کرد که مستقل از نامعینی‌های سیستم خطای ردیابی به سمت مقدار مجاز بسیار کوچکی همگرا شود. روش کنترل مد لغزشی روشی است که بر اساس معرفی یک سطح لغزشی یعنی  $s = \bar{k}^T \bar{e}$ ، که در فضای خطا می‌گذرد ساخته می‌شود که در آن بردار  $\bar{k} = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]^T \in R^n$  طوری انتخاب می‌شود که همه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه‌ی معادله لغزشی فوق یعنی:

$$P(\omega) = k_0 \omega^{(n-1)} + k_1 \omega^{(n-2)} + \dots + k_{n-1} \quad (۲)$$

در نیم صفحه چپ باز دستگاه اعداد مختلط قرار گیرند. با انتخاب تابع لیاپونوف  $V = \frac{1}{2} s^2$ ، با مقدار اولیه  $V(0) = 0$  کنترل معادل  $u_{eq}$  طوری بدست می‌آید که همه شرایط لیاپونوف برای پایداری سیستم برقرار باشد [۷]:

$$s \dot{s} \leq -\eta |s|, \quad \text{ای } s \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta, \quad \eta > 0 \quad (۳)$$

<sup>۱</sup> Rejection parameter

اثبات: رجوع کنید به ضمیمه.

### ۳- طراحی SMC موجکی با لایه مرزی تطبیقی

موجک‌ها ابزاری هستند که می‌توانند پراکندگی توابع را نمایش دهند. موجک‌ها توابعی خاص با رفتارهایی خاص اند. زیرا می‌توانند رفتار نوسانی یک سیستم را برای مدت زمان مشخص تعیین کنند و نوسان را به میرایی همگرا کنند. این نوع توابع با استفاده از انتقال موجک مادر  $\psi \in V$  بدست می‌آیند و با استفاده از ویژگی‌های آنالیز چند ریزه ساز [۲۶]، آنالیز چند معیاره و ویژگی‌های ترکیب بدست می‌آیند و قابلیت‌های یادگیری شبکه‌های موجک برای تقریب توابع غیرخطی را به خوبی می‌توان ایجاد کرد [۲۶ و ۲۷] که در آن  $\psi \in V$  یک تابع موجکی مادر است با طول واحد و همه آن توابع  $\psi_{j,k}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi_{j,k}(x) = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\} \quad j, k \in Z \quad (11)$$

که در آن  $\psi_{j,k}$  طول واحد دارد. چنانچه خانواده  $\{\psi_{j,k}\}$  پایه متعامدی برای فضای  $V$  باشد آنگاه برای هر تابع  $f(x) \in V$  می‌توان بسط سری موجکی را تعریف کرد که در فضای  $L^2(R)$  به تابع همگرا باشد [۲۷]. این سری به صورت زیر است:

$$\left\| f(x) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\|_2 = 0 \quad (12)$$

که در آن

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (13)$$

شبکه موجکی یک کلاس از شبکه‌های عصبی است که شامل موجک‌ها است. می‌توان برای تقریب توابع غیرخطی از شبکه‌های موجکی استفاده کرد. فرض کنید تابع غیرخطی باشد، پس تقریب سری‌های موجکی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$f(x, \theta) = \sum_{j=1}^{J_2} \sum_{k=K_1}^{K_2} \theta_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \theta^T W(x), \quad J_i, K_i \in Z \quad (14)$$

که در آن وقتی

$$W(x) = (\psi_{J_1, K_1}, \dots, \psi_{J_1, K_2}, \dots, \psi_{J_2, K_1}, \dots, \psi_{J_2, K_2})^T$$

باشند از توابع غیرخطی  $f$  و  $g$ . برای اینکه کنترلگر را طراحی کنیم طوری که شرط لغزشی  $\dot{s} \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta$  برقرار باشد، فرض زیر را در نظر می‌گیریم:

فرض ۱: کران‌های بالایی  $F, G, D$  و توابع  $M(\bar{x}, \delta)$  و  $G_L$  معلوم باشند به طوری که

$$|\Delta f| < F, |\Delta g| < G, |d| < D, \quad (6)$$

$$M(\bar{x}, \delta) = \left| x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)} \right|, \quad 0 < G_L(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$$

که در آن  $\Delta f = f - \hat{f}$  و  $\Delta g = g - \hat{g}$  می‌باشد.

معادله لغزشی زیر را در نظر بگیرید:

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} R_j^n(\delta(t)) e^{(n-j-1)} \quad (7)$$

که در آن  $\delta(t)$  پارامتر بازگشتی متغیر با زمان است که متعاقباً معادله لغزشی متغیر با زمان معرفی می‌شود که این موضوع امکان تنظیم کردن پهنای باند شکست فرکانس را به وجود می‌آورد.

قضیه ۲: سیم غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید. اگر مقادیر  $F, G, D$  و توابع  $M(x, \delta)$  و  $G_L$  همانند فوق تعریف شوند و سطح لغزشی  $s = \sum_{j=0}^{n-1} R_j^n(\delta(t)) e^{(n-j-1)}$  باشد، آنگاه قانون کنترل به صورت زیر است:

$$u = \hat{g}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)} - T \operatorname{sgn}(s) \right) \quad (8)$$

که در آن:

$$T \geq \frac{\hat{g}(\bar{x})}{G_L(\bar{x})} \left[ F + \frac{(M(\bar{x}, \delta) + |\hat{f}(\bar{x})|)G}{\hat{g}(\bar{x})} + D + \eta \right] \quad (9)$$

شرط لغزشی  $\dot{s} \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta$  را تضمین می‌کند [۲۲].

اثبات: رجوع کنید به ضمیمه.

لم ۱: اگر  $\delta$  و  $R_j^n(\delta)$  به ترتیب پارامتر بازگشتی و تنظیم کننده بازگشتی<sup>۱</sup> باشند، آنگاه:

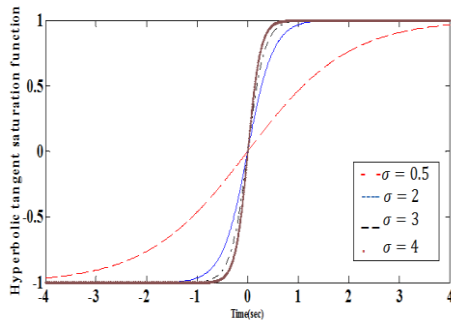
$$\frac{\partial^k}{\partial \delta^k} R_j^n(\delta) = (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} R_{j-k}^{n-k}(\delta) \quad (10)$$

<sup>۱</sup> Rejection regulator

$$\varphi(\sigma, s) = \tanh(\sigma s) \quad (20)$$

که در آن  $\sigma$  به عنوان پارامتر لایه مرزی تعریف می‌شود. تانژانت هایپربولیک یک تابع مشتق پذیر است، بنابراین با انتخاب این تابع به عنوان تابع اشباع امکان دستیابی به کنترل پیوسته ایجاد می‌شود.

شکل ۲ تاثیر تغییرات پارامتر  $\sigma$  را روی پهنای باند لایه مرزی نشان می‌دهد. هنگامی که  $\sigma$  بزرگتر شود پهنای لایه مرزی کوچکتر می‌شود.



شکل ۲- تغییرات پهنای باند لایه مرزی

فرض کنید  $f_{nw} = \theta_f^T \cdot W$  و  $g_{nw} = \theta_g^T \cdot W$  به ترتیب تقریب هایی موجکی از  $f$  و  $g$  باشند. جهت بدست آوردن بهترین تقریب پارامتر های  $\theta_f^* \in R^n$  و  $\theta_g^* \in R^n$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left\{ \sup_{x \in \Omega_x} \|f(\bar{x}) - f_{nw}(\bar{x}, \theta_f)\| \right\} \quad (21)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left\{ \sup_{x \in \Omega_x} \|g(\bar{x}) - g_{nw}(\bar{x}, \theta_g)\| \right\} \quad (22)$$

که در آن  $\Omega_g = \{\theta_g: \|\theta_g\| \leq M_g\}$  و  $\Omega_f = \{\theta_f: \|\theta_f\| \leq M_f\}$  شامل مجموعه هایی برای  $\theta_g$  و  $\theta_f$  اند به طوری که  $M_g$  و  $M_f$  توسط طراح انتخاب می‌شود. چنانچه  $\theta_g$  و  $\theta_f$  تخمین هایی به ترتیب از  $\theta_g^*$  و  $\theta_f^*$  باشند آنگاه اگر  $f^*$  و  $g^*$  به صورت  $f_{nw}^*(\bar{x}) = (\theta_f^*)^T \cdot W(\bar{x})$  و  $g_{nw}^*(\bar{x}) = (\theta_g^*)^T \cdot W(\bar{x})$  تعریف شوند، با جایگذاری مقادیر  $x_d^{(n)}$  در (۱۸) معادله زیر بدست می‌آید:

$$\dot{s} = \xi_f + \xi_g u + d + (g_{nw}^* - g_{nw})u + (f_{nw}^* - f_{nw}) - (n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} - T\varphi(\sigma, s) \quad (23)$$

و  $N = (J_2 - J_1 + 1)(K_2 - K_1 + 1)$  برقرار است آنگاه داریم:

$$\theta = (\theta_{J_1, K_1}, \dots, \theta_{J_1, K_2}, \dots, \theta_{J_2, K_1}, \dots, \theta_{J_2, K_2})^T \in R^N$$

شبکه‌ی موجکی  $f(x, \theta)$  می‌تواند تابع  $f(x)$  را با هر دقت دلخواه تقریب بزند [۲۶ و ۲۷]. در شبکه‌های موجکی، با استفاده از قوانین تنظیم و الگوریتم‌های آموزش می‌توان بهترین مقادیر  $\theta_{j,k}$  برای  $j, k \in Z$  را تقریب زد؛ به طوریکه دقت دلخواه بدست آید. هم در ساختار موجک تک معیاره و هم در ساختار موجک چند معیاره، چندین روش برای ساختن موجک‌های چندبعدی وجود دارد. در موجک چندبعدی تک معیاره، یک پارامتر اتساع تک در همه‌ی ابعاد استفاده می‌شود. در موجک‌های چندبعدی چند معیاره، یک پارامتر اتساع مستقل در هر بعد بکار گرفته می‌شود. موجک چندبعدی را می‌توان با ضرب تانسوری یک تابع موجکی یک بعدی ساخت یعنی:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \quad \text{برای} \quad \psi(\bar{x}) = \psi(x_1) \dots \psi(x_m)$$

ما موجک کلاه مکزیکی را انتخاب کرده ایم و طبق مجموعه داده‌ها، مقادیر اتساع انتخاب می‌شوند. معادله لغزشی به صورت زیر به کار بگیرد:

$$s = e^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j-1)} \quad (15)$$

که در آن  $\delta(t)$  پارامتر بازگشتی متغیر با زمان است. از آنجایی که:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \delta} R_j^n(\delta) e^{(n-j-1)} = -(n-1) \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} \quad (16)$$

با مشتق گیری از (۱۶) طبق لم ۱ نتیجه می‌شود:

$$\dot{s} = e^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)} - (n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} \quad (17)$$

حال معادله (۱) را در (۱۷) جایگذاری کنید:

$$\dot{s} = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u + d - x_d^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)} - (n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} \quad (18)$$

لذا سیگنال کنترل به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$u = \frac{1}{g_{mw}} \left( -f_{mw} + x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)} - T\varphi(\sigma, s) \right) \quad (19)$$

که در آن تابع اشباع به صورت زیر تعریف می‌شود:

۴- نتایج شبیه سازی

مثال ۱: حال از طریق طراحی کنترل کننده برای خودخلبان پیچشی در موشک EMRAAT که قابلیت هدایت با مانور BTT را دارد، تاثیر روش ارائه شده را بررسی می‌کنیم. معادلات حالت شامل تغییرات زاویه حمله است و سیگنال کنترل را پس‌خورد کنترلی پیچشی در نظر می‌گیریم که یک متغیر کنترلی را در بر می‌گیرد. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که  $v=250$ . شاخص عملکرد را انتگرال خطای مطلق یعنی  $IAE = \int_{t_0}^{t_f} |e(t)| dt$  در نظر می‌گیریم.

ما سعی می‌کنیم سه روش «کنترل مد لغزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان» [۲۴] و «کنترل مد لغزشی موجکی با لایه مرزی ثابت مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان» با هم مقایسه کنیم. معادلات دینامیکی زاویه حمله موشک به صورت زیر است [۲۴]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \tilde{f}_{\ddot{\alpha}} + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_p} \delta_p + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_q} + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_r} \delta_r \\ \delta q &= \text{پس‌خورد کنترل پیچشی برابر است با } (\tilde{f}_{\ddot{\alpha}} + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_p} \delta_p + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_r} \delta_r) / \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_q} \\ \text{معادله دینامیکی زاویه حمله شامل روابط ورودی خروجی کنترل} \\ \text{اند که همگی را می‌توان به وسیله متغیر کنترلی مثل } \gamma \text{ تعیین کرد.} \\ \text{بنابراین میتوان نوشت } \ddot{\alpha} = \gamma \text{ و پس‌خورد کنترلی پیچشی به-} \\ \delta q &= \text{صورت: } (\tilde{f}_{\ddot{\alpha}} + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_p} \delta_p + \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_r} \delta_r) / \tilde{g}_{\ddot{\alpha}\delta_q} \\ \text{می‌شود [۲۴].} \end{aligned}$$

هدف از طراحی خود خلبان پیچشی این است که به یک زاویه حمله مطلوب برسیم بطوری که دینامیک‌های جانبی، پایدار بمانند برای این منظور باید شرایط زیر برقرار باشند.

- ۱- زاویه لغزش ( $\beta$ ) کمتر از ۵ درجه باشد.
- ۲- انحرافات سطوح کنترل  $\delta_p$ ،  $\delta_q$  و  $\delta_r$  کمتر از ۴۵ درجه باشد.
- ۳- دستوراتی که از GL می‌گیریم باید طوری باشند که زاویه حمله حداکثر تا ۲۰ درجه باشد.
- ۴- نرخ تغییرات محورهای هیدرولیکی کمتر از ۵۰۰ درجه بر ثانیه باشد.
- ۵- دینامیک‌های جانبی، پایدار باشند.

طبق شرط ۱ نتیجه می‌شود که حول محور z ها لغزشی وجود ندارد؛ لذا نرخ چرخشی ثابت است. متعاقبا انحراف

که در آن  $\xi_f = (f - f_{nw}^*)$  و  $\xi_g = (g - g_{nw}^*)$  اگر معادلات به صورت  $\theta_f = \theta_f^* - \theta_f$  و  $\theta_g = \theta_g^* - \theta_g$  تعریف بشوند آنگاه:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \theta_f^T W u + \theta_g^T W u + \varepsilon(t) \\ &-(n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} - T\varphi(\sigma, s) \end{aligned} \quad (24)$$

به طوری که  $\varepsilon(t) = \xi_f + \xi_g u + d$ . در پی به کارگیری قضیه زیر، می‌توان ضرایب بسط موجکی، پهنای باند لایه مرزی و پهنای شکست فرکانس را تنظیم کرد.

قضیه ۳: سیستم غیرخطی (۱) و سطح لغزشی (۱۵) را در نظر بگیرید. اگر کنترل (۱۹) را بکار بگیریم و تقریب های موجکی  $\hat{f}$  و  $\hat{g}$  از توابع  $f$  و  $g$  و پارامترهای  $\delta$ ،  $\sigma$ ،  $\theta_f$  و  $\theta_g$  بوسیله قوانین تطبیقی (۲۵) - (۳۰) یعنی:

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} \eta_1 s W, & \text{if } (\|\theta_f\| < M_f) \text{ or} \\ & (\|\theta_f\| = M_f, (sW^T \theta_f \leq 0)) \\ P_f, & \text{if } (\|\theta_f\| = M_f \text{ and } (sW^T \theta_f > 0)) \end{cases} \quad (25)$$

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} \eta_2 s W u, & \text{if } (\|\theta_g\| < M_g) \text{ or} \\ & (\|\theta_g\| = M_g, (s u W^T \theta_g \leq 0)) \\ P_g, & \text{if } (\|\theta_g\| = M_g \text{ and } (s u W^T \theta_g > 0)) \end{cases} \quad (26)$$

که در آن  $P_f$  و  $P_g$  عملگرهای تصویری  $\theta_f$  و  $\theta_g$  هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

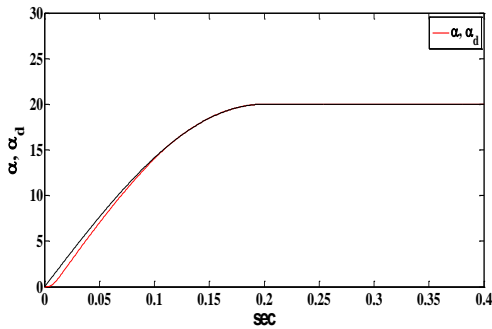
$$P_f = \eta_1 s W - \frac{\eta_1 s W^T \theta_f}{\|\theta_f\|^2} \theta_f, \quad \eta_1 > 0 \quad (27)$$

$$P_g = \eta_2 s W u - \frac{\eta_2 s u W^T \theta_g}{\|\theta_g\|^2} \theta_g, \quad \eta_2 > 0 \quad (28)$$

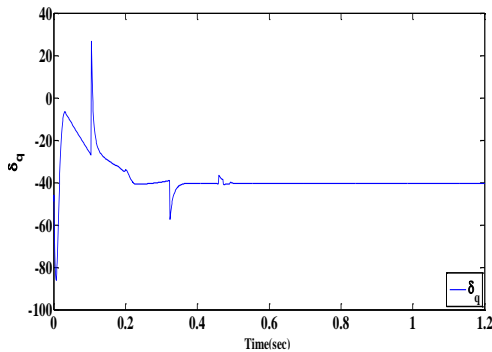
$$\dot{\sigma} = \eta_3 \frac{sT}{\sigma} \tanh(\sigma.s), \quad \eta_3 > 0 \quad (29)$$

$$\dot{\delta} = \eta_4 \operatorname{sgn}(s) \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)}, \quad \eta_4 > 0 \quad (30)$$

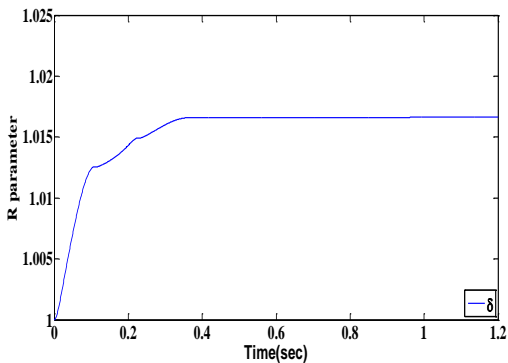
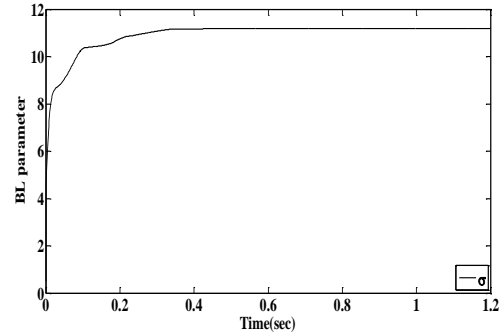
آنگاه خطای ردیابی به طور مجانبی به صفر همگراست. اثبات: به ضمیمه رجوع کنید.



شکل ۳.الف.۱: سیگنال حالات ردیابی با لایه مرزی تطبیقی



شکل ۳.الف.۲: سیگنال کنترل با لایه مرزی تطبیقی



شکل ۳.ب: سیگنال لایه مرزی و پارامتر بازگشتی

سطح چرخشی کنترل  $\delta_r$ ، تغییر نمی‌کند. شرط ۵ تاکید می‌کند که انحراف سطح پیچشی کنترل  $\delta_p$  ثابت است. متغیر کنترلی  $\gamma$ ، به وسیله روش «کنترل مد لغزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان»، انتخاب می‌شود. هدف این است که حالت سیستم ورودی مرجع [۲۴] را ردیابی کند.

$$\alpha_d = \begin{cases} \alpha_{d_f} \sin \omega t & 0 < t < t_f \\ \alpha_{d_f} & t \geq t_f \end{cases}$$

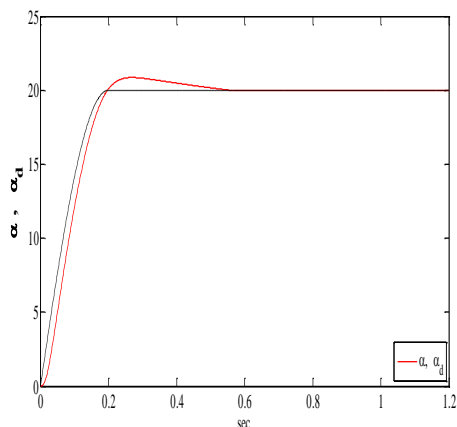
$$\dot{\alpha}_d = \begin{cases} \alpha_{d_f} \cos \omega t & 0 < t < t_f \\ 0 & t \geq t_f \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha}_d = \begin{cases} \alpha_{d_f} \omega^2 - \alpha_{d_f} \omega^2 \cos \omega t & 0 < t < t_f \\ 0 & t \geq t_f \end{cases}$$

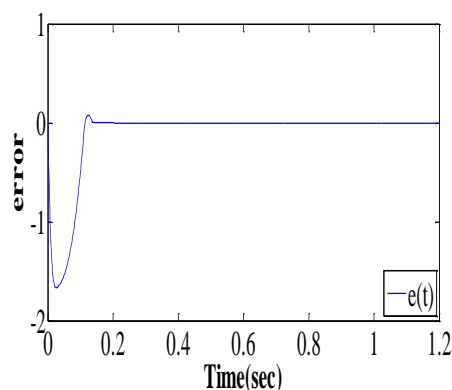
که در آن  $\omega = \frac{\pi}{2t_f}$  و  $\alpha_d = 20^\circ$

به منظور بررسی عملکرد روش بکارگرفته شده، تابع موجکی کلاه مکزیکی  $\psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$  به عنوان تابع پایه ای موجکی انتخاب می‌شود. براساس مجموعه داده های  $\alpha_d$ ، پارامترهای اتساع و انتقال  $z \in \{-10, \dots, 10\}$ ،  $k \in \{-5, \dots, 5\}$  انتخاب می‌شوند. مقادیر پارامترهای بعدی اولیه به صورت،  $T(0) = 10, \alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = 0, \delta(0) = 1, \hat{\theta}_g(0) = 1$  و  $\hat{\theta}_f(0) = 1000$  انتخاب می‌شوند. نتایج شبیه سازی در شکل های ۳ تا ۸ نشان داده می‌شوند.

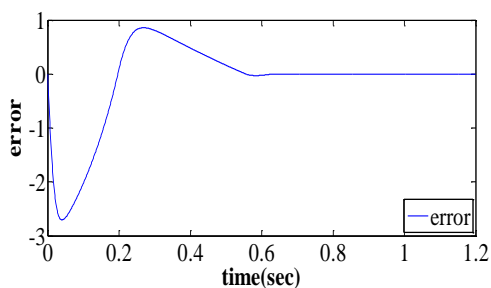
شکل ۳.الف.۱ نشان می‌دهد که ردیابی مسیر دلخواه سریعتر از دو روش دیگر صورت می‌گیرد. همچنین حالت پایدار است و برای همیشه به ۲۰ درجه همگراست. شکل ۳.الف.۲ نشان می‌دهد که چترینگ ورودی کنترل رخ نمی‌دهد. مقدار ورودی کنترل پیچشی به ۴۰ درجه همگرا می‌شود که مقداری قابل قبول است زیرا خروجی کنترل در بازه  $0^\circ \leq \delta_q \leq 45^\circ$  محدود می‌شود. شکل ۳.ب، تغییرات پارامترهای لایه مرزی و بازگشتی را نشان می‌دهد. شکل ۳.ج کاهش سیگنال خطا را نشان می‌دهد. حال در جدول زیر همه نتایج و مزیت‌های استفاده از سه روش مذکور را در یک نگاه می‌آوریم.



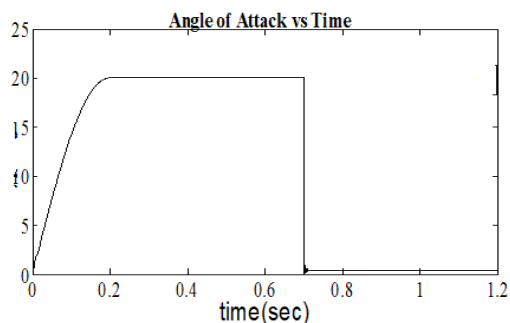
شکل ۵. الف-حالات ردیابی، با روش WTVSMC با لایه مرزی ثابت



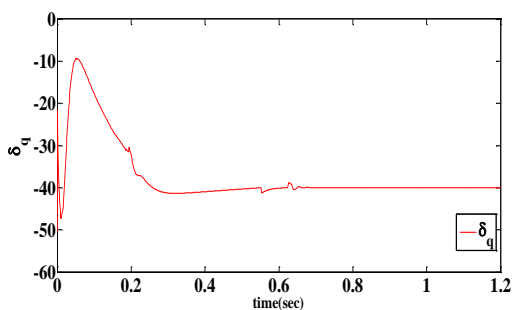
شکل ۳-ج: خطای ردیابی با روش SMC موجکی با لایه مرزی تطبیقی



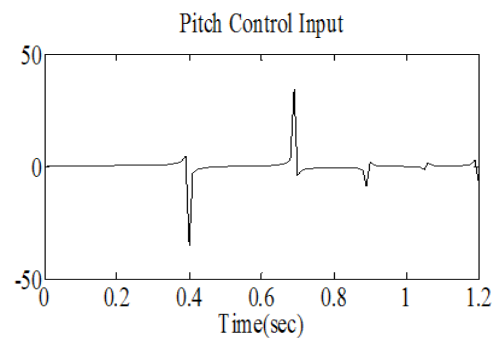
شکل ۵. ب-سیگنال خطا با روش WTVSMC با لایه مرزی ثابت



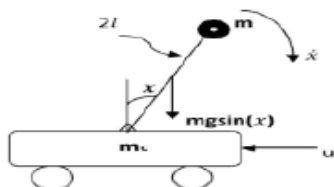
شکل ۴. الف: زاویه حمله با روش مرجع [۲۴]



شکل ۵. ج- سیگنال کنترل  $\delta_q$ ، با روش WTVSMC با لایه مرزی ثابت



شکل ۴. ب: سیگنال کنترل با روش مرجع [۲۴]

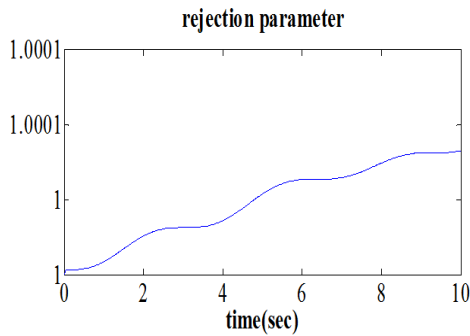


شکل ۶- سیستم پاندول معکوس

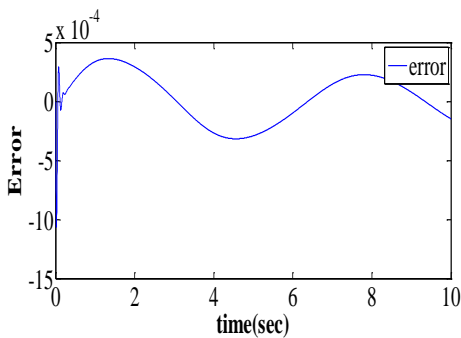
جدول ۶- بررسی عملکرد روش‌های کنترلی

معیارسنجش	مانور پیچشی [۱۰]	لایه مرزی ثابت [۱]	لایه مرزی تطبیقی
سیگنال کنترل	$-50 < \delta_q < 10$	$-50.3 < \delta_q < -9.3$	$-86.2 < \delta_q < 26.2$
انتگرال خطای مطلق	---	0.5045	0.3468

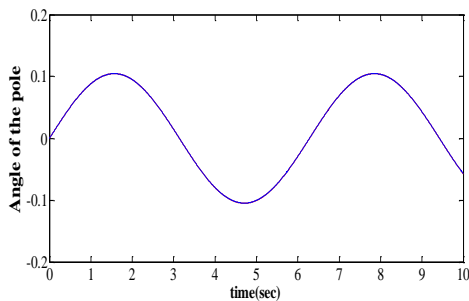




شکل ۷-ب: پارامتر بازگشتی با روش لایه مرزی تطبیقی



شکل ۷-ج: خطای ردیابی با روش لایه مرزی تطبیقی



شکل ۸ الف: ردیابی حالات با روش لایه ثابت

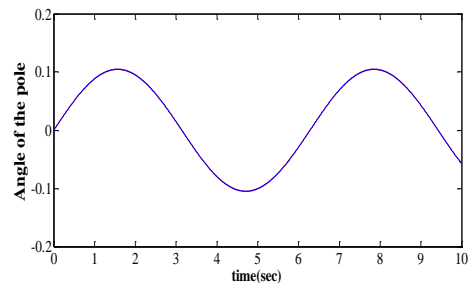
در مثال بعدی پاندول معکوس در نظر گرفته می شود تا اعتبار روش پیشنهاد شده بررسی شود. ما برای این مثال  $v=100$  در نظر می‌گیریم. دوباره تابع موجکی کلاه مکزیکی  $\psi(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$  را به عنوان تابع پایه‌ای شبکه موجکی انتخاب می‌شود. براساس مجموعه داده‌های  $\alpha_d$ ، پارامترهای اتساع و انتقال،  $k \in j \in \{-10, \dots, 10\}$ ، انتخاب می‌شوند. و همچنین روش‌هایی که گفته شد را با هم مقایسه می‌کنیم.

مثال ۲: معادلات دینامیکی سیستم پاندول معکوس را در نظر بگیرید:

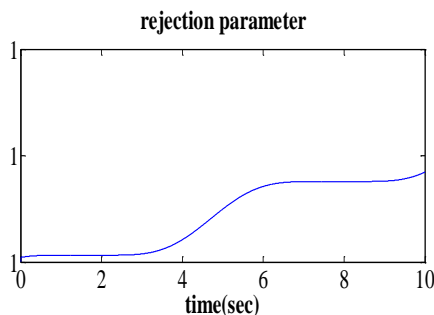
$$\ddot{x} = \frac{g \sin(x) - m l \dot{x}^2 \cos(x) \sin(x)}{m + m_c} + \left( \frac{\cos(x)}{m + m_c} \right) u$$

$$l \left( \frac{4}{3} \frac{m \cos(x)^2}{m + m_c} \right)$$

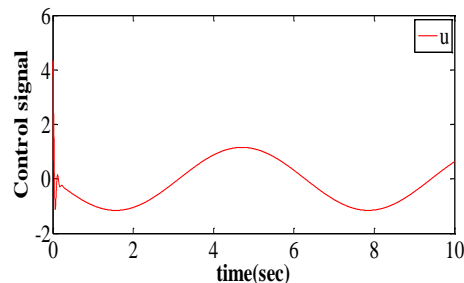
که در آن  $m=0.05\text{kg}$  و  $m_c = 1\text{kg}$ ،  $g=9.8\text{m/s}^2$  به ترتیب شتاب گرانش زمین، جرم ارابه و جرم دسته ارابه می‌باشند و  $l=0.5\text{m}$  طول نصف دسته ارابه است. هدف کنترل این است که حالات سیستم ورودی دلخواه  $x_d = (\pi/30)\sin(t)$  را ردیابی کند. مقادیر اولیه پارامترهای متعاقب را به صورت  $T(0)=10$  و  $x(0)=0.05$ ،  $\dot{x}(0) = 0.05$ ،  $\delta(0)=1$ ،  $\sigma(0)=1$  انتخاب می‌کنیم. نتایج شبیه سازی در شکل های ۷ و ۸ نشان داده می‌شود.



شکل ۷-الف: ردیابی حالت با روش لایه مرزی تطبیقی



شکل ۸ الف: پارامتر بازگشتی با روش لایه ثابت



شکل ۷-ب: سیگنال کنترل u با روش لایه مرزی تطبیقی

حاصل از شبکه موجکی و پهنای شکست فرکانس مستقل از دانش سیستمی تنظیم می‌شوند. مساله چترینگ رخ نمی‌دهد و هزینه کنترل نسبت به روش های دیگر کمتر است. عملیات ردیابی در بهترین زمان ممکن اجرا می‌شود. مثال‌های شبیه سازی نحوه اجرای ردیابی و فواید روش به کار گرفته شده را بررسی می‌کنند.

### ۶- ضمایم

**قضیه ۱:** سیستم (۱) را در نظر بگیرید. اگر  $\omega_i$  ها ریشه‌های چندجمله‌ای (۲) باشند، فرکانس‌های مدل نشده  $v = \inf\{\sigma, \sigma > 0\}$   $\omega^* = \max\{|\omega_i|, P(\omega_i)=0, \omega_i < 0, i=1,2,\dots,n-1\}$  عدد مثبت حقیقی دلخواه (پارامتر بازگشتی<sup>۱</sup>) باشد طوری که  $\delta < v$  آنگاه با انتخاب  $\omega^* = v - \delta$  و  $k_j < \binom{n-1}{j} (\omega^*)^j$  برای  $j = 1, 2, \dots, n-1$  نتیجه  $\lambda < v$  می‌شود.

**اثبات:** فرض کنید  $s = k^T e = 0$  سطح لغزشی باشد که در فضای خطا می‌گذرد به طوریکه  $k_0 = 1$ ، در غیر این صورت معادله لغزشی بر  $k_0$  تقسیم می‌شود. ضرایب  $k_j$  برای  $j = 1, 2, \dots, n-1$  بایستی طوری انتخاب شوند که ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه معادله لغزشی (۴) یعنی:

$$P(\omega) = \omega^{(n-1)} + k_1 \omega^{(n-2)} + \dots + k_{n-1} \quad (الف)$$

در نیم صفحه چپ باز دستگاه اعداد مختلط قرار بگیرد. با استفاده از روابط شناخته شده بین ضرایب و ریشه‌های این چندجمله‌ای، داریم:

$$k_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \quad (الف ۲)$$

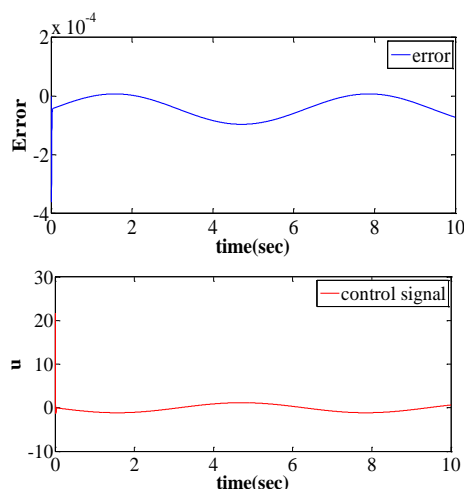
$$k_2 = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n-1} \omega_i \omega_j \quad (الف ۳)$$

$$k_{n-1} = (-1)^{(n-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i \quad (الف ۴)$$

از آنجایی که  $\omega^* = \max\{|\omega_i|, P(\omega_i)=0, \omega_i < 0, i=1,2,\dots,n-1\}$  بنابراین:

$$k_1 \leq \binom{n-1}{1} (\omega^*) \quad (الف ۵)$$

$$k_2 \leq \binom{n-1}{2} (\omega^*)^2 \quad (الف ۶)$$



شکل ۸ ب: خطای ردیابی و کنترل  $u$  با لایه ثابت

شکل ۷-الف ۱ و ۲ نشان می‌دهد که حالت می‌تواند مسیر دلخواه را سریعتر از روش با لایه مرزی ثابت ردیابی می‌کند. پدیده چترینگ در سیگنال کنترل رخ نمی‌دهد. تاثیر فرکانس‌های مدل نشده بر روند کنترل حذف می‌شود. هزینه کنترل از روش دیگر کمتر است. سیگنال کنترل به صورت  $-1.8 < u < 5.8$  کراندار است در حالی که با روش لایه مرزی ثابت این بازه به صورت  $-1.5 < u < 25$  است. شکل ۷-ب و ج به ترتیب تغییرات پارامترهای بازگشتی جهت به روز کردن تابع لغزشی متغیر با زمان و پارامتر لایه مرزی را نشان می‌دهند. شکل ۷-ج نشان می‌دهد که خطای ردیابی برای همیشه به صفر همگراست. اشکال ۸-الف ۱ و ۲، به ترتیب ردیابی حالت و پارامتر بازگشتی و همچنین شکل ۸-ب، خطای ردیابی و سیگنال کنترل را در شرایطی نشان می‌دهند که لایه مرزی ثابت است. از اینرو می‌توان به راحتی تاثیر ثابت بودن لایه مرزی در مقایسه با تطبیقی بودن آن را تحقیق کرد.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روش «کنترل مدلفزشی موجکی با لایه مرزی تطبیقی مبتنی بر تابع لغزشی متغیر با زمان»، ارائه می‌شود. سطح لغزشی متغیر با زمان همه فرکانس‌های مدل نشده را فیلتر می‌کند. شبکه موجکی بر اساس ویژگی‌های ترکیب و تحلیل چند معیاره به خوبی توابع غیرخطی را تقریب می‌زند. تمام پارامترهای سیستم مثل پارامتر لایه مرزی، پارامترهای

<sup>1</sup> Rejection parameter

و در نتیجه نهایتاً داریم:

$$k_{n-1} \leq (\omega^*)^{n-1} \quad (الف ۷)$$

به عبارت دیگر سطح لغزشی می‌تواند به عنوان زنجیری از  $(n-1)$  تا فیلتر پایین‌گذر در نظر گرفته شود.

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = k^T e \quad (الف ۸)$$

معادلات:

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (\lambda)^j e^{(n-j-1)t} = e^{(n-1)t} + k_1 e^{(n-2)t} + \dots + k_{n-1} e \quad (الف ۹)$$

که در آن  $k_j = \binom{n-1}{j} (\lambda)^j$  برای  $j=1, \dots, n-1$ .

معادلات (الف ۲) تا (الف ۷) نتیجه می‌شود:

$$\binom{n-1}{j} (\lambda)^j < \binom{n-1}{j} (\omega^*)^j, \quad j=1, \dots, n-1 \quad (الف ۱۰)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\lambda \leq \omega^* \quad (الف ۱۱)$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

**قضیه ۲:** سیستم غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید. اگر مقادیر  $F, G, D$  و توابع  $M(x, \delta)$  و  $G_L$  همانند فوق تعریف شوند و سطح لغزشی  $s = \sum_{j=0}^{n-1} R_j^n(\delta(t)) e^{(n-j-1)t}$  باشد، آنگاه قانون

کنترل به صورت

$$u = \hat{g}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} - T \operatorname{sgn}(s) \right) \quad (الف ۱۲)$$

که در آن:

$$T \geq \frac{\hat{g}(\bar{x})}{G_L(\bar{x})} \left[ F + \frac{(M(\bar{x}, \delta) + |\hat{f}(\bar{x})|)G}{\hat{g}(\bar{x})} + D + \eta \right] \quad (الف ۱۳)$$

شرط لغزشی  $\dot{s} \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta$  را تضمین می‌کند [۲۲].

**اثبات:** معادله لغزشی زیر را در نظر بگیرید:

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j-1)t} = e^{(n-1)t} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j-1)t} \quad (الف ۱۴)$$

پس بدست می‌آید:

$$\dot{s} = e^{(n-1)t} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \quad (الف ۱۵)$$

یا

$$\begin{aligned} \dot{s} &= x^{(n)} - x_d^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \\ &= f + g[\hat{g}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \right)] \end{aligned} \quad (الف ۱۶)$$

$$-g\hat{g}^{-1}T \operatorname{sgn}(s) - x_d^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} + d$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \Delta f - (g\hat{g}^{-1} - 1)\hat{f} + \\ & (g\hat{g}^{-1} - 1) \left( x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \right) \end{aligned} \quad (الف ۱۷)$$

$$-g\hat{g}^{-1}T \operatorname{sgn}(s) + d$$

از (الف ۱۳) و (الف ۱۷) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{s} \operatorname{sgn}(s) &= [\Delta f - (g\hat{g}^{-1} - 1)\hat{f} + (g\hat{g}^{-1} - 1) \\ & \left( x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \right) + d] \operatorname{sgn}(s) - g\hat{g}^{-1}T \leq [\Delta f \end{aligned}$$

$$-(g\hat{g}^{-1} - 1)\hat{f} + (g\hat{g}^{-1} - 1) \left( x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \right)] \quad (الف ۱۸)$$

$$+ d] \operatorname{sgn}(s) - \frac{\hat{g}}{G_L} \left[ F + \frac{(M + |\hat{f}|)G}{\hat{g}} + D + \eta \right]$$

به عبارت دیگر از فرض ۱، داریم:

$$\frac{\hat{g}}{G_L} \geq 1, \quad |g\hat{g}^{-1} - 1| \leq G\hat{g}^{-1} \quad (الف ۱۹)$$

با استفاده از نامساوی‌های (الف ۱۹) و روابط (۶) داریم:

$$\dot{s} \operatorname{sgn}(s) \leq |\Delta f| + G\hat{g}^{-1} \left( \left| x_d^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} R_j^n(\delta) e^{(n-j)t} \right| + |\hat{f}| \right)$$

$$+ |d| - \left( F + \frac{(M + |\hat{f}|)G}{\hat{g}} + D + \eta \right) \leq -\eta \quad (الف ۲۰)$$

و این اثبات را تمام می‌کند.

**لم ۱:** اگر  $\delta$  و  $R_j^n(\delta)$  به ترتیب پارامترهای بازگشتی و تنظیم کننده بازگشتی باشند، آنگاه [۲۶]:

$$\frac{\partial^k}{\partial \delta^k} R_j^n(\delta) = (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} R_{j-k}^{n-k}(\delta) \quad (الف ۲۱)$$

اثبات: اثبات با روش استقرا:

فرض کنید  $k=1$  پس داریم:

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} \eta_2 s W u, & \text{if } (\|\theta_g\| < M_g) \text{ or} \\ & (\|\theta_g\| = M_g, (s W^T \theta_f \leq 0)) \\ P_g, & \text{if } (\|\theta_g\| = M_g \text{ and } (s W^T \theta_g > 0)) \end{cases} \quad (\text{الف } ۲۴)$$

که در آن  $P_f$  و  $P_g$  عملگرهای تصویری  $\theta_f$  و  $\theta_g$  هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P_f = \eta_1 s W - \frac{\eta_1 s W^T \theta_f}{\|\theta_f\|^2} \theta_f, \quad \eta_1 > 0 \quad (\text{الف } ۲۵)$$

$$P_g = \eta_2 s W u - \frac{\eta_2 s u W^T \theta_g}{\|\theta_g\|^2} \theta_g, \quad \eta_2 > 0 \quad (\text{الف } ۲۶)$$

$$\dot{\sigma} = \eta_3 \frac{s T}{\sigma} \tanh(\sigma, s), \quad \eta_3 > 0 \quad (\text{الف } ۲۷)$$

$$\dot{\delta} = \eta_4 \operatorname{sgn}(s) \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)}, \quad \eta_4 > 0 \quad (\text{الف } ۲۸)$$

آنگاه خطای ردیابی به طور مجانبی به صفر همگراست. اثبات: تابع لیاپونوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(s, \theta_f, \theta_g, t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\eta_1} \theta_f^T \theta_f + \frac{1}{2\eta_2} \theta_g^T \theta_g + \frac{1}{2\eta_3} \sigma^2 \quad (\text{الف } ۲۹)$$

با مشتقگیری از معادله (الف ۲۹) بر حسب زمان داریم:

$$\dot{V}(s, \theta_f, \theta_g, t) = s\dot{s} + \frac{1}{\eta_1} \theta_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\eta_2} \theta_g^T \dot{\theta}_g + \frac{1}{\eta_3} \sigma \dot{\sigma} \quad (\text{الف } ۳۰)$$

مقدار  $\dot{V}$  را جایگذاری کنید:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(\theta_f^T W + \theta_g^T W u + \varepsilon(t) - (n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)}) \\ &+ T \tanh(\sigma, s) + \frac{1}{\eta_1} \theta_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\eta_2} \theta_g^T \dot{\theta}_g + \frac{1}{\eta_3} \sigma \dot{\sigma} = \\ &\theta_f^T \left( s W + \frac{1}{\eta_1} \dot{\theta}_f \right) + \theta_g^T \left( s W u + \frac{1}{\eta_2} \dot{\theta}_g \right) \end{aligned} \quad (\text{الف } ۳۱)$$

$$-s(n-1)\delta \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} + s\varepsilon(t)$$

$$+ \left( \frac{1}{\eta_3} \sigma \dot{\sigma} + T \tanh(\sigma, s) \right)$$

طبق شرایط تابع لیاپونوف، قوانین تطبیقی  $\dot{\delta}$  و  $\dot{\sigma}$  باید طوری تعیین شوند که  $\dot{V} < 0$  برقرار شود. برای این منظور اگر

$$\dot{\delta} = \eta_4 \operatorname{sgn}(s) \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} \quad (\text{الف } ۳۱)$$

همیشه منفی باید باشد. و اگر جمله آخر (الف ۳۱) یعنی

$$\dot{\sigma} = \eta_3 \frac{s T}{\sigma} \tanh(\sigma, s)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} R_j^n(\delta) &= \frac{\partial}{\partial \delta} \binom{n-1}{j} (v-\delta)^j = -j \binom{n-1}{j} (v-\delta)^{j-1} \\ &= -j \left( \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} \right) (v-\delta)^{j-1} \\ &= -\frac{(n-1)(n-2)!}{(j-1)!(n-2-j+1)!} (v-\delta)^{j-1} \\ &= -(n-1) \binom{n-2}{j-1} (v-\delta)^{j-1} = -(n-1) R_{j-1}^{n-1}(\delta). \end{aligned}$$

بنابراین معادله (الف ۲۱) برای  $k=1$  برقرار است. با در نظر گرفتن فرض استقرای یعنی اگر  $k=p$ :

$$\frac{\partial^p}{\partial \delta^p} R_j^n(\delta) = (-1)^p \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} R_{j-p}^{n-p}(\delta) \quad (\text{الف } ۲۲)$$

حکم را برای  $k=p+1$  اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+1}}{\partial \delta^{p+1}} R_j^n(\delta) &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{\partial^p}{\partial \delta^p} R_j^n(\delta) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{(-1)^p (n-1)!}{(n-p-1)!} R_{j-p}^{n-p}(\delta) \right) \\ &= (-1)^p \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} \frac{\partial}{\partial \delta} \binom{n-p-1}{j-p} (v-\delta)^{j-p} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} (j-p) \frac{(n-p-1)(v-\delta)^{j-p-1}}{(j-p)!(n-p-1-j+p)!} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{(n-1)!(n-p-1)}{(n-p-1)!} \cdot \frac{(n-p-2)!(v-\delta)^{j-p-1}}{(j-p-1)!(n-p-2-(j-p-1))!}. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial \delta^{p+1}} R_j^n(\delta) = (-1)^{p+1} \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} R_{j-(p+1)}^{n-(p+1)}(\delta)$$

اثبات تمام است.

**قضیه ۳:** سیستم غیرخطی (۱) و سطح لغزشی (۱۵) را در نظر بگیرید. اگر کنترل (۱۹) را بکار بگیریم و تقریب های موجکی  $\hat{f}$  و  $\hat{g}$  از توابع  $f$  و  $g$  و پارامترهای  $\delta$ ،  $\sigma$ ،  $\theta_f$  و  $\theta_g$  بوسیله قوانین تطبیقی (الف ۲۳) - (الف ۲۸) یعنی:

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} \eta_1 s W, & \text{if } (\|\theta_f\| < M_f) \text{ or} \\ & (\|\theta_f\| = M_f, (s W^T \theta_f \leq 0)) \\ P_f, & \text{if } (\|\theta_f\| = M_f \text{ and } (s W^T \theta_f > 0)) \end{cases} \quad (\text{الف } ۲۳)$$

Trans Fundamentals 91-A(2): 686–691.

[5] Turner MC, Bates DG (2007) Mathematical methods for robust and non-linear control. Springer Berlin Heidelberg New York.

[6] Kung CC, Chen TH, Kung LH (2005) Modified adoptive fuzzy sliding mode controller for uncertain nonlinear systems. IEJCE Trans Fundamentals 88-A(5): 1328–1334.

[7] Tzafestas SG, Rigatos GG (1999) Design and stability analysis of a new sliding-mode fuzzy logic controller of reduced complexity. Machine Intelligence and Robotic Control 1(1): 27–41.

[8] Babuska R, Verbruggen H (2003) Neuro-fuzzymethod for non-linear system identification. Annual Review in Control 27: 73–85.

[9] Ho HF, Wong YK, Rad AB (2009) Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear SISI systems. Simulation Modeling Practice and Theory 17: 1199–1210.

[10] Hsu CF, Lee TT, Lin CM, Chen LY (2004) Robust neuro-fuzzy controller design via sliding-mode approach. IEEE Proceeding of the Budapest, Hungary Conference. July: 917–922.

[11] Lee H, Kim F, Kang HJ (2001) A new sliding-mode control with fuzzy boundary layer. Fuzzy Sets and Systems 120: 135–143.

[12] Wang CH, Lin TC, Lee TT, Liu HL (2002) Adaptive hybrid intelligent control for uncertain non-linear dynamical systems. IEEE Transaction on System, Man, and Cybernetics 32(5): 583–597.

[13] Chen FC, Liu CC (1994) Adaptively controlling nonlinear continuous-time systems using multilayer neural networks. IEEE Trans Automat Contr 39: 1306–1310.

[14] Yesidirek A, Lewis FL (1995) Feedback linearization using neural networks. Automatica 31: 1659–1664.

[15] Polycarpou MM, Ioannou PA (1992) Modeling, identification and stable adaptive control of continuous-time nonlinear dynamical system using neural networks. in Proc Am Contr Conf, Chicago, IL: 36–40.

[16] Wang LX (1994) Adaptive fuzzy systems and control: design and analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[17] Spooner JT, Passino KM (1996) Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks. IEEE Trans Fuzzy Syst 4: 339–359.

[18] Ge SS, Lee TH, Harris CJ (1998) Adaptive neural network control of robotic manipulators. London, U.K.: World Scientific.

[19] Wang LX (1994) Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall.

الف)  $\dot{\theta}_g = -\dot{\theta}_{\bar{g}}$  و  $\dot{\theta}_f = -\dot{\theta}_{\bar{f}}$  اگر قوانین تطبیقی به صورت (الف) (۲۳) و (الف) (۲۴) انتخاب کنیم آنگاه جملات اول و دوم برابر صفر خواهد شد. لذا معادله (الف) (۳۱) به صورت نامساوی زیر تبدیل خواهد شد:

$$\dot{V} \leq -|s|(n-1) \left[ \sum_{j=1}^{n-1} R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)} \right]^2 + |s||\varepsilon(t)| \quad \text{(الف) (۳۲)}$$

اگر  $\bar{e}(0)$  کراندار باشد آنگاه طبق قضیه ۱ چون چندجمله‌ای مشخصه  $Hurwitz$  کراندار است، بنابراین  $\sum_{j=1}^{n-1} R_j^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)}$  کراندار است. با فرض اینکه  $|R_{j-1}^{n-1}(\delta) e^{(n-j-1)}| \leq \frac{M_\delta}{\sqrt{n-1}}$  رابطه‌ی (الف) (۳۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V} \leq -|s|M_\delta^2 + |s||\varepsilon(t)| \quad \text{(الف) (۳۳)}$$

با انتگرالگیری از دو طرف رابطه (الف) (۳۳) و برخی مقیاس کردن، بدست می‌آید:

$$V(t) - V(0) \leq -M_\delta^2 \left( \int_0^t |s(\tau)| d\tau \right) + |s| \int_0^t |\varepsilon(\tau)| d\tau \quad \text{(الف) (۳۴)}$$

طبق قضیه تقریب عمومی و فرض کراندار بودن اختشاشات خارجی،  $x$  کراندار است اگر  $\varepsilon \in L^1$  بنابراین از (الف) (۳۴) نتیجه می‌شود  $s \in L^1$ . با این حال قوانین تطبیقی در (الف) (۲۳) و (الف) (۲۴) تضمین می‌کنند که  $\theta_f \in \Omega_f$  و  $\theta_g \in \Omega_g$  این موضوع تلویحا بیان می‌دارد که همه متغیرهای سمت راست (۲۴) کراندارند و لذا  $s \in L^\infty$ . با توجه به لم باربالات [۵] داریم که  $\lim_{t \rightarrow \infty} |s| = 0$ . از معادله (الف) (۳۴) نتیجه می‌شود که  $s \varepsilon$  از درجه خطای مینیمم  $\varepsilon$  است. اگر  $\varepsilon = 0$  واضح است که  $\dot{V} \leq -|s|M_\delta^2 < 0$  اما چنانچه  $\varepsilon \neq 0$  آنگاه  $\lim_{t \rightarrow \infty} |s| = 0$  ایجاب می‌کند که  $\dot{V} \leq 0$ . این اثبات را کامل می‌کند.

## منابع

[1] Astrom KJ, Wittenmark B (1995) Adaptive control. Addison Wesley.

[2] Gang F (2006) A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14(5): 676–697.

[3] Sastry SS, Isidori A (1989) Adaptive control of linearizable systems. IEEE Trans Automat Contr 34: 1123–1131.

[4] Chang KY, Lin HJ, Cheng TL (2008) Sliding mode controller design with  $H_\infty$  norm and variance constraints for bilinear stochastic systems. IEICE

- layer via time-variant sliding function. IJIFS Jurnal, In print.
- [24] Schumache DA (1994) Tactical missile autopilot design using nonlinear control. Thesis & Dissertation, The university of Michigan.
- [25] SlotineJJ, Li V (1991) Applied non-linear control. Englewood Cliffs. NJ.
- [26] Chui CK (1992) An introduction to wavelets, Academic press.
- [27] Delyon B, Juditsky A, Benveniste A (1995) Accuracy analysis for wavelet approximations. IEEE Trans Neural Netw 6(2): 332–348.
- [20] Srivasiava S, Singh M, Hanmandlu M, Jha AN (2005) New fuzzy wavelet neural networks for system identification and control. Applied Soft Computing 6: 1–17.
- [21] Phan PA, Gale TJ (2008) Direct adaptive fuzzy control with a self-structuring algorithm. Fuzzy Sets and Systems 159: 871–899.
- [22] Yarahmadi M, Karbasi SM, Mirzaii A (2010) Robust wavelet sliding-mode control via time-variant sliding function. IEICE Trans Fundamentals 93-A(6): page 1181.
- [23] Yarahmadi M, Karbasi SM, Mirzaii A (2014) Indirect fuzzy sliding-mode with varying boundary