



مطالعه ارتعاشات آزاد تیرهای میکرو/نانو همگن پوشیده شده با مواد مدرج تابعی متخلخل با استفاده از روش های تحلیلی و عددی

حمزه صالحی پور^{*۱}

^۱ استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۳۰

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد تیرهای میکرو/نانو همگن پوشیده شده با مواد مدرج تابعی متخلخل بر اساس تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن بررسی شده است. به منظور استخراج معادلات حرکت از تئوری برشی مرتبه اول تیرها یا همان تئوری تیر تیموشنکو استفاده شده است. معادلات حرکت به دست آمده با استفاده از دو روش تحلیلی دقیق و روش عددی برای شرایط مرزی مختلف حل شده‌اند. در روش تحلیلی ابتدا معادلات حرکت حل می‌شوند و پاسخ کلی مولفه‌های جابه‌جایی به دست می‌آیند که خود شامل تعدادی پارامتر و ثابت مجهول هستند. سپس با برقراری شرایط مرزی در دو انتهای تیر به یک دستگاه معادله می‌رسیم که از حل آن فرکانس‌های طبیعی استخراج می‌شوند. در حل عددی از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. در بخش نتایج ابتدا با استفاده از مقایسه نتایج به دست آمده از این مقاله با نتایج مشابه ارائه شده در سایر مقالات، صحت و دقت روش حاضر تایید می‌شود. سپس نتایج حاصل از دو روش حل تحلیلی و عددی ارائه شده مقایسه می‌شوند که تطابق نتایج حاصل از دو روش صحت هر دو روش را تایید می‌کند. در ادامه تاثیر میزان ضخامت لایه متخلخل و همچنین میزان درصد تخلخل آن لایه بر مقدار فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد؛ تیرهای میکرو/نانو؛ مواد مدرج تابعی متخلخل؛ تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن؛ حل تحلیلی دقیق؛ روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته.

Free Vibration of Micro/Nano Homogeneous Beams Coated by Functionally Graded Porous Layer using Analytical and Numerical Methods

H. Salehipour^{1,*}

¹ Assistant professor, Faculty of Engineering, Ilam University, Ilam, Iran.

Abstract

In this paper, the free vibration of homogeneous micro / nano beams coated by a functionally graded layer is investigated based on the Eringen's nonlocal elasticity theory. In order to extract the equations of motion, the first-order shear deformation beam theory (Timoshenko's beam theory) has been used. The obtained equations of motion are solved using two different analytical and numerical methods for different boundary conditions. In the analytical method, the equations of motion are first solved and the general functions for the displacements are obtained. The functions include a number of unknown parameters and constants. Then, by considering the boundary condition equations at both ends of the beam, a set of algebraic equations is extracted. Finally, the natural frequencies are obtained from the nonzero solution of the algebraic equations. In the numerical solution, the generalized differential quadrature method is used to solve the equations of motion. In the results section, first, the validity of present methods should be confirmed. Hence, the results obtained from this article are compared with the corresponding results presented in the literature. Then, the results of the two analytical and numerical methods are compared, which confirms the consistency of the results of both two methods. The effects of thickness of porous layer and also the percentage of porosity of porous layer on the natural frequencies of beams are studied.

Keywords: Free Vibration; Micro/Nano Beams; Functionally Graded Porous Material; Eringen's Nonlocal Elasticity Theory; Exact Analytical Solution; Generalized Differential Quadrature Method (GDQM).

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی هستند که مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان در سراسر جهان قرار گرفته است. درصد اجزا تشکیل دهنده مواد FGM از یک نقطه تا نقطه دیگر در ماده به صورت پیوسته تغییر می‌کند و از اینرو مشکلات مواد کامپوزیتی چندلایه را ندارد که بر اثر تنش‌های حرارتی و غیر یکنواخت لایه‌ها از یکدیگر جدا می‌شدند؛ هم چنین تغییرات پیوسته اجزا تشکیل دهنده ماده FGM سبب می‌شود که خواص مکانیکی این دسته از مواد به صورت پیوسته از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند [۱،۲].

سازه‌های سبک تشکیل شده از مواد متخلخل مانند فوم‌های فلزی، به دلیل ویژگی‌های منحصر به فردشان کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوافضا، خودروسازی و مهندسی عمران دارند [۳-۶]؛ همچنین به دلیل توانایی بالایی که این دسته از مواد در جذب انرژی دارند، به عنوان سازه‌های مقاوم تحت اثر بار دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ترکیب مواد FGM و متخلخل منجر به توسعه دسته جدیدی از مواد می‌شود که در آن میزان تخلخل‌ها از نقطه‌ای به نقطه دیگر به صورت پیوسته تغییر می‌کند و باعث ایجاد موادی با قابلیت‌های سازه‌ای بهتر و بهینه تر می‌شود [۷-۱۰].

در ابعاد میکرو/نانو نیروهای بین مولکولی و اثرات وابسته به ابعاد کوچک مهم می‌شوند و مکانیک محیط پیوسته کلاسیک قادر به تحلیل رفتار مکانیکی سازه‌ها در ابعاد میکرو/نانو نیست. از اینرو یک سری تئوری مکانیک محیط پیوسته وابسته به ابعاد توسط دانشمندان ارائه شده‌اند که می‌توان با استفاده از آن‌ها، رفتار مکانیکی سازه‌ها در ابعاد میکرو/نانو را تحلیل کرد. از تئوری‌های ارائه شده در این زمینه می‌توان تئوری‌های تنش جفت [۱۱-۱۴]، تئوری گرادیان کرنش [۱۵]، تئوری الاستیسیته ناموضعی [۱۶]، تئوری الاستیسیته سطح [۱۷]، تئوری تنش جفت اصلاح شده [۱۸] و تئوری الاستیسیته ناموضعی اصلاح شده [۱۹] را نام برد.

تاکنون پژوهش‌های زیادی در مورد مواد مدرج تابعی متخلخل (FGP) انجام شده است که تعدادی از آن‌ها براساس تئوری ناموضعی اربینگن و برای مواد در ابعاد میکرو/نانو می‌باشند. به عنوان مثال، شافعی و همکاران [۲۰]، ارتعاشات آزاد

تیرهای میکرو/نانو FGP را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQM) مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها خواص مدرج FGP را در دو راستا در نظر گرفتند. ابراهیمی و براتی [۲۱]، ارتعاشات آزاد خطی تیرهای نانو قرار گرفته روی بستر الاستیک که از ماده الکترومغناطیسی متخلخل الاستیک با خواص مدرج تابعی تشکیل شده است را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم تیرها مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها معادلات به دست آمده را با استفاده از یک روش تحلیلی حل کردند و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله میزان تخلخل را روی ارتعاشات آزاد تیرها بررسی کردند. شاهوردی و براتی [۲۲]، با استفاده از تئوری‌های ناموضعی اربینگن و گرادیان کرنش، رفتار ارتعاشی ورق‌های نانو را تحت تاثیر بارگذاری رطوبتی-گرمایی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش گلرکین برای حل معادلات استفاده کردند و تاثیر تمام پارامترها را روی ارتعاش تیر مطالعه کردند. فالج و همکاران [۲۳]، ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای را تحت تاثیر بارگذاری دینامیکی شعاعی را بر اساس تئوری‌های ناموضعی اربینگن و گرادیان کرنش بررسی کردند و نواحی رزونانسی را در تحلیل خود مشخص کردند. آریو و همکاران [۲۴]، یک مدل اجزا محدود برای کمانش و ارتعاشات آزاد تیرهای نانو ارائه کردند و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله تابع توزیع تخلخل در راستای ضخامت تیر را بر روی کمانش و ارتعاشات آزاد بررسی کردند. آن‌ها دو توزیع یکنواخت و غیریکنواخت را برای مطالعه اثر تخلخل بر روی مولفه‌های مکانیکی انتخاب کردند. محمدی و همکاران [۲۵]، یک تحلیل رزونانسی برای تیرهای نانو ارائه کردند که روی بستر الاستیک غیرخطی قرار دارند. آن‌ها همچنین در مقاله خود ارتعاشات آزاد این تیرها را نیز مورد بررسی قرار دادند و روش گلرکین را برای حل معادلات حرکت به کار بردند. فونگ وان و همکاران [۲۶]، یک روش ایزوژئومتریک را برای بررسی خمش استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های نانو استفاده کردند. آن‌ها در تحلیل خود مشاهده کردند که خواص مواد، پارامتر ناموضعی اربینگن، شرایط مرزی و میزان تخلخل بر روی رفتار مکانیکی سیستم تاثیر قابل ملاحظه‌ای دارند. آن‌ها در یک مقاله دیگر روش ایزوژئومتریک را برای مطالعه رفتار رزونانسی غیرخطی تیرها مورد استفاده قرار دادند [۲۷]. رحمانی و همکاران [۲۸]، ارتعاشات آزاد تیرهای نانو دوران کننده حول محوری قرار

وابسته به ابعاد ناموضعی اربینگن برای مدلسازی و استخراج معادلات حاکم استفاده می‌شود. (مقالات مختلفی از تئوری تیر تیموشنکو برای تحلیل پاسخ‌های مکانیکی مختلف تیرها استفاده کرده‌اند [۳۰-۳۲]). سپس با استفاده از دو روش تحلیلی و روش عددی GDQM معادلات دیفرانسیل را حل می‌کنیم. روش تحلیلی ارائه شده برای اولین بار است که برای تیرهای FGP ارائه می‌شود. در قسمت نتایج هم به بررسی دقت و صحت نتایج و تاثیر پارامترهای مختلف روی ارتعاشات آزاد می‌پردازیم.

۲- مدل سازی ریاضی

۲-۱- الاستیسیته ناموضعی اربینگن

در تئوری الاستیسیته ناموضعی اربینگن تنش در یک نقطه مرجع نه تنها به کرنش در آن نقطه بستگی دارد، بلکه به کرنش در تمام نقاط همسایه آن نقطه نیز وابسته است که این دیدگاه براساس تئوری اتمی دینامیک شبکه‌ای و نتایج تجربی پدیده تفرق به‌دست آمده است. رابطه بین تنش در یک نقطه مرجع در الاستیسیته ناموضعی با تنش در سایر نقاط بر اساس رابطه (۱) بیان می‌شود [۱۶]:

$$\sigma_{ij}(X) = \int_V \alpha(|X - X'|) t_{ij} dV(X'), \quad X \in V \quad (1)$$

که در رابطه فوق σ_{ij} و t_{ij} به ترتیب مولفه‌های تنش ناموضعی اربینگن و تنش موضعی کلاسیک می‌باشند و تابع تضعیف α میزان مشارکت سایر نقاط در پاسخ نقطه مرجع است. فرم انتگرالی فوق پیچیده است و به راحتی قابل استفاده در روابط نیست. از اینرو اربینگن یک فرم ساده‌تر دیفرانسیلی به صورت رابطه (۲) ارائه کرد:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij}(X) = t_{ij}(X) \quad (2)$$

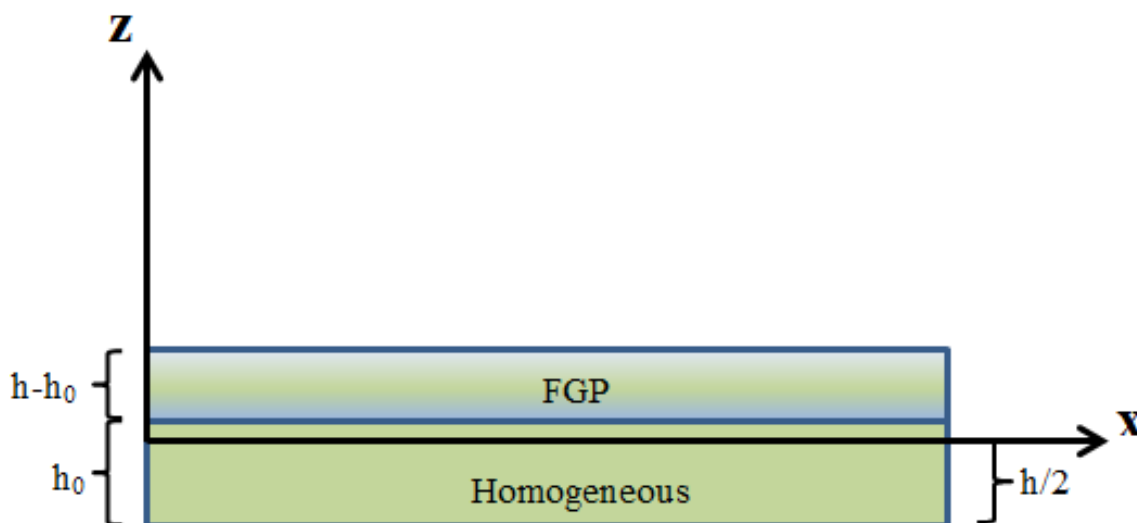
که در رابطه بالا μ پارامتر ناموضعی و ∇^2 عملگر لاپلاسی است. رابطه بالا تنش ناموضعی را در یک نقطه با استفاده از یک رابطه دیفرانسیلی به تنش کلاسیک در آن نقطه مربوط می‌کند.

۲-۲- تیر همگن پوشیده شده با مواد FGP

در شکل ۱، یک تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP نمایش داده شده است، به طوری که محور x در راستای طولی تیر و

گرفته در انتها و عمود بر محور تیر را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها معادلات حرکت را براساس تئوری برشی ردی به دست آوردند و سپس از روش GDQM برای حل آن‌ها استفاده کردند؛ هم چنین آن‌ها تغییرات خواص مواد را در دو راستای محور و ضخامت تیر در نظر گرفتند. بهداد و همکاران [۲۹]، پایداری دینامیکی و ارتعاشات آزاد تیرهای نانوی ویسکوالاستیک را با استفاده الاستیسیته دوفازی موضعی/غیر موضعی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مدل ریاضی خود را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بنا نهادند و از روش GDQM برای حل آن‌ها استفاده کردند. آن‌ها همچنین اثرات سطحی را بر رفتار ارتعاشی تیرها مورد مطالعه قرار دادند.

یکی از کاربردهای مهم مواد متخلخل در همه مقیاس‌های میکرو/نانو/ماکرو استفاده از آن‌ها به عنوان جاذب انرژی و عایق صوتی و حرارتی است که تاکنون پژوهش‌های بسیار اندکی در این زمینه صورت گرفته است. مسلماً می‌توان به منظور کاربردهای فوق دو حالت را در نظر بگیرند؛ حالت اول کل سازه را متخلخل در نظر بگیرند و در حالت دوم از پوشش متخلخل برای سازه اصلی استفاده کرد تا هم طراحی بهینه شود و هم به عملکرد سازه اصلی خللی وارد نشود. تخلخل‌ها در لایه پوششی متخلخل می‌توانند به صورت یکنواخت یا مدرج تابعی (FGP) باشند. هر کدام از انواع توزیع تخلخل‌های فوق کاربردهای خود را دارند و در پژوهش حاضر هر دو نوع تخلخل مورد بررسی قرار می‌گیرد و تاثیر آن‌ها بر استحکام تیرها مورد بررسی قرار می‌گیرند. تیر یکی از مهمترین سازه‌های مکانیکی است که کاربرد گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف صنایع دارد؛ هم‌چنین در مقیاس میکرو/نانو، مواد متخلخل با دارا بودن مساحت سطح و قدرت انتخابگری بالا به مقادیر جزئی در محیط مثل دما، رطوبت و نور پاسخ می‌دهند. بدین علت از این مواد در مقیاس میکرو/نانو به عنوان سنسور استفاده می‌شود که درصد قابل توجهی از این سنسورها به صورت یک تیر در نظر گرفته می‌شوند. از اینرو و با توجه به اهمیت مطالب گفته شده در بالا، بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای مورد بررسی از اهمیت بالایی برخوردار است که در این مقاله برای اولین بار ارتعاشات آزاد تیرهای همگن پوشیده شده با لایه متخلخل FGP در مقیاس میکرو/نانو با استفاده از تئوری الاستیسیته ناموضعی اربینگن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این مقاله از تئوری تیر تیموشنکو و تئوری



شکل ۱- تیر همگن پوشیده شده با لایه FGP

محور z در راستای ضخامت تیر است. تیر دارای طول L ، عرض b ، و ضخامت کل h است. تغییرات خواص مدرج تابعی در راستای ضخامت لایه FGP برای توزیع تخلخل در راستای ضخامت، سه مدل غیریکنواخت متقارن (مدل ۱)، غیریکنواخت نامتقارن (مدل ۲) و یکنواخت (مدل ۳) در نظر گرفته می‌شود. چگالی و مدول الاستیسیته در راستای ضخامت تیر برای سه مدل فوق به ترتیب با استفاده از روابط (۳) بیان می‌شوند [۳۳]:

$$E = \begin{cases} E_0 & z < h_0 - h/2 \\ E_0 \left(1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi \left(z - \frac{h_0}{2} \right)}{h - h_0} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & z < h_0 - h/2 \\ \rho_0 \left(1 - e_m \cos \left(\frac{\pi \left(z - \frac{h_0}{2} \right)}{h - h_0} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} E_0 & z < h_0 - h/2 \\ E_0 \left(1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi \left(z - \left(h_0 - \frac{h}{2} \right) \right)}{2(h - h_0)} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & z < h_0 - h/2 \\ \rho_0 \left(1 - e_m \cos \left(\frac{\pi \left(z - \left(h_0 - \frac{h}{2} \right) \right)}{2(h - h_0)} \right) \right) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} E_0 & z < h_0 - h/2 \\ E_0(1 - e_0\alpha) & z \geq h_0 - h/2 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & z < h_0 - h/2 \\ \rho_0\sqrt{1 - e_0\alpha} & z \geq h_0 - h/2 \end{cases} \quad (3)$$

که در رابطه بالا u_1 مولفه جابه‌جایی در جهت محوری x و u_3 مولفه جابه‌جایی در جهت عرضی z تیر است. u و w بیان کننده مولفه‌های جابه‌جایی در سطح $z=0$ می‌باشند و مولفه φ میزان چرخش تیر $z=0$ را حول محور x مشخص می‌کند.

۲-۴- استخراج معادلات حرکت

به‌منظور استخراج معادلات حرکت ابتدا باید مولفه‌های کرنش و تنش کلاسیک را استخراج کنیم. با استفاده از مولفه‌های جابه‌جایی در معادلات (۵)، مولفه‌های کرنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial u / \partial x + z \partial \varphi / \partial x \\ \gamma_{xz} &= \partial w / \partial x + \varphi \end{aligned} \quad (۶)$$

و مولفه‌های تنش کلاسیک به‌صورت زیر برحسب مولفه‌های کرنش به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} t_{xx}(z) &= E(z)(\partial u / \partial x + z \partial \varphi / \partial x) \\ t_{xz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (\partial w / \partial x + \varphi) \end{aligned} \quad (۷)$$

برای به‌دست آوردن معادلات حرکت از اصل همپلتون استفاده می‌کنیم که به‌صورت رابطه (۸) بیان می‌شود:

$$\int_T (\delta K - \delta U) = 0 \quad (۸)$$

که در رابطه بالا U و K به‌ترتیب انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل تیر می‌باشند و به‌صورت زیر برای کل حجم تیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^L \rho(z) \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz \\ U &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^L \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} dx dy dz \end{aligned} \quad (۹)$$

در رابطه بالا σ_{xx} و σ_{xz} مولفه‌های تنش ناموضعی می‌باشند. با استفاده از مولفه‌های جابه‌جایی و کرنش در معادلات (۵) و (۶) و استفاده از روش انتگرال جز به جز و مساوی صفر قرار دادن ضرایب δu ، $\delta \varphi$ و δw ، معادلات حرکت و شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \delta \varphi: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - R_{xz} - I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

که در روابط بالا E_0 و ρ_0 به‌ترتیب مدول الاستیسیته و چگالی در کف لایه FGP می‌باشند. سه نوع تابع توزیع تخلخل نشان داده شده در رابطه ۳ به‌ترتیب تابع توزیع غیریکنواخت متقارن، تابع توزیع غیریکنواخت غیرمتقارن و تابع توزیع یکنواخت می‌باشند. در تابع توزیع غیریکنواخت متقارن، توزیع سوراخ‌های تخلخل نسبت به صفحه میانی لایه متخلخل متقارن بوده و تغییرات آن براساس تابع کسینوسی است؛ هم‌چنین در این مدل از تابع توزیع بیشترین مقدار تخلخل و منافذ در سطح میانی لایه متخلخل قرار دارد. در مدل دوم که تابع توزیع غیریکنواخت غیرمتقارن است، توزیع تخلخل و منافذ براساس تابع کسینوسی است با این تفاوت نسبت به حالت اول توزیع تخلخل که در این حالت توزیع منافذ نسبت به سطح میانی لایه متخلخل نامتقارن بوده و بیشترین مقدار منافذ نیز در لبه‌های بیرونی لایه قرار دارد. در تابع توزیع تخلخل نوع سوم توزیع تخلخل و منافذ در کل لایه متخلخل به‌صورت یکنواخت است؛ هم‌چنین e_0 و e_m و α پارامترهای تخلخل می‌باشند که از یکدیگر مستقل نیستند و می‌توان با استفاده از روابط زیر مقادیر e_m و α را بر حسب e_0 به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} e_m &= 1 - \sqrt{1 - e_0} \\ \alpha &= \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (۴)$$

e_0 و e_m پارامترهای تخلخل هستند که به‌ترتیب مربوط به مدول الاستیسیته و چگالی می‌باشند و هرچه مقدار این ضرایب بیشتر باشد، به معنی آن است که تعداد و حجم تخلخل‌ها و منافذ در لایه متخلخل بیشتر است. به بیان دیگر ضریب e_m مشخص می‌کند، چند درصد حجم لایه متخلخل را منافذ تشکیل داده‌اند. ضریب α نیز یک پارامتر تخلخل است که برحسب پارامتر e_0 به‌دست می‌آید و فقط در تابع توزیع یکنواخت به‌کار می‌رود.

۲-۳- تئوری تیر تیموشنکو

در تئوری تیر تیموشنکو مولفه‌های جابه‌جایی در سه‌جهت مختصات به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, t) + z\varphi(x, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= 0 \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (۵)$$

۳- حل معادلات

۳-۱- روش تحلیلی

برای حل معادلات حرکت (۱۳) به صورت تحلیلی، ابتدا یک پاسخ کلی برای مولفه‌های جابه‌جایی در نظر می‌گیریم. معادلات (۱۳) به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جفت شده خطی با ضرایب ثابت می‌باشند؛ بنابراین حل کلی معادلات فوق به صورت تابع نمایی زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} e^{\lambda x} e^{i\omega t} \\ \varphi &= \bar{\varphi} e^{\lambda x} e^{i\omega t} \\ w &= \bar{w} e^{\lambda x} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی از معادله (۱۵) در معادلات حرکت (۱۳) و همچنین فاکتور گرفتن از مقدار ناصفر $e^{\lambda x}$

به یک دستگاه معادله به صورت زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} E_1 \lambda^2 + (I_0 - \mu I_0 \lambda^2) \omega^2 & E_2 \lambda^2 + (I_1 - \mu I_1 \lambda^2) \omega^2 & 0 \\ E_2 \lambda^2 + (I_1 - \mu I_1 \lambda^2) \omega^2 & E_2 \lambda^2 + (I_2 - \mu I_2 \lambda^2) \omega^2 - E_1 & 0 \\ 0 & E_1 \lambda & -E_1 \lambda \\ & & E_1 \lambda^2 + I_0 (1 - \mu \lambda^2) \omega^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

دستگاه معادله بالا حل بدیهی صفر دارد. برای دستیابی به حل غیربدیهی (ناصفر) باید دترمینان ماتریس ضرایب مساوی صفر قرار داده شود که منجر به ایجاد یک معادله جبری بر-حسب مولفه λ می‌شود. از حل این معادله شش مقدار برای λ به دست می‌آید و مولفه‌های جابه‌جایی به صورت رابطه (۱۷) ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i e^{\lambda_i x} e^{i\omega t}, \quad \varphi = \sum_{i=1}^6 \bar{\varphi}_i e^{\lambda_i x} e^{i\omega t}, \\ w &= \sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (17)$$

که در روابط فوق ثوابت \bar{u}_i ، $\bar{\varphi}_i$ و \bar{w}_i از هم مستقل نیستند. با جایگذاری هر کدام از شش پاسخ معادله (۱۷) در دو معادله از سه معادله حرکت (۱۳) (به صورت اختیاری)، روابط وابستگی زیر بین ثوابت به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i &= -\frac{E_1 \lambda_i^2 + I_0 \omega^2}{E_2 \lambda_i^2 + I_1 \omega^2} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i &= -\frac{E_1 \lambda_i}{E_1 \lambda_i^2 + I_0 \omega^2} \bar{\varphi}_i \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta w: \frac{\partial R_{xz}}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

و شرایط مرزی در دو انتهای تیر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ or } N_{xx} = 0 \\ \varphi &= 0 \text{ or } M_{xx} = 0 \\ w &= 0 \text{ or } R_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

که در روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz \\ M_{xx} &= \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \\ R_{xz} &= \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات حرکت (۱۰) برحسب مولفه‌های ناموضعی تنش به-دست آمده‌اند. اگر عملگر $1 - \mu \nabla^2$ را در این معادلات ضرب کنیم و سپس از روابط (۲) و (۷) استفاده کنیم، معادلات حرکت برحسب مولفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \delta u: E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ - (1 - \mu \nabla^2) \left(I_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \delta \varphi: E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - E_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi \right) \\ - (1 - \mu \nabla^2) \left(I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \delta w: E_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - (1 - \mu \nabla^2) \times I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

که

$$\begin{aligned} (E_1, E_2, E_3) &= \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz \\ (I_1, I_2, I_3) &= \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \end{aligned} \quad (14)$$

ساده‌ترین نوع آن تابع توزیع یکنواخت است. در اینجا از شبکه‌بندی غیرخطی در راستای محور طولی تیر بر اساس تابع توزیع زیر استفاده شده است:

$$x_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right) * L \quad (22)$$

مشق‌های مولفه‌های جابه‌جایی موجود در معادلات حرکت (۱۳) براساس روش GDQM به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} u(x_j) \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \varphi(x_j) \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \varphi(x_j) \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} w(x_j) \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} w(x_j) \end{aligned} \quad (23)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳) در معادلات حرکت (۱۳)، به تعداد سه برابر نقاط شبکه معادله گسسته برحسب مولفه‌های جابه‌جایی $u(x_i)$ ، $\varphi(x_i)$ و $w(x_i)$ به‌دست می‌آیند؛ همچنین اگر معادلات (۲۳) را در معادلات شرایط مرزی (۱۱) جایگذاری کنیم ۶ معادله برحسب مولفه‌های جابه‌جایی فوق به‌دست می‌آیند. این شش معادله مرزی باید با شش معادله حرکت در نقاط مرزی جایگزین شوند تا در مجموع به تعداد سه برابر نقاط شبکه معادله حرکت و معادله شرط مرزی داشته باشیم که برحسب سه برابر نقاط شبکه مولفه‌های جابه‌جایی $u(x_i)$ ، $\varphi(x_i)$ و $w(x_i)$ می‌باشند. این معادلات همگن و دارای حل بدیهی صفر هستند. از حل نابدیهی این دستگاه از معادلات، مقادیر فرکانس‌های طبیعی تیر استخراج می‌شوند.

مقادیر مشخصه λ_i برحسب خواص مواد، هندسه تیر و فرکانس‌های طبیعی می‌باشند. اگر پاسخ‌های به‌دست آمده در معادلات (۱۷) و (۱۸) را در شش معادله شرط مرزی ۱۱ جایگذاری می‌کنیم به یک دستگاه معادلات همگن بر حسب شش ثابت \bar{u}_i می‌رسیم که از حل نابدیهی آن مقادیر فرکانس‌های طبیعی استخراج می‌شوند. معادلات شرایط مرزی برای چهار نوع شرط مرزی مختلف در جدول ۱ نشان داده شده است.

۲-۳- روش عددی GDQM

برای حل معادلات حرکت به‌صورت عددی از روش GDQM استفاده شده است. براساس این روش عددی مشتق مرتبه k ام یک تابع در نقطه x_i به‌صورت زیر بیان می‌شود [۳۴]:

$$\left. \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} f(x_j) \quad (19)$$

که در رابطه بالا $C_{ij}^{(k)}$ ضرایب وزن مرتبط به مشتق مرتبه k ام و N تعداد نقاط شبکه بندی است که برای تیر مورد نظر فقط در امتداد محور طولی تیر می‌باشند. مقادیر ضرایب وزن برای مشتق مرتبه ۱ به‌صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(1)} &= \frac{\prod_{r=1, r \neq i}^N (x_i - x_r)}{(x_i - x_j) \prod_{r=1, r \neq j}^N (x_j - x_r)}, \quad i \neq j \\ C_{ij}^{(1)} &= \frac{\prod_{r=1, r \neq i}^N (x_i - x_r)}{(x_i - x_j) \prod_{r=1, r \neq j}^N (x_j - x_r)}, \quad i = j \end{aligned} \quad (20)$$

مقادیر ضرایب وزن برای مشتق مرتبه $k > 1$ به‌صورت زیر برحسب ضرایب وزن مرتبه پایینتر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(k)} &= k \left(C_{ii}^{(k-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(k-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i \neq j \\ C_{ij}^{(k)} &= - \sum_{r=1, r \neq i}^N C_{ir}^{(k)}, \quad i = j \end{aligned} \quad (21)$$

چندین تابع توزیع برای نقاط شبکه‌بندی وجود دارد که

جدول ۱- معادلات شرایط مرزی به‌دست آمده در حل تحلیلی

مرز $x = 0$	مرز $x = L$	شرط مرزی
$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_1 \bar{u}_i + E_2 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_1 \bar{u}_i + E_2 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	H-H
$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_2 \bar{u}_i + E_3 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_2 \bar{u}_i + E_3 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	

$\sum_{i=1}^6 \bar{u}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_1 \bar{u}_i + E_2 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	C-H
$\sum_{i=1}^6 \bar{\varphi}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_2 \bar{u}_i + E_3 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{u}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\sum_{i=1}^6 \bar{u}_i e^{\lambda_i x} = 0$	C-C
$\sum_{i=1}^6 \bar{\varphi}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\sum_{i=1}^6 \bar{\varphi}_i e^{\lambda_i x} = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{u}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_1 \bar{u}_i + E_2 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	C-F
$\sum_{i=1}^6 \bar{\varphi}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$(1 - \mu \nabla^2) \left(\sum_{i=1}^6 \lambda_i (E_2 \bar{u}_i + E_3 \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	
$\sum_{i=1}^6 \bar{w}_i e^{\lambda_i x} = 0$	$\frac{E_1 (1 - \mu \nabla^2)}{2(1 + \nu)} \left(\sum_{i=1}^6 (\lambda_i \bar{w}_i + \bar{\varphi}_i) e^{\lambda_i x} \right) = 0$	

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی اول حاصل از حل تحلیلی حاضر با مقادیر ارائه شده توسط چن و همکاران [۳۵] بدون در نظر گرفتن رابطه ۲۵

L/h	تابع توزیع تخریل ۱ چن و همکاران [۳۵]	روش تحلیلی حاضر	تابع توزیع تخریل ۲ چن و همکاران [۳۵]	روش تحلیلی حاضر
	H-H		H-H	
۱۰	۰/۲۷۹۸	۰/۲۶۴۳	۰/۲۵۹۹	۰/۲۴۰۸
۲۰	۰/۱۴۲۲	۰/۱۳۴۱	۰/۱۳۱۸	۰/۱۲۱۹
	C-C		C-C	
۱۰	۰/۵۹۴۴	۰/۵۶۵۲	۰/۵۴۷۵	۰/۵۱۹۸
۲۰	۰/۳۱۶۶	۰/۲۹۹۲	۰/۲۸۸۸	۰/۲۷۲۸
	C-H		C-H	
۱۰	۰/۴۲۴۲	۰/۴۰۲۰	۰/۳۸۹۸	۰/۳۶۷۹
۲۰	۰/۲۲۰۳	۰/۲۰۸۰	۰/۲۰۱۳	۰/۱۸۹۴
	C-F		C-F	
۱۰	۰/۱۰۰۸	۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۱۷	۰/۰۸۶۵
۲۰	۰/۰۵۰۸	۰/۰۴۷۹	۰/۰۴۶۲	۰/۰۴۳۵

جدول ۳- مقایسه فرکانس طبیعی اول حاصل از حل تحلیلی حاضر با مقادیر ارائه شده توسط چن و همکاران [۳۵] با در نظر گرفتن رابطه ۲۵

روش تحلیلی حاضر	تابع توزیع تخریل ۲ چن و همکاران [۳۵]	روش تحلیلی حاضر	تابع توزیع تخریل ۱ چن و همکاران [۳۵]	L/h
	H-H		H-H	
۰/۲۵۵۰	۰/۲۵۹۹	۰/۲۷۹۸	۰/۲۷۹۸	۱۰
۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۱۸	۰/۱۴۲۲	۰/۱۴۲۲	۲۰
	C-C		C-C	
۰/۵۴۷۵	۰/۵۴۷۵	۰/۵۹۴۴	۰/۵۹۴۴	۱۰
۰/۲۸۸۸	۰/۲۸۸۸	۰/۳۱۶۶	۰/۳۱۶۶	۲۰
	C-H		C-H	
۰/۳۸۹۸	۰/۳۸۹۸	۰/۴۲۴۲	۰/۴۲۴۲	۱۰
۰/۲۰۱۳	۰/۲۰۱۳	۰/۲۲۰۳	۰/۲۲۰۳	۲۰
	C-F		C-F	
۰/۰۹۱۷	۰/۰۹۱۷	۰/۱۰۰۸	۰/۱۰۰۸	۱۰
۰/۰۴۶۲	۰/۰۴۶۲	۰/۰۵۰۸	۰/۰۵۰۸	۲۰

جدول ۴- فرکانس طبیعی اول حاصل از حل‌های تحلیلی و عددی حاضر مربوط به مدل اول توزیع تخریل و شرایط مرزی H-H و C-C

روش تحلیلی	C-C روش عددی	روش تحلیلی	H-H روش عددی	μ	e_0	h_0/h
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۶۵۲	۰/۵۶۵۲	۰/۲۶۴۳	۰/۲۶۴۲	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۴۸۹	۰/۵۴۸۹	۰/۲۵۸۰	۰/۲۵۸۰	۰/۵		
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۲
۰/۵۵۳۶	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۶۹۶	۰/۵۶۹۶	۰/۲۶۵۹	۰/۲۶۵۹	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۵۳۳	۰/۵۵۳۳	۰/۲۵۹۶	۰/۲۵۹۶	۰/۵		
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۴
۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۵۵۲	۰/۵۵۵۲	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۳۹۲	۰/۵۳۹۲	۰/۲۵۱۷	۰/۲۵۱۷	۰/۵		

جدول ۵- فرکانس طبیعی اول حاصل از حل‌های تحلیلی و عددی حاضر مربوط به مدل اول توزیع تخلخل و شرایط مرزی H-C و

شرایط مرزی C-F

روش تحلیلی	C-F روش عددی	روش تحلیلی	H-C روش عددی	μ	e_0	h_0/h
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۴۰۲۰	۰/۴۰۲۰	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۹۵۳	۰/۰۹۵۳	۰/۳۹۱۰	۰/۳۹۱۰	۰/۵		
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۲
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۹۵۷	۰/۰۹۵۷	۰/۴۰۴۸	۰/۴۰۴۸	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۹۵۹	۰/۰۹۵۹	۰/۳۹۳۷	۰/۳۹۳۷	۰/۵		
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۴
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۹۲۷	۰/۰۹۲۷	۰/۳۹۳۴	۰/۳۹۳۴	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۹۲۹	۰/۰۹۲۹	۰/۳۸۲۷	۰/۳۸۲۷	۰/۵		

جدول ۶- فرکانس طبیعی اول حاصل از حل‌های تحلیلی و عددی حاضر مربوط به مدل دوم توزیع تخلخل و شرایط مرزی H-H و

شرایط مرزی C-C

روش تحلیلی	C-C روش عددی	روش تحلیلی	H-H روش عددی	μ	e_0	h_0/h
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۱۹۸	۰/۵۱۹۸	۰/۲۴۰۸	۰/۲۴۰۸	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۰۴۸	۰/۵۰۴۸	۰/۲۳۵۱	۰/۲۳۵۱	۰/۵		
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۲
۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۷۵۶	۰/۵۷۵۶	۰/۲۶۹۰	۰/۲۶۹۰	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۵۹۱	۰/۵۵۹۱	۰/۲۶۲۶	۰/۲۶۲۶	۰/۵		
۰/۵۷۰۰	۰/۵۷۰۰	۰/۲۶۴۱	۰/۲۶۴۱	۰/۰	۰/۰	۰/۴
۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۳۵	۰/۲۵۷۸	۰/۲۵۷۸	۰/۵		
۰/۵۷۳۶	۰/۵۷۳۶	۰/۲۶۷۳	۰/۲۶۷۳	۰/۰	۰/۵	
۰/۵۵۷۱	۰/۵۵۷۱	۰/۲۶۱۰	۰/۲۶۱۰	۰/۵		

جدول ۷- فرکانس طبیعی اول حاصل از حل‌های تحلیلی و عددی حاضر مربوط به مدل دوم توزیع تخلخل و شرایط مرزی H-C و

شرایط مرزی C-F

روش تحلیلی	C-F روش عددی	روش تحلیلی	H-C روش عددی	μ	e_0	h_0/h
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۸۶۵	۰/۰۸۶۵	۰/۴۰۲۰	۰/۴۰۲۰	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۸۶۷	۰/۰۸۶۷	۰/۳۹۱۰	۰/۳۹۱۰	۰/۵		
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۲
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۹۶۸	۰/۰۹۶۸	۰/۴۰۹۳	۰/۴۰۹۳	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۹۷۰	۰/۰۹۷۰	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۸۱	۰/۵		
۰/۰۹۴۹	۰/۰۹۴۹	۰/۴۰۳۴	۰/۴۰۳۴	۰/۰	۰/۰	۰/۴
۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۱	۰/۳۹۲۴	۰/۳۹۲۴	۰/۵		
۰/۰۹۶۲	۰/۰۹۶۲	۰/۴۰۷۲	۰/۴۰۷۲	۰/۰	۰/۵	
۰/۰۹۶۴	۰/۰۹۶۴	۰/۳۹۶۱	۰/۳۹۶۱	۰/۵		

$$E_0 = 200 \text{ Gpa},$$

$$\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3, \nu = 1/3 \quad (26)$$

قابل ذکر است که منظور از فرکانس طبیعی در تمام جداول و نمودارهای این مقاله، مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در رابطه (۲۴) است. اگر براساس تئوری تیر تیموشنکو روابط تنش کرنش را استخراج کنیم به رابطه ۷ می‌رسیم، درحالی‌که در مقاله چن و همکاران از رابطه دوبعدی فوق برای بیان روابط تنش-کرنش استفاده شده است. در جداول ۲ و ۳ نتایج حاصل از این مقاله برای هر دو حالت با نتایج مقاله چن و همکاران مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، اگر رابطه (۲۵) را در نظر بگیریم، تطابق کامل بین نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر با نتایج ارائه شده توسط چن و همکاران وجود دارد که تایید کننده صحت رابطه‌ها و نتایج به‌دست آمده حاصل از این مقاله است.

در جداول ۴ و ۵ با استفاده از هر دو روش حل تحلیلی و عددی، فرکانس طبیعی اول تیر برای مقادیر مختلف نسبت-

۴- نتایج عددی

به‌منظور مقایسه پذیر بودن نتایج عددی، از یک رابطه بی‌بعد به‌صورت زیر برای بیان فرکانس طبیعی و پارامتر ناموضعی استفاده می‌شود:

$$\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\frac{I_{10}}{E_{10}}}, \quad I_{10} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 dz$$

$$E_{10} = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} E_0 dz, \quad \bar{\mu} = \mu/h^2 \quad (24)$$

در ابتدا به نتایج حاصل از این مقاله با نتایج ارائه شده توسط چن و همکاران [۳۵] برای ورق‌های ماکرو می‌پردازیم. در مقاله آن‌ها رابطه تنش-کرنش به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است که:

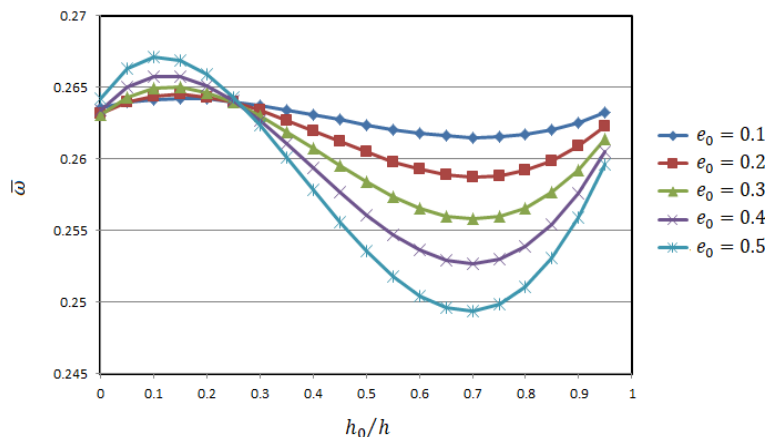
$$t_{xx}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\partial u / \partial x + z \partial \phi / \partial x) \quad (25)$$

در همه نتایج ارائه شده در این مقاله از فوم فولادی با خواص زیر استفاده شده است:

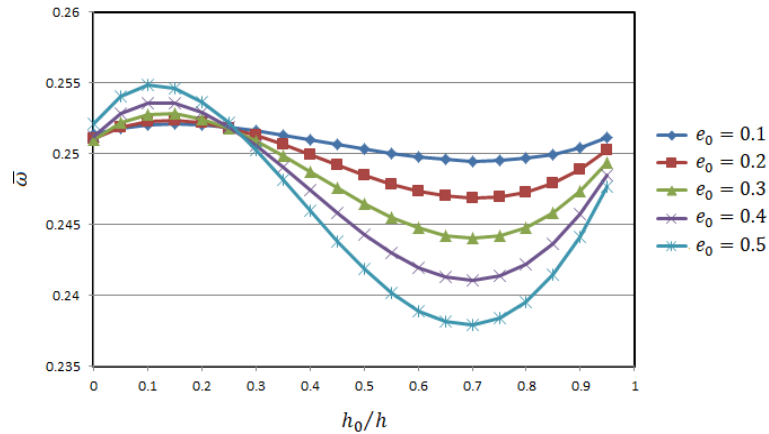
تخلخل افزایش می‌یابد، شدت تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر افزایش می‌یابد. البته همان‌طور که مشاهده می‌شود، کل تغییرات فرکانس برای مقادیر پارامتر تخلخل نشان داده شده حداکثر ده درصد است. در شکل ۳ نمودارهایی مشابه شکل ۲ و به‌ازای $\bar{\mu} = 1$ رسم شده‌اند. از مقایسه شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که وجود پارامتر ناموضعی سبب کاهش مقدار فرکانس طبیعی می‌شود ولی در کل تغییری در روند نمودارها، درصد تغییرات و حتی محدوده نقاط کمینه و بیشینه به‌وجود نمی‌آید. نمودارهایی مشابه شکل ۲ و ۳ به‌ترتیب برای تابع تخلخل نوع ۲ در شکل‌های ۴ و ۵ و برای تابع تخلخل نوع ۳ در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شده است. در شکل‌های ۴ و ۵ که مربوط به تابع تخلخل نامتقارن نوع ۲ می‌باشند، روند نمودارها مشابه شکل‌های ۲ و ۳ می‌باشند و نمودارها یک نقطه بیشینه و یک نقطه کمینه دارند با این تفاوت که شدت تغییرات در ابتدای نمودارها بیشتر از نوع ۱ و در انتهای نمودارها کمتر از نوع ۱ است. در شکل‌های ۶ و ۷ که مربوط به تابع تخلخل یکنواخت از نوع ۳ است، روند نمودارها تا حدودی متفاوت است. نمودارها در این حالت نیز دارای نقاط بیشینه و کمینه مشابهی نسبت به حالت‌های قبل هستند با این تفاوت که به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر تخلخل، نمودارها یکدیگر را قطع نمی‌کنند که کاملاً متفاوت از دو حالت قبل است.

های طول به ضخامت تیر، پارامتر تخلخل e_0 پارامتر ناموضعی μ و همچنین شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نتایج این جدول مربوط به مدل اول توزیع تخلخل می‌باشند. برای حل عددی از ۲۵ نقطه شبکه استفاده شده است که منجر به همگرایی نتایج در همه حالات و شرایط مرزی مختلف می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده با استفاده از دو روش تطابق کامل دارند که تایید کننده صحت نتایج حاصل از هر دو روش می‌باشد. نتایج مشابهی در جدول‌های ۶ و ۷ برای مدل دوم توزیع تخلخل ارائه شده است.

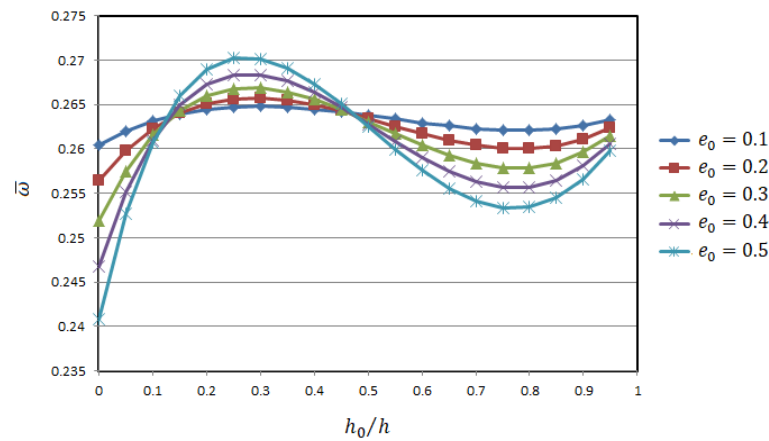
در شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر برای تابع تخلخل نوع ۱ و شرایط مرزی مفصل-مفصل (S-S) ارائه شده است. نتایج این شکل به‌ازای $\bar{\mu} = 0$ و پنج مقدار مختلف پارامتر تخلخل ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار ضخامت لایه همگن در ابتدا مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و بعد از رسیدن به یک مقدار بیشینه سپس با افزایش مقدار ضخامت لایه همگن مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد تا به یک مقدار کمینه برای فرکانس طبیعی می‌رسیم. سپس در انتها با افزایش مقدار ضخامت لایه همگن مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان گفت که نمودارهای فوق دارای یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه می‌باشند. هرچه مقدار پارامتر



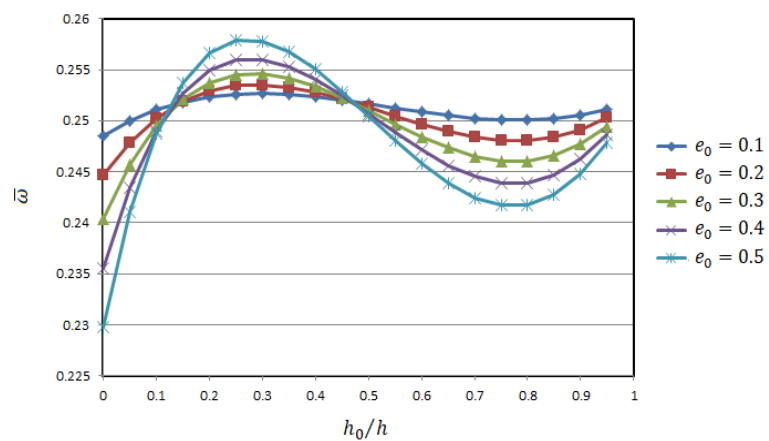
شکل ۲- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۱ و $\bar{\mu} = 0$



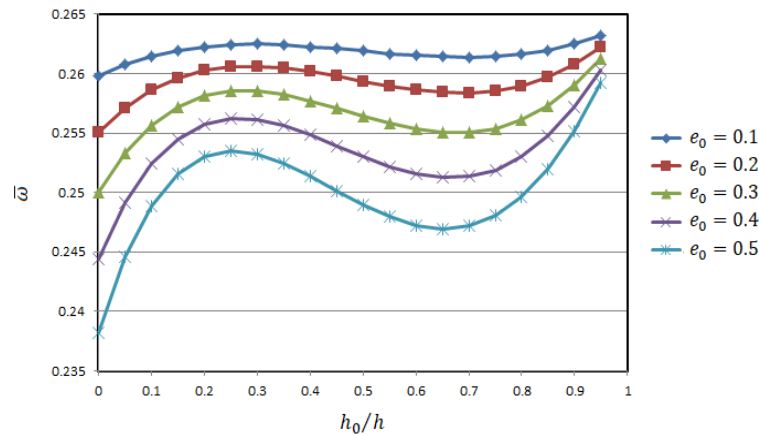
شکل ۳- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۱ و $\bar{\mu} = 1$



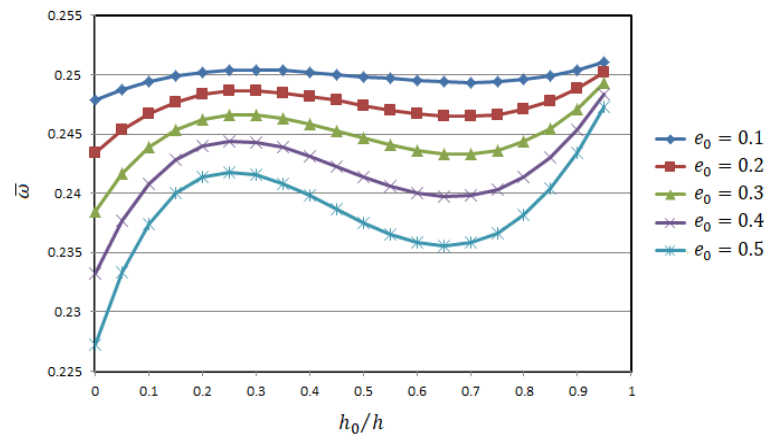
شکل ۴- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $\bar{\mu} = 0$



شکل ۵- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $\bar{\mu} = 1$



شکل ۶- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $\bar{\mu} = 0$



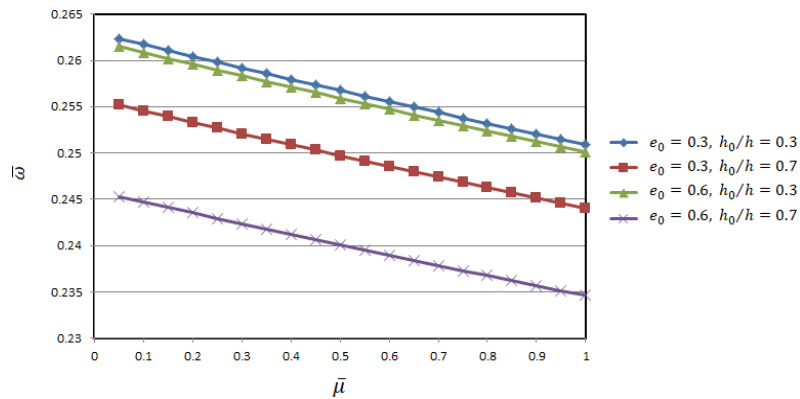
شکل ۷- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر نسبت به تغییرات نسبت ضخامت لایه همگن به ضخامت کل تیر، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $\bar{\mu} = 1$

در شکل‌های ۸-۱۱ تغییرات فرکانس بنیادی تیر نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی به ترتیب برای شرایط مرزی مفصل-مفصل (S-S)، مفصل-گیردار (S-C)، گیردار-گیردار (C-C)، و گیردار-آزاد (C-F) ارائه شده است. نمودارها برای دو مقدار مختلف پارامتر تخلخل و دو مقدار مختلف پارامتر ناموضعی برای دو مقدار مختلف پارامتر تخلخل و دو مقدار مختلف پارامتر ناموضعی h_0/h ارائه شده‌اند. مشاهده می‌شود، به جز برای شرایط مرزی گیردار-آزاد که فرکانس طبیعی با افزایش پارامتر ناموضعی با شیب کمی افزایش پیدا می‌کند، برای سایر شرایط مرزی مقدار فرکانس طبیعی با افزایش پارامتر ناموضعی کاهش می‌یابد؛ هم‌چنین مشاهده می‌شود که افزایش هر کدام از پارامترهای تخلخل و پارامتر h_0/h منجر به کاهش مقدار فرکانس طبیعی می‌شود که این کاهش مقدار برای پارامتر

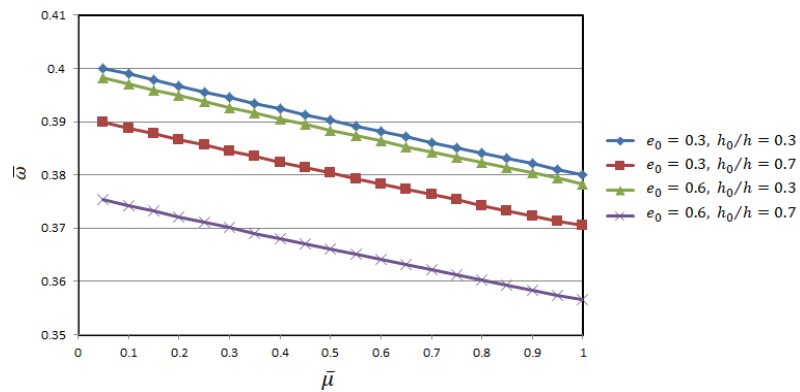
h_0/h بیشتر است. از مقایسه شکل‌ها اینگونه نتیجه‌گیری می‌شود که وجود شرط مرزی گیردار تاثیر تخلخل را بر مقدار فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌دهد. در شکل‌های ۱۲-۱۵ تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی برای دو مقدار مختلف پارامتر تخلخل و دو مقدار مختلف پارامتر ناموضعی h_0/h نشان داده شده‌اند. نمودار ارائه شده در این شکل‌ها مربوط به تابع توزیع تخلخل نوع ۲ است. در هر شکل، نمودارها برای چهار شرط مرزی مختلف مفصل-مفصل، مفصل-گیردار، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد رسم شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شیب تغییرات برای شرط مرزی گیردار-گیردار و سپس مفصل-گیردار بیش از دو حالت شرایط مرزی دیگر است.

ناموضعی است. از این مقایسه هم‌چنین نتیجه می‌شود که برای تابع تلخلخل یکنواخت نوع ۳ نیز افزایش پارامتر تلخلخل مقدار فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد.

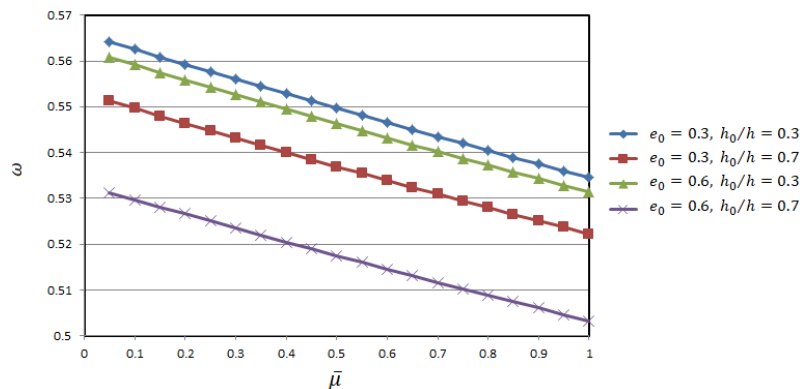
نمودارهای مشابهی در شکل‌های ۱۶-۱۹ و برای تابع تلخلخل یکنواخت نوع ۳ ارائه شده‌اند. از مقایسه شکل‌های ۱۶-۱۹ با یکدیگر مشخص می‌شود که تاثیر شرایط مرزی بر مقدار فرکانس طبیعی به مراتب بیش از تاثیر تلخلخل و پارامتر



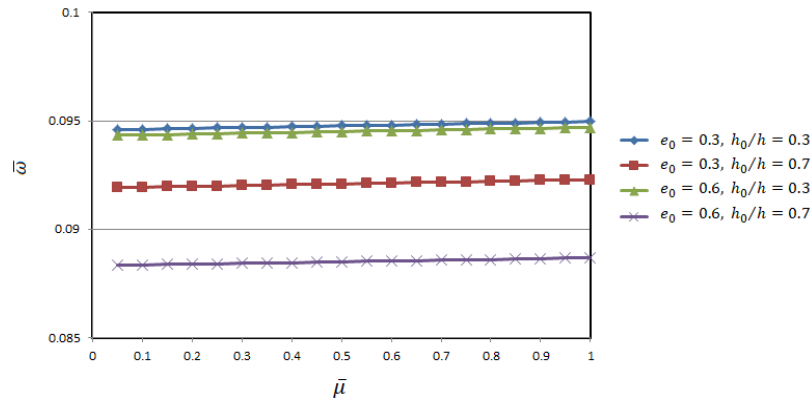
شکل ۸- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی S-S نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تلخلخل از نوع ۱



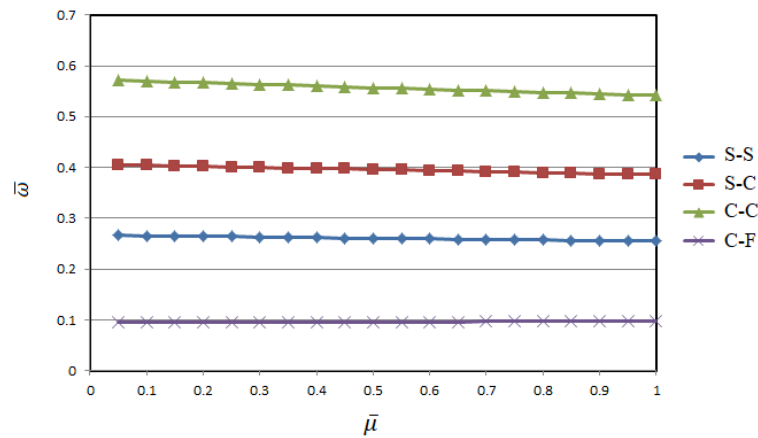
شکل ۹- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی S-C نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تلخلخل از نوع ۱



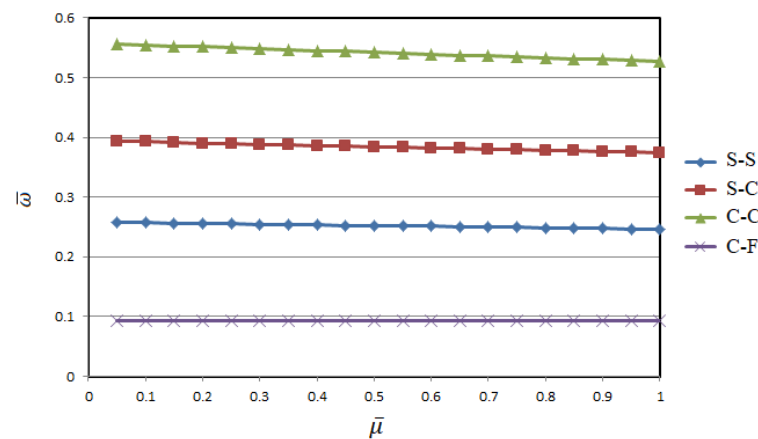
شکل ۱۰- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی C-C نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تلخلخل از نوع ۱



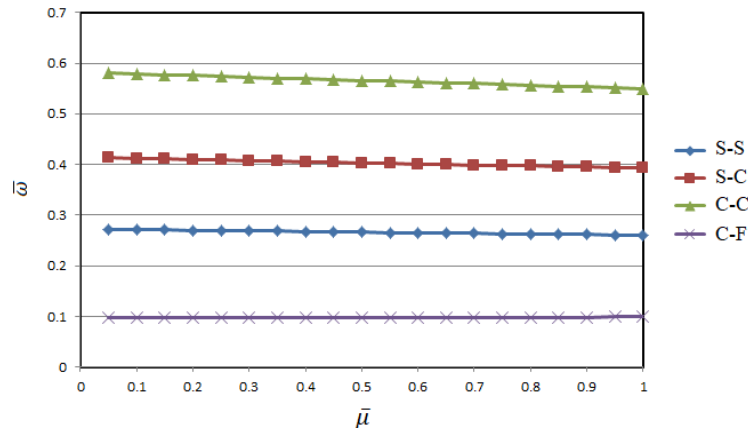
شکل ۱۱- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی C-F نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۱



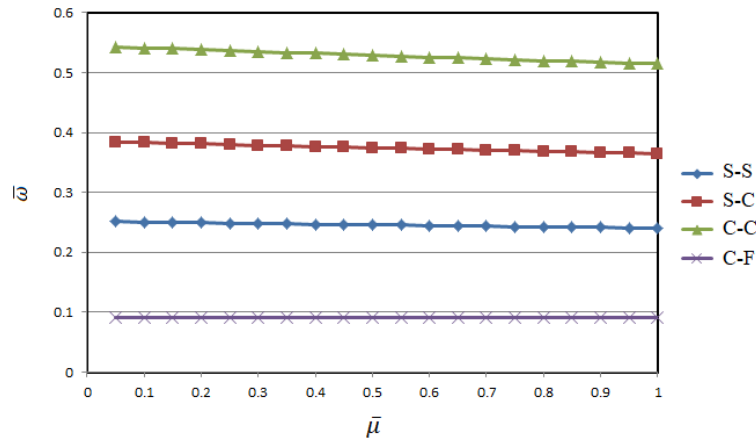
شکل ۱۲- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $e_0 = 0.3, h_0/h = 0.3$



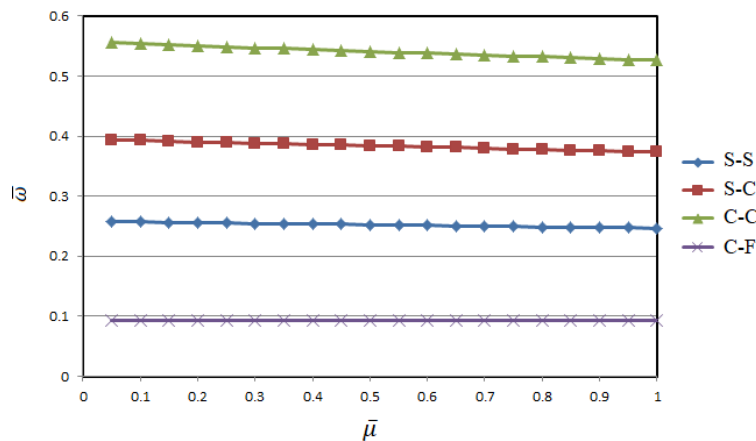
شکل ۱۳- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $e_0 = 0.3, h_0/h = 0.7$



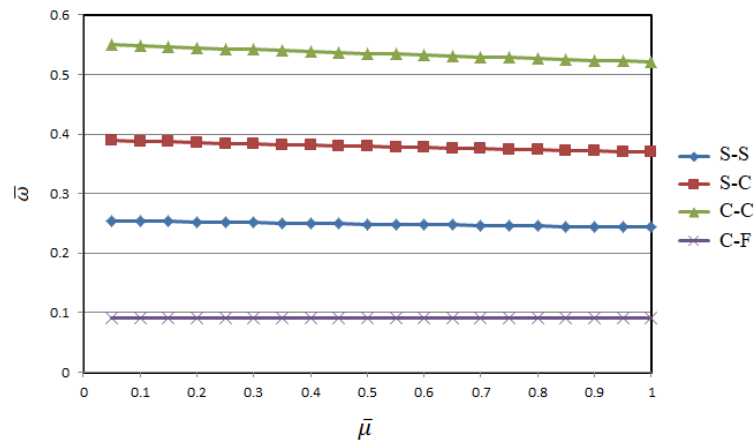
شکل ۱۴- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $e_0 = 0.6, h_0/h = 0.3$



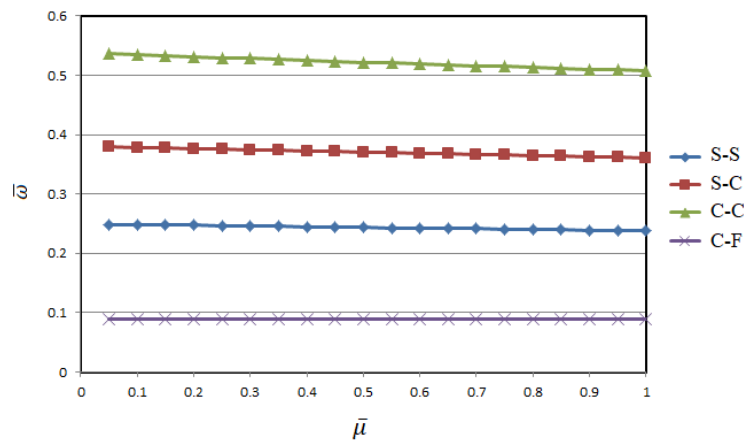
شکل ۱۵- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۲ و $e_0 = 0.6, h_0/h = 0.7$



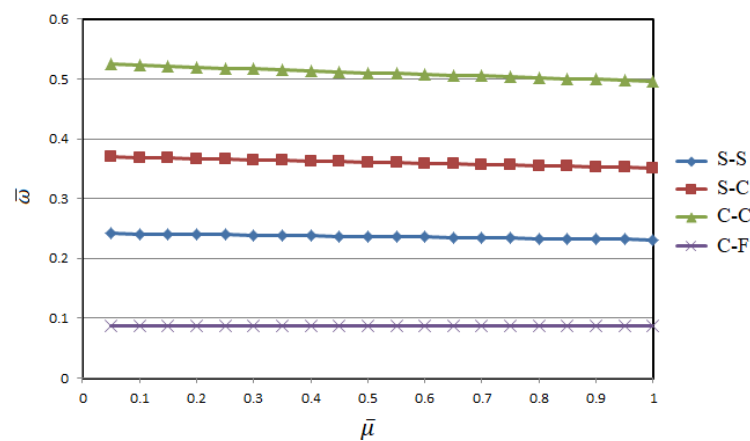
شکل ۱۶- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $e_0 = 0.3, h_0/h = 0.3$



شکل ۱۷- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $e_0 = 0.3$, $h_0/h = 0.7$



شکل ۱۸- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $e_0 = 0.6$, $h_0/h = 0.3$



شکل ۱۹- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی پایه تیر با شرایط مرزی مختلف نسبت به تغییرات پارامتر ناموضعی، با تابع تخلخل از نوع ۳ و $e_0 = 0.6$, $h_0/h = 0.7$

- [6] Banhart J (2001) Manufacture, characterization and application of cellular metals and metal foams. *Prog Mater Sci* 46(6): 559-632.
- [7] Lopatnikov SL, Gama BA, Haque MJ, Krauthauser C, Gillespie JW, Guden M, Hall IW (2003) Dynamics of metal foam deformation during Taylor cylinder-Hopkinson bar impact experiment. *Compos Struct* 61(1): 61-71.
- [8] Pinnoji PK, Mahajan P, Bourdet N, Deck C, Willinger R (2010) Impact dynamics of metal foam shells for motorcycle helmets: experiments and numerical modeling. *Int J Impact Eng* 37(3): 274-284.
- [9] Lefebvre L-P, Banhart J, Dunand D (2008) Porous metals and metallic foams: current status and recent developments. *Adv Eng Mater* 10(9): 775-787.
- [10] Ahmad Z, Thambiratnam DP (2009) Dynamic computer simulation and energy absorption of foam-filled conical tubes under axial impact loading. *Compos Struct* 87(3): 186-197.
- [11] Toupin RA (1962) Elastic materials with couple stresses. *Arch Ration Mech An* 11: 385-414.
- [12] Mindlin RD, Tiersten HF (1962) Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch Ration Mech An* 11: 415-448.
- [13] Mindlin RD (1963) Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp Mech* 3: 1-7.
- [14] Koiter WT (1964) Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II. *Proc K Ned Akad B-Ph* 67: 17-44.
- [15] Aifantis EC (1999) Strain gradient interpretation of size effects. *Int J Fracture* 95: 1-4.
- [16] Eringen AC (1972) Nonlocal polar elastic continua. *Int J Eng Sci* 10:1-16.
- [17] Gurtin ME, Weissmuller J, Larche F (1998) The general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philos Mag A* 1093-1109.
- [18] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct* 39: 2731-2743.
- [19] Salehipour H, Shahidi AR, Nahvi H (2015) Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials. *Int J Eng Sci* 90: 44-57.
- [20] Shafiei N, Mirjavad S, MohaselAfshari B, Rabby S, Kazemi m (2017) Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams. *Comput Method Appl M* 322: 615-632.
- [21] Ebrahimi F, Barati MR (2017) Porosity-dependent vibration analysis of piezo-magnetically actuated heterogeneous nanobeams. *Mech Syst Signal Pr* 93: 445-459.

۴- نتیجه گیری

در مقاله فوق ارتعاشات آزاد تیرهای میکرو/نانو همگن پوشیده شده با مواد مدرج تابعی متخلخل مطالعه شد. معادلات حرکت حاکم بر مساله با استفاده از تئوری مکانیک محیط پیوسته الاستیسیته ناموضعی ارینگن و تئوری برشی مرتبه اول تیرها استخراج شد. از دو روش حل تحلیلی دقیق و حل عددی GDQM برای حل معادلات و استخراج نتایج عددی استفاده شد. مقایسه نتایج عددی به دست آمده از دو روش با یکدیگر و همچنین مقایسه نتایج حاصل از آنها با نتایج مقالات دیگر صحت و دقت رابطه‌ها و روش‌های حل را تایید می‌کند. از نتایج عددی نتیجه‌گیری شد که افزایش مقدار تخلخل لایه متخلخل منجر به کاهش مقدار فرکانس طبیعی تیر می‌شود؛ همچنین مشاهده شد که به‌طور کلی افزایش یا کاهش ضخامت لایه همگن منجر به افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی نمی‌شود و در بخشی از نمودار افزایشی و در بخشی دیگر کاهش است. بدین‌صورت که با افزایش ضخامت لایه همگن از صفر درصد تا صد درصد کل ضخامت تیر، مقدار فرکانس طبیعی در ابتدا افزایش سپس کاهش و در انتها دوباره افزایش می‌یابد. وجود پارامتر ناموضعی به‌جز برای شرایط مرزی گیردار-آزاد منجر به کاهش مقدار فرکانس طبیعی تیر می‌شود.

۵- مراجع

- [1] Udupa G, Rao SS, Gangadharan K (2014) Functionally graded composite materials :an overview. *Proc Mat Sci* 5: 1291-1299.
- [2] Rafiee M, Yang J, Kitipornchai S (2013) Large amplitude vibration of carbon nanotube reinforced functionally graded composite beams with piezoelectric layers. *Compos Struct* 96: 716-725.
- [3] Smith B, Szymsiszewski S, Hajjar J, Schafer B, Arwade S (2012) Steel foam for structures: are view of applications, manufacturing and material properties. *J Constr Steel Res* 71: 1-10.
- [4] Ashby MF, Evans T, Fleck NA, Hutchinson J, Wadley H, Gibson L (2000) Metal foams :A design guide. Elsevier.
- [5] Badiche X, Forest S, Guibert T, Bienvenu Y, Bartout J-D, Ienny P, Croset M, Bernet H (2000) Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams :Application of the mechanics of cellular solids and of porous materials. *Mat Sci Eng A-Struct* 289(1): 276-288.

- incorporating surface effects and different boundary conditions. *Mech Mater* 153: 103633.
- [۳۰] صیدی ج، محمدی ی (۱۳۹۴) بررسی تحلیلی و عددی تیرهای ساندویچی هدفمند تحت بار موضعی و خواص وابسته به دما. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۳۷-۱۲۷: ۵(۴).
- [۳۱] مختاری ع، میردامادی ح، غیور م (۱۳۹۵) آنالیز دینامیکی تیر تیموشنکوی پیش تنیده به کمک روش المان محدود طیفی بر پایه تبدیل موجک. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۲۲-۱۱: ۶(۴).
- [۳۲] فروزنده س، آریایی ع (۱۳۹۵) تحلیل ارتعاشات مجموعه‌ای از چند تیر تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف پذیر میانی تحت عبور جرم متحرک. *نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۸۶-۶۹: ۶(۲).
- [33] Talebizadehsardari P, Salehipour H, Shahgholian-Ghahfarokhi D, Shahsavari A, Karimi M (2020) Free vibration analysis of the macro-micro-nano plates and shells made of a material with functionally graded porosity: A closed-form solution. *Mech Based Des Struc.* (Under Publication)
- [34] Shu C (2000) *Differential quadrature and its application in engineering.* Springer, Berlin
- [35] Chen D, Yang J, Kitipornchai S (2016) Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded Porous beams. *Int J Mech Sci* 108-109: 14-29.
- [22] Shahverdi H, Barati MR (2017) Vibration analysis of porous functionally graded nanoplates. *Int J Eng Sci* 120: 82-99.
- [23] Faleh NM, Ahmed RA, Fenjan RM (2018) On vibrations of porous FG nanoshells. *Int J Eng Sci* 133: 1-14.
- [24] Aria AI, Rabczuk T, Friswell MI (2019) A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams. *Eur J Mech A-Solid* 77: 103767.
- [25] Mohammadi M, Hosseini M, Shishesaz M, Hadi A, Rastgoo A (2019) Primary and secondary resonance analysis of porous functionally graded nanobeam resting on a nonlinear foundation subjected to mechanical and electrical loads. *Eur J Mech A-Solid* 77: 103793.
- [26] Phung-Van P, Thai CH, Nguyen-Xuan H, Abdel-Wahab M (2019) An isogeometric approach of static and free vibration analyses for porous FG nanoplates. *Eur J Mech A-Solid* 78: 103851.
- [27] Phung-Van P, Thai CH, Nguyen-Xuan H, Abdel-Wahab M (2019) Porosity-dependent nonlinear transient responses of functionally graded nanoplates using isogeometric analysis. *Compos Part B-Eng* 164: 215-225.
- [28] Rahmani A, Faroughi S, Friswell MI (2020) The vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous rotating nanobeams based on general nonlocal theory. *Mech Syst Signal Pr* 144: 106854.
- [29] Behdad Sh, Fakher M, Hosseini-Hashemi Sh (2021) Dynamic stability and vibration of two-phase local/nonlocal VFGP nanobeams