



تحلیل آیرودینامیک و ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی ساخته شده از فوم‌های فلزی تقویت شده با نانو ذرات گرافنی

سعید امیر^{۱*} و احسان آرشید^۲

^۱ گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۳

چکیده

در این پژوهش رفتار آیرودینامیکی و ارتعاشی ورق‌های قطاعی ساخته شده از فوم‌های فلزی که با نانوذرات گرافنی تقویت شده‌اند، بررسی می‌شود. فوم‌های فلزی شاخه‌ای جدید و پیشرفته از مواد متخلخل هستند که مزیت مهم آن‌ها نسبت بالای استحکام به چگالی است. اگرچه بخاطر وزن کم، فوم‌های فلزی امروزه مورد استقبال قرار گرفته‌اند، ولی همین مورد سبب کاهش در استحکام آن‌ها می‌شود و یکی از ضعف‌های اساسی آن‌ها به شمار می‌رود که با اضافه کردن نانوذرات، این ضعف برطرف می‌شود. نانوذرات گرافنی امروزه به عنوان یکی از بهترین تقویت کننده‌ها شناخته می‌شوند. تحت میدان تصادفی گاوسی برای جامدات سلولی بسته، خواص موثر فوم فلزی زمینه بدست آورده شده و با استفاده از دو مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای و قانون اختلاط، به ترتیب مدول الاستیسیته و سایر خواص مکانیکی موثر ورق بدست آورده می‌شوند. توزیع حفرات و همچنین پراکندگی نانوذرات گرافنی در راستای ضخامت، هر کدام بر اساس سه الگوی متفاوت صورت می‌گیرد و تاثیر آن‌ها بر رفتار ارتعاشاتی سازه‌ی مورد بررسی مشاهده می‌شود. با بهره گرفتن از روش حساب تغییرات و اصل همپلتون، معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوطه بدست آورده می‌شوند و به صورت عددی به حل آن‌ها پرداخته و در مورد تاثیر پارامترهای مختلف از جمله توزیع حفرات، پراکندگی نانوذرات و سایر پارامترهای با اهمیت بر نتایج بحث می‌شود.

کلمات کلیدی: مواد متخلخل؛ نانوذرات گرافنی؛ تحلیل آیرودینامیک؛ ارتعاشات آزاد؛ ورق قطاعی.

Aerodynamic and Free Vibration Analyses of Metal Foams Reinforced Graphene Nanoplatelets Sector Plates

S. Amir^{1*}, E. Arshid²

¹ Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.

² Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.

Abstract

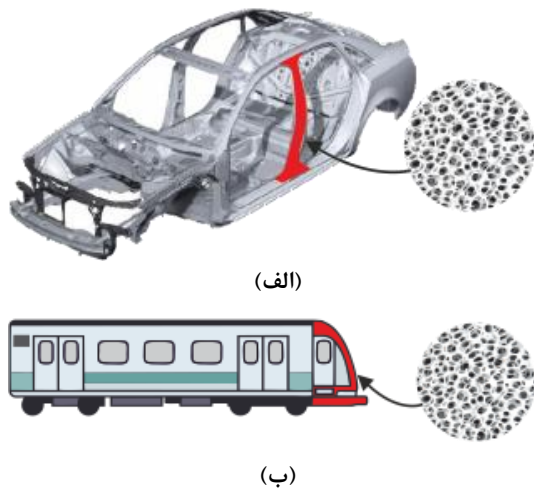
In this research, aerodynamic and vibrational behaviors of sector plates made from metal foams reinforced by graphene nanoplatelets are considered. Metal foams are a new and advanced branch of porous materials and their main advantage is their high stiffness to density ratio. Although due to their lightweight, metal foams are welcomed nowadays, this causes a decrease in their strength and is one of their main weaknesses that by adding nanoparticles, this weakness is eliminated. Today, graphene nanoplatelets are known as one of the best reinforcements. Under Gaussian random field for closed-cell cellular solids, the effective properties of the matrix are obtained and by employing two Halpin-Tsai and rule of mixture micromechanical models, elasticity modulus and other mechanical properties of the plate are determined. Pores distribution and also graphene nanoplatelets dispersion through the thickness direction, each is based on three different patterns and their effect on the vibrational behavior of the under consideration model is observed. With the aid of the variational approach and Hamilton's principle, the governing equation and associated boundary conditions are derived and solved numerically, and the effect of different parameters such as pores distribution, nanoparticles dispersion and other important parameters on the results is discussed.

Keywords: Porous Materials; Graphene Nanoplatelets; Aerodynamic Analysis; Free Vibrations; Sector Plates.

۱- مقدمه

مکانیک محیط‌های متخلخل از مکانیک خاک نشات می‌گیرد که به طور خاص با تحقیقات کارل فون ترزاقی، دانشمند اتریشی و پدر مکانیک خاک، پایه گذاری شده است [۱]. تئوری کامل‌تری از مکانیک محیط متخلخل توسط بایوت در سال ۱۹۳۵ ارائه شد [۲]. مواد فومی خانواده‌ای از مواد متخلخل است که جزو مواد نو و پیشرفته به شمار می‌آیند، که با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد آن امکان زیادی برای توسعه در سال‌های آینده خواهند داشت. خانواده مواد فومی به سه دسته فوم‌های فلزی، فوم‌های سرامیکی و فوم‌های پلیمری تقسیم بندی می‌شوند. فوم‌های فلزی در مقایسه با فوم‌های سرامیکی و پلیمری جدیدتر بوده و خواص و کاربرد آن‌ها در حال توسعه می‌باشد. از اواخر سال ۱۹۸۰ تحقیقات وسیعی در زمینه‌ی فوم‌های فلزی صورت گرفت که از میان روش‌های تولید، فوم‌های فلزی تولید شده به روش ذوبی به عنوان اصلی‌ترین محصول تجاری در زمینه فوم‌های فلزی مورد استفاده قرار گرفت. فوم‌های فلزی دارای خواص منحصر به فردی از جمله خواص مکانیکی عالی [۳]، خواص حرارتی مناسب [۴]، خواص صوتی و مقاومت در برابر خوردگی عالی [۵] هستند. این مواد به دلیل استحکام بالا و وزن کم در صنعت حمل و نقل بسیار مورد توجه هستند و به دلیل قابلیت جذب انرژی بالا به عنوان عایق صوت مورد استفاده قرار می‌گیرند. فوم‌های فلزی به دلیل جاذب انرژی بودن در ساخت سپر اتومبیل مورد استفاده قرار می‌گیرند که علاوه بر کاربردهای اشاره شده، در صنایع هوافضا و سایر صنایع از جمله ساخت قطارهای تندرو مورد استفاده قرار می‌گیرند که نمونه‌ای از آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

فوم‌های فلزی کاربردهای مختلفی در صنایع مدرن دارند و این کاربردها به تناسب افزایش و ابداع روش‌های تولید جدید این مواد، در حال افزایش هستند. اگرچه فوم‌های فلزی که خود شاخه‌ای از مواد متخلخل هستند، دارای محاسن و مزایای زیادی از جمله موارد گفته شده در فوق هستند، ولی به صورت کلی دارای استحکام و سفتی کمتری نسبت به مواد غیرمتخلخل هستند. به منظور رفع این مشکل، پژوهش‌هایی صورت گرفته است که از آن‌ها نتیجه گرفته می‌شود اضافه کردن نانوذرات سبب بهبودی چشم‌گیری در رفتار مکانیکی این مواد می‌شود. از جمله این نانوذرات، نانولوله‌های کربنی و



شکل ۱- کاربرد فوم‌های فلزی در بدنه اتومبیل‌ها و قطارهای تندرو

نانو ذرات گرافنی هستند. افزودن این مواد به فوم‌های فلزی باعث از بین رفتن ضعف این مواد که همان استحکام کم است، می‌شود. نانوذرات به سبب استحکام بسیار بالایی که دارند به عنوان تقویت‌کننده در سازه‌ها استفاده می‌شوند. پژوهش‌های متعددی پیرامون تاثیر افزودن نانولوله‌های کربنی بر رفتار مکانیکی سازه‌ها صورت گرفته است و بهبود چشم‌گیری در رفتار آن‌ها دیده شد [۶-۸]. همین عامل سبب شد تا تاثیر سایر نانوذرات بر تقویت سازه‌های مهندسی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. نووسولف و همکاران [۹] از اولین محققانی بودند که پیرامون تاثیر نانوذرات گرافنی بر رفتار مکانیکی ورق‌ها پژوهش‌هایی انجام داد و نتیجه گرفت که این نانوذرات حتی از نانولوله‌های کربنی نیز دارای استحکام بیشتر و به دنبال آن، سبب بهبود خواص مکانیکی سازه‌ها می‌شوند. نانوذرات گرافنی علاوه بر استحکام بالاتر نسبت به نانولوله‌های کربنی، دارای خصوصیات دیگری مانند استحکام شکست بالاتر و رسانایی الکتریکی فوق العاده‌ای برخوردارند [۱۰-۱۳]. بدین منظور اخیراً پژوهشگران به بررسی اثر افزودن این نانوذرات بر سازه‌ها پرداخته‌اند. با افزودن این مواد، اشتیاق به استفاده از فوم‌های فلزی تقویت شده با نانوذرات گرافنی در صنایع مختلف که در آن‌ها نسبت استحکام به وزن بالایی مورد نیاز است، از جمله صنایع هوافضا، حمل و نقل و نظامی بسیار بیشتر شده است [۱۴].

[۲۲] برای تحلیل ارتعاشات یک ورق متخلخل در حضور سیال درون حفرات به کار برده شد. در نتایج ارائه شده در کار آن‌ها نشان داده شد که پاسخ ارتعاشی سیستم به نوع توزیع تخلخل وابسته است و از آن تاثیر می‌پذیرد؛ همچنین در پژوهش دیگری آن‌ها [۲۳] ورق مستطیلی که از مواد متخلخل ساخته شده بود را بوسیله فرمول بندی ارائه شده توسط کاره‌ها مورد تحلیل قرار دادند و از روش لوی برای حل معادلات بهره بردند. گوپتا و تالها [۲۴] به بررسی اثرات تخلخل بر رفتار مکانیکی ورقی مستطیلی که در محیط حرارتی قرار داشت پرداختند. کیران و کاتیمانی [۲۵] به ارزیابی تاثیر تخلخل بر فرکانس‌های طبیعی یک ورق مدرج تابعی با خاصیت مغناطیسی پرداختند. مجاهدین و همکاران [۲۶] به تحلیل کماتش مکانیکی ورق‌های دایروی ساخته شده از مواد متخلخل به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی پرداختند. ایشان تاثیر عوامل مختلف بر نتایج را بررسی و همچنین آن‌ها را با نتایج حاصل از دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و کلاسیک نیز مقایسه نمودند. فرزانه و همکاران [۲۷] به بررسی تاثیر وجود دو لایه پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر بر رفتار کماتش حرارتی ورق‌های دایروی متخلخل پرداختند. در پژوهش مذکور، توزیع حفرات بر اساس سه الگوی متفاوت در راستای ضخامت در نظر گرفته شده بود و معادلات بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج شدند؛ همچنین با بهره‌گیری از توابع بسط، حلی تحلیلی برای آن‌ها ارائه شد. پایداری مکانیکی و حرارتی ورق‌های دایروی ساخته شده از مواد متخلخل که با لایه‌های پیزوالکتریک تقویت شده بودند، توسط مجاهدین و همکاران [۲۸] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. در این پژوهش، شرایط مرزی ورق به صورت گیردار در نظر گرفته شده بود و تاثیر عوامل و پارامترهای مختلف بر نتایج از جمله بار بحرانی کماتش و دمای بحرانی کماتش بررسی شد. در پژوهش‌های بررسی شده تا به اینجا، تغییرات تخلخل در راستای ضخامت مورد بررسی قرار می‌گرفتند؛ اما در مقاله‌ای که توسط ژو و همکاران [۲۹] ارائه شد، وی توزیع حفرات را علاوه بر تابعی از ضخامت، به عنوان تابعی درون صفحه‌ای، نیز بررسی کرد. آن‌ها برای حل معادلات بدست آمده از روش ایزوژنومتری استفاده کردند.

نظر به کاربردهای متعدد ورق‌ها در اشکال و از جنس‌های مختلف، پژوهشگران زیادی مشغول تحلیل و بررسی این سازه‌های پرکاربرد هستند. در ادامه تعدادی از این پژوهش‌های صورت گرفته، مرور شده‌اند. دیترنی و چنگ [۱۵] روابط بهبودیافته را برای مواد پوروالاستیک ارائه کردند. روابط تنش-کرنش ارائه شده توسط آن‌ها در قالب ثوابت الاستیک برای فاز جامد و سیال بیان شده‌اند. به مرور و در سال‌های اخیر، محققان دیگری نیز با استفاده از روابط پایه گفته شده، به تحلیل سازه‌های متخلخل پرداخته‌اند. بو [۱۶] در سال ۱۹۹۹ به تحلیل ارتعاشات عرضی یک ورق دایروی اشباع شده با سیال پرداخت. پس از وی، له‌کلر و همکاران [۱۷]، تست‌های تجربی برای بررسی پاسخ ارتعاشی ورق‌های مستطیلی متخلخل انجام داده و نتایج را با یافته‌های نظری مقایسه کردند. یافته‌های نظری در کار له‌کلر و همکاران، برای ورق با تکیه گاه گیردار و بر اساس روش حل گلرکین بدست آمده بودند. ابراهیمی و حبیبی [۱۸] با استفاده از روش اجزا محدود به بررسی خیز و فرکانس‌های طبیعی یک ورق مستطیلی ساخته شده از مواد متخلخل پرداختند که در آن اثر سیال درون حفرات نیز لحاظ شده بود. آن‌ها اثرات تغییر شکل برشی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، در معادلات خود لحاظ نمودند و اثر پارامترهای مختلف از جمله تخلخل را بر نتایج بررسی نمودند. ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای ساخته شده از مواد متخلخل مدرج تابعی بوسیله‌ی چن و همکاران [۱۹] ارائه شد. آن‌ها الگوهای مختلفی از توزیع حفرات در راستای ضخامت را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که الگوی توزیع تخلخل متقارن، نسبت به سایر الگوها سبب ایجاد سفتی بیشتر در سازه می‌شود؛ همچنین در پژوهش دیگری، چن و همکاران [۲۰] تیرهای چند لایه که دارای هسته‌ای از جنس مواد متخلخل بودند را مورد مطالعه قرار داده و با استفاده از روش ریتز به حل معادلات حاکم پرداختند و در نهایت دریافتند که الگوی متقارن توزیع تخلخل باعث بهترین عملکرد ارتعاشی تیر مورد بررسی می‌شود. ارتعاشات الکترو-مکانیکی یک ورق مدرج تابعی پیزوالکتریک بوسیله وانگ [۲۱] مورد تحلیل قرار گرفت. وی در بررسی خواص مواد، اثر تخلخل را نیز در نظر گرفته بود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم که به تئوری ردی نیز شناخته می‌شود، توسط رضایی و سعیدی

هندسی و نوع توزیع را بررسی کردند. محمدی مهر و همکاران [۳۷] به تحلیل پایداری دینامیکی ورق حلقوی ساندویچی در حالت متقارن محوری پرداختند. ورق مورد بررسی از هسته‌ی همگن و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تشکیل شده بود و خواص موثر رویه‌های نانوکامپوزیتی با استفاده از قانون اختلاط بدست آورده شدند. به منظور حل معادلات بدست آمده از روش مربعات تفاضلی استفاده شده و اثر پارامترهای مختلف بر نتایج مورد تحلیل قرار گرفت.

با مرور پژوهش‌های صورت گرفته می‌توان دریافت که تا به امروز، پژوهشی در زمینه بررسی پاسخ ارتعاشاتی و آبرودینامیکی ورق‌های قطاعی ساخته شده از فوم‌های فلزی وجود ندارد که با نانوذرات گرافنی تقویت شده‌اند. به همین منظور، در این پژوهش به بررسی چنین مسأله‌ای پرداخته می‌شود. ورق قطاعی تحت تحلیل، روی بستر الاستیکی که شامل فنرها و لایه برشی می‌شود قرار داشته که عموماً با نام پاسترناک شناخته می‌شود. بر اساس میدان تصادفی گاوسی برای جامدات سلولی بسته، خواص زمینه متخلخل محاسبه و به کمک دو مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای و قانون اختلاط، خواص موثر کل سازه نانوکامپوزیتی بدست آورده می‌شوند. در این مطالعه، سه نوع توزیع مختلف حفرات و همچنین سه نوع الگوی مختلف پراکندگی حفرات بررسی و تاثیر آن‌ها بر نتایج بررسی می‌شوند؛ همچنین به منظور در نظر گرفتن فشار آبرودینامیکی، از تئوری مرتبه اول پیستون استفاده شده است. به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روش حساب تغییرات و اصل همپلتون، معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوطه استخراج شده و به کمک روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته، گسسته و سپس حل می‌شوند. در نهایت، تاثیر مهم‌ترین پارامترها بر نتایج از جمله فرکانس-های طبیعی و فشار بحرانی آبرودینامیک بررسی می‌شود.

۲- مدل‌سازی و روابط پایه

ورق قطاعی مورد بررسی، همانگونه که در شکل ۲ نشان داده شده است، دارای شعاع داخلی R_i ، شعاع خارجی R_o ، ضخامت h و زاویه مرکزی β است. ورق از فوم‌های فلزی مدرج تابعی تقویت شده با نانوذرات گرافنی ساخته شده و بر بستر الاستیکی که با مدل پاسترناک شبیه‌سازی شده است، قرار

همانگونه که ذکر شد، به منظور فائق آمدن بر ضعف اصلی مواد متخلخل و به طور خاص فوم‌های فلزی به عنوان بخشی از آن‌ها، از تقویت کننده‌های مختلفی استفاده می‌شود که نانوذرات در مقایسه با سایر تقویت کننده‌ها، اثر بهتری داشته‌اند. برای مثال، براتی و زنگور [۳۰] به بررسی رفتار ارتعاشی یک سیلندر استوانه‌ای متخلخل پرداختند که با نانوذرات گرافنی تقویت شده بود. آن‌ها از روش میکرومکانیکی هالپین-تسای برای برآورد خواص موثر مکانیکی سازه استفاده نمودند و اثرات پارامترهای مختلفی نظیر مقدار و نحوه ی توزیع نانوذرات گرافن بر نتایج را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین لی و همکاران [۳۱] با بهره بردن از روش‌های گلرکین و رانگ-کوتا، معادلات بدست آمده برای پاسخ‌های کمانشی و دینامیکی غیر خطی یک ورق مستطیلی را حل نمودند. در پژوهش لی و همکاران، اثرات بستر الاستیک، محیط حرارتی و همچنین میرایی بررسی شده است. لیو و همکاران [۳۲] به بررسی تاثیرات تقویت کننده-های نانوغرافنی بر رفتار ارتعاشی تیرهای چند لایه پرداختند. در این پژوهش، آن‌ها از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده کرده و تاثیر پراکندگی نانوذرات گرافنی در راستای ضخامت را به استفاده از الگوهای مختلف بررسی نمودند. گائو و همکاران [۳۳] نیز به بررسی دو نوع توزیع متفاوت نانوذرات گرافنی، یعنی توزیع‌های متقارن و نامتقارن نسبت به صفحه میانی پرداخته و اثرات این تفاوت توزیع را بر فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی متخلخل بررسی نمودند. به منظور استخراج نتایج، آن‌ها از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته استفاده کردند. به منظور بررسی رفتار ارتعاشی و همچنین کمانش حرارتی یک میکرو ورق ساخته شده از مواد متخلخل، تئوری تنش کوپل اصلاح شده و همچنین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط شجاعی فرد و همکاران [۳۴] مورد استفاده قرار گرفت. همچنین کیم و همکاران [۳۵]، به منظور استخراج نتایج تحلیل یک میکرو ورق مستطیلی متخلخل، از روش حل ناوبر برای شرایط مرزی چهار طرف، تکیه گاه ساده استفاده نمودند. با استفاده از تئوری اصلاح شده گرادیان کرنش، محمدرضایی بیدگلی و عارفی [۳۶] به تحلیل رفتار ارتعاشی میکرو ورق مستطیلی ساخته شده از اپوکسی تقویت شده با نانوذرات گرافنی پرداختند و در آن پارامترهای مختلف مربوط به نانوذرات گرافنی از جمله مقدار، متغیرهای

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \bar{\varepsilon}_{rr} + zk_{rr}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + zk_{\theta\theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= \bar{\gamma}_{r\theta} + zk_{r\theta}, & \gamma_{rz} &= \bar{\gamma}_{rz}, \\ \gamma_{\theta z} &= \bar{\gamma}_{\theta z} \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، مولفه‌های کرنش که در بالای آن‌ها خط وجود دارد، مربوط به سطح میانی و مولفه‌های بدون خط، مربوط به هر نقطه از ورق قطاعی هستند؛ همچنین k_{ij} آن‌ها هستند. مولفه‌های مذکور به صورت زیر تعریف می‌شوند:

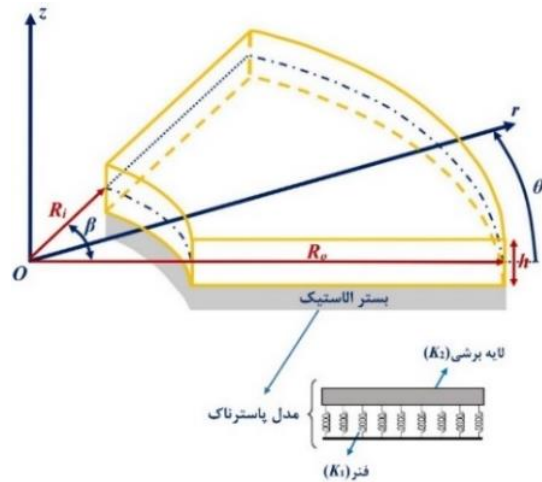
$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \bar{\gamma}_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \bar{\gamma}_{rz} &= \psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \bar{\gamma}_{\theta z} &= \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ k_{rr} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \\ k_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi_r, \\ k_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi_\theta + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

همانگونه که پیشتر ذکر شد، ورق مورد بررسی از فوم-های فلزی مدراج تابعی تقویت شده با نانوذرات گرافنی ساخته شده است. در این پژوهش، ابتدا به بررسی اثر تخلخل پرداخته می‌شود که در واقع از نحوه جانمایی حفرات نشأت می‌گیرد و سپس به بررسی اثر تقویت کنندگی نانوذرات گرافنی توجه می‌شود. رابطه کلی برای تغییرات خواص مکانیکی ورق (مدول الاستیسیته و چگالی) در راستای ضخامت آن، به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 [1 - e_1 \lambda(z)], \\ \rho(z) &= \rho_1 [1 - e_m \lambda(z)] \end{aligned} \quad (5)$$

در این رابطه، e_1 و e_m به ترتیب ضریب تخلخل و ضریب چگالی جرمی هستند. ضریب تخلخل، مهم‌ترین خاصیت مواد متخلخل است که بیانگر نسبت فضای حفرات به فضای کل جسم است؛ بنابراین مقدار آن همیشه بین صفر و ۱ است و به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود [۴۰]:

$$e_1 = 1 - \frac{E_2}{E_1} \quad (6)$$



شکل ۲- شماتیک ورق قطاعی ساخته شده از فوم‌های فلزی تقویت شده با نانوذرات گرافنی واقع بر بستر الاستیک

دارد. در مدل پاسترناک، تاثیر فنرها و لایه برشی در نظر گرفته شده است.

به منظور بیان روابط سینماتیکی، از دستگاه مختصات قطبی استفاده شده است؛ که مبدا آن در مرکز انحناى ورق و در سطح میانی آن واقع شده است. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، که در آن اثرات تغییر شکل‌های برشی در نظر گرفته شده است، مولفه‌های جابجایی هر نقطه از ورق در سه راستای شعاعی، محیطی و عرضی را به ترتیب می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۳۸]:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= u(r, \theta, t) + z\psi_r(r, \theta, t), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= v(r, \theta, t) + z\psi_\theta(r, \theta, t), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= w(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه u ، v و w به ترتیب مولفه‌های جابجایی شعاعی، محیطی و عرضی سطح میانی ورق مورد بررسی هستند و ψ_r و ψ_θ چرخش سطح میانی حول محور r و θ هستند.

برای بیان رابطه کرنش-جابجایی، از عبارت زیر می‌توان استفاده نمود [۳۹]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

که در آن، ε_{ij} مولفه‌های تانسور کرنش و u بردار جابجایی است؛ همچنین زیرنویس (i) در رابطه (۲) بیانگر مشتق جزئی است. با استفاده از روابط (۱) و (۲)، مولفه‌های کرنش به صورت زیر بدست می‌آیند:

نکته لازم است که بر اساس میدان تصادفی گاوسی، مدول الاستیسیته و چگالی برای جامدات سلولی بسته را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{E(z)}{E_1} = \left[\frac{\rho(z)/\rho_1 + 0.121}{1.121} \right]^{2.3}, 0.15 < \frac{\rho(z)}{\rho_1} < 1 \quad (12)$$

برای تغییرات ضریب پواسون نیز بر اساس میدان تصادفی گاوسی، می‌توان از رابطه (۱۳) استفاده کرد:

$$v(z) = 0.221p' + v_1(0.342p'^2 - 1.21p' + 1) \quad (13)$$

که در این رابطه، v_1 ضریب پواسون در حالت بدون تخلخل است و همچنین:

$$p' = 1 - \frac{\rho(z)}{\rho_1} = 1.121(1 - \sqrt[2.3]{1 - e_1\lambda(z)}) \quad (14)$$

در این پژوهش، برای مشخص کردن مقدار موثر مدول الاستیسیته کل سازه، از مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای استفاده می‌شود. در گذشته، مطالعاتی در خصوص دقت این مدل میکرومکانیکی در مشخص کردن مقدار موثر مدول الاستیسیته نانوکامپوزیت‌های غیر متخلخل انجام شده بود که نتایج آزمایشگاهی، قرابت مناسبی با نتایج حاصل تحقیقات تئوری داشت؛ همچنین اخیراً نیز این مطالعات بر ساختارهای نانوکامپوزیتی متخلخل نیز صورت گرفته است و مجدداً این فرضیه تایید شد؛ بنابراین، برای بدست آوردن مدول الاستیسیته موثر و قابل اطمینان، از مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای در ساختارهای نانوکامپوزیتی متخلخل استفاده می‌شود. مقدار موثر مدول الاستیسیته بر اساس این مدل به شکل نوشته می‌شود [۴۲]:

$$E_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{1 + \xi_l^{GNP} \eta_l^{GNP} V_{GNP}}{1 - \eta_l^{GNP} V_{GNP}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left(\frac{1 + \xi_w^{GNP} \eta_w^{GNP} V_{GNP}}{1 - \eta_w^{GNP} V_{GNP}} \right) E_m \quad (15)$$

در این رابطه، E_m مدول الاستیسیته زمینه نانوکامپوزیت است و کسر حجمی نانوذرات گرافنی تقویت کننده با V_{GNP} نشان داده شده است که جمع آن با مدول الاستیسیته زمینه (V_m) برابر یک خواهد شد؛ همچنین ξ_l^{GNP} و ξ_w^{GNP} پارامترهای مرتبط به خصوصیات هندسی نانوذرات گرافنی و

که در این رابطه، بیشترین و کمترین مقدار مدول الاستیسیته در ورق به ترتیب با E_1 و E_2 نشان داده شده است.

همچنین در رابطه (۵)، $\lambda(z)$ تابع الگوی توزیع تخلخل است که نحوه قرارگیری حفرات در راستای ضخامت را مشخص می‌کند. در این پژوهش سه الگوی مختلف توزیع حفرات در راستای ضخامت ورق، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است که بر اساس این سه الگو، تابع الگوی توزیع تخلخل می‌تواند متفاوت باشد. در صورتی که حفرات نسبت به سطح میانی ورق به صورت متقارن توزیع شده باشند، این تابع به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود:

$$\lambda(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (7)$$

که h معرف ضخامت ورق است. در این الگو، بیشترین سفتی مربوط به سطوح بالایی و پایینی ورق و کمترین سفتی، مربوط به سطح میانی آن است.

در صورتیکه حفرات در راستای ضخامت ورق به صورت نامتقارن نسبت به سطح میانی آن توزیع شده باشند، تابع زیر به عنوان الگوی توزیع تخلخل مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\lambda(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (8)$$

و در شرایطی که توزیع حفرات به صورت یکنواخت در راستای ضخامت ورق باشد، تابع الگوی مربوط به آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda(z) = \lambda_0 \quad (9)$$

که در این رابطه:

$$\lambda_0 = \frac{1}{e_1} \left[1 - \left(\left(\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\rho(z)}{\rho_1} dz + 0.121 \right) / 1.121 \right)^{2.3} \right] \quad (10)$$

برای بدست آوردن این رابطه، از ضریب چگالی جرمی که پیشتر با نماد e_m معرفی شد استفاده می‌شود. این ضریب به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود [۴۱]:

$$e_m = \frac{1.121[1 - (1 - e_1\lambda(z))^{1/2.3}]}{\lambda(z)} \quad (11)$$

شایان ذکر است که برای بدست آوردن پارامتر λ_0 معرفی شده در رابطه (۹)، فرض بر این است که جرم کل سازه با وجود انواع مختلف الگوهای توزیع حفرات، تغییر نمی‌کند و همچنین برای استفاده از این رابطه، توزیع تخلخل متقارن به عنوان مرجع در نظر گرفته شده است. ذکر این

$$\Gamma_3(z) = 1 \quad (22)$$

از سوپی دیگر، می‌توان کسر حجمی و کسر جرمی نانو ذرات گرافنی (W_{GNP}) را بر اساس رابطه زیر با هم ارتباط داد:

$$V_{GNP} = \frac{W_{GNP}}{[W_{GNP} + (\rho_{GNP}/\rho_m)(1 - W_{GNP})]} \quad (23)$$

نتیجه گیری می‌شود که مقدار بیشینه پارامتر S_f^i که در رابطه (۱۹) معرفی شد، با مساوی قرار دادن جرم نسبی بدست آمده از رابطه چگالی نسبی ($\rho(z)/\rho_1$) با معادلات (۲۰) الی (۲۲) و همچنین استفاده از رابطه (۲۳) به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} V_{GNP} [1 - e_m \lambda(z)] dz = \frac{W_{GNP}}{[W_{GNP} + (\rho_{GNP}/\rho_m)(1 - W_{GNP})]} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [1 - e_m \lambda(z)] dz \quad (24)$$

نهایتاً، برای رابطه ساختاری ورق مورد بررسی می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_f Q_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_f Q_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

که در این رابطه، κ_f ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است؛ همچنین مولفه‌های ماتریس سفتی در سازه مورد بررسی به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\ Q_{12}(z) &= Q_{21}(z) = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\ Q_{44}(z) &= Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = G(z) \end{aligned} \quad (26)$$

۳- استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت ورق نانوکامپوزیتی متخلخل تحت تحلیل و همچنین شرایط مرزی متناظر از اصل همپلتون و روش حساب تغییرات استفاده

پارامترهای η_l^{GNP} و η_w^{GNP} مربوط به خصوصیات ماده هستند که همگی به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_l^{GNP} &= \frac{2l_{GNP}}{t_{GNP}}, \\ \xi_w^{GNP} &= \frac{2W_{GNP}}{t_{GNP}}, \\ \eta_l^{GNP} &= \frac{(E_{GNP}/E_m) - 1}{(E_{GNP}/E_m) + \xi_l^{GNP}}, \\ \eta_w^{GNP} &= \frac{(E_{GNP}/E_m) - 1}{(E_{GNP}/E_m) + \xi_w^{GNP}} \end{aligned} \quad (16)$$

در روابط فوق، طول، ضخامت و ارتفاع نانوذرات گرافنی به ترتیب با l_{GNP} ، t_{GNP} و W_{GNP} نشان داده شده است. برای مشخص کردن سایر خصوصیات مکانیکی نانوکامپوزیت، از مدل میکرومکانیکی قانون اختلاط به دلیل سهولت استفاده و دقت در تخمین این خصوصیات استفاده می‌شود. بر اساس این قانون، چگالی و ضریب پواسون موثر از روابط زیر تبعیت می‌کنند:

$$\rho_1 = \rho_{GNP} V_{GNP} + \rho_m V_m, \quad (17)$$

$$\nu_1 = \nu_{GNP} V_{GNP} + \nu_m V_m, \quad (18)$$

همانگونه که تخریل بر اساس الگوهای مختلف در راستای ضخامت ورق مورد بررسی قرار گرفت، پراکندگی نانوذرات گرافنی تقویت کننده نیز در راستای ضخامت بر اساس الگوهای مختلفی شامل الگوی متقارن، نامتقارن و یکنواخت صورت می‌گیرد. انواع الگوهای پراکندگی نانوذرات گرافنی-ها، بر کسر حجمی آن‌ها تاثیر می‌گذارد. یعنی:

$$V_{GNP} = S_f^i \Gamma_j(z) \quad (19)$$

که در این رابطه، $\Gamma(z)$ الگوی توزیع نانوذرات گرافنی است، z بیانگر نوع آن و i مربوط به الگوی توزیع تخریل است. بر این اساس و برای پراکندگی متقارن نانوذرات گرافنی در راستای ضخامت ورق می‌توان نوشت:

$$\Gamma_1(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (20)$$

در صورتیکه نانوذرات گرافنی در راستای ضخامت به صورت نامتقارن پراکنده شده باشند، تابع الگوی پراکندگی آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\Gamma_2(z) = 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (21)$$

و در شرایطی که به صورت یکنواخت پراکنده شده باشند:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] r dr d\theta dz \quad (31)$$

با جایگذاری مولفه‌های میدان جابجایی که در رابطه (۱) معرفی شدند در رابطه فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta T = \int \left\{ \begin{aligned} & \left(I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r \right) \delta u + \\ & \left(I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta \right) \delta v + \\ & \left(I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w \right) \delta w + \\ & \left(I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right) \delta \psi_r + \\ & \left(I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v \right) \delta \psi_\theta \end{aligned} \right\} dr d\theta \quad (32)$$

که در آن:

$$\{I_0, I_1, I_2\} = \int \rho(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (33)$$

همانگونه که در ابتدای بخش ۲ گفته شد، ورق روی بستر الاستیکی قرار دارد که با مدل پاسترناک شبیه سازی شده است. مدل پاسترناک شامل فنرها و لایه برشی است که نیرویی به سازه اعمال می‌کند [۴۶]. پس کار خارجی اعمالی بر ورق، ناشی از وجود بستر الاستیک پاسترناک و همچنین نیروی آبرودینامیکی وارد بر سازه است. کار ناشی از بستر الاستیک، با استفاده از رابطه (۳۴) بدست می‌آید [۴۷]:

$$W_{Found.} = \frac{1}{2} \int_r \int_\theta [(K_1 w - K_2 \nabla^2 w) w] r dr d\theta \quad (34)$$

که در این رابطه، ضریب فنریت با K_1 و ضریب لایه برشی با K_2 نمایش داده شده‌اند؛ همچنین عملگر لاپلاسین با نماد ∇^2 نشان داده شده است؛ بنابراین، با محاسبه تغییرات ناشی از کار بستر الاستیک پاسترناک، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta W_{Found.} = \int_r \int_\theta \left[-r K_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w \right) - K_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} w \right) + r K_1 w \right] \delta w dr d\theta \quad (35)$$

می‌شود. بر اساس اصل همپلتون، تغییرات تفاضل انرژی‌های سیستم (کرنشی و جنبشی) و کار ناشی از نیروهای خارجی در یک بازه زمانی معین، همواره برابر صفر است [۴۳]:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta U - \delta T - \delta W_{ext}] dt = 0 \quad (27)$$

در رابطه (۲۷)، U و T انرژی‌های جنبشی و کرنشی بوده و W_{ext} کار ناشی از نیروهای خارجی اعمالی به سازه است. برای بدست آوردن انرژی کرنشی ورق قطاعی تحت بررسی از رابطه (۲۸) استفاده می‌شود [۴۴]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) r dr d\theta dz; \quad i, j = r, \theta, z \quad (28)$$

که با جایگذاری کرنش‌های معرفی شده در رابطه (۳) در این رابطه و جدا کردن انتگرال نسبت به z ، برای تغییرات انرژی کرنشی می‌توان نوشت:

$$\delta U = \int \left\{ \begin{aligned} & \left(-\frac{\partial}{\partial r} N_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{r\theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{r} - \frac{N_{rr}}{r} \right) \delta u + \\ & \left(-\frac{\partial}{\partial r} N_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\theta\theta} - 2 \frac{N_{r\theta}}{r} \right) \delta v \\ & \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta - \frac{Q_r}{r} - \frac{\partial}{\partial r} Q_r \right) \delta w + \\ & \left(-\frac{M_{rr}}{r} + \frac{M_{\theta\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial r} M_{rr} + Q_r \right) \delta \psi_r \\ & \left(-\frac{\partial}{\partial r} M_{r\theta} - 2 \frac{M_{r\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta\theta} + Q_\theta \right) \delta \psi_\theta \end{aligned} \right\} dr d\theta \quad (29)$$

که نتیجه‌های تنش به کار رفته در معادله (۲۹)، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{N_{rr}, M_{rr}\} &= \int \sigma_{rr} \{1, z\} dz, \\ \{N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}\} &= \int \sigma_{\theta\theta} \{1, z\} dz, \\ \{N_{r\theta}, M_{r\theta}\} &= \int \sigma_{r\theta} \{1, z\} dz, \\ Q_r &= \int \sigma_{rz} dz, \\ Q_\theta &= \int \sigma_{\theta z} dz \end{aligned} \quad (30)$$

همچنین برای محاسبه تغییرات انرژی جنبشی سیستم، رابطه زیر را می‌توان مورد استفاده قرار داد [۴۵]:

$$-\frac{\partial}{\partial r} N_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{\theta\theta} - 2 \frac{N_{r\theta}}{r} + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta = 0, \quad (39)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta - \frac{Q_r}{r} - \frac{\partial}{\partial r} Q_r - (K_2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \left(\lambda \cos \theta - \frac{K_2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} w - \left(\frac{1}{r^2} K_2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w - (\lambda \sin \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w + K_1 w + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0, \quad (40)$$

$$-\frac{M_{rr}}{r} + \frac{M_{\theta\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial r} M_{rr} + Q_r + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0, \quad (41)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} M_{r\theta} - 2 \frac{M_{r\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta\theta} + Q_\theta + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v = 0 \quad (42)$$

و برای شرایط مرزی نیز:

$$([N_{rr}]_{n_r} + [N_{r\theta}]_{n_\theta}) = 0 \quad \text{or} \quad u = 0 \quad (43)$$

$$([N_{r\theta}]_{n_r} + [N_{\theta\theta}]_{n_\theta}) = 0 \quad \text{or} \quad v = 0 \quad (44)$$

$$([Q_r]_{n_r} + [Q_\theta]_{n_\theta}) = 0 \quad \text{or} \quad w = 0 \quad (45)$$

$$([M_{rr}]_{n_r} + [M_{r\theta}]_{n_\theta}) = 0 \quad \text{or} \quad \psi_r = 0 \quad (46)$$

$$([M_{r\theta}]_{n_r} + [M_{\theta\theta}]_{n_\theta}) = 0 \quad \text{or} \quad \psi_\theta = 0 \quad (47)$$

با استفاده از منته‌های تنش معرفی شده در رابطه

(۳۰) و با بازنویسی معادلات (۳۸) الی (۴۲) و شرایط مرزی

(۴۳) الی (۴۷) بر حسب مولفه‌های جابجایی، معادلات حاکم به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$-(A_1) \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \left(\frac{A_7}{r} - \frac{A_3}{r} - \frac{A_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} u + \left(\frac{A_9}{r^2} \right) u - \left(\frac{A_{13}}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \left(\frac{A_9}{r^2} + \frac{A_{13}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} v - \left(\frac{A_3}{r} + \frac{A_{13}}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} v - (A_2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_r + \left(\frac{A_8}{r} - \frac{A_2}{r} - \frac{A_4}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + \left(\frac{A_{10}}{r^2} \right) \psi_r - \left(\frac{A_{14}}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi_r + \left(\frac{A_{10}}{r^2} + \frac{A_{14}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta - \left(\frac{A_4}{r} + \frac{A_{14}}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \psi_\theta + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r = 0, \quad (48)$$

$$-\left(\frac{A_{13}}{r^2} + \frac{A_9}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} u - \left(\frac{A_{13}}{r} + \frac{A_7}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} u - (A_{13}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} v - \left(\frac{A_{13}}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} v + \left(\frac{A_{13}}{r^2} \right) v - \left(\frac{A_9}{r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v - \left(\frac{A_{10}}{r^2} + \frac{A_{14}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r - \left(\frac{A_{14}}{r} + \frac{A_8}{r} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \psi_r - (A_{14}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_\theta - \left(\frac{A_{14}}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta$$

و برای محاسبه کار ناشی از نیروی آیرودینامیکی بر اساس تئوری مرتبه اول پیستون، عبارت زیر را می‌توان مورد استفاده قرار داد [۴۸]:

$$W_{Aerodyn.} = \frac{1}{2} \int_r \int_\theta \left[\left(\lambda \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} w - \lambda \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w \right) w \right] r dr d\theta \quad (36)$$

که در این رابطه، λ فشار آیرودینامیکی وارده بر ورق می‌باشد. بر اساس تئوری مرتبه اول پیستون، جریان سیال که بر روی ورق اعمال می‌شود آیزنروتروپیک و همچنین به صورت موازی با سطح بوده و همچنین حرکت صفحه در مقایسه با سرعت جریان سیال (که کمتر از ۵ ماخ است) بسیار ناچیز است [۴۹-۵۲]. با محاسبه تغییرات ناشی از کار فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta W_{Aerodyn.} = \int_r \int_\theta \left[\lambda \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} w - \lambda \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w \right] \delta w dr d\theta \quad (37)$$

با جایگذاری سه عبارت بدست آمده برای تغییرات انرژی های کرنشی و جنبشی و همچنین کار ناشی از نیروهای خارجی در اصل همیلتون که در رابطه (۲۷) معرفی شد و با جدا کردن ضرایب مربوط به هر متغیر، معادلات و شرایط مرزی مربوط به حرکت ورق تحت تحلیل بدست خواهند آمد. بر این اساس، معادلات حاکم به صورت زیر نوشته خواهند شد:

$$-\frac{\partial}{\partial r} N_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{r\theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{r} - \frac{N_{rr}}{r} + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r = 0, \quad (38)$$

$$+ \left(\frac{A_{14}}{r^2}\right) \psi_\theta - \left(\frac{A_{10}}{r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi_\theta + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta = 0, \quad (49)$$

$$-(\kappa_f A_{16} + K_2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \left(\lambda \cos \theta - \frac{\kappa_f A_{16}}{r} - \frac{K_2}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} w + K_1 w - \left(\frac{\kappa_f A_{17}}{r^2} + \frac{1}{r^2} K_2\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w - (\lambda \sin \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w - (\kappa_f A_{16}) \frac{\partial}{\partial r} \psi_r - \left(\frac{\kappa_f A_{16}}{r}\right) \psi_r - \left(\frac{\kappa_f A_{17}}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta + I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = 0, \quad (50)$$

$$-(A_2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \left(\frac{A_8}{r} - \frac{A_4}{r} - \frac{A_2}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} u + \left(\frac{A_{10}}{r^2}\right) u - \left(\frac{A_{14}}{r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \left(\frac{A_{14}}{r^2} + \frac{A_{10}}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} v - \left(\frac{A_4}{r} + \frac{A_{14}}{r}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} v + (\kappa_f A_{16}) \frac{\partial}{\partial r} w - (A_5) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_r + \left(-\frac{A_6}{r} + \frac{A_{11}}{r} - \frac{A_5}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + \left(\frac{A_{12}}{r^2} + \kappa_f A_{16}\right) \psi_r - \left(\frac{A_{15}}{r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi_r + \left(\frac{A_{15}}{r^2} + \frac{A_{12}}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta - \left(\frac{A_6}{r} + \frac{A_{15}}{r}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \psi_\theta + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_r + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0, \quad (51)$$

$$-\left(\frac{A_{10}}{r^2} + \frac{A_{14}}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} u - \left(\frac{A_{14}}{r} + \frac{A_8}{r}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} u - (A_{14}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} v - \left(\frac{A_{14}}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} v + \left(\frac{A_{14}}{r^2}\right) v - \left(\frac{A_{10}}{r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v + \left(\frac{\kappa_f A_{17}}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} w - \left(\frac{A_{12}}{r^2} + \frac{A_{15}}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r - \left(\frac{A_{15}}{r} + \frac{A_{11}}{r}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \psi_r - (A_{15}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_\theta - \left(\frac{A_{15}}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta + \left(\frac{A_{15}}{r^2} + \kappa_f A_{17}\right) \psi_\theta - \left(\frac{A_{12}}{r^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi_\theta + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_\theta + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v = 0 \quad (52)$$

و شرایط مرزی بر حسب مولفه‌های جابجایی نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left(\begin{aligned} & \left[r A_1 \frac{\partial}{\partial r} u + A_3 u + A_3 \frac{\partial}{\partial \theta} v + r A_2 \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + A_4 \psi_r + A_4 \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta \right]_{n_r} \\ & + \left[\frac{A_{13}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u + A_{13} \frac{\partial}{\partial r} v - \frac{A_{13} v}{r} + \frac{A_{14}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r + A_{14} \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta - \frac{A_{14} \psi_\theta}{r} \right]_{n_\theta} \end{aligned} \right) = 0 \quad \text{or} \quad u = 0 \quad (53)$$

$$\left(\begin{aligned} & \left[A_{13} \frac{\partial}{\partial \theta} u + r A_{13} \frac{\partial}{\partial r} v - A_{13} v + A_{14} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r + r A_{14} \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta - A_{14} \psi_\theta \right]_{n_r} \\ & + \left[A_7 \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{A_9 u}{r} + \frac{A_9}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + A_8 \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + \frac{A_{10} \psi_r}{r} + \frac{A_{10}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta \right]_{n_\theta} \end{aligned} \right) = 0 \quad \text{or} \quad v = 0 \quad (54)$$

$$\left(\begin{aligned} & \left[r \kappa_f A_{16} \frac{\partial}{\partial r} w + r \kappa_f A_{16} \psi_r \right]_{n_r} \\ & + \left[\frac{\kappa_f A_{17}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w + \kappa_f A_{17} \psi_\theta \right]_{n_\theta} \end{aligned} \right) = 0 \quad \text{or} \quad w = 0 \quad (55)$$

$$\left(\begin{aligned} & \left[r A_2 \frac{\partial}{\partial r} u + A_4 u + A_4 \frac{\partial}{\partial \theta} v + r A_5 \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + A_6 \psi_r + A_6 \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta \right]_{n_r} \\ & + \left[\frac{A_{14}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u + A_{14} \frac{\partial}{\partial r} v - \frac{A_{14} v}{r} + \frac{A_{15}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r + A_{15} \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta - \frac{A_{15} \psi_\theta}{r} \right]_{n_\theta} \end{aligned} \right) = 0 \quad \text{or} \quad \psi_r = 0 \quad (56)$$

$$\left(\begin{aligned} & \left[A_{14} \frac{\partial}{\partial \theta} u + r A_{14} \frac{\partial}{\partial r} v - A_{14} v + A_{15} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_r + r A_{15} \frac{\partial}{\partial r} \psi_\theta - A_{15} \psi_\theta \right]_{n_r} \\ & + \left[A_8 \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{A_{10} u}{r} + \frac{A_{10}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v + A_{11} \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + \frac{A_{12} \psi_r}{r} + \frac{A_{12}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_\theta \right]_{n_\theta} \end{aligned} \right) = 0 \quad \text{or} \quad \psi_\theta = 0 \quad (57)$$

راستای شعاعی) بر اساس این روش به صورت زیر حاصل می‌شود [۵۴]:

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} g_j^{(1)}(x_i) & j \neq i \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)} & j = i \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (60)$$

که در آن، $g_j^{(1)}(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ نام دارد. همچنین برای ضرایب وزنی مراتب بالاتر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^N C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(1)}, \\ C_{ij}^{(3)} &= \sum_{k=1}^N C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(2)}, \\ C_{ij}^{(4)} &= \sum_{k=1}^N C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(3)} \end{aligned} \quad (61)$$

یکی از عوامل مهم در افزایش دقت نتایج در روش تفاضلات مربعی، چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل سوال است. در گذشته، نقاط به صورت یکنواخت در دامنه توزیع و سپس به حل مساله پرداخته می‌شد که نتایج بدست آمده بر اساس آن، دارای مقداری خطا بودند. امروزه، از توزیع نقاط بر اساس الگوی چبیشف-گوس-لوباتو استفاده می‌شود که توزیع نقاط را در دو راستای شعاعی و محیطی به صورت زیر بیان می‌کند [۵۵]:

$$x_i = R_i + \left(\frac{R_o - R_i}{2} \right) \left\{ 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{(N-1)} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (62)$$

$$\theta_j = \frac{\beta}{2} \left\{ 1 - \cos \frac{(j-1)\pi}{(M-1)} \right\}; \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (63)$$

نهایتاً، با گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی بدست آمده به کمک روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته و بازنویسی آن‌ها به صورت ماتریسی، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[M]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = 0 \quad (64)$$

در معادله (۶۴)، ماتریس‌های $[M]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی نام دارند و $\{d\}$ بردار جابجایی

که ضرایب به کار رفته در معادلات حاکم و شرایط مرزی فوق، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{A_1, A_2, A_5\} &= \int Q_{11}\{1, z, z^2\} dz, \\ \{A_3, A_4, A_6\} &= \int Q_{12}\{1, z, z^2\} dz, \\ \{A_7, A_8, A_{11}\} &= \int Q_{21}\{1, z, z^2\} dz, \\ \{A_9, A_{10}, A_{12}\} &= \int Q_{22}\{1, z, z^2\} dz, \\ \{A_{13}, A_{14}, A_{15}\} &= \int Q_{66}\{1, z, z^2\} dz, \\ A_{16} &= \int Q_{55} dz, \\ A_{17} &= \int Q_{44} dz \end{aligned} \quad (58)$$

۴- روش حل

به منظور حل معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج شده، در این پژوهش از بین روش‌های مختلف، از روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته استفاده می‌شود. دلیل این انتخاب، همگرایی سریع نتایج با استفاده از تعداد نقاط کم که به کاهش مدت زمان محاسبات کمک چشم‌گیری می‌کند و همچنین، دقت بسیار خوب نتایج حاصل از آن است. بر اساس روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته، مشتقات تابع از مراتب مختلف، در هر یک از نقاط دامنه حل مساله بر حسب مقدار تابع در کلیه نقاط می‌باشد؛ بنابراین، مشتق مرتبه n ام یک تابع به صورت رابطه (۵۹) نوشته می‌شود [۵۳]:

$$f^{(n)}(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} f(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (59)$$

که در این معادله، $C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی مرتبه n ام مربوط به روش تفاضلات مربعی و N تعداد نقاط در دامنه حل سوال است. با افزایش تعداد نقاط تا مقدار مشخصی، دقت نتایج افزایش پیدا می‌کند. ضریب وزنی مرتبه اول (برای مثال، در

است. لازم به ذکر است که پاسخ‌های غیربدیهی این معادله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی سیستم خواهند بود.

۵- نتایج و بحث

در بخش‌های گذشته با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی، به کمک اصل همیلتون و روش حساب تغییرات، معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوط به یک ورق قطاعی ساخته شده از فوم‌های فلزی که با نانوذرات گرافنی تقویت شده است، استخراج و سپس با استفاده از روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته، گسسته و حل شدند. به منظور اطمینان یافتن از صحت معادلات و شرایط مرزی بدست آمده و همچنین اعمال صحیح روش حل و کد نوشته شده، در این بخش، ابتدا به صحت سنجی نتایج با پژوهش‌های پیشین پرداخته می‌شود؛ ولی از آنجایی که تا کنون پژوهشی با چنین مشخصاتی صورت نگرفته است، به ناچار مجبور به چشم‌پوشی از برخی خصوصیات سازه شده تا نتایج با کارهای گذشته قابل مقایسه شوند. بدین منظور، از اثر تقویت کنندگی نانوذرات گرافنی چشم‌پوشی کرده و نتایج برای یک ورق قطاعی ساخته شده از مواد متخلخل، در غیاب بستر الاستیک بدست آورده خواهند شد. نتایج بدست آمده، که در جدول ۱ ارائه شده‌اند، با در نظر گرفتن ضریب تخلخل برابر ۰/۲ و توزیع متقارن تخلخل، زاویه مرکزی ۱۲۰ درجه، شعاع خارجی ۱ متر و شعاع داخلی ۰/۵ متر، ضخامت ۱۰ سانتی متر، ضریب پواسون ۰/۳، مدول الاستیسیته ۳۸۰ گیگاپاسکال، چگالی ۳۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب، برای شرایط مرزی مختلف و پنج مود ارتعاشی اول بدست آورده و با نتایج استخراج شده از پژوهش بابایی و همکاران [۵۶] و ژائو و همکاران [۵۷]، مقایسه شده‌اند. از بررسی فرکانس‌های بی بعد ($\Omega = \omega \frac{R_0^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}}$) ارائه شده در جدول ۱ می‌توان دریافت که نتایج پژوهش حاضر با دو پژوهش پیشین قرابت بسیار خوبی دارند و از صحت آن‌ها اطمینان حاصل می‌شود. البته اندک اختلاف موجود بین نتایج، ممکن است ناشی از میدان‌های جابجایی انتخابی و یا روش حل و به دنبال آن، تفاوت در کدنویسی باشد.

با تایید دقت نتایج بدست آمده، حال به بررسی نتایج حاصل از این پژوهش پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که زمینه ورق مورد بررسی از جنس مس بوده که با نانوذرات

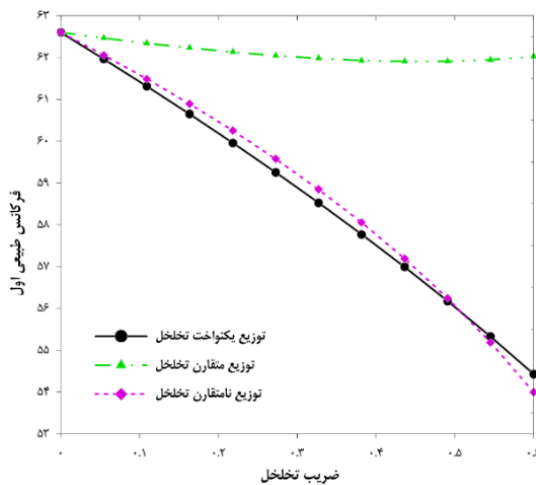
گرافنی تقویت شده است. مشخصات مکانیکی مس و نانوذرات گرافنی، در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۱- مقایسه فرکانس‌های بی بعد بدست آمده در حالت ساده‌تر با پژوهش‌های صورت گرفته پیشین

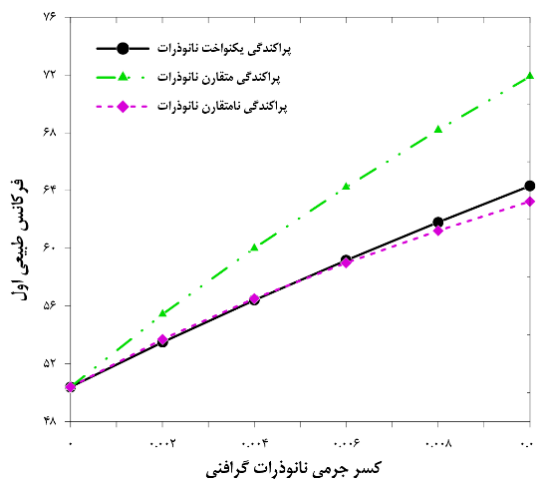
| شرایط مرزی | | | شماره مود ارتعاشی |
|-------------------------|---------------------|-----------------------|-------------------|
| گیردار-گیردار-گیردار | ژائو و همکاران [۵۷] | بابایی و همکاران [۵۶] | |
| پژوهش حاضر | | | |
| ۷۱/۴۹۱۴ | ۷۱/۴۶ | ۷۲/۸۱۴ | ۱ |
| ۷۸/۲۴۴۰ | ۷۸/۲۱۹ | ۷۹/۸۳۹ | ۲ |
| ۹۰/۷۰۱۳ | ۹۰/۶۷۷ | ۹۳/۰۸۱ | ۳ |
| ۱۰۸/۶۴۴۳ | ۱۰۸/۶۱۹ | ۱۱۲/۵۱۷ | ۴ |
| ۱۳۰/۸۷۴۸ | ۱۳۰/۸۵۷ | ۱۳۷/۰۲۱ | ۵ |
| گیردار-آزاد-گیردار-آزاد | | | |
| ۶۹/۲۲۹۲ | ۶۹/۱۶۸ | ۷۰/۴۷۵ | ۱ |
| ۷۰/۲۴۶۲ | ۷۰/۱۵۰ | ۷۱/۴۴۵ | ۲ |
| ۷۴/۳۹۹۱ | ۷۴/۳۴۵ | ۷۵/۶۵۰ | ۳ |
| ۸۲/۶۴۸۶ | ۸۲/۵۹۸ | ۸۴/۱۵۸ | ۴ |
| ۹۶/۰۲۳۸ | ۹۶/۰۴۹ | ۹۸/۳۷۲ | ۵ |
| ساده-ساده-ساده-ساده | | | |
| ۴۰/۵۵۶۵ | ۴۰/۵۲۸ | ۴۰/۸۴۸ | ۱ |
| ۵۰/۶۷۲۴ | ۵۰/۶۵۱ | ۵۱/۱۵۸ | ۲ |
| ۵۳/۳۳۲۹ | ۵۳/۳۲۶ | ۵۳/۴۳۹ | ۳ |
| ۶۶/۷۹۹۰ | ۶۶/۷۷۲ | ۶۸/۰۰۰ | ۴ |
| ۷۶/۷۳۴۱ | ۷۶/۷۲۰ | ۷۶/۹۶۱ | ۵ |

همچنین، کلیه نتایج ارائه شده، به جز در مواردی که صراحتاً ذکر شده باشد، با مشخصات زیر بدست آورده شده- اند: ضریب تخلخل ۰/۲، با ۵٪ نانوذرات گرافنی، توزیع متقارن

شکل ۴، به بررسی دو عامل به صورت همزمان پرداخته است؛ نخست کسر جرمی نانوذرات گرافنی و سپس، انواع الگوهای پراکندگی آن‌ها در راستای ضخامت ورق. مشاهده می‌شود که با افزایش کسر جرمی نانوذرات گرافنی که به منزله افزایش مقدار آن‌ها در سازه است، استحکام ورق بیشتر شده و طبیعتاً، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد؛ همچنین از بین سه نوع الگوی پراکندگی نانوذرات گرافنی، مشاهده می‌شود که توزیع متقارن اثر تقویت‌کنندگی بهتری دارد و



شکل ۳- بررسی تاثیر افزایش ضریب تخریب و انواع الگوهای توزیع تخریب بر فرکانس طبیعی اول



شکل ۴- بررسی تاثیر کسر جرمی نانوذرات گرافنی و انواع الگوهای پراکندگی آن‌ها بر فرکانس طبیعی

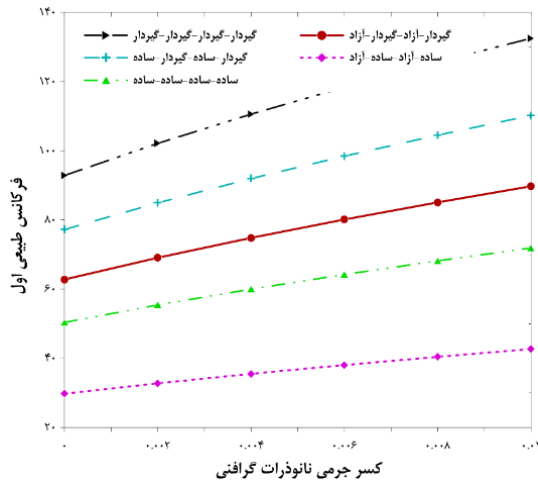
جدول ۲- مشخصات مکانیکی زمینه و تقویت‌کننده سازه

تحت تحلیل [۵۸]

| تقویت‌کننده (نانوگرافن) | زمینه (مس) | خصوصیات |
|-------------------------|------------|----------------------------|
| ۱۰۱۰ | ۱۳۰ | مدول الاستیسیته یانگ (GPa) |
| ۱۰۶۲/۵ | ۸۹۶۰ | چگالی (kg/m ³) |
| ۰/۱۸۶ | ۰/۳۴ | ضریب پواسون |
| ۲/۵ | - | طول (μm) |
| ۱/۵ | - | عرض (μm) |
| ۱/۵ | - | ضخامت (nm) |

حفرات، پراکندگی متقارن نانوذرات گرافنی، زاویه مرکزی ۹۰ درجه، شعاع داخلی ۰/۲ متر و شعاع خارجی ۱ متر، ضخامت ۱ سانتی‌متر و شرایط مرزی چهار طرف گیردار و همچنین تمامی فرکانس‌ها بر حسب هر تریز بیان شده‌اند.

شکل ۳ به بررسی تاثیر افزایش ضریب تخریب بر فرکانس طبیعی اول می‌پردازد. در این شکل که برای هر سه حالت توزیع حفرات در راستای ضخامت ورق رسم شده است، مشاهده می‌شود که در حالت کلی، افزایش ضریب تخریب، سبب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. البته این کاهش، در دو حالت توزیع نامتقارن و یکنواخت تخریب، بیشتر است. به صورت کلی، فرکانس طبیعی یک سیستم با جذر نسبت سفتی به چگالی آن رابطه‌ای مستقیم دارد. ضریب تخریب نیز بیانگر فضای حفره‌های یک جسم، نسبت به کل فضای آن است و افزایش آن، نشانگر افزایش فضای حفره‌ها است. بنابراین، افزایش ضریب تخریب سبب کاهش سفتی سیستم می‌شود. در عین حال، با افزایش ضریب تخریب، چگالی جسم نیز کاهش می‌یابد؛ ولی کاهش سفتی، بیش از کاهش چگالی است و در مجموع، نسبت سفتی به چگالی کاهش می‌یابد که به دنبال آن، سبب کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. همچنین همانگونه که گفته شد، این شکل برای هر سه حالت توزیع تخریب رسم شده است که مشاهده می‌شود حالت متقارن، به واسطه سفتی بیشتری که در سطوح دارد، با افزایش تخریب، کمتر دچار کاهش فرکانس می‌شود.



شکل ۶- مقایسه تاثیر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی اول بر حسب کسر جرمی نانوذرات گرافنی

شرایط مرزی ترکیبی از دو نوع آزاد و تکیه گاه ساده هستند، فرکانس‌های طبیعی سیستم در کمترین مقدار خود قرار دارند.

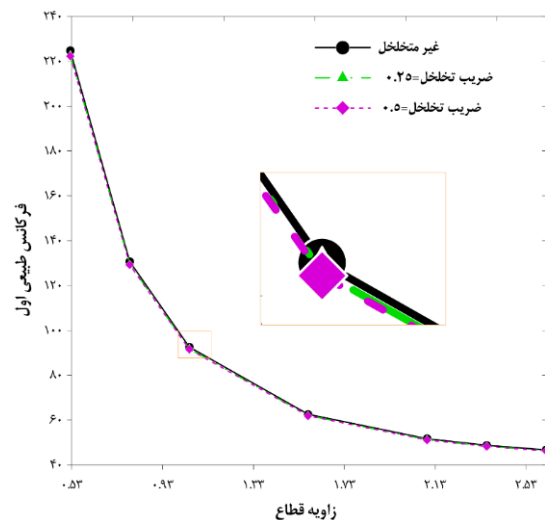
در شکل ۷، فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت طول به ضخامت نانوذرات گرافنی ارائه شده‌اند. در واقع در این شکل، به بررسی تاثیر یکی از ویژگی‌های هندسی نانوذرات گرافنی پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که هر چقدر نسبت طول به ضخامت نانوذرات بیشتر شود، به واسطه افزایش استحکام آن‌ها و به دنبال آن، افزایش استحکام کل سازه، فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابند؛ همچنین در این شکل، تاثیر یکی از ویژگی‌های هندسی کل سازه، یعنی نسبت شعاع‌ها نیز بررسی شده است. با توجه به این پارامتر، می‌توان دریافت که افزایش نسبت شعاع خارجی به داخلی، به واسطه آنکه باعث کاهش صلبیت سازه می‌شود، فرکانس طبیعی سیستم را نیز کاهش می‌دهد.

تاثیر وجود یا عدم وجود بستر الاستیک و همچنین نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق در شکل ۸ مورد تحلیل قرار گرفته است. همانگونه که انتظار می‌رفت، افزودن بستر الاستیک به سازه، فارغ از نوع آن، سبب افزایش صلبیت آن و به تبع آن، افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود؛ همچنین در حالتی که بستر الاستیک اضافه شده شامل فنرها و لایه برشی به صورت همزمان باشد (مدل پاسترناک)، فرکانس‌های طبیعی مقادیر بیشتری نسبت به حالتی که بستر

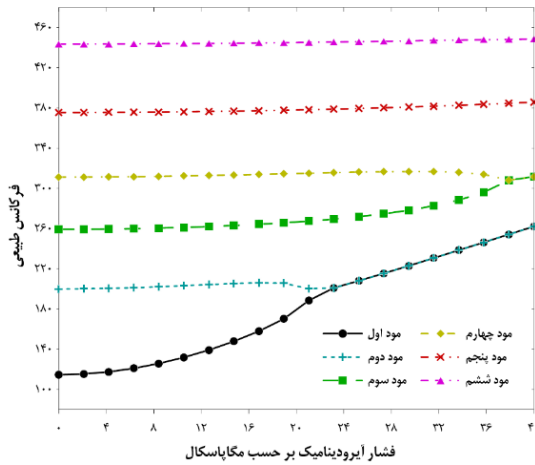
باعث می‌شود که فرکانس‌های طبیعی سازه نسبت به دو حالت دیگر، بیشتر باشد.

اثر افزایش زاویه مرکزی ورق قطاعی در شکل ۵ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در این شکل که برای دو حالت متخلخل و غیر متخلخل رسم شده است، مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه مرکزی ورق از $0/53$ رادیان به بالا، فرکانس‌های سازه به طور محسوسی کاهش پیدا می‌کنند. دلیل این امر، کاهش صلبیت سازه است؛ همچنین، با وجود اینکه مقادیر فرکانس طبیعی در دو حالت متخلخل و غیر متخلخل نزدیک به یکدیگر هستند، ولی با این حال مشاهده می‌شود که سازه متخلخل، نسبت سازه غیر متخلخل دارای فرکانس‌های کمتری است و هر چه ضریب تخلخل بیشتر شود، مقدار فرکانس طبیعی نیز کمتر می‌شود. یافته‌های حاصل از شکل ۴، موارد موجود در نتایج پیشین را تایید می‌کنند.

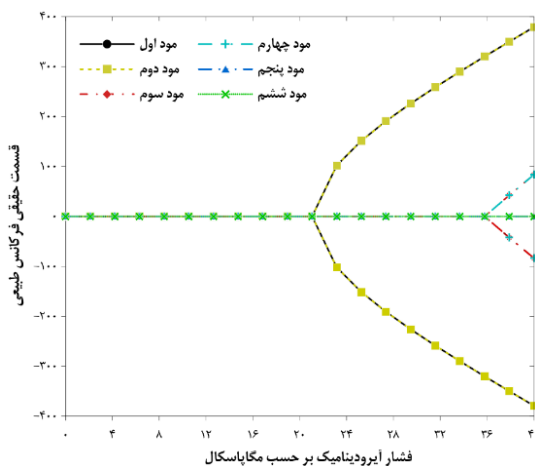
شکل ۶، پنج شرط مرزی مختلف برای لبه‌های ورق قطاعی را مورد تحلیل و بررسی قرار داده است و نتایج مربوط به فرکانس طبیعی اول را برای هر کدام از این شرایط مرزی، ارائه داده است. همانگونه که انتظار می‌رفت، در حالتی که هر چهار لبه ورق دارای شرایط مرزی گیردار باشند، فرکانس سازه بیشترین مقدار خود را دارد و هر چه تقید لبه‌ها کمتر شود، فرکانس نیز کاهش می‌یابد. به طوریکه در حالتیکه



شکل ۵- بررسی تاثیر افزایش زاویه مرکزی قطاع بر فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف ضریب تخلخل



(الف)

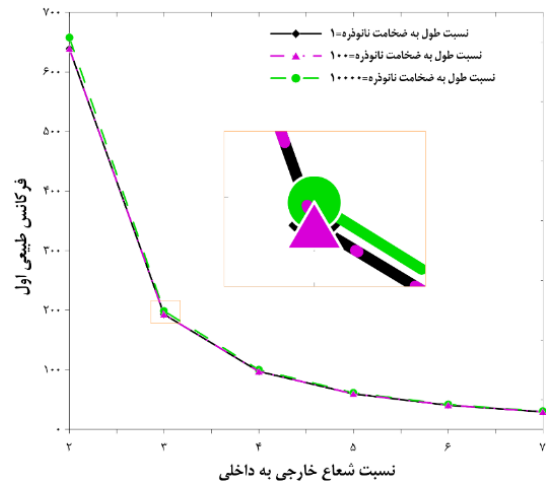


(ب)

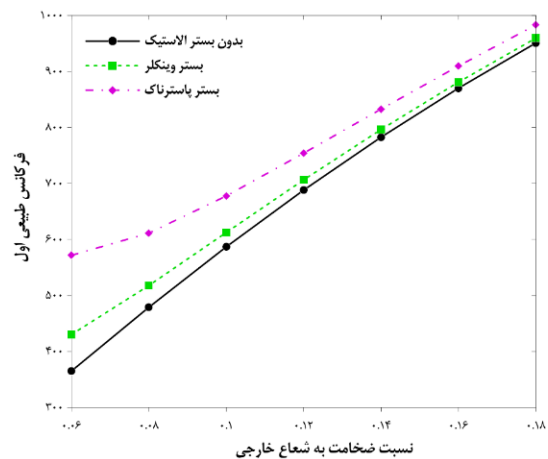
شکل ۹- مقادیر فرکانس طبیعی و قسمت حقیقی آن برای شش مود ارتعاشی اول و مشخص نمودن فشار بحرانی آیرودینامیک سازه

مگاپاسکال می‌شود، نوسانات سازه ناپایدار می‌شود که به این فشار، فشار بحرانی گفته می‌شود؛ همچنین این نقطه روی شکل ۹-ب نیز قابل مشاهده است. به دلیل میرایی ناشی از جریان سیال (میرایی آیرودینامیک) تا پیش از فشار بحرانی دمپینگ برابر صفر است.

شکل های ۱۰-الف و ۱۰-ب مشابه شکل ۹ ولی برای کسر جرمی متفاوت نانوذرات گرافنی هستند. با مقایسه شکل ۱۰ با شکل ۹ می‌توان دریافت که با افزایش کسر جرمی نانوذرات گرافنی، فشار بحرانی آیرودینامیکی مورد نیاز برای ناپایدار شدن سازه، از ۲۳/۱۵۷۹ مگاپاسکال به ۲۹/۴۷۳۷



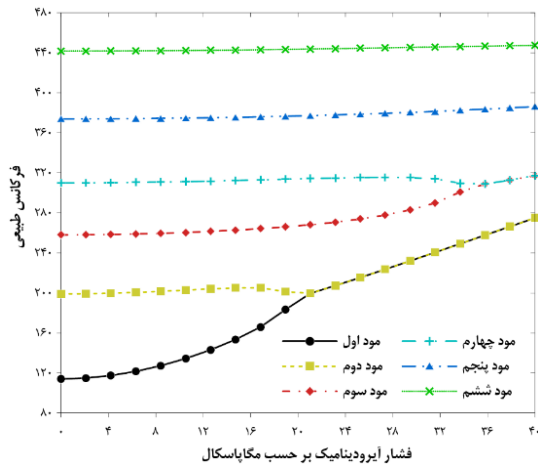
شکل ۷- بررسی تاثیر نسبت طول به ضخامت نانوذرات گرافنی بر فرکانس طبیعی بر حسب نسبت شعاعها



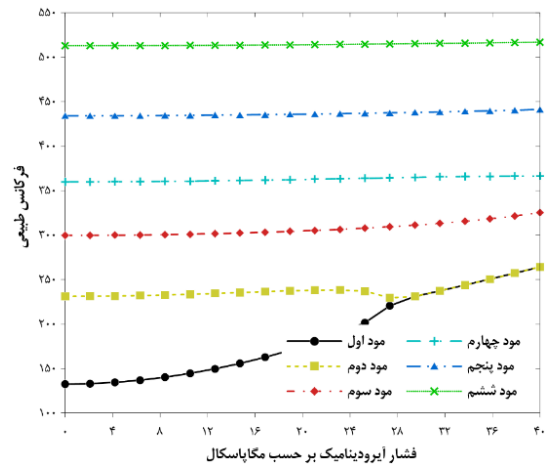
شکل ۸- بررسی تاثیر حالات مختلف وجود یا عدم وجود بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی سازه

فقط دارای فنرها باشد (مدل وینکلر) دارند؛ همچنین با توجه به افزایش استحکام ورق بخاطر افزایش نسبت ضخامت به شعاع آن، همانگونه که انتظار می‌رفت، فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش یافتند.

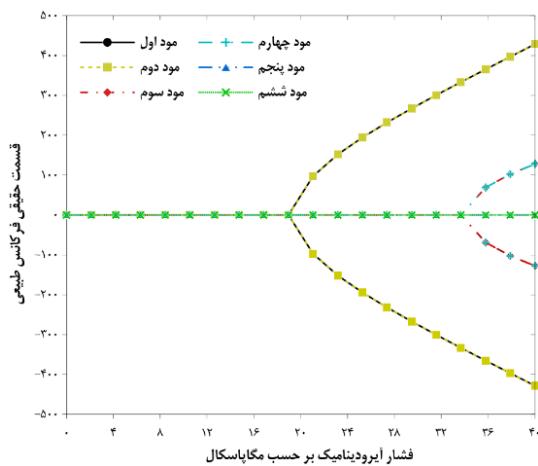
شکل های ۹-الف و ۹-ب، به ترتیب به بیان فرکانس‌های طبیعی و قسمت حقیقی آن برای شش مود ارتعاشی اول بر حسب فشار آیرودینامیکی وارده بر سازه بر حسب مگاپاسکال می‌پردازند. با مشاهده این شکل می‌توان دریافت که از نقطه‌ای که فشار آیرودینامیکی وارده بر سازه برابر با ۲۳/۱۵۷۹



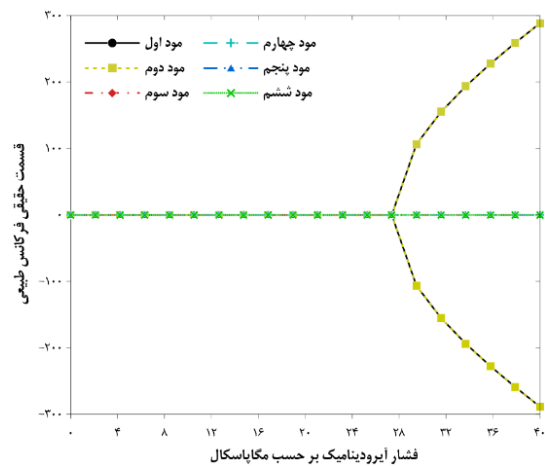
(الف)



(الف)



(ب)



(ب)

شکل ۱۱- تاثیر افزایش ضریب تخلخل بر فشار بحرانی آبرودینامیکی سازه

شکل ۱۰- بررسی تاثیر افزایش کسر جرمی نانوذرات گرافنی بر فشار بحرانی آبرودینامیکی سازه تحت تحلیل

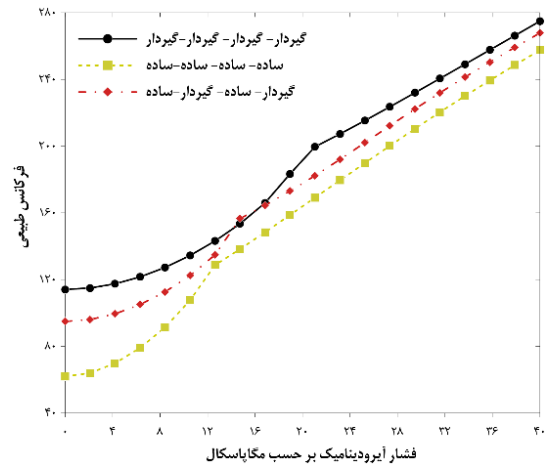
شکل‌های ۱۲-الف و ۱۲-ب به بیان تاثیر شرایط مرزی مختلف بر فشار بحرانی آبرودینامیک می‌پردازند. بر اساس شکل ۱۲-الف، فشار بحرانی آبرودینامیکی مورد نیاز برای ناپایدار شدن ورق در شرایط مرزی ۴ طرف گیردار، برابر ۲۱/۰۵۲۶ مگاپاسکال، شرایط مرزی گیردار- ساده- گیردار- ساده برابر ۱۴/۷۳۶۸ مگاپاسکال و در شرایط مرزی ۴ طرف ساده برابر ۱۲/۶۳۱۶ مگاپاسکال است؛ بنابراین نتیجه می‌شود که هر چه لبه‌های سازه مقیدتر شوند، سبب پایدارتر شدن آن می‌شود؛ همچنین این مساله را می‌توان در شکل ۱۲-ب نیز مشاهده کرد.

مگاپاسکال افزایش پیدا کرده است و نتیجه می‌شود که افزایش کسر جرمی نانوذرات گرافنی، باعث پایدارتر شدن سازه می‌شود.

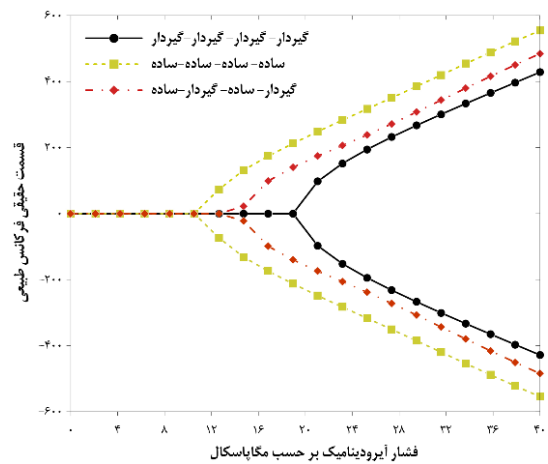
همچنین شکل ۱۱-الف و ۱۱-ب نیز به بررسی اثر افزایش ضریب تخلخل از ۰/۲ به ۰/۴ بر رفتار آبرودینامیکی سازه می‌پردازد. در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که فشار بحرانی آبرودینامیکی مورد نیاز برای ناپایدار شدن ورق، برابر ۲۱/۰۵۲۶ مگاپاسکال است که با مقایسه با شکل ۹ نتیجه می‌شود که افزایش ضریب تخلخل در سازه، سبب ناپایدارتر شدن آن می‌شود.

به کمک دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و پیستون مرتبه اول، روابط سینماتیکی و آیرودینامیکی بیان شدند و پس از آن، معادلات حاکم و شرایط مرزی با بهره‌گیری از اصل همیلتون برای سیستم‌های دینامیکی استخراج شدند. گسسته‌سازی معادلات و شرایط مرزی بدست آمده به وسیله روش تفاضلات مربعی تعمیم یافته صورت گرفت و پس از اعتبارسنجی نتایج در حالتی ساده تر با پژوهش‌های پیشین صورت گرفته، نتایج زیر به عنوان مهم‌ترین یافته‌های این تحلیل، حاصل شدند:

- افزایش ضریب تخلخل که بیانگر فضای حفره‌ها به فضای کل جسم است، به واسطه کاهش سفتی ورق، باعث کاهش فرکانس‌های آن نیز می‌شود. لازم به ذکر است که این کاهش فرکانس، در دو توزیع نامتقارن و یکنواخت تخلخل بیشتر است و توزیع متقارن، به واسطه دارا بودن سطوح سفت‌تر، تاثیر کمتری می‌پذیرد.
- افزودن نانوذرات گرافنی، فارغ از نوع پراکندگی آن‌ها، باعث افزایش سفتی و به دنبال آن، افزایش فرکانس‌های سازه می‌شود.
- از بین ۳ الگوی بررسی شده برای پراکندگی نانوذرات گرافنی، مشاهده شد که الگوی متقارن، بهترین اثر را در تقویت‌کنندگی سازه داشته و فرکانس‌های بالاتری را دارد.
- افزایش درصد جرمی نانوذرات گرافنی از ۲٪ به ۵٪، سبب افزایش حدوداً ۲۷ درصدی فشار بحرانی آیرودینامیک می‌شود.
- افزایش ضریب تخلخل از ۰/۲ به ۰/۴ سبب کاهش ۹ درصدی فشار آیرودینامیک بحرانی می‌شود.
- همچنین افزایش نسبت طول به ضخامت نانوذرات گرافنی، سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود. دلیل این امر، افت سفتی سازه است.
- افزایش زاویه مرکزی قطاع، سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود.
- در حالت کلی، افزودن بستر الاستیک به سازه، سبب افزایش صلبيت آن و در ادامه، افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود؛ همچنین این افزایش در مدل پاسترناک، بخاطر وجود فنرها و



(الف)



(ب)

شکل ۱۲- تاثیر شرایط مرزی مختلف بر فشار بحرانی آیرودینامیکی سازه

۶- نتیجه گیری

پژوهش حاضر، به بررسی رفتار آیرودینامیکی و ارتعاشی یک ورق قطاعی حلقوی پرداخته است که از فوم‌های فلزی ساخته شده و با نانوذرات گرافنی تقویت شده است. ورق مورد تحلیل، روی بستر الاستیکی قرار دارد که با مدل پاسترناک شبیه سازی شده و شامل فنرها و لایه برشی می‌باشد. خواص موثر سازه تحت میدان تصادفی گاوسی، و همچنین با بهره‌گیری از دو مدل میکرومکانیکی هالپین-تسای و قانون اختلاط بدست آورده شدند. لازم به ذکر است که توزیع حفرات و همچنین پراکندگی نانوذرات گرافنی در راستای ضخامت ورق، بر اساس الگوهای تعریف شده، متغیر هستند.

- [10] Polit O, Anant C, Anirudh B, Ganapathi M (2019) Functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite curved beams: Bending and elastic stability using a higher-order model with thickness stretch effect. *Compos Part B Eng* 166:310–327.
- [11] Wang J, Li Z, Fan G, et al (2012) Reinforcement with graphene nanosheets in aluminum matrix composites. *Scr Mater* 66:594–597.
- [12] Chatterjee S, Wang JW, Kuo WS, et al (2012) Mechanical reinforcement and thermal conductivity in expanded graphene nanoplatelets reinforced epoxy composites. *Chem Phys Lett* 531:6–10.
- [13] Chen D, Yang J, Kitipornchai S (2017) Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams. *Compos Sci Technol* 142:235–245.
- [14] Abdollahi Azghan M, Hosseini Abbandanak SN, Amirian U, Alizadeh A (2020) Effect of Functionalized Graphene Nanoplates on the Mechanical Properties of Vinyl Ester/ Glass Fibers Composite. *J Solid Fluid Mech* 10:1–14.
- [15] Detournay E, Cheng AH-D (1995) Fundamentals of poroelasticity. In: *Analysis and design methods*. Elsevier, pp 113–171.
- [16] Bo J (1999) The vertical vibration of an elastic circular plate on a fluid-saturated porous half space. *Int J Eng Sci* 37:379–393.
- [17] Leclaire P, Horoshenkov K V., Swift MJ, Hothersall DC (2001) The vibrational response of a clamped rectangular porous plate. *J Sound Vib* 247:19–31.
- [18] Ebrahimi F, Habibi S (2016) Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate. *Steel Compos Struct* 20:205–225.
- [19] Chen D, Yang J, Kitipornchai S (2016) Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *Int J Mech Sci* 108–109:14–22.
- [20] Chen D, Kitipornchai S, Yang J (2016) Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-Walled Struct* 107:39–48.
- [21] Wang YQ (2018) Electro-mechanical vibration analysis of functionally graded piezoelectric porous plates in the translation state. *Acta Astronaut* 143:263–271.
- [22] Rezaei AS, Saidi AR (2015) Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Compos Struct* 134:1051–1060.
- [23] Rezaei AS, Saidi AR (2016) Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates. *Compos Part B Eng* 91:361–370.
- لایه برشی به صورت همزمان، بیش از مدل وینکلر است.
- با بررسی تاثیر شرایط مرزی مختلف بر نتایج، مشاهده شده در حالتی که ورق در هر چهار لبه گیردار باشد، فرکانس‌های آن بیشترین مقدار را دارد و هر چه تقید لبه‌ها کمتر شود، فرکانس‌های آن نیز کاهش می‌یابد.
- همچنین مشاهده شد که هر چه لبه‌های سازه مقیدتر باشند (یعنی گیردار باشند)، پایداری سازه بیشتر از حالاتی است که تقید لبه‌ها کمتر باشد. برای مثال، شرایط مرزی ۴ طرف گیردار نسبت به شرایط مرزی ۴ طرف ساده، حدود ۴۰ درصد پایداریتر است.

۷- مراجع

- [1] Terzaghi K von (1931) The influence of elasticity and permeability on the swelling of two-phase systems. *Colloid Chem* 3:65–88.
- [2] Biot MA (1964) Theory of buckling of a porous slab and its thermoelastic analogy. *J Appl Mech Trans ASME* 31:194–198.
- [3] Banhart J (2001) Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Prog Mater Sci* 46:559–632.
- [4] Guicking D, Lorenz E (1984) An active sound absorber with porous plate. *J Vib Acoust Trans ASME* 106:389–392.
- [5] Lefebvre LP, Banhart J, Dunand DC (2008) Porous metals and metallic foams: Current status and recent developments. *Adv Eng Mater* 10:775–787.
- [6] Chakraborty S, Dey T, Kumar R (2019) Stability and vibration analysis of CNT-Reinforced functionally graded laminated composite cylindrical shell panels using semi-analytical approach. *Compos Part B Eng* 168:1–14.
- [7] Ke LL, Yang J, Kitipornchai S (2010) Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Compos Struct* 92:676–683.
- [8] Heshmati M, Yas MH (2013) Free vibration analysis of functionally graded CNT-reinforced nanocomposite beam using Eshelby-Mori-Tanaka approach. *J Mech Sci Technol* 27:3403–3408.
- [9] Novoselov KS, Geim AK, Morozov S V., et al (2004) Electric field in atomically thin carbon films. *Science* (80-) 306:666–669.

- [35] Kim J, Żur KK, Reddy JN (2019) Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates. *Compos Struct* 209:879–888.
- [36] Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Arefi M (2019) Free vibration analysis of micro plate reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets based on modified strain-gradient formulation. *J Sandw Struct Mater* 109963621983930.
- [37] Mohammadimehr M, Emdadi M, Rousta Navi B (2020) Dynamic stability analysis of microcomposite annular sandwich plate with carbon nanotube reinforced composite facesheets based on modified strain gradient theory. *J Sandw Struct Mater* 22:1199–1234.
- [38] Mindlin RD (1968) Polarization gradient in elastic dielectrics. *Int J Solids Struct* 4:637–642.
- [39] Hashemi S, Jafari AA (2020) Nonlinear Free Vibration Analysis of Bi-directional Functionally Graded Rectangular Plates. *J Solid Fluid Mech* 10:31–52.
- [40] Arshid E, Khorshidvand AR (2018) Free vibration analysis of saturated porous FG circular plates integrated with piezoelectric actuators via differential quadrature method. *Thin-Walled Struct* 125:220–233.
- [41] Arshid E, Amir S, Loghman A (2020) Static and dynamic analyses of FG-GNPs reinforced porous nanocomposite annular micro-plates based on MSGT. *Int J Mech Sci* 180:105656.
- [42] Arshid E, Amir S, Loghman A (2021) Thermal buckling analysis of FG graphene nanoplatelets reinforced porous nanocomposite MCST-based annular/circular microplates. *Aerosp Sci Technol* 106561.
- [43] Khorshidi K, Ghasemi M, Fallah A (2018) Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Microplate in Thermal Environment Based on Exponential Shear Deformation Theory using the Modified Couple Stress Theory. *J Solid Fluid Mech* 8:179–196.
- [44] Wang KF, Wang B, Zhang C (2017) Surface energy and thermal stress effect on nonlinear vibration of electrostatically actuated circular micro-/nanoplates based on modified couple stress theory. *Acta Mech* 228:129–140.
- [45] Jermisittiparsert K, Ghabussi A, Forooghi A, et al (2020) Critical voltage, thermal buckling and frequency characteristics of a thermally affected GPL reinforced composite microdisk covered with piezoelectric actuator. *Mech Based Des Struct Mach*.
- [46] Mamandi A, Mirzaei ghaleh M (2020) Nonlinear Vibration of a Microbeam on a Winkler Foundation and Subjected to an Axial Load using Modified
- [24] Gupta A, Talha M (2018) Influence of Porosity on the Flexural and Free Vibration Responses of Functionally Graded Plates in Thermal Environment. *Int J Struct Stab Dyn* 18:1850013.
- [25] Kiran MC, Kattimani SC (2018) Assessment of porosity influence on vibration and static behaviour of functionally graded magneto-electro-elastic plate: A finite element study. *Eur J Mech A/Solids* 71:258–277.
- [26] Mojahedin A, Jabbari M, Khorshidvand AR, Eslami MR (2016) Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Struct* 99:83–90.
- [27] Farzaneh Joubaneh E, Mojahedin A, Khorshidvand AR, Jabbari M (2015) Thermal buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric sensor-actuator layers under uniform thermal load. *J Sandw Struct Mater* 17:3–25.
- [28] Mojahedin A, Joubaneh EF, Jabbari M (2014) Thermal and mechanical stability of a circular porous plate with piezoelectric actuators. *Acta Mech* 225:3437–3452.
- [29] Xue Y, Jin G, Ma X, et al (2019) Free vibration analysis of porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions using isogeometric approach. *Int J Mech Sci* 152:346–362.
- [30] Barati MR, Zenkour AM (2019) Vibration analysis of functionally graded graphene platelet reinforced cylindrical shells with different porosity distributions. *Mech Adv Mater Struct* 26:1580–1588.
- [31] Li Q, Wu D, Chen X, et al (2018) Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *Int J Mech Sci* 148:596–610.
- [32] Liu H, Wu H, Lyu Z (2020) Nonlinear resonance of FG multilayer beam-type nanocomposites: Effects of graphene nanoplatelet-reinforcement and geometric imperfection. *Aerosp Sci Technol* 98:105702.
- [33] Gao K, Gao W, Chen D, Yang J (2018) Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Compos Struct* 204:831–846.
- [34] Shojaeefard MH, Saeidi Googarchin H, Ghadiri M, Mahinzare M (2017) Micro temperature-dependent FG porous plate: Free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT. *Appl Math Model* 50:633–655.

- [53] Civalek Ö (2004) Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Eng Struct* 26:171–186.
- [54] Shu C (2000) *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer Science & Business Media
- [55] Bert CW, Malik M (1996) Free vibration analysis of thin cylindrical shells by the differential quadrature method. *J Press Vessel Technol Trans ASME* 118:1–12.
- [56] Babaei M, Hajmohammad MH, Asemi K (2020) Natural frequency and dynamic analyses of functionally graded saturated porous annular sector plate and cylindrical panel based on 3D elasticity. *Aerosp Sci Technol* 96:105524.
- [57] Zhao J, Xie F, Wang A, et al (2019) Dynamics analysis of functionally graded porous (FGP) circular, annular and sector plates with general elastic restraints. *Compos Part B Eng* 159:20–43.
- [58] Khorasani M, Soleimani-Javid Z, Arshid E, et al (2020) Thermo-Elastic Buckling of Honeycomb Micro Plates Integrated with FG-GNPs Reinforced Epoxy Skins with Stretching Effect. *Compos Struct* 113430.
- Couple Stress Theory. *J Solid Fluid Mech* 10:181–194.
- [47] Ebrahimi F, Barati MR (2017) Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. *Compos Struct* 159:433–444.
- [48] Lin HG, Cao DQ, Xu YQ (2018) Vibration, Buckling and Aeroelastic Analyses of Functionally Graded Multilayer Graphene-Nanoplatelets-Reinforced Composite Plates Embedded in Piezoelectric Layers. *Int J Appl Mech* 10:1850023.
- [49] Lighthill MJ (2012) Oscillating Airfoils at High Mach Number. *Aerosp Res Cent* 20:402–406.
- [50] Ghoman SS, Azzouz MS (2012) Supersonic Aerothermoelastic Nonlinear Flutter Study of Curved Panels: Frequency Domain. *Aerosp Res Cent* 49:1075–1090.
- [51] Ashley H, Zartarian G (2012) Piston Theory-A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician. *Aerosp Res Cent* 23:1109–1118.
- [52] Forooghi A, Safarpour M, Alibeigloo A (2020) Investigation of Dynamics and Stability Behavior of Axially Moving Micro-Beams with Functionally Graded Property in the Longitudinal Direction. *J Solid Fluid Mech* 10:79–94.