



## جاب‌جایی‌ها و تنش‌ها در پوسته‌های استوانه‌ای توخالی جدار ضخیم چرخان FGM تحت فشار به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم

مهدی قنّاد<sup>۱</sup> و حامد قارونی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۲/۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۳/۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۵/۱۳

### چکیده

در این مقاله به‌منظور تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، تشکیل شده از مواد متغیّر تابعی (FGM)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FGM تحت فشار در حالت متقارن محوری به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم (TSDT) استخراج و حلّ عمومی آنها برای شرایط انتهایی دوسر گیردار ارائه شده است. سپس با انجام مطالعه موردی و همچنین ارائه یک حلّ عددی، توزیع جاب‌جایی و تنش حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی مقایسه شده‌اند. جنس استوانه، ماده ناهمگن و همسانگرد با تغییرات خواص مکانیکی، شامل مدول کشسانی و چگالی در راستای شعاعی به‌صورت توانی و نسبت پواسون ثابت می‌باشد. در ادامه تأثیر سرعت چرخش استوانه بر مقادیر جاب‌جایی و تنش بررسی شده است. سپس به‌منظور بررسی تأثیر افزایش مرتبه تئوری تغییرشکل برشی بر مقادیر جاب‌جایی و تنش، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم انجام گرفته است.

**کلمات کلیدی:** پوسته‌های استوانه‌ای توخالی؛ استوانه‌های چرخان؛ تئوری تغییرشکل برشی؛ FGM؛ روش اجزای محدود.

## Displacements and stresses in rotating FGM pressurized thick hollow cylindrical shells based on TSDT

M. Ghannad<sup>1</sup>, H. Gharooni<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Assist. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

<sup>2</sup> PhD. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

### Abstract

In this paper, for investigating elastic analysis of cylindrical shells made up of functionally graded materials (FGMs), by deriving the governing differential equations of axisymmetric rotating FGM thick hollow cylinder under pressure based on third-order shear deformation theory (HSDT), general solution of cylinder under clamped-clamped boundary conditions have been conducted. Afterwards, by doing the case study and a numerical solution, displacement and stress distributions resulted from analytical solution based on third-order shear deformation theory with the results of numerical modeling have been compared. The material of the cylinder is assumed to be isotropic heterogeneous with radially varying mechanical properties (including elastic modulus and density) continuously along the thickness with a power function and constant Poisson's ratio. Furthermore, the effect of angular speed on displacement and stress values has been studied. Finally, for investigating the effect of higher order approximations on displacements and stresses, a comparison between the results of first and third-order shear deformation theory have been studied.

**Keywords:** Hollow cylindrical shells; Rotating cylinders; Shear deformation theory; FGM; FEM.

\* نویسنده مسؤول؛ تلفن: ۰۹۱۵۳۰۵۶۹۹۵

آدرس پست الکترونیک: [gharooni.hamed@gmail.com](mailto:gharooni.hamed@gmail.com)

## ۱- مقدمه

از میان انواع سازه‌های پوسته‌ای، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و جدار ضخیم، کاربرد و اهمیت بیشتری دارند. در بدنه بسیاری از سازه‌های صنعتی مانند: هواپیماها، شاتل‌ها، زیردریایی‌ها و ... به دلیل حساسیت کاربرد و نیز به‌منظور کاهش تمرکز تنش و وزن سازه، از مواد مرکب و متغیر تابعی استفاده می‌شود. مقاومت منحصر به‌فرد استوانه‌های جدار ضخیم FGM<sup>۱</sup> در برابر بارهای مکانیکی و حرارتی، دانش-پژوهان را وادار کرده تا با اعمال تغییرات بر روی جداره و ماده این دسته از پوسته‌ها، به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی بالا نیاز دارند، بپردازند. در زمینه تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FG تحت بارهای مکانیکی مطالعات متعددی انجام شده است.

نخستین بار میرسکی و هرمان<sup>۲</sup> در ۱۹۵۸ [۱] با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول (FSDT)<sup>۳</sup>، حلّ پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم از مواد همگن و همسانگرد را ارائه کردند. ردی و لیو<sup>۴</sup> در سال ۱۹۸۵ [۲] تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا را برای پوسته‌ها با فرض توزیع سهموی کرنش‌های برشی در راستای ضخامت پوسته‌ها ارائه کردند؛ که ضمن دارا بودن تعداد مجهولات وابسته یکسان با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، به ضریب تصحیح برشی نیز نیاز ندارد. گرینسپن<sup>۵</sup> [۳] نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را مقایسه کرده است. فوکوهی و یاماناگا<sup>۶</sup> [۴] معادلات حاکم بر یک لوله جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را با استفاده از حلّ ناویر<sup>۷</sup> به‌دست آوردند و معادلات حاصل را به کمک روش رانگ-کوتا به‌صورت عددی حل کردند. سیمکینز<sup>۸</sup> [۵] با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، جابه‌جایی‌ها در یک لوله بلند و ضخیم تحت بارهای متحرک را به‌دست آورد. ایپک‌چی و همکاران در سال ۲۰۰۳ [۶] معادلات استوانه‌های همگن و

همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات<sup>۹</sup> حل کردند. ایشان در ۲۰۰۸ [۷] معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه دوم، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کردند. هونگ‌جون<sup>۱۰</sup> و همکاران [۸] حلّ دقیق استوانه توخالی FGM را با تغییرات نمایی مدول کشسانی در راستای شعاعی با لایه‌های همگن ارائه کردند. ژیفای<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹] با در نظر گرفتن تغییرات مدول کشسانی به‌صورت توانی و خطی، استوانه FGM را با روش چندلایه‌ای کردن، تحلیل کردند. توتونچو<sup>۱۲</sup> در ۲۰۰۷ [۱۰] تحلیل استوانه FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع نمایی مدول کشسانی به کمک سری فریبینوس ارائه کرد.

قنّاد و همکاران در ۲۰۱۰ [۱۱] حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM را بر مبنای نظریه الاستیسیته مستوی<sup>۱۳</sup> در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه بسته ارائه کردند. آنها در همان سال [۱۲] حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM را بر مبنای نظریه تغییرشکل برشی، ارائه و نتایج آن را با حلّ تئوری الاستیسیته مستوی مقایسه نمودند. زمانی‌نژاد و همکاران [۱۳] با ارائه دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النهاری را بررسی کردند. زمانی‌نژاد و رحیمی [۱۴] جابه‌جایی و تنش در استوانه‌های جدار ضخیم FGM چرخان تحت بارگذاری حرارتی را محاسبه کرده‌اند. قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۵] با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حل نمودند. در سال ۲۰۱۰ ایپک‌چی [۱۶] تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار داخلی نایکنواخت را به روش تحلیلی با استفاده از تئوری تغییرشکل

1. Functionally Graded Material (FGM)
2. Mirsky & Hermann
3. First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
4. Reddy & Liu
5. Greenspon
6. Fukui & Yamanaka
7. Navier solution
8. Simkins

9. Perturbation theory

10. Hongjun

11. Zhifei

12. Tutuncu

13. Plane Elasticity Theory (PET)

نتایج حاصل از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه‌های اول و سوم انجام گرفته است.

## ۲- روابط اساسی

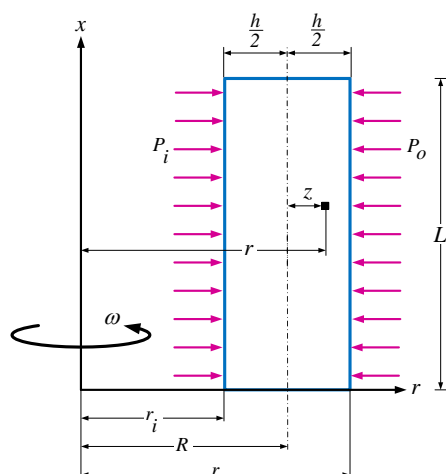
در نظریه تغییرشکل برشی، خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، راست باقی می‌مانند، ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی لحاظ می‌شوند.

مطابق شکل ۱، فاصله هر نقطه از پوسته استوانه‌ای از محور تقارن ( $r$ ) برابر با مجموع شعاع صفحه میانی ( $R$ ) و فاصله آن نقطه از صفحه میانی ( $z$ ) در نظر گرفته می‌شود.

$$r = R + z, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (1)$$

همچنین ضخامت  $h$  و طول استوانه می‌باشد.

$$h = r_o - r_i, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2)$$



شکل ۱- مقطع طولی از پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار و چرخش

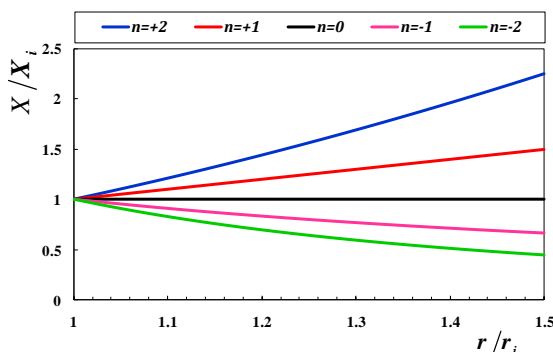
میدان جابه‌جایی به صورت یک چندجمله‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابعی از متغیر ( $z$ ) در راستای جداره استوانه می‌باشد. هرچه تعداد جملات چندجمله‌ای بیشتر باشد، تقریب مربوط به حل تحلیلی بهبود می‌یابد.

بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم، مؤلفه‌های محوری و شعاعی میدان جابه‌جایی برای استوانه جدار ضخیم در حالت متقارن محوری عبارتست از [۱۶]:

برشی محاسبه کرده است. قنّاد و قارونی در ۲۰۱۲ [۱۷] حل تحلیلی استوانه چرخان تحت فشار داخلی ساخته شده از مواد FG با تغییرات نمایی مدول کشسانی و چگالی را برای شرایط مرزی دوسر گیردار در حالت متقارن محوری به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول ارائه نمودند. آنها در همان سال [۱۸] تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را در استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا (HSDT)<sup>۱</sup> بررسی کردند. قنّاد و همکاران در سال ۲۰۱۳ [۱۹] تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار متغیر FGM تحت فشار را بررسی کردند. آنها با استفاده از تئوری اغتشاشات، معادلات حاصل را به یک دستگاه معادلات جبری و دو دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل کردند.

بیشتر مقالاتی که تاکنون در زمینه تحلیل استوانه‌های ساخته شده از مواد FG به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌های پایین ارائه شده‌اند، این نکته را نشان می‌دهند که تئوری‌های مرتبه پایین، دارای دقت مطلوب به‌ویژه در زمینه پیش‌بینی توزیع تنش‌ها نمی‌باشند. استفاده از روش‌های دیگر مانند الاستیسیته مستوی نیز به دلیل چشم‌پوشی از تنش‌ها و کرنش‌های برشی، دارای نتایج قابل قبول نمی‌باشند. در این مقاله سعی شده است که با استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای FGM در حالت متقارن محوری با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم (TSDT)<sup>۲</sup> و ارائه یک حل تحلیلی، ضمن افزایش دقت نتایج در مورد تنش‌ها، توزیع جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در استوانه چرخان تحت فشار برای شرایطی که تنش برشی ایجاد می‌شود، به دست آورده شود و نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی به کمک نرم‌افزار انسیس<sup>۳</sup> مقایسه شود. خواص مکانیکی ماده تشکیل‌دهنده استوانه، به صورت تابع توانی در جهت شعاع استوانه در نظر گرفته شده و نسبت پواسون نیز به دلیل کوچکی تغییرات آن، ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین تأثیر به‌کارگیری ماده FG با ضرایب ناهمگنی متفاوت بر رفتار پوسته استوانه‌ای در مقابل فشار و سرعت دورانی بررسی شده است. سرانجام مقایسه‌ای بین

1. High-order Shear Deformation Theory (HSDT)
2. Third-order Shear Deformation Theory (TSDT)
3. ANSYS



شکل ۲- توزیع بی‌بعد خواص ماده ناهمگن در راستای شعاعی

با جایگذاری متغیر  $(z)$  با استفاده از رابطه (۱) به جای متغیر  $r$  در روابط (۵):

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i^n} (R+z)^n \quad (۶ \text{ الف})$$

$$\rho(z) = \frac{\rho_i}{r_i^n} (R+z)^n \quad (۶ \text{ ب})$$

بر اساس معادلات ساختاری، تنش‌ها برحسب مقادیر کرنش برای مواد ناهمگن و همسانگرد عبارتند از [۱۶]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت‌های لامه می‌باشند. با توجه به تغییرات مدول الاستیسیته در سازه‌های FG، این دو پارامتر به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\lambda = \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۸)$$

$$\mu = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (۹)$$

نیروهای محوری برحسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z (1+z/R) \end{Bmatrix} dz \quad (۱۰)$$

لنگرهای خمشی برحسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z (1+z/R) \end{Bmatrix} z dz \quad (۱۱)$$

$$\begin{cases} U_x = u_0(x) + zu_1(x) + z^2u_2(x) + z^3u_3(x) \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w_0(x) + zw_1(x) + z^2w_2(x) + z^3w_3(x) \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن عبارات  $u_i(x)$  و  $w_i(x)$  مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بوده که مجهول می‌باشند.

مقادیر کرنش‌ها بر اساس معادلات سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از [۱۲]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx}z + \frac{du_2}{dx}z^2 + \frac{du_3}{dx}z^3 \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w_0 + w_1z + w_2z^2 + w_3z^3}{R+z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = w_1 + 2w_2z + 3w_3z^2 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(u_1 + \frac{dw_0}{dx}\right) + \left(2u_2 + \frac{dw_1}{dx}\right)z + \left(3u_3 + \frac{dw_2}{dx}\right)z^2 + \frac{dw_3}{dx}z^3 \end{cases} \quad (۴)$$

خواص ماده ناهمگن و همسانگرد (FGM) شامل مدول کشسانی  $E$  و چگالی  $\rho$  به‌صورت تابعی توانی از مختصات شعاعی  $r$  که به‌صورت  $\bar{r} = r/r_i$  بی‌بعد شده است، در نظر گرفته می‌شود. لذا:

$$E(r) = E_i (\bar{r})^n \quad (۵ \text{ الف})$$

$$\rho(r) = \rho_i (\bar{r})^n \quad (۵ \text{ ب})$$

که در این روابط  $E_i$  و  $\rho_i$  به‌ترتیب مدول کشسانی و چگالی لایه داخلی استوانه و  $n$  نیز ثابت ناهمگنی ماده آن می‌باشد. به‌طور کلی نسبت پواسون ( $\nu$ ) برای استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار ناهمگن و همسانگرد، دارای تغییرات اندکی است. همچنین تأثیر نسبت پواسون بر تنش‌های مکانیکی بسیار جزئی و قابل صرف نظر کردن است. از این‌رو نسبت پواسون ماده‌ی FG ثابت در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲ توزیع خواص بی‌بعد شده ماده ناهمگن و همسانگرد  $(X/X_i)$  را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در امتداد جداره استوانه به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر می‌باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta U &= R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* (1+z/R) dz dx d\theta \\ \Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} &= R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta \\ &\quad + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) (1+z/R) dz dx \end{aligned} \right. \quad (22)$$

تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه چرخان تحت فشار داخلی و خارجی نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \int_0^{2\pi} (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta \\ &\quad + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)^2 \omega^2 \delta U_z dz dx d\theta \\ \Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} &= \int_0^L [P_i (R-h/2) - P_o (R+h/2)] (\delta w_0 + z \delta w_1 \\ &\quad + z^2 \delta w_2 + z^3 \delta w_3) dx + \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \omega^2 (\delta w_0 \\ &\quad + z \delta w_1 + z^2 \delta w_2 + z^3 \delta w_3) (R+z)^2 dz dx \end{aligned} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۱۸) و به کارگیری اصول حساب وردشی و نیز نوشتن تنش‌ها برحسب کرنش‌ها، به کمک روابط (۴)، (۶) و (۷) و جایگذاری آنها در روابط (۲۲) و (۲۳)، برای یک پوسته استوانه‌ای چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشارهای داخلی و خارجی یکنواخت، معادلات تعادل به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} R \frac{dN_x}{dx} - F_{x_0}^P + F_{x_0}^R &= 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x &= F_{x_1}^P + F_{x_1}^R \\ R \frac{dP_x}{dx} - 2RM_{xz} &= F_{x_2}^P + F_{x_2}^R \\ R \frac{dS_x}{dx} - 3RP_{xz} &= F_{x_3}^P + F_{x_3}^R \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta &= F_{z_0}^P + F_{z_0}^R \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z &= F_{z_1}^P + F_{z_1}^R \\ R \frac{dP_{xz}}{dx} - P_\theta - 2RM_z &= F_{z_2}^P + F_{z_2}^R \\ R \frac{dS_{xz}}{dx} - S_\theta - 3RP_z &= F_{z_3}^P + F_{z_3}^R \end{aligned} \right. \quad (24)$$

که در آن  $F^P$  و  $F^R$  نشان‌دهنده بخش ناهمگن معادلات حاکم می‌باشد که به ترتیب از بارگذاری‌های فشاری و چرخشی ناشی شده‌اند. زیرنویس‌های  $x$  و  $z$  در سمت

لنگرهای خمشی مرتبه بالا برحسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z (1+z/R) \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+z/R) \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (13)$$

نیروی برشی برحسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (1+z/R) dz \quad (14)$$

لنگر پیچشی برحسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (1+z/R) z dz \quad (15)$$

لنگرهای پیچشی مرتبه بالا برحسب تنش برشی برابر است با:

$$P_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (1+z/R) z^2 dz \quad (16)$$

$$S_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (1+z/R) z^3 dz \quad (17)$$

### ۳- اصل کار مجازی

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است.

$$\delta U = \delta W \quad (18)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV, \quad dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار و چرخش:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \iint_S (\overline{f_{sf}} \cdot \overline{u}) dS + \iiint_V (\overline{f_{bf}} \cdot \overline{u}) dV \\ dS &= r dx d\theta, \quad dV = r d\theta dr dx \end{aligned} \right. \quad (20)$$

که در آن  $\overline{f_{sf}}$  و  $\overline{f_{bf}}$  به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی وارد بر استوانه هستند. در استوانه مورد بررسی، نیروهای سطحی شامل فشارهای داخلی  $P_i$  و خارجی  $P_o$  و نیروی حجمی شامل چرخش با سرعت دورانی ثابت  $\omega$  می‌باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} (\overline{f_{sf}} \cdot \overline{u}) dS &= (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta \\ (\overline{f_{bf}} \cdot \overline{u}) dV &= \rho(z)(R+z) \omega^2 U_z dz dx d\theta \end{aligned} \right. \quad (21)$$

(۲۸)، ضمن ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور با انتگرال‌گیری از اولین معادله از سری معادلات (۲۴):

$$RN_x = C_0 \quad (30)$$

در معادلات (۲۸) عبارت  $u_0$  وجود ندارد؛ درحالی‌که  $du_0/dx$  در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن  $du_0/dx$  به‌عنوان پارامتری جدید به نام  $v$  و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات (۲۸) نتیجه می‌شود.

$$u_0 = \int v dx + C_{15} \quad (31)$$

با اعمال تغییرات اشاره شده، بردار مجهول  $\{y\}$  در معادله (۲۸) به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\{y\} = \{v \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ w_0 \ w_1 \ w_2 \ w_3\}^T \quad (32)$$

هم‌چنین بردار ناهمگنی  $\{F\}$  در معادله‌ی (۲۸) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{x_0}^P + F_{x_0}^R + C_0 \\ F_{x_1}^P + F_{x_1}^R \\ F_{x_2}^P + F_{x_2}^R \\ F_{x_3}^P + F_{x_3}^R \\ F_{z_0}^P + F_{z_0}^R \\ F_{z_1}^P + F_{z_1}^R \\ F_{z_2}^P + F_{z_2}^R \\ F_{z_3}^P + F_{z_3}^R \end{array} \right\} \quad (33)$$

ماتریس‌های ضرایب  $[A]$ ،  $[C]$  و  $[B]$  مربوط به دستگاه معادلات (۲۸)، پس از اعمال تغییرات، در پیوست مقاله معرفی شده‌اند. دستگاه معادله (۲۸) پس از اعمال تغییرات اشاره شده، دارای دو حلّ عمومی  $\{y\}_g$  و خصوصی  $\{y\}_p$  می‌باشد.

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (34)$$

برای حلّ عمومی این دستگاه، مقدار  $\{y\}_g = \{V\} e^{mx}$  را در معادلات آن جایگذاری می‌شود.

$$e^{mx} [m^2 [A] + m [B] + [C]] \{V\} = \{0\} \quad (35)$$

با توجه به این‌که  $e^{mx} \neq 0$  است، می‌توان نوشت.

$$[m^2 [A] + m [B] + [C]] = 0 \quad (36)$$

دترمینان فوق، یک چندجمله‌ای برحسب  $m$  از مرتبه شانزده می‌باشد که با حلّ آن، مقادیر ویژه  $(m_i)$  به‌صورت

ناهمگنی معادلات نیز به‌ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های  $F^P$  و  $F^R$  در جهات محوری و شعاعی استوانه می‌باشند.

$$\begin{cases} F_{x_i}^P = 0 \\ F_{z_i}^P = -R f_{sf} z^i (1 + z/R) \Big|_{z=\pm h/2} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (25)$$

$$\begin{cases} F_{x_i}^R = 0 \\ F_{z_i}^R = -\omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^i (R+z)^2 dz \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (26)$$

شرایط مرزی در دو انتهای استوانه، توسط رابطه (۲۷) بیان می‌شود.

$$R [N_x \delta u_0 + M_x \delta u_1 + P_x \delta u_2 + S_x \delta u_3 + Q_x \delta w_0 + M_{xz} \delta w_1 + P_{xz} \delta w_2 + S_{xz} \delta w_3]_{0,L} = 0 \quad (27)$$

روابط (۲۴) همان معادلات اصلی حاکم بر استوانه براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم می‌باشند. رابطه کمکی (۲۷) نیز شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌باید در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

#### ۴- دستگاه معادلات حاکم و روش حلّ

معادلات (۲۴)، یک دستگاه معادله دیفرانسیل است که برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۷) به نتیجه‌های تنش تبدیل کرد و با جایگذاری روابط (۶ الف) و (۶ ب) در رابطه (۷) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۴) برحسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. در نهایت یک دستگاه هشت معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت.

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (28)$$

که در آن  $[A]_{8 \times 8}$ ،  $[C]_{8 \times 8}$  و  $[B]_{8 \times 8}$  ماتریس‌های ضرایب و  $\{F\}$  بردار نیرو می‌باشند که در سمت راست دستگاه معادلات ظاهر شده‌اند. بردار مجهول  $\{y\}$  شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌صورت رابطه زیر است.

$$\{y\} = \{u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ w_0 \ w_1 \ w_2 \ w_3\}^T \quad (29)$$

ماتریس  $[C]$  در دستگاه (۲۸) به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، معکوس‌ناپذیر (منفرد) می‌باشد. با نیاز به معکوس این ماتریس در محاسبه حلّ خصوصی دستگاه معادلات

صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور  $16 \times 16$  می‌باشد. استوانه به شکل یک مستطیل که نشان‌دهنده یک مقطع طولی از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد ناهمگنی خواص که در راستای شعاعی در پوسته استوانه‌ای در نظر گرفته شده، با تقسیم جداره استوانه به تعداد ۲۰ لایه مساوی و نسبت دادن خواص ماده FG شامل مدول کشسانی و چگالی در هر لایه، بسته به فاصله مرکز هر لایه از لایه داخلی به صورت تابع توانی، طبق روابط (۶)، پوسته استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مزر دو لایه در نظر گرفته شده‌اند.

برای اعمال شرایط مرزی در دو انتهای استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو سر استوانه باید مقید شوند، برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی را اعمال کرد. هم‌چنین برای اعمال سرعت دورانی ثابت نیز با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در استوانه، مقدار سرعت در جهت محوری به صورت یک نیروی حجمی اعمال می‌شود.

#### ۶- مطالعه موردی و بررسی نتایج

با توجه به این‌که جملات مربوط به چرخش و فشار در بردار ناهمگن دستگاه معادلات حاکم، ظاهر می‌شوند، می‌توان برای استوانه چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشار یکنواخت با در نظر گرفتن هریک از بارگذاری‌های فشاری و چرخشی به صورت جداگانه، معادلات حاکم را حل کرد و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. درحقیقت بردار ناهمگن  $\{F\}$  در نقش بردار نیرویی ظاهر می‌شود. برای مطالعه موردی یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت تأثیر شرایط انتهایی دوسر گیردار به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر و طول ۸۰۰ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. مدول کشسانی و چگالی در لایه داخلی استوانه، به ترتیب مقادیر  $E_i = 200 \text{ GPa}$  و  $\rho_i = 7860 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته می‌شود. نسبت پواسون

هشت جفت ریشه مزدوج حاصل می‌شوند که یک جفت آن صفر می‌باشد. با قرار دادن مقادیر ویژه غیرصفر حاصل در معادله (۳۵)، بردارهای ویژه  $\{V\}_i$  متناظر با مقادیر ویژه  $(m_i)$  به دست می‌آیند. در نهایت حل عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{14} C_i \{V\}_i e^{m_i x} \quad (37)$$

با توجه به این‌که قسمت ناهمگن معادلات (۳۷) یعنی  $\{F\}$  برای یک استوانه متقارن محوری با ضخامت ثابت دارای سرعت دورانی ثابت و فشار یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از  $x$  نمی‌باشد. بنابراین با معکوس کردن ماتریس  $[C]$  طبق معادله زیر جواب خصوصی به دست می‌آید.

$$[C]\{y\}_p = \{F\} \Rightarrow \{y\}_p = [C]^{-1}\{F\} \quad (38)$$

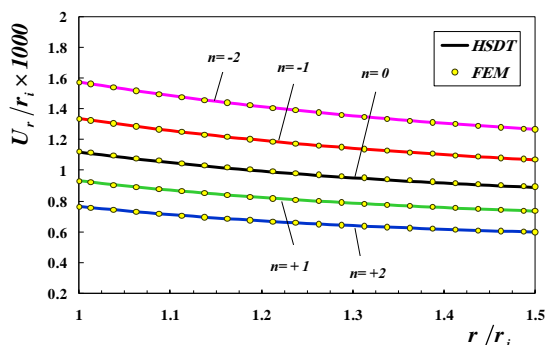
شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه (۲۷) برای پوسته استوانه‌ای مذکور به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \\ x=L \Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \end{cases} \quad (39)$$

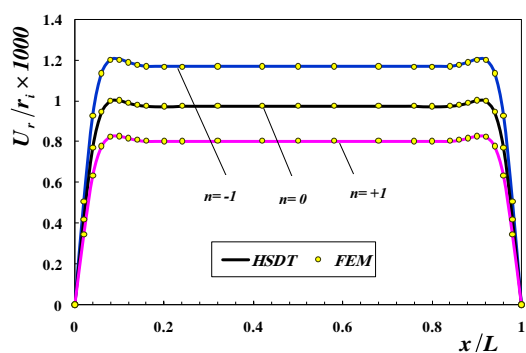
با داشتن چهارده مجهول  $C_1$  تا  $C_{14}$  در جواب عمومی و دو ثابت  $C_0$  و  $C_{15}$  در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه، شامل هشت شرط مرزی در هر تکیه‌گاه، شانزده ثابت مجهول را محاسبه کرد. با به دست آوردن ثابت‌های مجهول، بردار مجهول  $\{y\}$  که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه (۳۴) برحسب متغیرهای  $x$  و  $z$  به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه (۳) می‌توان مقادیر جابه‌جایی شعاعی و محوری را به دست آورد و به کمک روابط (۴) و (۷) نیز توزیع تنش را محاسبه کرد.

#### ۵- نحوه مدل‌سازی استوانه FGM

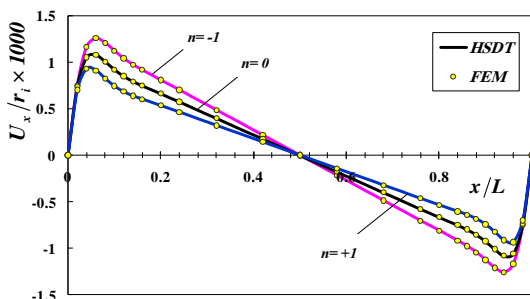
به منظور مدل‌سازی استوانه FG، المان solid از نوع 8node در بسته نرم‌افزاری انسیس، انتخاب شده که حالت تقارن محوری مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان چهارضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره (۴ گره در رؤوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه‌جایی در راستای شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش



شکل ۳- توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه



شکل ۴- توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در لایه میانی استوانه



شکل ۵- توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری در لایه میانی استوانه

شکل ۶ توزیع تنش محیطی را به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف برای استوانه چرخان تحت فشار داخلی در وسط استوانه، نشان می‌دهد. تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی جداره، برای ثابت‌های ناهمگنی منفی، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی کمتر از ماده همگن می‌باشد و برعکس برای ثابت‌های ناهمگنی مثبت در نیمه داخلی کمتر و در نیمه خارجی بیشتر از ماده همگن است. در محدوده‌ای مشخص

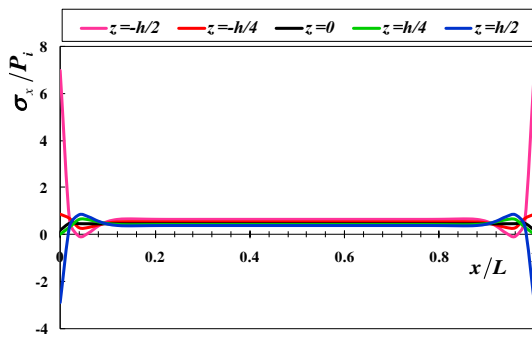
نیز  $\nu = 0.3$  فرض شده است. فشار داخلی استوانه  $P_i = 80 \text{ MPa}$  و سرعت دورانی استوانه برابر با مقدار ثابت  $\omega = 350 \text{ rad/s}$  می‌باشد. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 13 انجام گرفته است.

#### ۱-۶- بررسی اثر ثابت‌های ناهمگنی

در شکل ۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در وسط استوانه نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، جابه‌جایی شعاعی به ازای مقادیر منفی ثابت ناهمگنی، بیشتر از ماده همگن و به ازای مقادیر مثبت ثابت ناهمگنی، کمتر از ماده همگن است. به‌طور کلی روند تغییرات جابه‌جایی شعاعی در ماده ناهمگن همانند ماده همگن است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که حداکثر مقدار جابه‌جایی شعاعی در لایه داخلی استوانه ایجاد می‌شود. بنابراین از نظر جابه‌جایی شعاعی استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت به دلیل کمتر بودن مقدار حداکثر آن مناسب‌تر است.

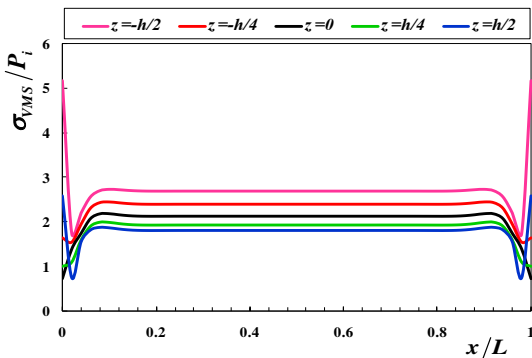
در شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری محاسبه شده مربوط به لایه میانی استوانه چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در امتداد طول استوانه آورده شده است. همان‌گونه که از شکل ۴ مشخص است، جابه‌جایی‌های شعاعی در نقاط دور از مرز تابعی از طول و شعاع می‌باشند. با توجه به شکل ۵، مشاهده می‌شود که جابه‌جایی طولی در وسط استوانه، ایجاد نمی‌شود. شکل‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهند که جابه‌جایی‌ها در نقاط مرزی (دو انتهای استوانه)، تحت تأثیر شرایط مرزی هستند. در نقاط دور از مرزها، تغییر جابه‌جایی‌ها به‌صورتی است که می‌توان از نتایج حاصل از PET برای پیش‌بینی رفتار استوانه استفاده کرد [۱۱]. با توجه به مقادیر بزرگتر جابه‌جایی‌های ایجاد شده در اطراف مرزها و عدم توانایی PET در تحلیل دقیق این نقاط، در مقاله‌ی حاضر از HSDT استفاده شده است. با مشاهده شکل‌های ۳ تا ۵، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت، به دلیل ایجاد جابه‌جایی‌های کمتر در استوانه، مطلوب‌تر است. هم‌چنین عامل بحرانی‌تر بودن لایه میانی استوانه، وجود فشار داخلی می‌باشد که اثر بیشتری نسبت به دوران بر روی رفتار استوانه دارد.





شکل ۸- توزیع بی‌بعد تنش محوری در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = -1$

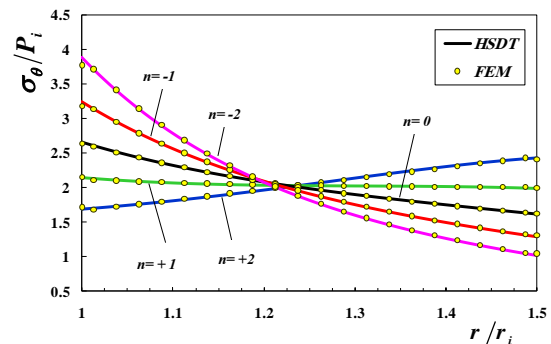
شکل‌های ۹ و ۱۰ توزیع تنش فن‌میزس را در امتداد طول استوانه برای لایه‌های مختلف به ازای  $n = \pm 1$  نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که همانند تنش‌های محیطی، بازه تغییرات و حداکثر مقدار تنش‌های فن‌میزس برای ثابت‌های ناهمگنی مثبت، کمتر از ثابت‌های منفی می‌باشد و از این جهت استفاده از آنها مطلوب‌تر است. لایه بحرانی از منظر تنش فن‌میزس برخلاف تنش محیطی، همواره در لایه داخلی استوانه ایجاد می‌شود.



شکل ۹- توزیع بی‌بعد تنش فن‌میزس در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = +1$

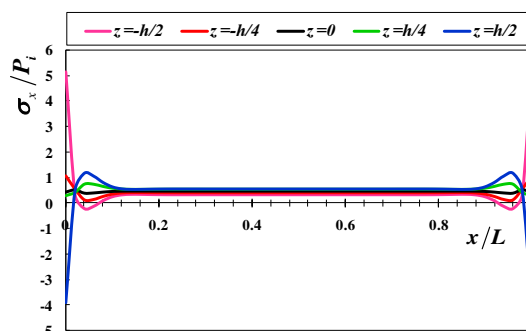
توزیع تنش‌های برشی نیز به ازای  $n = \pm 1$  مربوط به استوانه چرخان تحت فشار داخلی برای لایه‌های مختلف در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل‌ها، تنش برشی در اطراف دو انتهای استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی گیردار مشاهده می‌شود.

اطراف لایه میانی، رفتار ماده ناهمگن مشابه رفتار ماده همگن می‌باشد. با توجه به این نکته که تنش‌های محیطی برای استوانه مورد مطالعه، تنش حداکثر در جسم می‌باشند؛ از منظر تنش، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت به دلیل کمتر بودن بازه تغییرات تنش در جسم و کمتر بودن مقدار حداکثر آن، مطلوب‌تر است. مشاهده می‌شود که لایه بحرانی از منظر تنش محیطی، وابسته به ناهمگنی ماده می‌باشد، یعنی برای همه مواد ناهمگن با ثابت‌های منفی، لایه داخلی بحرانی است ولیکن به ازای ثابت‌های ناهمگنی مثبت، لایه خارجی بحرانی می‌شود.

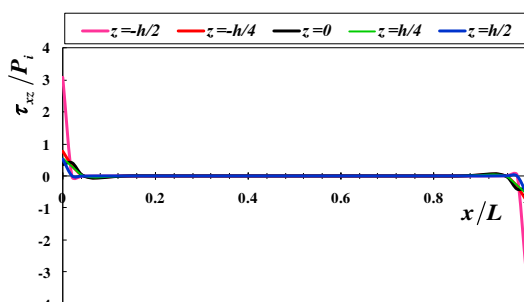


شکل ۶- توزیع بی‌بعد تنش محیطی در وسط استوانه

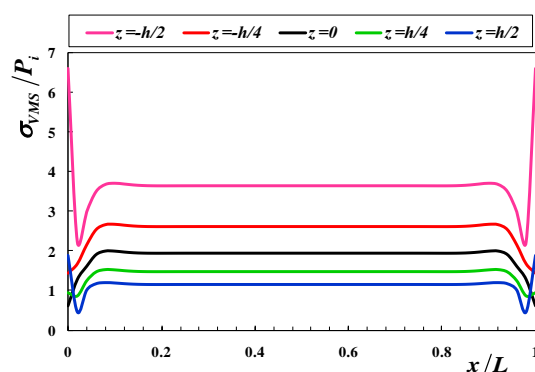
شکل‌های ۷ و ۸ توزیع تنش محوری را در امتداد طول استوانه چرخان تحت فشار داخلی برای لایه‌های مختلف آن به ازای  $n = \pm 1$  نشان می‌دهند. تنش‌های محوری استوانه به ازای  $n$ های منفی، بیشتر از مقادیر مثبت هستند.



شکل ۷- توزیع بی‌بعد تنش محوری در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = +1$



شکل ۱۲- توزیع بی‌بعد تنش برشی در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = -1$



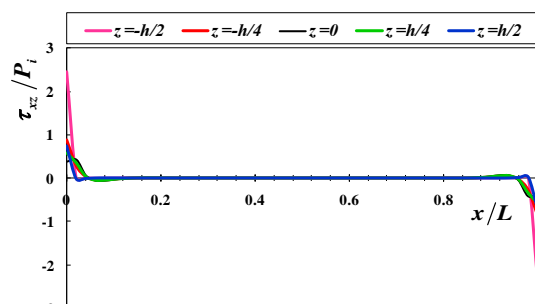
شکل ۱۰- توزیع بی‌بعد تنش فن‌میزس در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = -1$

### ۲-۶- بررسی اثر سرعت دورانی

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توزیع تنش فن‌میزس را در وسط استوانه چرخان برای سرعت‌های دورانی مختلف به ازای  $n = \pm 1$  نشان می‌دهند. تغییرات سرعت دورانی استوانه ( $\omega$ ) در بازه صفر تا ۶۰۰ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است. واضح است که افزایش سرعت دوران، سبب افزایش تنش فن‌میزس می‌شود. همچنین در مقادیر  $n$  منفی، تغییرات تنش‌های فن-میزس در راستای شعاعی بیشتر از مقادیر مثبت می‌باشد؛ درحالی‌که تأثیر سرعت چرخش استوانه بر تنش‌ها برای ثابت‌های ناهمگنی منفی، کمتر از مثبت است.

در جدول‌های ۱ و ۲ مقادیر تحلیلی جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی حاصل از چرخش و فشار داخلی در وسط استوانه برای لایه‌های مختلف آن آورده شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از دوران با سرعت ثابت در راستای شعاعی از لایه خارجی به سمت لایه داخلی استوانه در حال افزایش است. تأثیر چرخش بر روی جابه‌جایی و تنش در بازه سرعت‌های دورانی معمول، بسیار کمتر از اثر فشار داخلی است. برای مثال، جابه‌جایی شعاعی ناشی از سرعت دورانی  $350 \text{ rad/s}$  در حدود  $6 \mu\text{m}$  است، که کمتر از ۲ درصد جابه‌جایی ناشی از فشار داخلی می‌باشد (جدول ۱). همچنین تنش‌های محیطی ناشی از چرخش کمتر از  $3/5 \text{ MPa}$  بوده که کمتر از ۲ درصد تنش‌های ناشی از فشار می‌باشد (جدول ۲). با افزایش سرعت چرخش استوانه، روند تغییرات جابه‌جایی و تنش به‌صورت غیرخطی افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. همان‌گونه که بیان شد، می‌توان نتایج حاصل از بارگذاری‌های فشاری و چرخشی را

به‌طور کلی تنش‌ها در دو انتهای استوانه تحت تأثیر مرزها نسبت به نقاط دور از مرز در لایه داخلی به دلیل اعمال فشار داخلی، افزایش قابل توجهی دارند. با توجه به شکل‌های ۴، ۵ و ۷ تا ۱۲ مشاهده می‌شود که جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در امتداد طول استوانه غیر از حوال ابتدا و انتهای آن - که تحت تأثیر تنش برشی ناشی از مرزهای گیردار هستند- حالتی یکنواخت دارند؛ درحالی‌که در اطراف مرزهای انتهایی، نایکنواختی تحت اثر تنش برشی (به‌ویژه در تنش‌ها) مشاهده می‌شود. بنابراین می‌توان نتایج موجود در وسط استوانه را برای کل طول استوانه در فاصله‌ای دور از مرز گیردار آن، معتبر دانست (شکل‌های ۳ و ۶). همچنین نتایج جابه‌جایی و تنش حاصل از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در نقاط دور از مرز صادق بوده، ولی در اطراف مرزها باید از تئوری تغییرشکل برشی استفاده شود.



شکل ۱۱- توزیع بی‌بعد تنش برشی در لایه‌های استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = +1$

تغییرشکل برشی مرتبه سوم با افزایش مرتبه تقریب در مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نسبت به تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، سبب کاهش این خطا خواهد شد. دلیلش این است که تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای جداره استوانه به صورت تابع خطی از شعاع استوانه فرض می‌کند، درحالی‌که مطابق تئوری لامه، یک توزیع به صورت رابطه (۴۰) در طول جداره استوانه وجود دارد [۱۵].

$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (40)$$

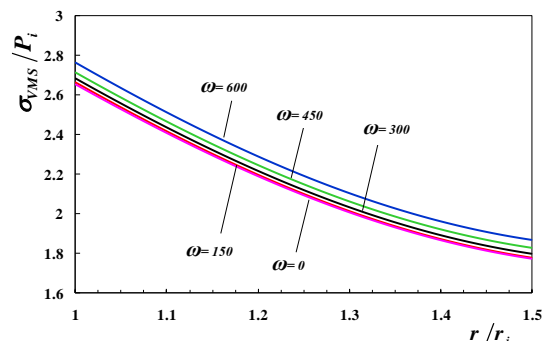
درحقیقت اطراف لایه میانی، روش FSDT از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد؛ ولیکن در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. تقریب تابع هذلولوی با یک توزیع خطی، منشأ خطا می‌باشد. درحالی‌که در روش TSDT با در نظر گرفتن یک توزیع چندجمله‌ای مطابق رابطه (۳) برای جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری، این تقریب، بهبود می‌یابد.

اضافه کردن هریک از عبارت‌های  $z^i u_i$  و  $z^i w_i$  به جابه‌جایی‌های لایه میانی یعنی  $u_0$  و  $w_0$  در مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، سبب نزدیکتر شدن توزیع حاصل از تئوری تغییرشکل برشی به حلّ حاصل از PET می‌شود. این افزایش دقت در محاسبه جابه‌جایی‌های محوری و شعاعی سبب بهبود مقادیر تنش محیطی نیز می‌شود. دلیلش محاسبه مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌طور مستقیم و با حلّ دستگاه معادلات حاکم و سپس محاسبه کرنش از روی مقادیر حاصل و در نهایت به‌دست آوردن مقادیر تنش می‌باشد.

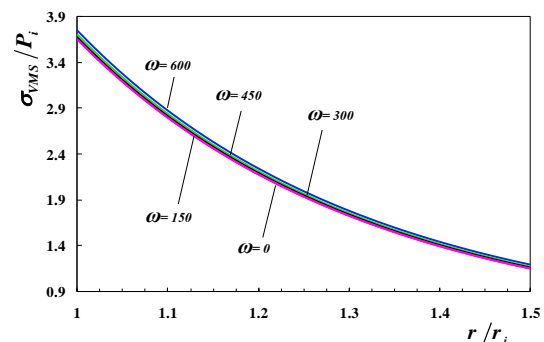
## ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک حلّ تحلیلی به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم برای استوانه‌های چرخان تحت فشار ساخته شده از مواد تابعی با تغییرات توانی خواص در راستای ضخامت ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده شد، به دلیل وجود تنش برشی در اطراف مرزهای انتهایی استوانه، نتایج تئوری الاستیسیته در نقاط مرزی صادق نبوده و باید از تئوری تغییرشکل برشی با در نظر گرفتن تنش‌های برشی در معادلات استفاده کرد.

به صورت جداگانه محاسبه و توسط اصل برهم‌نهی برای استوانه چرخان تحت فشار با یکدیگر جمع کرد.



شکل ۱۳- توزیع بی‌بعد تنش فن‌میزس در وسط استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = +1$



شکل ۱۴- توزیع بی‌بعد تنش فن‌میزس در وسط استوانه برای ثابت ناهمگنی  $n = -1$

## ۶-۳- بررسی اثر مرتبه تئوری تغییرشکل برشی

جدول‌های ۳ تا ۵ به ترتیب مقادیر جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش فن‌میزس محاسبه شده به کمک TSDT، FEM و FSDT را در پنج لایه مختلف استوانه چرخان تحت فشار داخلی برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در  $x = L/2$  نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده توسط FSDT اختلاف چندانی با مقادیر حاصل از TSDT ندارد؛ اما در مورد تنش‌های فن‌میزس و به خصوص تنش شعاعی، FSDT در لایه‌های داخلی و خارجی بیشترین مقدار اختلاف ممکن را با نتایج FEM نشان می‌دهد؛ درحالی‌که با استفاده از TSDT این اختلاف کاهش می‌یابد. به‌طور کلی مشاهده می‌شود که FSDT دارای خطا در محاسبه جابه‌جایی و به خصوص تنش‌ها می‌باشد. تئوری

جدول ۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از دوران و فشار داخلی برای لایه‌های مختلف استوانه ناهمگن در  $x = L/2$

$n = -1$		$n = 0$		$n = +1$		$U_r$ (mm)
فشار داخلی	دوران	فشار داخلی	دوران	فشار داخلی	دوران	
۰/۰۵۲۸۳	۰/۰۰۰۵۵	۰/۰۴۴۲۲	۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۳۶۵۷	۰/۰۰۰۶۱	$z = -h/2$
۰/۰۴۶۱۸	۰/۰۰۰۵۱	۰/۰۳۸۴۲	۰/۰۰۰۵۳	۰/۰۳۱۵۴	۰/۰۰۰۵۶	$z = 0$
۰/۰۴۲۲۶	۰/۰۰۰۴۷	۰/۰۳۵۱۴	۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۲۸۸۳	۰/۰۰۰۵۲	$z = +h/2$

جدول ۲- تنش محیطی حاصل از دوران و فشار داخلی برای لایه‌های مختلف استوانه ناهمگن در  $x = L/2$

$n = -1$		$n = 0$		$n = +1$		$\sigma_\theta$ (MPa)
فشار داخلی	دوران	فشار داخلی	دوران	فشار داخلی	دوران	
۲۵۶/۰۸۹	۳/۰۵۶	۲۰۹/۱۹۱	۳/۲۰۳	۱۶۷/۶۶۵	۳/۳۵۶	$z = -h/2$
۱۵۱/۰۷۶	۱/۸۴۲	۱۵۶/۱۱۴	۲/۴۰۸	۱۵۹/۰۰۵	۳/۱۴۶	$z = 0$
۱۰۲/۱۲۶	۱/۱۵۲	۱۲۷/۲۴۶	۱/۸۰۸	۱۵۶/۳۱۴	۲/۸۳۶	$z = +h/2$

جدول ۳- نتایج عددی جابه‌جایی شعاعی برای لایه‌های مختلف استوانه ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در  $x = L/2$

$n = -1$			$n = 0$			$n = +1$			$U_r$ (mm)
TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	
۰/۰۵۳۳۹	۰/۰۵۱۷۰	۰/۰۵۳۴۴	۰/۰۴۴۸۱	۰/۰۴۳۱۰	۰/۰۴۴۸۳	۰/۰۳۷۱۸	۰/۰۳۵۴۷	۰/۰۳۷۲۰	$z = -h/2$
۰/۰۴۹۶۱	۰/۰۴۹۱۰	۰/۰۴۹۶۵	۰/۰۴۱۴۷	۰/۰۴۱۰۰	۰/۰۴۱۴۹	۰/۰۳۴۲۵	۰/۰۳۳۷۱	۰/۰۳۴۲۶	$z = -h/4$
۰/۰۴۶۷۱	۰/۰۴۶۵۰	۰/۰۴۶۷۴	۰/۰۳۸۹۶	۰/۰۳۸۸۰	۰/۰۳۸۹۹	۰/۰۳۲۱۰	۰/۰۳۱۹۵	۰/۰۳۲۱۳	$z = 0$
۰/۰۴۴۴۶	۰/۰۴۳۹۰	۰/۰۴۴۵۰	۰/۰۳۷۰۸	۰/۰۳۶۶۴	۰/۰۳۷۱۰	۰/۰۳۰۵۴	۰/۰۳۰۲۰	۰/۰۳۰۵۵	$z = +h/4$
۰/۰۴۲۷۴	۰/۰۴۱۳۰	۰/۰۴۲۷۸	۰/۰۳۵۶۴	۰/۰۳۴۵۰	۰/۰۳۵۶۶	۰/۰۲۹۳۵	۰/۰۲۸۴۴	۰/۰۲۹۳۷	$z = +h/2$

جدول ۴- نتایج عددی تنش شعاعی برای لایه‌های مختلف استوانه ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در  $x = L/2$

$n = -1$			$n = 0$			$n = +1$			$\sigma_r$ (MPa)
TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	
-۷۷/۷۳۲	۷/۷۳۱	-۸۰/۰۰۰	-۷۷/۱۸۳	۷/۲۸۱	-۸۰/۰۰۰	-۷۶/۳۰۹	۶/۶۹۸	-۸۰/۰۰۰	$z = -h/2$
-۴۷/۲۱۴	-۱۳/۷۷۳	-۴۶/۳۹۹	-۵۰/۷۱۱	-۱۲/۰۴۱	-۴۹/۶۴۶	-۵۴/۲۱۸	-۱۰/۳۲۱	-۵۲/۷۶۷	$z = -h/4$
-۲۴/۶۳۰	-۲۷/۲۶۱	-۲۴/۶۹۷	-۲۷/۹۹۵	-۲۷/۵۰۰	-۲۸/۰۰۱	-۳۱/۵۱۹	-۲۷/۳۴۰	-۳۱/۴۰۳	$z = 0$
-۹/۵۴۵	-۳۵/۸۴۰	-۱۰/۱۱۵	-۱۱/۲۰۰	-۴۱/۱۴۸	-۱۲/۰۵۶	-۱۲/۸۵۱	-۴۴/۳۶۰	-۱۴/۱۸۳	$z = +h/4$
-۱/۱۴۶	-۴۱/۳۰۰	۰/۰۰۰	-۱/۷۷۱	-۵۰/۶۸۸	۰/۰۰۰	-۲/۸۵۳	-۶۱/۳۷۸	۰/۰۰۰	$z = +h/2$

جدول ۵- نتایج عددی تنش فن‌میزس برای لایه‌های مختلف استوانه ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در  $x = L/2$

$n = -1$			$n = 0$			$n = +1$			$\sigma_{VMS}$ (MPa)
TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	TSDT	FSDT	FEM	
۲۹۴/۳۳	۲۴۹/۱۰	۲۹۲/۱۶	۲۵۲/۴۸	۲۰۷/۳۱	۲۵۳/۷۲	۲۱۵/۱۹	۱۷۰/۳۵	۲۱۹/۱۰	$z = -h/2$
۲۱۱/۵۹	۱۹۵/۰۵	۲۱۱/۲۶	۲۰۱/۸۴	۱۸۲/۶۲	۲۰۱/۳۴	۱۹۰/۷۶	۱۶۸/۸۲	۱۹۰/۰۶	$z = -h/4$
۱۵۶/۲۶	۱۵۶/۸۰	۱۵۶/۳۸	۱۶۴/۰۰	۱۶۳/۱۲	۱۶۴/۰۵	۱۷۰/۱۰	۱۶۸/۵۵	۱۷۰/۱۱	$z = 0$
۱۱۸/۷۱	۱۲۸/۸۰	۱۱۸/۹۷	۱۳۶/۲۶	۱۴۷/۴۰	۱۳۶/۶۲	۱۵۴/۳۵	۱۶۶/۵۱	۱۵۴/۹۳	$z = +h/4$
۹۳/۱۲	۱۰/۷۷	۹۳/۴۵	۱۱۶/۶۳	۱۳۴/۵۰	۱۱۵/۹۳	۱۴۴/۳۰	۱۶۵/۷۴	۱۴۲/۰۰	$z = +h/2$

## ۸- پیوست

درایه‌های غیرصفر ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات (۲۸) پس از اعمال تغییرات به‌منظور محاسبه جواب خصوصی آن به‌صورت زیر می‌باشند.

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}]_{4 \times 4} & [A_{12}]_{4 \times 4} \\ [A_{21}]_{4 \times 4} & [A_{22}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$[A_{12}] = [A_{21}] = 0 \quad (42)$$

$$[A_{11}]_{ij} = \begin{cases} R \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n (1-\nu)(1+z/R) z^{(i+j-2)} dz & i, j = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (43)$$

$$[A_{22}]_{ij} = \begin{cases} R \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} k (\bar{r})^n (1-\nu)(1+z/R) z^{(i+j-2)} dz & i, j = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (44)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_{11}]_{4 \times 4} & [B_{12}]_{4 \times 4} \\ [B_{21}]_{4 \times 4} & [B_{22}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[B_{22}] = 0 \quad (46)$$

$$[B_{21}] = -[B_{12}]^T \quad (47)$$

$$[B_{11}]_{ij} = \begin{cases} R \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n (1-\nu)(1+z/R) z^{(i+j-2)} dz & i = 1, j = 2, 3, 4 \\ & j = 1, i = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (48)$$

$$[B_{12}]_{ij} = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n [z(j\nu - (i-1)k) + R((j-1)\nu - (i-1)k)] z^{(i+j-3)} dz & \text{else} \end{cases} \quad (49)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}]_{4 \times 4} & [C_{12}]_{4 \times 4} \\ [C_{21}]_{4 \times 4} & [C_{22}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[C_{21}] = -[C_{12}]^T \quad (51)$$

$$[C_{11}]_{ij} = \begin{cases} R \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n (1-\nu)(1+z/R) dz & i, j = 1 \\ -(i-1)(j-1) R \lambda' k \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n (1+z/R) z^{(i+j-4)} dz & \text{else} \end{cases} \quad (52)$$

در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول در تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر و استفاده از تقریب مرتبه یک، طبق تئوری میرسکی-هرمان مناسب نمی‌باشد. با توجه به این که تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در امتداد جداره استوانه به‌صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه چرخان تحت فشار، دارای یک توزیع غیرخطی می‌باشد؛ در نتیجه استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا سبب کاهش خطا می‌شود. به‌خصوص در مورد تنش‌ها از لایه میانی به سمت لایه‌های داخلی و خارجی، این کاهش خطا محسوس‌تر است. با توجه به این که سرعت‌های دورانی معمولی برای استوانه‌ها، عموماً کمتر از  $600 \text{ rad/s}$  هستند، بنابراین اثر چرخش بر توزیع جابه‌جایی و تنش در راستای ضخامت استوانه نسبت به فشار، ناچیز است. به‌طور کلی تنش‌ها در دو انتهای استوانه تحت تأثیر مرزها نسبت به نقاط دور از مرز، در لایه داخلی به دلیل اعمال فشار داخلی، افزایش قابل توجهی دارند. این افزایش تنش برای استوانه تحت فشار خارجی در لایه خارجی مشاهده می‌شود. بنابراین لایه بحرانی در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی به‌ترتیب در لایه‌های داخلی و خارجی مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به این که اثر هریک از بارگذاری‌های فشاری و دورانی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم بر استوانه ظاهر می‌شود، بنابراین با استفاده از اصل برهم‌نهی می‌توان هریک از این بارگذاری‌ها را به‌تنهایی در نظر گرفت و در نهایت نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هریک از این بارگذاری‌ها به‌دست خواهد آمد.

با توجه به آنچه بیان شد، استفاده از مواد ناهمگن سبب ایجاد خواص مطلوبی در سازه‌ها به‌ویژه تحت بارگذاری‌های فشاری و دورانی می‌شود. از منظر تنش محیطی (تنش حداکثر در استوانه) استفاده از ماده ناهمگن با  $n$ های مثبت به دلیل کمتر بودن بازه تغییرات تنش در جسم و کمتر بودن مقدار حداکثر آن، مطلوب‌تر می‌باشد. با توجه به نتایج حاصل، استفاده از ماده ناهمگن با ثابت ناهمگنی مثبت در استوانه چرخان تحت فشار داخلی سبب کاهش جابه‌جایی و تنش شده و مطلوب‌تر می‌باشد.

- Mechanics, Research Communications 33(5): 681-691.
- [9] Zhifei S, Taotao Z, Hongjun X (2007) Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, Composite Structures 79(1): 140-147.
- [10] Tutuncu N (2007) Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Engineering Structures 29: 2032-2035.
- [۱۱] قنّاد م، رحیمی غح، اسماعیل‌زاده خادم س (۱۳۸۹) حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته مستوی، مکانیک مدرس ۱۰(۳): ۳۱-۴۳.
- [۱۲] قنّاد م، رحیمی غح، اسماعیل‌زاده خادم س (۱۳۸۹) حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی، مکانیک مدرس ۱۰(۴): ۱۵-۲۶.
- [13] Zamani-Nejad M, Rahimi GH, Ghannad M (2009) Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system, Mechanika 3(77): 18-26.
- [14] Zamani-Nejad M, Rahimi GH (2009) Deformations and stresses in rotating FGM pressurized thick hollow cylinder under thermal load. Scientific Research and Essay 4(3): 131-140.
- [15] Ghannad M, Zamani-Nejad MZ (2010) Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends, Mechanika 5(85): 11-18.
- [16] Eipakchi HR (2010) Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure, J. of Mechanics of Materials and Structures 5(1): 1-17.
- [۱۷] قارونی ح، قنّاد م (۱۳۹۰) حلّ تحلیلی استوانه چرخان FGM تحت فشار به کمک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول، یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ۱-۳ اسفند.
- [18] Ghannad M, Gharooni H (2012) Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with varying properties of power function based on HSDT, J. of Solid Mechanics 4(3): 237-251.
- [19] Ghannad M, Rahimi GH, Zamani-Nejad M (2013) Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials, Composites: Part B 45: 388-396.

$$[C_{12}]_{ij} = \begin{cases} \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} \nu(\bar{r})^n dz & i, j = 1 \\ \lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} \nu(\bar{r})^n z^{j-2} ((j-1)R + jz) dz & i = 1, j = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (53)$$

$$[C_{22}]_{ij} = \begin{cases} -\lambda' \int_{-h/2}^{+h/2} (\bar{r})^n [((i-1)(j-1)(R+z)(1-\nu)) \\ + ((i+j-2)\nu)z + \left(\frac{1-\nu}{R+z}\right)z^2] z^{i+j-4} dz & i, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (54)$$

که پارامترهای  $\lambda'$  و  $k$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\lambda' = \frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad k = \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \quad (55)$$

#### مراجع

- [1] Mirsky I, Hermann G (1958) Axially motions of thick cylindrical shells, J. of Applied Mechanics-Transactions of the ASME 25: 97-102.
- [2] Reddy JN, Liu CF (1985) A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, International J. of Engineering Science 23: 319-330.
- [3] Greenspon, JE, (1960) Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories, J. of the Acoustical Society of America 32(5): 571-578.
- [4] Fukui Y, Yamanaka N (1992) Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure, JSME, Ser. I, 35(4): 891-900.
- [5] Simkins TE (1994) Amplifications of flexural waves in gun tubes, J. of Sound and Vibration 172(2): 145-154.
- [6] Eipakchi HR, Rahimi GH, Khadem SE (2003) Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure, J. Structural Engineering and Mechanics 16(6): 731-748.
- [7] Eipakchi HR, Khadem SE, Rahimi GH (2008) Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under nonuniform internal pressure, J. Engineering Mechanics 134: 601-610.
- [8] Hongjun X, Zhifei S, Taotao Z (2006) Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, J. of