



ارتعاش میرای ورق دوجہتہ با ضخامت متغیر تحت بار شعاعی دلخواہ واقع بر بستر ارتجاعی

عباس حیدری^{۱*} و کاظم قلیزادہ^۲

^۱ استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران

^۲ مربی، گروه مهندسی معماری و شهرسازی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۱۸

چکیده

در این تحقیق، تاثیر محیط ارتجاعی لزج، تغییرات دلخواه خواص مواد در امتداد ضخامت و شعاع، تغییرات خطی و غیر خطی ضخامت، نسبت پواسون، بار شعاعی دلخواه و شرایط مرزی بر فرکانس زاویه‌ای ورق مدور بررسی شده است. از روش طیفی ریتز به دلیل سازگاری با شرایط مرزی و سرعت همگرایی زیاد برای کمینه کردن انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. نوآوری مقاله حاضر، حذف پیچیدگی‌های استفاده از توابع چسبیده یا فرعی، با معرفی پایه‌های تعمیم یافته چندجمله‌ای‌های متعامد لاگر است. به علاوه، برای کاهش تلاش‌های محاسباتی و زمان اجرای کدها، بهینه‌سازی به کمک محاسبه ریشه دترمینان هسین تابع پتانسیل کل بدون نیاز به محاسبه معکوس ماتریس‌های مرتبه بالا در گام‌های تکراری انجام شده است. صحت نتایج مقاله حاضر با مشاهده تطابق بین نتایج با یافته‌های سایر تحقیقات و مشاهده همگرایی روش طیفی ریتز تصدیق شده است. با افزایش شاخص توانی، کاهش ضریب ضخامت، کاهش درجه نامعینی، کاهش نسبت پواسون، افزایش میرایی و کاهش سختی محیط لزج، کاهش مدول ارتجاعی در مجاورت لبه نسبت به مرکز صفحه و اعمال بار فشاری بیشتر در مرکز نسبت به لبه ورق، فرکانس زاویه‌ای کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی: ارتعاش میرا؛ ورق هدفمند دو جهته؛ بار شعاعی دلخواه؛ ضخامت متغیر؛ روش طیفی ریتز

Damped Vibration of Tapered and Bidirectional Graded Plate Subjected to Arbitrary Radial Load Rested on Elastic Medium

A. Heydari^{1*}, K. Gholizadeh²

¹ Assis. Prof., Department of Civil Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

² Lecturer, Department of Architecture and Urban Planning, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

Abstract

In present work, the effects of elastic and viscous medium, arbitrary variation of material properties in transverse and radial directions, linear and nonlinear tapering, Poisson's ratio, arbitrary radial load and various boundary conditions on angular frequency of circular plate are investigated. The total potential energy is minimized by using the spectral Ritz method due to fast convergence and adaptation to different boundary conditions. The novelty of this work is that the difficulties of the employing adhesive or auxiliary functions are resolved by introducing generalized basis of orthogonal Laguerre polynomials. Moreover, the optimization is performed by calculating the determinant root of total potential energy Hessian and eliminating the inverses of high-order matrices in iterative steps. The accuracy of the results has been confirmed by observing convergence and a good agreement between results of current work and previously published works in literature. By increasing the power index and decreasing the taper constant, decreasing indeterminacy degree and Poisson ratio, increasing attenuation and decreasing stiffness, decreasing the elastic modulus at the edge of the plate and applying more compressive load near to the center of the plate, the angular frequency of free vibration will be reduced.

Keywords: Damped Vibration; 2D Graded Plate; Arbitrary Radial Load; Tapering; Spectral Ritz Method.

۱- مقدمه

در علم مواد به مواد نوین و پیشرفته با ساختاری ناهمگن که دارای تغییرات پیوسته در یک یا چند جهت هستند، مواد هدفمند (FGM) گفته می‌شود. خواص مکانیکی این مواد به‌طور پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. تغییرات تدریجی و پیوسته به وسیله تغییر کسر حجمی مصالح تشکیل دهنده مواد هدفمند ایجاد می‌شود. مواد هدفمند به‌طور معمول از دو ماده سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. سرامیک ضریب انتقال حرارت پایین و مقاومت قابل توجه در برابر دمای بالا دارد. از فلز نیز به واسطه چکش خواری آن برای تامین طاقت مورد نیاز عضو سازه‌ای استفاده می‌شود. به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی، مشکلات عدم پیوستگی مواد کامپوزیتی متعارف در مواد هدفمند برطرف می‌شوند. کاهش تمرکز تنش، افزایش مقاومت سایش و بهبود عملکرد سازه‌ای از مزایای مواد هدفمند هستند. از جمله کاربردهای بالقوه و بالفعل مواد هدفمند می‌توان به ابزارهای نوری و پزشکی، مدارهای الکترونیکی، پره‌های توربین، ماشین‌آلات، مخازن، پوشش‌های حرارتی و غیره اشاره کرد [۱].

در تحقیقات اخیر ارتعاش و کماتش سازه‌های هدفمند بررسی شده است [۸-۱]. رضوی و شوشتری در بررسی تحلیلی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و معادلات گانوس، تأثیر متغیرهای مختلف نظیر ابعاد ورق، متغیر بستر و اختلاف پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی روی پاسخ غیرخطی ورق را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۹]. یوسف-زاده و همکاران به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مدور هدفمند در تماس با سیال محدود و تراکم ناپذیر پرداخته و بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه و تئوری میندلین با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و نیروهای برشی به کمک روش طیفی ریتز، فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی را استخراج کرده‌اند [۱۰]. غلامی و انصاری در بررسی ارتعاشات اجباری ورق‌های مستطیلی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی، با استفاده از تکنیک گالرکین اثرات هندسی، دامنه بار و نسبت میرایی بر پاسخ فرکانسی در شرایط تکیه‌گاهی مختلف را بررسی کرده‌اند [۱۱]. غضنفری و نظامی در تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق کامپوزیتی بدنه قطارهای پرسرعت

معادلات حرکت ورق دوسانگرد را بر اساس تئوری فون کارمن استخراج، سپس به کمک روش گالرکین فرکانس‌های غیرخطی چهار مود اول را محاسبه نموده‌اند [۱۲]. مجابی و خیرخواه در بررسی ارتعاشات ورق چند لایه کامپوزیتی یکسرگردار مسلح با عملگرهای سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار، به روش کلاسیک با استفاده از فرمول لیانگ مدلسازی و به روش ریلی ریتز فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرده‌اند [۱۳]. رضایی و ضیائی ارتعاشات آزاد نانو ورق کامپوزیت (سرامیک - فلزی) را در راستای عرضی با استفاده از تئوری کلاسیک و اصل همپلتون مدلسازی نموده و نشان دادند افزایش مقدار متغیر غیرمحملی باعث کاهش مقدار فرکانس طبیعی می‌شود [۱۴]. رحیمی و جعفری ارتعاش آزاد را به کمک روش ریلی ریتز بررسی نموده‌اند [۱۵]. خدمت باز و همکاران ارتعاش آزاد ورق نازک ساخته شده از مواد هدفمند واقع بر بستر الاستیک وینکلر را به کمک روش المان مرتبه بالای دیفرانسیلی مدلسازی نموده‌اند. نتایج تحقیق نشان داد که میزان تغییرات فرکانس طبیعی علاوه بر ضریب سختی بستر به ضخامت، طول و ضریب نسبت تراکم حجمی وابسته است [۱۶].

باقری و همکاران معادلات ارتعاش ورق مرکب به همراه لایه‌های پیزو الکتریک را بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون به دست آورده‌اند. نتایج پژوهش کارآمد بودن روش بدون المان گالرکین در مدلسازی ورق کامپوزیت پیزو الکتریک و نیز اثر کنترل بازخورد در میراندن ارتعاش ورق را نشان داده‌اند [۱۷]. ارتعاش آزاد ورق نازک ناهمسان به روش نوار محدود دقیق بررسی شده است [۱۸]. سعیدی و همکاران معادلات ارتعاش اجباری حالت ماندگار ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند همسانگرد بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و قائم باترا و ویدولی را به دست آورده‌اند [۱۹]. چراغی و همکاران ارتعاش آزاد ورق هدفمند ساخته شده از لایه‌های دارای خواص مگنتوالکتروالاستیک، تحت تاثیر متغیرهای مربوط به سختی بستر ارتجاعی، شاخص تغییرات خواص مواد و لغزش بین لایه‌ای را روی مقادیر فرکانس‌های ورق مورد بررسی قرار داده‌اند [۲۰]. تحقیقات در خصوص ارتعاش ورق‌های هدفمند و ورق‌های ضخیم انجام شده است [۲۱-۲۳].

مدل وینکلر در سال ۱۸۶۷ میلادی ارائه شد. در این

۲- معادلات حاکم

در شکل ۱، یک ورق مدور هدفمند دو جهته دارای ضخامت متغیر با شعاع a نمایش داده شده است. تغییرات مدول ارتجاعی در امتداد ضخامت و شعاع به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته شده است.

$$E(z, r) = E_r(r) \left((E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{t} \right)^n + E_m \right) \quad (1)$$

در رابطه (۱) متغیرهای n, E_c, E_m, E_r, z, r و t به ترتیب ثابت ماده، مدول ارتجاعی سرامیک، مدول ارتجاعی فلز، تغییرات بی‌بعد مدول ارتجاعی (تابع شکل) در امتداد شعاعی، مختصه‌ها در امتداد ضخامت و شعاع در دستگاه مختصات استوانه‌ای و ضخامت صفحه می‌باشند [۲]. با توجه به تغییرات مدول ارتجاعی در امتداد ضخامت ورق، صفحه خنثی دارای فاصله e نسبت به میان صفحه خواهد بود. به دلیل وجود تعادل استاتیکی، انتگرال تنش شعاعی صفحه تحت خمش محض روی ضخامت آن برابر با صفر است؛ در نتیجه متغیر e به صورت رابطه (۲) محاسبه می‌شود. [۱].

$$e = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} E(z, r) z dz / \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} E(z, r) dz \quad (2)$$

صلبیت خمشی ورق به صورت رابطه (۳) است [۱].

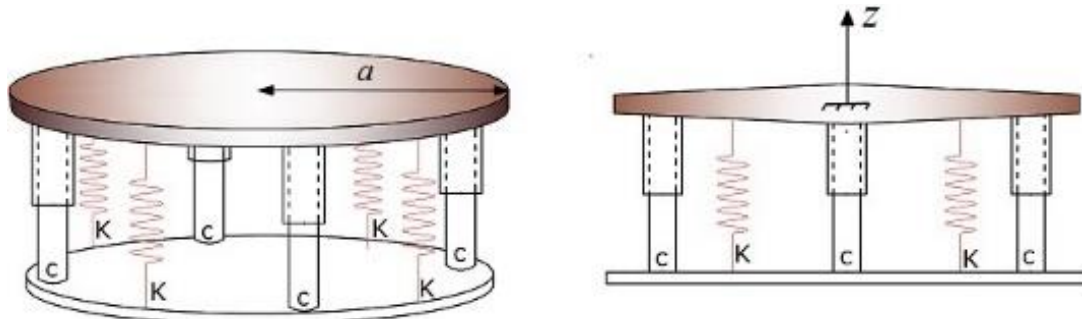
$$D = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E(r, z) z^2 dz}{(1 - \nu)^2} \quad (3)$$

تغییرات ضخامت ورق به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$t = t_0 (1 + \gamma(r/a)^\alpha) \quad (4)$$

در رابطه (۴) متغیرهای γ و α به ترتیب ضریب ضخامت و شاخص توانی ضخامت (تعیین کننده نوع تغییرات خطی یا

مدل، از فنرهای مجزای ارتجاعی مستقل از هم با رفتار خطی برای مدل کردن خاک زیر سازه استفاده شده است. مدل وینکلر خاک را به صورت یک محیط غیرپیوسته با رفتار خطی در نظر می‌گیرد. بنابراین تغییر شکل خاک محدود به زیر سازه بوده و تغییر شکل خاک در اطراف سازه نادیده گرفته می‌شود. صفحه هدفمند دارای ضخامت متغیر است. تغییرات ضخامت بصورت توابع خطی و غیر خطی بیان می‌شوند. بار شعاعی متغیر دلخواه بر صفحه خنثی اعمال شده و تاثیر آن بر تغییر فرکانس زاویه‌ای بررسی شده است. برای تحلیل ارتعاش میرای ورق، انرژی پتانسیل خمشی و بستر وینکلر با انرژی هدر رفته نیروی ناپایستار مربوط به محیط لزوج جمع و به کمک روش عددی طیفی ریتز کمینه شده است. برای ارضاء شرایط مرزی در روش طیفی ریتز غالباً از توابع چسبنده یا توابع فرعی استفاده می‌شود. در این مقاله برای اجتناب از پیچیدگی‌های توابع فرعی در برنامه نویسی و همچنین برای کاهش زمان اجرای برنامه، به جای استفاده از توابع چسبنده، از پایه تعمیم یافته با چندجمله‌ای‌های انتقال یافته متعامد لاگر استفاده شده است. روش طیفی ریتز با پایه‌های متعامد، بدون نیاز به تشکیل معادلات دیفرانسیلی تعادل با حل‌های عددی پیچیده، حل مسئله را با کاهش تلاش‌های محاسباتی امکان پذیر می‌کند. همگرایی و کاهش خطای نسبی با افزایش تعداد ترم‌های چند جمله‌ای در پایه مشاهده شد. انطباق کاملی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج کارهای مشابه انجام یافته در مواردی که همپوشانی وجود دارد، مشاهده و صحت نتایج پژوهش حاضر تصدیق شد. پس از انجام تحلیل‌های عددی نتایج در قالب نمودار و جدول ارائه شده است.



شکل ۱- ورق مدور هدفمند دوجته واقع بر بستر لزوج و ارتجاعی وینکلر

$$\Omega_v = \pi c \omega I \int_0^a w(r)^2 r dr \quad (9)$$

انرژی پتانسیل کل برابر با مجموع انرژی ذخیره شده (کار نیروی پایسته) و انرژی هدر رفته (کار نیروی ناپایسته) بوده و به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود [۲].

$$\Pi = U_F + U_b + T + \Omega_p + \Omega_v \quad (10)$$

۳- تحلیل ارتعاش به کمک روش طیفی ریتز

در روش طیفی ریتز بر خلاف روش المان محدود از تابع حل تقریبی پیوسته‌ای استفاده می‌شود که سراسر محدوده مسئله را پوشش می‌دهد. این تابع تنها در نقاط مرزی شرایط مرزی و طبیعی را ارضاء کرده و برخلاف توابع شکل در روش المان محدود در سایر نقاط محدوده مسئله نیازی به ارضاء قیود خاصی نیست. در روش طیفی ریتز برای ارضاء شرایط مرزی و طبیعی از توابع فرعی یا چسبنده استفاده می‌شود. در این مقاله پیچیدگی‌های مربوط به انتخاب و استفاده از توابع چسبنده مناسب به کمک استفاده از پایه تعمیم یافته برطرف شده است. برای حل مسئله ارتعاش به شیوه‌های سنتی نظیر روش اغتشاش ابتدا باید معادله دیفرانسیل تعادل محاسبه، سپس به کمک روش‌های عددی خاص و با ارضاء قیود موجود، تحلیل ارتعاشی انجام پذیرد. در این تحقیق، پایه تعمیم یافته در روش طیفی ریتز از چند جمله‌ای‌های متعامد لاگر تشکیل یافته است. چند جمله‌ای‌های لاگر پاسخ‌های معادله دیفرانسیل $ry'' + (1-r)y' + ny = 0$ هستند. متغیر n عدد صحیح نامنفی است [۲۴].

$$L_n(r) = (e^r/n!) d^n/dr^n (e^{-r}r^n) \quad (11)$$

چند جمله‌ای‌های لاگر نسبت به تابع وزنی e^{-x} متعامد هستند. مطابق رابطه (۱۲)، در روش طیفی ریتز تغییر شکل خمشی تقریبی شامل پایه لاگر و ضرایب مجهول است. در رابطه (۱۲)، f, g دو چند جمله‌ای لاگر هستند [۲۲].

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx \quad (12)$$

$$w \approx \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1}^T \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}_{1 \times (n+1)} = \xi_0 L_0 + \xi_1 L_1 + \dots + \xi_n L_n \quad (13)$$

غیرخطی ضخامت) می‌باشند. انرژی کرنشی خمشی ذخیره شده در ورق هدفمند دو جهته دارای ضخامت متغیر بر حسب جابجایی خمشی یا برون صفحه‌ای، $w(r)$ و نسبت پواسون، ν به صورت رابطه (۵) نوشته شده است [۱].

$$U_b = \pi \int_0^a D \left(\left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{dw(r)}{dr} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right) dr \quad (5)$$

برای محاسبه رابطه (۵)، بدون در نظر گرفتن کرنش‌ها و تنش‌های برشی از چگالی انرژی ارتجاعی که ناشی از کرنش‌ها و تنش‌های قائم شعاعی و مماسی هستند، روی حجم ورق انتگرال گرفته شده است. انرژی ذخیره شده در فونداسیون وینکلر به کمک انتگرال‌گیری از نصف حاصل‌ضرب پاسخ فونداسیون در جابجایی عرضی ورق روی سطح تماس ورق با محیط ارتجاعی و به صورت رابطه (۶) محاسبه می‌شود. متغیر K ضریب سختی در مدل وینکلر است [۱].

$$U_F = \pi \int_0^a K(w(r))^2 r dr \quad (6)$$

انرژی جنبشی صفحه مدور ناشی از ارتعاش به کمک انتگرال‌گیری از نصف حاصل‌ضرب جرم یک المان از صفحه در سرعت عرضی آن روی حجم صفحه و به صورت رابطه (۷) محاسبه می‌شود. متغیرهای ω و ρ به ترتیب فرکانس زاویه‌ای و چگالی جرمی هستند [۲].

$$T = \pi \int_0^a \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \rho r (I \omega w(r))^2 dz dr \quad (7)$$

انرژی هدر رفته ناشی از بار شعاعی متغیر با محاسبه کار نیروی ناپایسته، به صورت رابطه (۸) محاسبه می‌شود. انرژی هدر رفته برابر با منفی انتگرال حاصل‌ضرب تغییرات مساحت صفحه ناشی از تغییر شکل خمشی در نیروی خارجی اعمالی است. برای محاسبه رابطه (۸)، از دو جمله اول بسط تیلور تابع زیر انتگرال استفاده شده است. متغیر P_0 دامنه بار و متغیر بی‌بعد $p(r)$ تابع شکل است [۱].

$$\Omega_p = -P_0 \pi \int_0^a p(r) \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 r dr \quad (8)$$

انرژی مستهلک محیط لزوج برابر با کار نیروی ناپایسته میراگر بوده و با انتگرال‌گیری روی سطح تماس ورق با محیط لزوج به صورت رابطه (۹) محاسبه می‌شود. ضریب محیط لزوج با نماد c نمایش داده شده است. [۲].

مجهول، انرژی پتانسیل کل کمینه شده و مجموعه‌ای از معادلات همگن حاصل می‌شود. با مشتق‌گیری مجدد از ضرایب مجهول، ماتریس ضرایب مجهول که هسین انرژی پتانسیل کل است، محاسبه می‌شود. برای حصول پاسخ‌های غیر تکراری، دترمینان ماتریس مزبور برابر با صفر قرار داده شده و معادله مشخصه ارتعاشی مطابق رابطه (۲۱) حاصل می‌شود. فرکانس زاویه‌ای اولین مود ارتعاشی، کوچکترین ریشه حقیقی معادله مشخصه ارتعاشی است. با جایگزینی فرکانس زاویه‌ای اولین مود در مجموعه معادلات و محاسبه ضرایب مجهول بر حسب یکی از ضرایب، تغییرشکل خمشی بی‌بعد حاصل می‌شود.

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{(n-2) \times (n-2)} = 0 \quad 3 \leq i, j \leq n \quad (21)$$

۴- بحث و نتیجه‌گیری

برای انجام تحلیل عددی مشخصات مکانیکی ورق مشخصات $E_m = 70GPa$, $E_c = 300GPa$ و $n = 1$ ، مشخصات هندسی $a = 1m$ و $\gamma = 0.1$, $\alpha = 1$, $t_0 = 2mm$ و $\rho_m = 2700$, $\rho_c = 3750$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به قرابت نسبت پواسون فلز و سرامیک، ν ثابت فرض می‌شود. از نرم‌افزار MATLAB برای کدنویسی استفاده شده است. در شکل ۲، تاثیر افزایش تعداد درایه‌های پایه تعمیم یافته لاگر بر دقت نتایج روش طیفی ریتز نمایش داده شده است. با افزایش تعداد پایه‌ها، کاهش خطای نسبی و همگرایی نتایج مشاهده می‌شود. در شکل ۳، تغییرات فرکانس زاویه‌ای ورق با تکیه‌گاه‌های مفصلی در لبه آن برای تابع شکل بار شعاعی، سختی بی‌بعد و ضریب میرایی بی‌بعد به ترتیب برابر با $1 + (r/a)^2$ ، ۱ و ۱۵ در برابر تغییرات نسبت پواسون ترسیم شده است. شاخص توانی ضخامت برابر با ۱ است و در نتیجه تغییرات ضخامت به صورت خطی است. با افزایش نسبت پواسون، فرکانس زاویه‌ای ورق برای ضرایب مختلف ضخامت افزایش می‌یابد. در شکل ۴، تغییرات فرکانس زاویه‌ای

شرایط مرزی لبه گیردار شامل عدم وجود شیب و جابجایی در لبه ورق است.

$$\xi_0 = - \left(\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}^T \right)_{n \times 1} \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \right)_{1 \times (n+1)} \Big|_{x=a} \quad (14)$$

$$\xi_1 = \left(\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}^T \right)_{(n-1) \times 1} \left(\begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \right)_{1 \times (n-1)} \Big|_{x=a} \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۳)، جابجایی خمشی با ارضاء شرایط مرزی در لبه ورق گیردار محاسبه می‌شود.

$$w \approx \sum_{m=2}^n \xi_m A_m = \sum_{m=2}^n \xi_m \left((L_1(x) - L_1(a)) \times L'_m(a) + (L_m(x) - L_m(a)) \right) \quad (16)$$

تحت شرایط تقارن محوری، شیب تغییرشکل خمشی در مرکز صفحه برابر با صفر است؛ لذا پایه تعمیم یافته در رابطه (۱۷)، B_m ، به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود.

$$w \approx \sum_{m=3}^n B_m \xi_m \quad (17)$$

با در نظر گرفتن عدم وجود جابجایی در لبه ورق مفصلی و شرایط تقارن محوری در مرکز صفحه، رابطه (۱۹) نوشته می‌شود.

پایه تعمیم یافته برای ورق با لبه مفصلی با در نظر گرفتن شرایط طبیعی در لبه ورق مدور به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

$$B_m = C_m - C_2 \frac{aC_2''(x) + \nu C_2'(x)}{aC_2''(a) + \nu C_2'(a)} \quad (20)$$

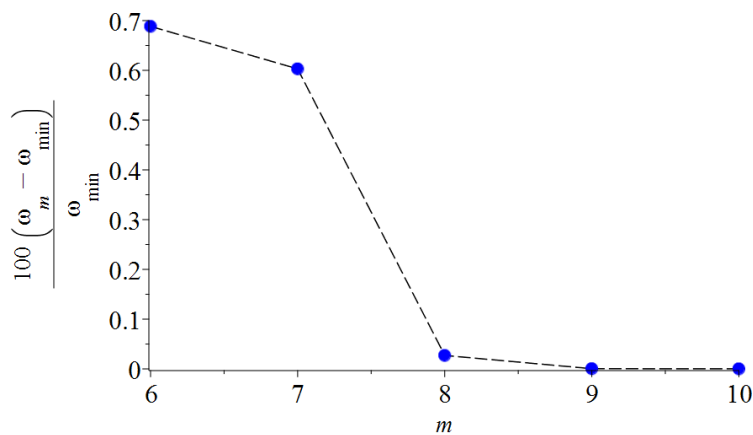
برای محاسبه فرکانس زاویه‌ای مود اول و تغییر شکل خمشی متناظر به آن، باید انرژی پتانسیل کل در رابطه (۱۰) کمینه شود. در روش طیفی ریتز با مشتق‌گیری از ضرایب

$$B_m = \left(1 - \frac{L'_1(0)L'_m(a) + L'_m(0)}{L'_1(0)L'_2(a) + L'_2(0)} \right) \left(L'_m(a)(L_1(x) - L_1(a)) + (L_m(x) - L_m(a)) \right) \quad (18)$$

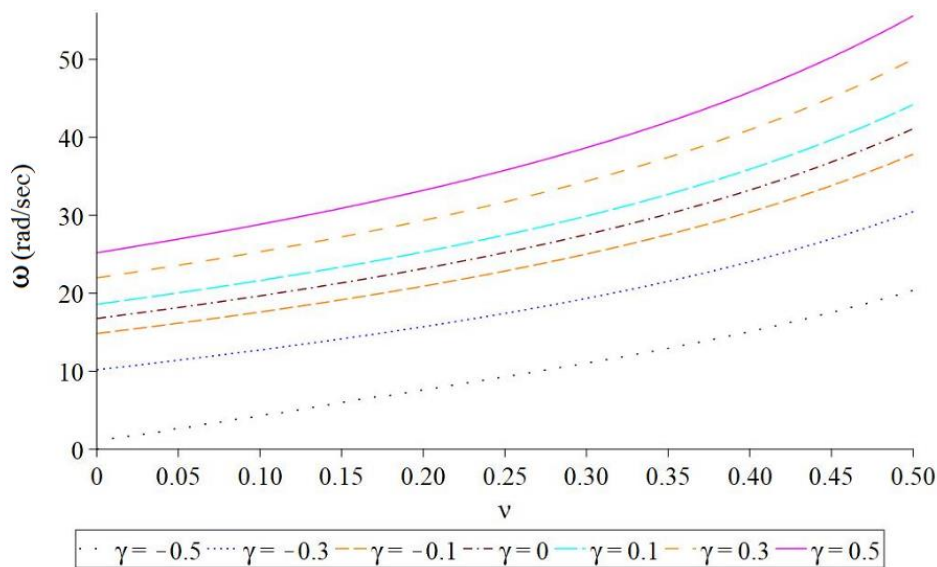
$$w \approx \sum_{m=2}^n \xi_m C_m = \sum_{m=2}^n \xi_m \left(L'_m(0)(L_1(x) - L_1(a)) + (L_m(x) - L_m(a)) \right) \quad (19)$$

است. در جدول ۲، تاثیر تغییرات شعاعی مدول ارتجاعی، نسبت پواسون و ضرایب ضخامت بر فرکانس زاویه‌ای مود اول صفحات دو جهته با لبه گیردار ارائه شده است. مطابق نتایج ارائه شده در جدول ۲، با افزایش شاخص توانی ضخامت و کاهش نسبت پواسون، فرکانس زاویه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس زاویه‌ای ورق با توزیع خطی مدول ارتجاعی در امتداد شعاعی، نسبت به فرکانس زاویه‌ای ورق با توزیع سینوسی به دلیل مدول ارتجاعی بزرگتر در لبه، بیشتر است. در جدول ۳، تاثیر گرادیان مواد و در جدول ۴، تاثیر شرایط مرزی بر فرکانس زاویه‌ای ورق‌های گیردار و مفصلی ارائه شده است. با افزایش ضریب میرایی، فرکانس زاویه‌ای ورق برای

ورق با لبه گیردار برای تابع شکل بار شعاعی، سختی بی‌بعد و ضریب میرایی بی‌بعد به ترتیب برابر با $\sin\left(\frac{\pi r}{a}\right)$ و ۱ و ۱۵ در برابر تغییرات نسبت پواسون ترسیم شده است. در شکل ۴، تغییرات ضخامت غیر خطی می‌باشد و شاخص توانی ضخامت برابر با ۳ در نظر گرفته شده است. با مقایسه شکل ۳ و شکل ۴، مشخص می‌شود که روند تغییرات فرکانس زاویه‌ای در ورق گیردار مشابه با ورق مفصلی می‌باشد. در ورق گیردار نیز مقدار فرکانس زاویه‌ای اولین مود متناسب با نسبت پواسون و ضریب ضخامت است. در جدول ۱، فرکانس زاویه‌ای بی‌بعد مورد اعتبار سنجی قرار گرفته و صحت نتایج کار حاضر تصدیق شده است. متغیر D_0 ، صلبیت خمشی در مرکز ورق



شکل ۲- همگرایی فرکانس زاویه‌ای با افزایش تعداد درایه‌های پایه (m)



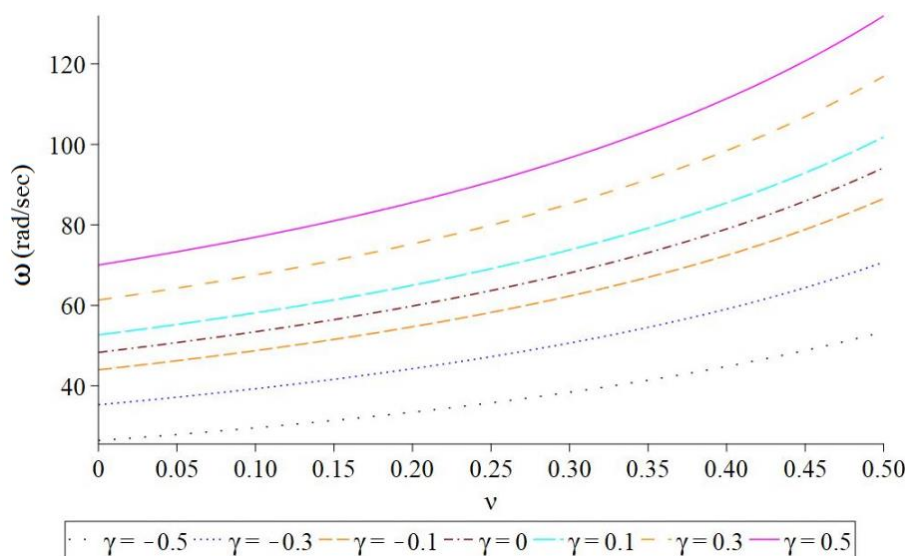
شکل ۳- فرکانس زاویه‌ای ورق هدمند دو جهته مفصلی ($p = 1 + (r/a)^2, k = 1, c = 15, \alpha = 1$)

مشخص گردید روش طیفی ریتز با شرایط مرزی مختلف سازگار بوده و از سرعت همگرایی بالایی برخوردار است. در روش طیفی ریتز از پایه تعمیم یافته برای ارضاء شرایط مرزی و طبیعی به جای توابع چسبنده استفاده شده است، لذا از نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای دشوار برای لحاظ توابع فرعی اجتناب شده است. مشاهده گردید که مقدار فرکانس زاویه‌ای با افزایش شاخص توانی مربوط به تغییرات ضخامت، کاهش ضریب ضخامت، کاهش درجه نامعینی، کاهش نسبت پواسون در شرایطی که لبه صفحه گیردار باشد و افزایش نسبت پواسون در شرایطی که لبه صفحه مفصلی باشد، افزایش میرایی محیط لزوج، کاهش مدول ارتجاعی در مجاورت لبه نسبت به مرکز صفحه و اعمال بار فشاری بیشتر در مجاورت مرکز صفحه نسبت به لبه صفحه، کاهش می‌یابد.

مقادیر مختلف ضریب و شاخص توانی ضخامت، نسبت پواسون و توزیع‌های مختلف مواد کاهش می‌یابد. مطابق نتایج ارائه شده در جدول ۴، مقدار فرکانس زاویه‌ای ورق با لبه گیردار بیشتر از فرکانس زاویه‌ای ورق با لبه مفصلی است. به عبارت دیگر، چنانچه درجه نامعینی ورق بیشتر شود، مقدار فرکانس زاویه‌ای آن افزایش پیدا می‌کند.

۵- جمع بندی نتایج

در این مقاله، با کمینه کردن انرژی پتانسیل کل به کمک روش طیفی ریتز، تاثیر عوامل مختلف مانند محیط ارتجاعی لزوج، بار متغیر دلخواه در امتداد شعاعی، تغییرات دلخواه دو بعدی مصالح، ضخامت متغیر خطی و غیرخطی، تغییرات نسبت پواسون و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های زاویه‌ای اولین مود بررسی شده است. با توجه به نتایج حاصل



شکل ۴- فرکانس زاویه‌ای ورق هدفمند دو جهته گیردار ($p = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $k = 1$, $c = 15$, $\alpha = 3$)

جدول ۱- تصدیق نتایج برای ورق مفصلی و گیردار تحت بار شعاعی فشاری ثابت ($\omega a^2 \sqrt{\rho t / D_0}$)

$P = 3D_0/a^2$		$P = D_0/a^2$		$P = 0$		تکیه‌گاه
مقاله حاضر	مرجع [۴]	مقاله حاضر	مرجع [۴]	مقاله حاضر	مرجع [۴]	
۲/۶۳۷	۲/۶۳۷	۴/۳۰۸	۴/۳۰۸	۴/۹۳۵	۴/۹۳۵	مفصلی
۹/۱۳۷	۹/۱۳۷	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۱۰/۲۱۶	۱۰/۲۱۶	گیردار

جدول ۲- تاثیر تغییرات شعاعی مدول ارتجاعی نسبت پواسون و ضرایب ضخامت بر فرکانس زاویه‌ای مود اول صفحات گیردار

γ	ν	$E_r = 1 + \sin\left(\pi \frac{r}{a}\right)$					$E_r = 1 + \frac{r}{a}$							
		۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	
$\alpha = 1$	-۰/۵	۲۷/۰	۳۰/۵	۳۴/۹	۴۰/۵	۴۸/۰	۵۸/۵	۲۸/۴	۳۱/۹	۳۶/۲	۴۱/۷	۴۹/۱	۵/۵۹	
	-۰/۳	۳۴/۵	۳۸/۷	۴۳/۹	۵۰/۷	۵۹/۶	۷۲/۲	۳۶/۶	۴۰/۸	۴۶/۱	۵۲/۸	۶۱/۷	۷۴/۳	
	-۰/۱	۴۲/۲	۴۷/۱	۵۳/۱	۶۰/۹	۷۱/۳	۸۵/۸	۴۵/۰	۴۹/۹	۵۶/۰	۳۹/۹	۷۴/۴	۸۹/۰	
	۰/۰	۴۶/۱	۵۱/۳	۵۷/۸	۶۶/۱	۷۷/۲	۹۲/۷	۴۹/۲	۵۴/۵	۶۱/۰	۶۹/۵	۸۰/۷	۹۶/۴	
	۰/۱	۵۰/۱	۵۵/۶	۶۲/۵	۷۱/۳	۸۳/۱	۹۹/۵	۵۳/۵	۵۹/۱	۶۶/۱	۷۵/۰	۸۷/۰	۱۰۳/۷	
	۰/۳	۵۸/۱	۶۴/۳	۷۱/۹	۸۱/۸	۹۵/۰	۱۱۳/۳	۶۲/۰	۶۸/۳	۷۶/۲	۸۶/۳	۹۹/۷	۱۱۸/۵	
	۰/۵	۶۶/۲	۷۳/۰	۸۱/۵	۹۲/۴	۱۰۶/۹	۱۲۷/۲	۷۰/۶	۷۷/۶	۸۶/۳	۹۷/۵	۱۱۲/۴	۱۳۳/۳	
	-۰/۵	۲۹/۰	۳۲/۸	۳۷/۶	۴۳/۷	۵۱/۸	۶۳/۲	۳۰/۵	۳۴/۲	۳۸/۸	۴۴/۸	۵۲/۸	۶۴/۰	
	-۰/۳	۳۵/۷	۴۰/۱	۴۵/۵	۵۲/۶	۶۱/۹	۷۴/۹	۳۸/۰	۴۲/۴	۴۷/۸	۵۴/۸	۶۴/۱	۷۷/۱	
	-۰/۱	۴۲/۶	۴۷/۵	۵۳/۷	۶۱/۶	۷۲/۱	۸۶/۷	۴۵/۵	۵۰/۵	۵۶/۶	۶۴/۶	۷۵/۲	۹۰/۰	
$\alpha = 2$	۰/۰	۴۶/۱	۵۱/۳	۵۷/۸	۶۶/۱	۷۷/۲	۹۲/۷	۴۹/۲	۵۴/۵	۶۱/۰	۶۹/۵	۸۰/۷	۹۶/۴	
	۰/۱	۴۹/۷	۵۵/۱	۶۱/۹	۷۰/۷	۸۲/۳	۹۸/۶	۵۲/۹	۵۸/۵	۶۵/۴	۷۴/۳	۸۶/۱	۱۰۲/۷	
	۰/۳	۵۶/۸	۶۲/۷	۷۰/۲	۷۹/۸	۹۲/۶	۱۱۰/۶	۶۰/۳	۶۶/۴	۷۴/۱	۸۳/۹	۹۷/۰	۱۱۵/۳	
	۰/۵	۶۳/۹	۷۰/۴	۷۸/۶	۸۹/۱	۱۰۳/۰	۱۲۲/۵	۶۷/۶	۷۴/۳	۸۲/۷	۹۳/۴	۱۰۷/۷	۱۲۷/۸	
	-۰/۵	۳۰/۲	۳۴/۲	۳۹/۱	۴۵/۴	۹۳/۹	۵۳/۹	۳۱/۹	۳۵/۷	۴۰/۶	۴۶/۷	۵۵/۰	۶۶/۶	
	-۰/۳	۳۶/۵	۴۱/۰	۴۶/۵	۵۳/۷	۶۳/۲	۶۳/۲	۳۹/۰	۴۳/۵	۴۹/۰	۵۶/۱	۶۵/۶	۷۸/۸	
	-۰/۱	۴۲/۹	۴۷/۹	۵۴/۰	۶۲/۰	۷۲/۵	۷۲/۵	۴۵/۹	۵۰/۹	۵۷/۱	۶۵/۱	۷۵/۷	۹۰/۶	
	$\alpha = 3$	۰/۰	۴۶/۱	۵۱/۳	۵۷/۸	۶۶/۱	۷۷/۲	۹۲/۷	۴۹/۲	۵۴/۵	۶۱/۰	۶۹/۵	۸۰/۷	۹۶/۴
		۰/۱	۴۹/۳	۵۴/۷	۶۱/۵	۷۰/۲	۸۱/۸	۸۱/۸	۵۲/۵	۵۸/۰	۶۴/۹	۷۱/۳	۸۵/۵	۱۰۲/۰
		۰/۳	۵۵/۶	۶۱/۵	۶۸/۹	۷۸/۴	۹۱/۰	۹۱/۰	۵۸/۸	۶۴/۹	۷۲/۴	۸۲/۱	۹۵/۰	۱۱۳/۰
۰/۵		۶۱/۸	۶۸/۲	۷۶/۲	۸۶/۵	۱۰۰/۲	۱۰۰/۲	۶۴/۹	۷۱/۵	۷۹/۶	۹۰/۱	۱۰۴/۱	۱۲۳/۷	

جدول ۴- تغییرات فرکانس زاویه‌ای مود اول صفحات دارای گرادیان شعاعی خطی مواد با لبه گیردار (راست) و مفصلی (چپ)

		$c = 5D/\omega_1 a^4$										$c = 10D/\omega_1 a^4$										$c = 15D/\omega_1 a^4$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
ν	γ	0.0					0.1					0.2					0.3					0.4					0.5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	23.4954	26.4575	30.1483	34.8770	33.7716	49.8918	23.3498	26.2601	29.8706	34.4667	40.5091	48.7828	23.1050	25.9279	29.4017	33.7716	39.4088	46.8753	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	33.3201	37.1375	41.9069	48.0248	47.6420	67.6089	33.2693	37.0880	41.8082	47.8879	55.9649	67.2072	33.1844	36.9519	41.6432	47.6420	55.7266	66.5322	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	42.3519	47.1355	52.8885	60.2828	60.1065	83.9259	42.5094	47.1046	52.8444	60.2167	70.0524	83.7454	42.4719	47.0550	52.7706	60.1065	69.8565	83.4382	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	51.5178	56.8755	63.5681	72.1673	72.0763	99.6754	51.5064	56.8993	63.5446	72.1331	84.8147	99.5605	51.4873	56.8333	63.5076	72.0763	83.4798	99.4022	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	69.2601	76.0812	84.5907	95.5112	95.4800	130.3659	69.2562	76.0758	84.5830	95.4995	110.0278	130.3310	69.2498	76.0669	84.5701	95.4800	109.9965	130.2761	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	25.4059	28.5524	32.4779	31.7866	44.1953	53.5067	25.2694	28.3089	32.2204	37.1292	43.5949	52.4749	25.0435	28.0628	31.7866	36.4853	42.5752	50.7078	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	34.5796	38.5526	43.4717	43.2173	58.2726	70.0922	34.5306	38.4656	43.3765	49.6763	58.0478	69.7048	34.4488	38.3557	43.2175	49.4393	57.6177	69.0543	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	43.4602	48.1696	54.0550	53.9396	71.7014	87.0061	43.4382	48.1394	54.0118	61.5548	71.5984	83.6293	43.4014	48.0889	53.9396	61.4468	71.4262	85.3309	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	47.8883	52.9369	59.2825	59.2974	78.3061	95.5134	47.8803	52.9154	59.2518	67.3859	78.2327	93.3859	47.8168	52.8797	59.2006	67.3149	78.1120	93.1730	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	52.2453	57.6873	64.4878	64.4280	84.8687	101.1585	52.2322	57.6717	64.4633	73.1919	84.8150	101.0650	52.2134	57.6457	64.4280	73.1359	84.7254	100.9091	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	60.9978	67.1643	74.8628	74.8290	97.9166	116.3320	60.9915	67.1555	74.8501	84.7301	97.8860	116.2785	60.9809	67.1409	74.8290	84.6983	97.8350	116.1894	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	69.7513	76.6359	85.2207	85.2002	110.9097	131.4145	69.7474	76.6288	85.2130	96.2292	110.8910	131.3818	69.7411	76.6198	85.2002	96.2099	110.8399	131.3274	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	76.7521	83.0737	91.3152	91.3897	46.3726	56.1035	26.6247	29.8646	33.8909	39.0280	45.8022	53.2258	26.4110	29.5738	33.4797	38.4174	44.8351	53.4475	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	44.0536	48.8302	54.7995	62.4720	72.6998	87.0061	44.0319	48.8003	54.7569	62.4082	72.5964	86.8301	44.3957	48.7505	54.6857	62.3017	72.4267	86.5358	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	48.3705	53.3080	59.9274	68.1774	79.1726	94.5573	48.3351	53.4868	59.8970	68.1319	79.1000	94.4312	48.3294	53.4514	59.8464	68.0560	78.9788	94.2207	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	52.6918	58.1880	65.0540	73.8763	85.6523	102.0801	52.6806	58.1726	65.0438	73.8430	85.5791	101.9875	52.6619	58.1468	64.9949	73.7875	85.4903	101.8330	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	61.3528	67.5620	75.3139	85.2693	98.5289	117.0736	61.3464	67.5552	75.3014	85.2504	98.4983	117.0285	61.3359	67.5386	75.2804	85.2187	98.4478	116.9319	$\bar{P} = 1 + 2 \left(\frac{r}{d}\right)^2$	-0.5	70.0419	76.9604	85.5921	96.6703	111.4169	132.0308	70.0381	76.9551	85.5845	96.6588	111.3983	131.9983	70.0318	76.9463	85.5718	96.6396	111.3674	131.9441

۶- مراجع

- شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی. نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز ۲۰۹-۲۱۷: (۲) ۴۹.
- [۱۲] نظامی ر، غضنفری م (۱۳۹۸) تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق کامپوزیت در بدنه قطارهای پرسرعت. نشریه مهندسی مکانیک مدرس ۲۹۶۴-۲۹۵۵: (۱۲) ۱۹.
- [13] Mojabi Sh, Kheirikhah MM (2018) Modeling and intelligent control of vibration of cantilever composite plate embedded with shape memory alloy wires, *J Sci Technol Compos* 4(4): 363-374.
- [14] Rezaee M, Ziaee S (2014) The analytical solution for transverse free vibrations of symmetrical FG rectangular nano-plates. In: 22th ISME World Conf, Tehran.
- [15] Rahmani H, Jafari AA (2016) Free vibration of a thick rectangular floating composite sheet on fluid by Rayleigh-Ritz method. In: 6th Int Conf Acoust Vibr, Tehran.
- [۱۶] خدمتی ا، دهقان ح، محمد ن (۱۳۹۶) بررسی ارتعاشات آزاد ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک وینکلر به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی. مجله مدل‌سازی در مهندسی ۸۹-۹۹: (۱۵) ۴۹.
- [17] Bagheri A, Sadri A, Javadi Moghaddam J (2016) Active vibration control of laminated plate using piezoelectric sensors and actuators. *Sharif J Civ Eng* 32(1): 3-9.
- [18] Soltani M, Hatami S, Azhar M (2014) Free vibration of thin functionally graded plates by exact finite strip method. *Comput Methods Eng* 32(2): 33-54.
- [19] Saidi AR, Rezanaiiee Aqdam H, Hassannejad Qadim R, Mousavi Z (2018) Forced vibration analysis of thick functionally graded rectangular plate based on the higher-order shear and normal deformable theory. *Aerosp Mech J* 13(4): 71-87.
- [۲۰] چراقی ن، لزگی نظرگاه م، اعتمادی ا (۱۳۹۷) تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج هدفمند چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک واقع روی بستر ارتجاعی با لحاظ اثرات لغزش بین‌لایه‌ای. مهندسی مکانیک مدرس ۶۶۳-۶۵۵: (۳) ۱۹.
- [21] Li M, Soares CG, Yan R (2021) Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT. *Compos Struct* 264: 113643.
- [1] Heydari A, Jalali A, Nemati A (2017) Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the Pasternak elastic foundation. *Appl Math Modell* 41: 494-507.
- [2] Heydari A, Li L (2020) Dependency of critical damping on various parameters of tapered bidirectional graded circular plates rested on Hetenyi medium, *Proc. Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 235(12): 2157-2179.
- [3] Heydari A (2020) Buckling analysis of discontinues fractional axially graded thin beam with piecewise axial load function rested on rotational spring hinges. *J Adv Des Manuf Technol* 13(2): 99-108.
- [4] Heydari A (2020) Buckling analysis of noncontinuous linear and quadratic axially graded Euler beam subjected to axial span-load in the presence of shear layer. *Adv Comput Des* 5(4): 397-416.
- [5] Heydari A (2018) Size-dependent damped vibration and buckling analyses of bidirectional functionally graded solid circular nano-plate with arbitrary thickness variation. *Struct Eng Mech* 68(2): 171-182.
- [6] Heydari A, Shariati M (2018) Buckling analysis of tapered BDFGM nano-beam under variable axial compression resting on elastic medium. *Struct Eng Mech* 66(6): 737-748.
- [7] Heydari A (2018) Exact vibration and buckling analyses of arbitrary gradation of nano-higher order rectangular beam. *Steel Compos Struct* 28(5): 589-606.
- [۸] حیدری ع، جلالی ع (۱۳۹۶) روشی نوین برای تحلیل کمانشی تیر هدفمند دوجهته اویلر با ضخامت متغیر دلخواه واقع بر بستر الاستیک هیتنی. مهندسی مکانیک مدرس ۴۷-۵۵: (۱) ۱۷.
- [۹] رضوی س، شوشتری ع (۱۳۹۶) بررسی تحلیلی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق نازک مستطیلی مگنتوالکتروالاستیک بر روی یک بستر غیرخطی. نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر ۳۲۴-۳۱۷: (۲) ۴۹.
- [10] Yousefzadeh Sh, Jafari A, Mohammadzadeh A, (2019) Hydro-elastic vibration analysis of functionally graded circular plate vertically in contact with stationary fluid. *Iran J Mech Eng Trans ISME* 21(1): 72-96.
- [۱۱] غلامی ی، انصاری ر (۱۳۹۸) بررسی عددی ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق های مستطیلی مدرج تابعی در

چند جمله‌ای‌های متعامد مُفسّر مرزی. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها ۱۶۵-۱۷۵: ۸(۳).

[۲۴] تجویدی ت (۱۳۸۵) حل معادلات دیفرانسیل با روش های طیفی در دامنه نامتناهی. پایان‌نامه دکتری، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۲۲] هاشمی س، جعفری ع ا (۱۳۹۹) تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی دوجته. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها ۳۱-۵۲: ۱۰(۱).

[۲۳] نیکخوع، ربانی ا، نیاز م (۱۳۹۷) بررسی ارتعاش ناشی از عبور جرم متحرک از روی ورق ضخیم با استفاده از