مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۲/ دوره ۳/ شماره ۳/ صفحه ۱۴۹-۱۶۰

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

یادداشت تحقیقاتی:

بررسی دینامیکی یک ترک ایستا در محیط محدود دو بعدی ارتوتروپیک با روش المان محدود توسعه یافته

محمد جعفری[۱]، محمدباقر نظری[۱،*] و مجتبی حاجی محمدی[۲]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۵/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۹/۶

چکیده

در این مقاله، بررسی رفتار ترک در مواد ارتوتروپیک به صورت محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته (XFEM) ارائه شده است. مدل‌سازی ترک شامل فرآیند غنی‌سازی حوزه نوک ترک و ناپیوستگی متغیر در سطح ترک با استفاده از مجموعه بردارهای مرتبه ای انجام شده است. در معادلات الاستودینامیک گسسته، برای انتگرال زمانی روش نیومارک بکار برده شده است. روش انتگرال برهم‌کنش نیز برای محاسبه ضرایب شدت تنش به کار رفته است. در چند مثال عددی، رفتار ترک تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی بررسی شده و نتایج مورد بحث قرار گرفته است. نتایج تحلیل تطابق قابل قبولی با مقادیر گزارش‌شده دارد.

کلمات کلیدی: مواد ارتوتروپیک؛ روش المان محدود توسعه یافته؛ ضرایب شدت تنش؛ انتگرال برهم‌کنش.

Technical Note:

Dynamic analysis of the fixed crack in 2D orthotropic media by the extended finite element method

M. Jafari[1], M.B. Nazari[1,*] and M. Hajimohammadi[2]

[1] Assist. Prof., Mech. Eng., Shahrood University, Shahrood, Iran

[2] M.Sc. Student., Mech. Eng., Shahrood University, Shahrood, Iran

Abstract

In this paper, the extended finite element method is implemented to compute dynamic stress intensity factors in orthotropic media. The implicit crack model including discontinuities on the surface of the crack and crack-tip enrichment is prepared in the framework of partition of unity. The Newmark time integration schemes are used to numerical solve the spatial-discretized elastodynamic governing equations and obtain the time history of the stress intensity factors. Also, stress intensity factors are computed using the interaction integral method. In several static and dynamic examples, the obtained results and reported others are in good agreement.

Keywords: Orthotropic media; Extended finite element method; Stress intensity factors; Interaction integral.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۲۷۳۰۱۱۷

آدرس پست الکترونیک: mbnazari@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

از آنجایی که مقاومت بر واحد وزن مواد ارتوتروپیک بیشتر از مواد متعارف است، در سال‌های اخیر کاربردهای مهندسی و صنعتی این مواد توسعه یافته‌است. رایج‌ترین آسیب در این مواد که در شرایط مختلف اتفاق می‌افتد، ایجاد ترک است. وجود ترک در سازه‌ها باعث گسیختگی سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. لذا بررسی و پیش‌بینی رفتار رشد ترک و شکست مواد ارتوتروپیک، لازم و ضروری است. مطالعات در زمینه‌ی شکست مواد ارتوتروپیک در طی دو دهه‌ی گذشته گسترش یافته است.

از سال ۱۹۸۷ روش‌های المان محدود و المان مرزی برای مدل‌کردن ترک به کار گرفته شده‌اند و در هر یک از این دو روش نیز پیشرفت‌هایی حاصل شده است، ولی مشکل مشترک این دو روش، تطبیق ترک با مش‌بندی، ریز کردن مش در حوزه نوک ترک برای رصد تکینی تنش در این ناحیه و یا کاربرد المان‌های تکین و تغییر مش در هر مرحله از رشد ترک می‌باشد. یکی از روش‌هایی که با تأثیر در روابط سینماتیک حضور ترک را در نظر می‌گیرد، روش المان محدود توسعه یافته[1] است. در این روش با افزودن درجه آزادی به گره‌های اطراف ترک، حضور ترک مدل می‌شود. این روش بر مبنای روش افراز واحد شکل گرفته است. در سال ۱۹۹۸ بلیچکو[2] و بلک[3] برای اولین بار از روش المان محدود توسعه‌یافته در مسایل مکانیک شکست استفاده کردند [۱]. ماوس[4] و همکارانش روشی بر پایه المان محدود که نیاز به مش‌بندی مجدد نداشت را براساس مفهوم تفکیک پیوستگی بنیانگذاری کردند [۲]. آنها بهبود یک روش جدید برای مدلسازی ترک در چارچوب المان محدود ارائه کردند. دالبو[5] جزئیات مربوط به تعیین گره‌های اطراف ترک و غنی‌سازی آن‌ها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن توابع پله‌ای واحد و تکین را برای مدل‌های ساده با المان‌های چهار گره‌ای ارائه نمود [۳]. در بررسی ترک‌های دو بعدی ارائه معیار تشخیص و انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی برایشان انجام شود، کار دشواری است و این مشکل در مدل‌های سه بعدی بیشتر نمود پیدا کرده است، از این رو روشی به نام مجموعه‌های مرتبه‌ای[6] در سال ۲۰۰۱ توسط استولارسکا[7] و همکارانش در حالت دو بعدی بکار گرفته شده است [۴].

در دهه گذشته شکست دینامیکی مواد مرکب یکی از زمینه های مورد توجه محققین بوده است [۵]. سانچز[8] و همکارانش با استفاده از روش المان مرزی، به تجزیه و تحلیل ترک تحت باردینامیکی در مواد جامد الاستیک دو بعدی، همگن و ناهمسانگرد پرداختند [۶]. توسعه توابع جدید غنی‌سازی برای تجزیه و تحلیل XFEM در مواد ارتوتروپیک توسط اسدپور و همکاران گزارش شده است [۷-۹]. معتمدی و محمدی [۱۰ و ۱۱] با استفاده از این توابع غنی‌سازی، به بررسی رشد دینامیکی و پایداری ترک در مواد مرکب پرداخته‌اند. در تحقیقات اخیر، از انتگرال J_k برای محاسبه ضرایب شدت تنش استفاده شده است. برای اینکه انتگرال J_k مستقل از مسیر باشد، باید از چگالی انرژی کرنشی روی سطح ترک انتگرال‌گیری شود که توسط معتمدی و محمدی انجام نشده است [۱۲]. علاوه بر این، ضرایب شدت تنش از یک معادله غیرخطی جبری بر حسب مقادیر J_k بدست می‌آید. در این مقاله، ضرایب شدت تنش دینامیکی در محیط دو بعدی ارتوتروپیک با استفاده از انتگرال مستقل از مسیر برهم‌کنش محاسبه شده است.

در بخش بعدی، روابط شکست برای تحلیل ترک در یک محیط دوبعدی تحت بار دینامیکی در مواد ارتوتروپیک معرفی شده است و میدان‌های جابجایی و تنش در حوزه نوک ترک آورده شده و کاربرد XFEM در مدل‌سازی ترک دینامیکی با توابع غنی‌سازی نوک ترک شرح داده شده است. برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی از انتگرال برهم‌کنش استفاده شده است و در معادلات الاستودینامیک گسسته برای انتگرال زمانی، روش نیومارک[9] بکار برده شده است. در نهایت، تعدادی شبیه سازی عددی به منظور بررسی دقت و بهره وری از فرمول و بررسی توانایی آن ارائه شده و نتایج بدست آمده با داده های موجود مقایسه گردیده است.

[1] Extended Finite Element Method
[2] Belytschko
[3] Black
[4] Moes
[5] Dolbow
[6] Level Sets
[7] Stolarska
[8] Sanchez
[9] Newmark

۲- مکانیک شکست مواد مرکب

۲-۱- روابط تنش و کرنش

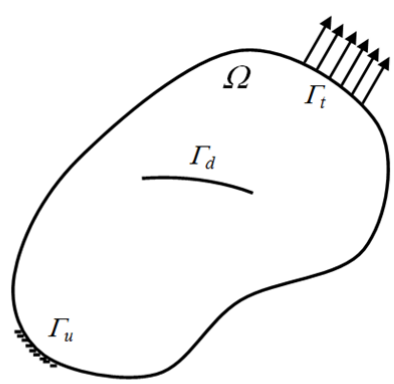
فرض می شود جسم در زمان t دامنه Ω با مرز Γ را اشغال کرده است. مرز Γ متشکل از بخش‌های Γ_u و Γ_t و Γ_d می باشد، به طوریکه $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u$ ، همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی و اولیه برای بارگذاری عبارتنداز [۳]:

$$\begin{aligned} &\nabla.\sigma + b = \rho\ddot{u} \quad in \;\; \Omega \\ &\sigma.n = \bar{t} \quad on \;\; \Gamma_t \\ &\sigma.n = 0 \quad on \;\; \Gamma_d \\ &u = \bar{u} \quad on \quad \Gamma_u \\ &u(x, t = 0) = \bar{u}(0) \\ &\dot{u}(x, t = 0) = \bar{\dot{u}}(0) \end{aligned} \tag{۱}$$

که n بردار نرمال یکه می‌باشد. در رابطه فوق، σ تانسور تنش کوشی و b چگالی نیروی حجمی است. رابطه خطی ساختاری نیز در مواد ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{۲}$$

که در آن σ_{ij} و ε_{kl} به ترتیب تانسور تنش و کرنش C_{ijkl} تانسور الاستیک می باشد.



شکل ۱- جسم با مرزهای داخلی و خارجی تحت بارگذاری

۲-۲- میدان‌های تنش و جابجایی در نوک ترک

در تئوری‌های مرسوم مکانیک شکست، میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک با یکپارامترمثلضریب شدت تنش تعیین می‌گردد. با فرض برقراری شرایط ناحیه تسلیم کوچک[1] ضرایب شدت تنش را به عنوان یک خصوصیت ماده می‌توان برای توصیف میدان‌های حوزه نوک ترک بکار برد.میدان تنش و جابجایی در حوزه نوک ترک در یک پیوستار ارتوتروپیک بصورت زیر است :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_I(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \\ u_i &= K_I\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{I}(\theta) + K_{II}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{II}(\theta) \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن،K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش مود I و II می‌باشد. توابع زاویه‌ای $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ به صورت زیر بیان می‌شوند[۷]:

$$\begin{aligned} f_{11}^{I}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \\ f_{11}^{II}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \\ f_{22}^{I}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \\ f_{22}^{I}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \\ f_{12}^{I}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}\right\}\right] \\ f_{12}^{II}(\theta) &= \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}\right\}\right] \end{aligned} \tag{۴}$$

[1] Small-Scale Yielding (SSY)

$$g_1^I(\theta) = \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\mu_1 p_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta} - \mu_2 p_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\right\}\right]$$
$$g_1^{II}(\theta) = \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{p_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta} - p_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\right\}\right]$$
$$g_2^I(\theta) = \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\mu_1 q_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta} - \mu_2 q_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\right\}\right] \qquad (۵)$$
$$g_2^{II}(\theta) = \boldsymbol{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{q_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta} - q_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\right\}\right]$$
$$p_k = a_{11}{\mu_k}^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \qquad k=1,2$$
$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \qquad k=1,2$$

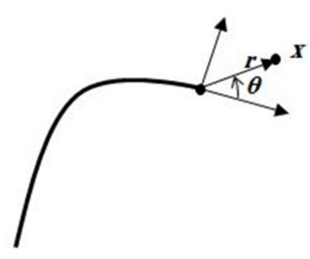
μ ریشه معادله مشخصه زیر می باشد:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12}+a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \qquad (۶)$$

معادله (۶) دارای چهار ریشه بصورت زیر است:

$$\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$$
$$\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2 \qquad (۷)$$

در معادله مشخصه (۶)، a_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه است که براساس فرض تنش دومحوره $(\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$، بصورت تابعی از ماتریس نرمی S_{ij} می‌باشند. (r,θ) مختصات قطبی محلی در نوک ترک، مانند شکل (۲) است.



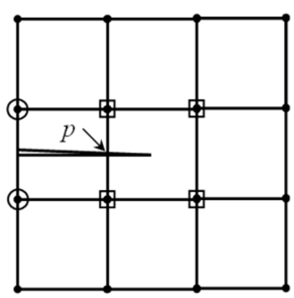
شکل ۲- مختصات قطبی محلی نوک ترک

۳- مدل‌سازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

در مقایسه با تقریب کلاسیک برای مدل‌سازی ترک‌ها در روش اجزاء محدود، با غنی‌سازی ناپیوستگی، هندسه ترک به صورت مستقل از شبکه، نمایش داده می‌شود. در روش المان محدود توسعه یافته از توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند. در این صورت تابع تقریبی غنی شده برای میدان جابجایی $u(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{\substack{I\\ n_I\in N}} \phi_I(x)u_I + \sum_{\substack{J\\ n_J\in N^E}} \phi_J(x)H(x)b_J + \sum_{k\in K_1}\phi_k(x)\left(\sum_{l=1}^{4} C_k^{l1}F_l^1(x)\right) + \sum_{k\in K_2}\phi_k(x)\left(\sum_{l=1}^{4} C_k^{l2}F_l^2(x)\right) \qquad (۸)$$

در رابطه (۸)، u_I درجات آزادی گره کلاسیک در مدل المان محدود است و ϕ_I تابع شکل مربوط به گره می باشد و J مجموعه گره‌های وابسته به بخش میانی ترک[1] و N^E شامل تمام نقاطی است که Γ_d را در بر می‌گیرد؛ K نیز مجموعه وابسته به نوک ترک می‌باشد. برای نمونه، گره‌های مجموعه J با دایره و گره‌های مجموعه K با مربع در شکل (۳) مشخص شده‌اند.



شکل ۳- غنی سازی گره‌هایی که با دایره مشخص شده‌اند با $H(x)$ گسستگی را تا نقطه p مدل می‌کند و گره‌هایی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع حوزه نوک غنی می‌شوند.

[1] Crack interior

در رابطه (۸)، b_J و C_k^l درجات آزادی گرهی اضافی‌اند. $H(x)$ نیز تابع تعمیم یافته هویساید[1] است. $F_l(x)$ تابع تغییر مکان دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشد که از جابجایی‌های مماسی واقعی[2] نزدیک نوک در جسم دو بعدی در معرض بارگذاری عمومی مشتق می‌شود.

توابع $F_l(x)$ توابعی در نظر گرفته می‌شوند که میدان‌های جابجایی رابطه (۳) را پوشش می‌دهند. در مکانیک شکست خطی برای مواد ارتوتروپیک تابع چهار جمله‌ای به صورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد[۷]:

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{4} = \left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)}\right\} \quad (۹)$$

که $g_k(\theta)$ و θ_k از روابط (۱۰) بدست می‌آیند:

$$g_k(\theta) = \sqrt{(cos\theta + \mu_{kx}sin\theta)^2 + (\mu_{ky}sin\theta)^2}$$
$$\theta_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mu_{ky}sin\theta}{cos\theta + \mu_{kx}sin\theta}\right) \quad (۱۰)$$

μ ریشه معادله مشخصه (۶) می‌باشد. در رابطه (۷) α_1 ، μ_{1x} است β_1 و نیز برابر μ_{1y} است.

در المان محدود استاندارد از طریق رابطه انرژی کرنشی المان می‌توان ماتریس سفتی المان را به دست آورد که به صورت زیر است:

$$K_e = \int_{\Omega^h} [B]^T\, D\, [B] d\Omega \quad (۱۱)$$

در رابطهٔ (۱۱) ، D ماتریس الاستیک ماده است که متقارن می‌باشد و در حالت دو بعدی با توجه به نوع تحلیل تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای مشخص می‌گردد. B گرادیان متقارن گسسته‌سازی شده توابع شکل توسعه‌یافته می‌باشد و مولفه‌های آن به صورت زیر است:

$$B_i^u = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

$$B_j^a = \begin{bmatrix} \left(\widetilde{N}_j H(x_j)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\widetilde{N}_j H(x_j)\right)_{,y} \\ \left(\widetilde{N}_j H(x_j)\right)_{,y} & \left(\widetilde{N}_j H(x_j)\right)_{,x} \end{bmatrix}$$
$$B_k^{bl}\Big|_l = \begin{bmatrix} \left(\widetilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\widetilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,y} \\ \left(\widetilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,y} & \left(\widetilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,x} \end{bmatrix}$$
$$l = 1,2,3,4$$

ماتریس جرم M مطابق زیر بدست می‌آید:

$$M_e = \int_{\Omega^h} [N]^T \rho [N] d\Omega \quad (۱۳)$$

در رابطهٔ (۱۳)، ρ چگالی ماده و $[N]$ نیز ماتریس توابع شکل توسعه‌یافته می‌باشد و مولفه‌های آن به صورت زیر است:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i^u & N_j^a & N_k^{b1} & N_k^{b2} & N_k^{b3} & N_k^{b4} \end{bmatrix}$$
$$N_i^u = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$
$$N_j^a = \begin{bmatrix} N_j H(x_j) & 0 \\ 0 & N_j H(x_j) \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$
$$N_k^{bl}\Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} N_k F_k^l(x_k) & 0 \\ 0 & N_k F_k^l(x_k) \end{bmatrix}$$

با توجه به معیار غنی‌سازی ارائه شده در قسمت قبل، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به هر گره در ابعاد ماتریس $[B]$ و $[N]$ در نظر گرفته می شود. لذا ابعاد این ماتریس ها نیز تفاوت می‌کند و برای هر نوع گره سهم مناسبی در ماتریس $[B]$ و $[N]$ لحاظ می گردد. در نهایت فرم گسسته معادله حرکت به صورت زیر می‌باشد:

$$M\ddot{u} + K\,u = f^{ext} \quad (۱۵)$$

در این مطالعه، روش نیومارک برای انتگرالگیری زمانی معادلات المان محدود توسعه یافته مورد استفاده قرار گرفته است. در هر مرحله زمانیn، معادلات نهایی بیان شده است. که در آن u_n، $\dot{u}_n$ و $\ddot{u}_n$ به ترتیب بردار جابجایی، بردار سرعت و بردار شتاب گره‌ها می‌باشند. M و K به ترتیب ماتریس جرم و سفتی می‌باشند. F بردار نیرو و Δt افزایش زمان در هر گام n می‌باشد. در اینجا، پارامترهای $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{4}$ در نظر گرفته می‌شوند.

---
[1] Heaviside
[2] Exact asymptotic displacements

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K\left(u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1}\right)}{(M + \beta\Delta t^2 K)}$$
$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1-\alpha)\Delta t\ddot{u}_{n-1} + \alpha\Delta t\ddot{u}_n \qquad (۱۶)$$
$$u_n = u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_n$$

۴- روش انتگرال برهم‌کنش برای تحلیل شکست مواد ارتوتروپیک

برای محاسبه ضرایب شدت تنش در سیستم‌های خطی، انتگرال برهم‌کنش یک روش مناسب می‌باشد؛ که می‌توان برای مواد ارتوتروپیک نیز از آن استفاده کرد. در این بخش، روش انتگرال برهم‌کنش برای مواد ارتوتروپیک و میدان‌های کمکی برای برهم‌کنش خطی ارائه می‌شود. میدان‌های کمکی جابجایی و تنش بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta)$$
$$u_i^{aux} = K_I^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\ g_i^{I}(\theta) + K_{II}^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\ g_i^{II}(\theta) \qquad (۱۷)$$

که در آن K_I^{aux} و K_{II}^{aux} ضرایب شدت تنش مودهای I و II می‌باشند. توابع زاویه‌ای $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ در رابطه (۴) و (۵) بیان شده‌اند. برای یک سیستم خطی، انتگرال بر هم‌کنش برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی برای مواد همگن در حالت دینامیکی بصورت زیر قابل بیان است [۱۳]:

$$M = \int_A \left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{ij}\right)q_{,j}\, dA + \int_A \left(\rho\ddot{u}_i u_{i,1}^{aux}\right)q\ dA \qquad (۱۸)$$

در این رابطه u_i مولفه‌های بردار تغییرمکان است و $\ddot{u}_i$ مولفه‌های بردار شتاب است، A ناحیه محصور به منحنی دلخواه شامل ترک است و W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهمکنش است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^{int} = \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux} \qquad (۱۹)$$

رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} در حالت دینامیکی بصورت زیر قابل بیان است[۷]:

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{aux} + c_{12}(K_I K_{II}^{aux} + K_I^{aux}K_{II}) + 2c_{22}K_{II}K_{II}^{aux} \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$c_{11} = -\frac{a_{22}}{2}\boldsymbol{Im}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)$$
$$c_{12} = -\frac{a_{22}}{2}\boldsymbol{Im}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right) + \frac{a_{11}}{2}\boldsymbol{Im}(\mu_1\mu_2) \qquad (۲۱)$$
$$c_{22} = \frac{a_{11}}{2}\boldsymbol{Im}(\mu_1+\mu_2)$$

با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} با حل رابطه زیر بدست می‌آید:

$$M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \quad (K_I^{aux} = 1\ , K_{II}^{aux} = 0\ )$$
$$M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \quad (\ K_I^{aux} = 0\ , K_{II}^{aux} = 1\ ) \qquad (۲۲)$$

۵- نتایج عددی

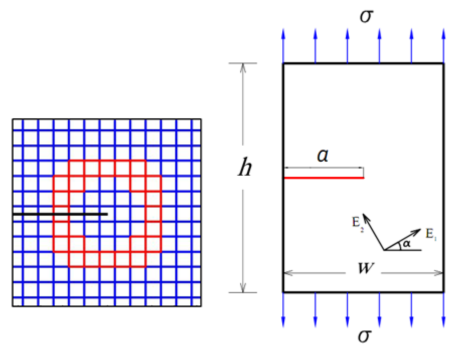
در این قسمت در چند مثال، ضرایب شدت تنش دینامیکی در صفحه‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک محاسبه شده است. در تمامی مسائل شرایط تنش صفحه‌ای فرض شده است و مقدار ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} مطابق رابطه زیر بی‌بعد شده اند. ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه انتگرال بر هم-کنش، دایره‌ای به شعاع $\left(\sqrt{S_{tip}}\right)$ × ۳ در نظر گرفته شده است که S_{tip} برابر مساحت المان حاوی نوک ترک می باشد.

$$K_{In} = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{a\pi}} \qquad (۲۳)$$
$$K_{IIn} = \frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{a\pi}}$$

۵-۱- ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک در حالت استاتیکی

یک صفحه ایزوتروپیک با عرض $w = ۷$ واحد و ارتفاع $L = ۱۶$ واحد در نظر گرفته می شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول $a = ۳/۵$ واحد است، صفحه تحت تنش ثابت σ قرار دارد (مطابق شکل (۴)). ضریب پواسون $\nu = ۰/۳$ و مدول الاستیسیته $E = ۱۰^{۶}\ psi$ در نظر گرفته شده است.

مقدار ضرایب شدت تنش K_{In} و K_{IIn} برای تعداد المان‌های مختلف در جدول ۱ آورده شده است. همچنین برای المان‌بندی ۴۸ × ۲۴ ، نتایج با نتایج تحلیلی مقایسه گردیده است.



(ب) (الف)

شکل۴- صفحه دارای ترک لبه‌ای تحت کشش (الف) هندسه و بارهای اعمالی (ب) مش‌بندی صفحه وناحیه انتگرال گیری

با توجه به حل تحلیلی ارائه شده [۱۴]:

$$K_I = C\sigma\sqrt{a\pi} \qquad (۲۴)$$

که C از رابطه زیر بدست می آید:

$$C = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.55\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{w}\right)^4 \qquad (۲۵)$$

با توجه به معادله بالا و جایگزینی مقادیر a و w ، مقدار C برابر ۲/۸۲۶۴ بدست می آید. با بی‌بعد کردن معادله (۲۴) مقدار K_I برابر ۲/۸۲۶۴ بدست می‌آید. با توجه به جدول مقدار K_{In} از روش ارائه‌شده ۲/۷۵۳۲ بدست آمده است که با حل تحلیلی نزدیک است و خطای آن ٪ ۲/۵۹ است.

جدول ۱- مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای یک صفحه ایزوتروپیک حاوی ترک لبه‌ای

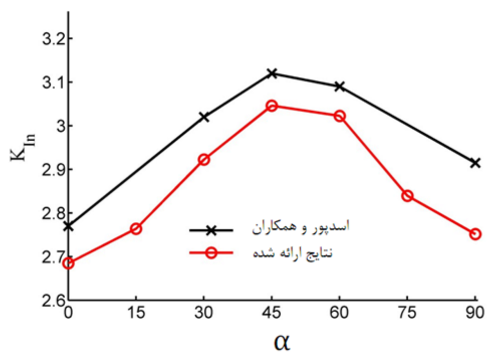
تعداد المان‌ها	درجه آزادی	K_{In}	K_{IIn}
۱۲×۲۴	۶۲۸	۲/۶۵۹۴	۰
۲۴×۴۸	۲۳۸۰	۲/۷۵۳۶	-۰/۰۰۰۱
۳۶×۴۶	۳۴۱۲	۲/۷۵۳۲	-۰/۰۰۰۲

۵-۲- ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی

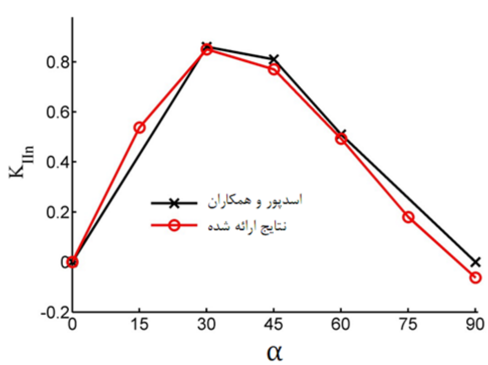
یک صفحه با عرض w و ارتفاع $L = ۲\,w$ در نظر گرفته شده است که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول $a = ۰/۵\,w$ است، صفحه تحت تنش یکنواخت σ قرار دارد. مشخصات ماده $\nu_{۱۲} = ۰/۲۱$ و $E_۱ = ۱۱۴/۸\,GPa$ و $E_۲ =$ $۱۱/۷\,GPa$ و $G_{۱۲} = ۹/۶۶\,GPa$ می باشد.

مقدار ضرایب شدت تنش K_{In} و K_{IIn} برای زوایای مختلف ناهمسانگردی (α) محاسبه گردیده، که نتایج در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده است. همچنین نتایج با مقادیر گزارش‌شده توسط اسدپور و همکارانش [۷] مقایسه شده است، که اختلاف کمی بین مقدار آن‌ها دیده می‌شود.

مطابق نتایج، مقدار ضرایب شدت تنش K_{In} و K_{IIn} با افزایش زاویه ناهمسانگردی، ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می یابد. ضریب شدت تنش مود I در ۴۵ درجه و ضریب شدت تنش مود II در ۳۰ درجه به مقدار حداکثر خود می رسند.



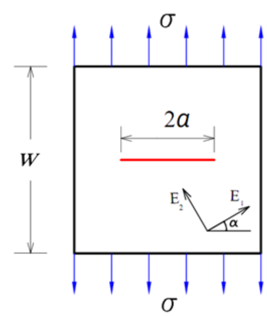
شکل ۵- مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف الیاف (α)



شکل ۶- مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{IIn} در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف الیاف (α)

۵-۳- ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی

یک صفحه مربعی با طول ضلع $w=$ ۲۰ واحد در نظر گرفته شده‌است که دارای ترک مرکزی به طول $2a=$ ۲ واحد است. صفحه تحت تنش یکنواخت σ قرار دارد (شکل ۷). مشخصات ماده $\nu_{12}=$ ۰/۲۱ و $E_1=$ ۱۱۴/۸ GPa و $E_2=$ ۱۱/۷ GPa و $G_{12}=$ ۹/۶۶ GPa است.



شکل ۷- صفحه دارای ترک مرکزی تحت تنش یکنواخت

مقدار ضرایب شدت تنش K_{In} و K_{IIn} در هر نوک ترک برای تعداد المان‌های مختلف در جدول ۲ آورده شده است. این نتایج در جدول ۳ با نتایج بدست آمده توسط اسدپور و همکارانش [۸] مقایسه گردیده است.

جدول ۲- مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد در مش‌بندی های مختلف برای ماده ارتوتروپیک

تعداد المان‌ها	درجه آزادی	$K_{In}{}^1$	$K_{In}{}^2$	$K_{IIn}{}^1$	$K_{IIn}{}^2$
۳۵× ۳۶	۲۵۸۸	۱/۲۱۳۰	۱/۲۱۲۳	۰	۰
۴۰× ۴۰	۳۲۷۲	۰/۹۵۸۲	۰/۹۵۸۹	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۱
۴۵× ۴۶	۴۲۱۶	۰/۹۸۱۶	۰/۹۸۰۶	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۱

جدول ۳- مقایسه ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر

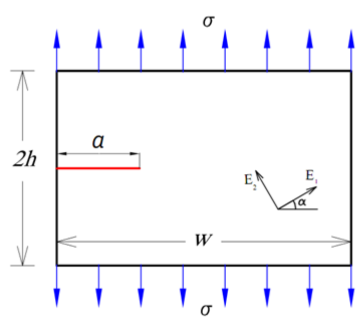
روش	درجه آزادی	تعداد المان‌ها	K_{In}	K_{IIn}
اسدپور و همکاران[۸]	۴۲۷۸	۲۰۲۵	۱/۰۱۸	۰
کیم و پائولینو [۱۵]	۱۱۷۰۲	۲۰۰۱	۰/۹۹۷	۰
نتایج ارائه شده	۴۲۱۶	۲۰۷۰	۰/۹۸۱۶	۰/۰۰۰۱

در مسائل بررسی شده، با توجه به استفاده از توابع غنی سازی ارائه شده توسط اسدپور و همکاران مقادیر متفاوتی بدست آمده‌است، این اختلاف به سبب استفاده از المان‌های با اندازه متغیر توسط اسدپور و همکاران می باشد. در این مقاله از المان های برابر برای حل این مساله استفاده شده‌است.

۵-۴- ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک تحت بار مکانیکی (دینامیکی)

یک صفحه با ابعاد $2h=$ ۴۰ واحد و $w=$ ۵۲ واحد و ضخامت به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول $a=$ ۱۲ واحد است، صفحه تحت تنش ثابت و یکنواخت σ قرار دارد. ناهمسانگردی می‌تواند نسبت به محور افقی زاویه (α) داشته باشد. مشخصات ماده $\nu_{12}=$ ۰/۰۸۳ و $E_1=$ ۱۱۸/۳ GPa و $E_2=$ ۵۴/۸ GPa و $G_{12}=$ ۸/۷۹ GPa و $\rho=$ ۱۹۰۰ $\frac{kg}{m^3}$ می‌باشد و شرایط تنش صفحه‌ای فرض شده است.

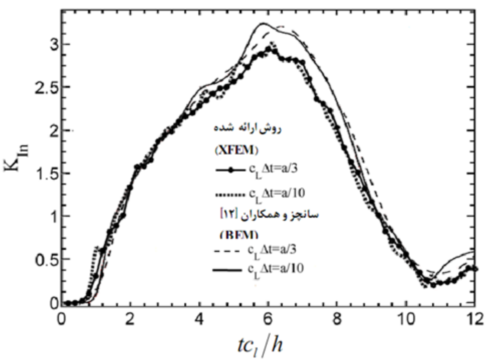
همچنین گام‌های زمانی برابر $\Delta t=\frac{a}{3c_l}$ و یک بار نیز $\Delta t=\frac{a}{10c_l}$ در نظر گرفته شده است، که $c_l=\sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}$ و C_{22} مولفه ماتریس سفتی می باشد ($\sigma = c\varepsilon$).



شکل ۸- صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی

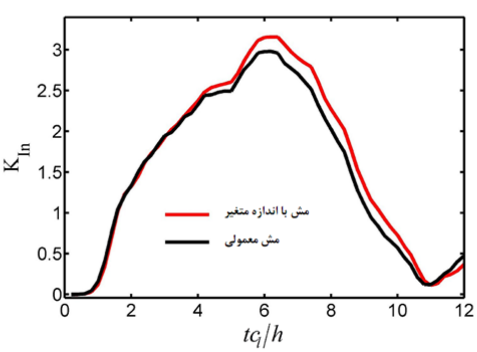
مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد K_{In} برای زمان‌های مختلف با مش ۷۸ × ۶۰ محاسبه و نتایج در شکل ۹ آورده شده است. بعلاوه، نتایج بدست آمده با ضریب شدت تنش دینامیکی K_{In} ارائه شده توسط سانچز و همکارانش [۶] مقایسه گردیده است و انطباق قابل قبولی را نشان می دهد،

مقدار بیشینه ضریب شدت تنش در روش ارائه شده ۴ درصد کمتر از مقدار ارائه شده توسط سانچز می باشد.



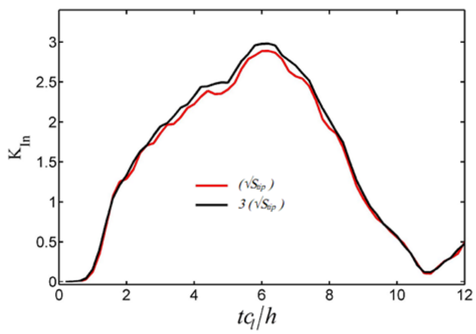
شکل ۹- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک

در این مثال، مقادیر ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد K_{In} در زمان‌های مختلف و با مش ۶۰ × ۷۸ و اندازه متغیر نیز بدست آمده است، در این حالت اندازه المان ها هر چه به نوک ترک نزدیکتر می شوند، کوچکتر می گردد. گام‌های زمانی برابر $\Delta t = \frac{a}{3c_l}$ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۱۰، در این حالت مقادیر K_{In} نسبت به حالت قبل بیشتر شده و به نتایج سانچز نزدیکتر است.



شکل ۱۰- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در زمان‌های مختلف با مش بندی مختلف

همچنین در این مثال مقادیر K_{In} برای شعاع های انتگرالگیری مختلف نیز بدست آمده است و در شکل ۱۱ رسم گردیده است. در این شکل نمودار ها برای دو حالت مختلف، یعنی شعاع برابر $(\sqrt{S_{tip}})$ و $3(\sqrt{S_{tip}})$رسم گردیده است. با افزایش بیشتر شعاع تغییری در نمودار دیده نمی‌شود.

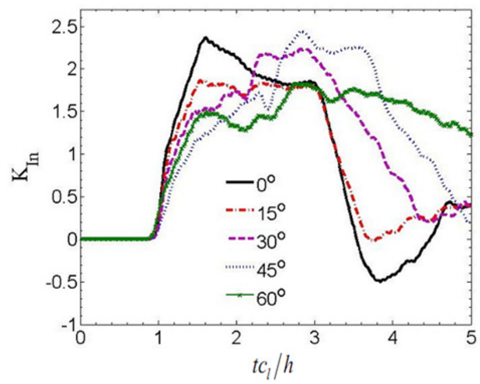


شکل ۱۱- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در زمان‌های مختلف با شعاع انتگرالگیری مختلف

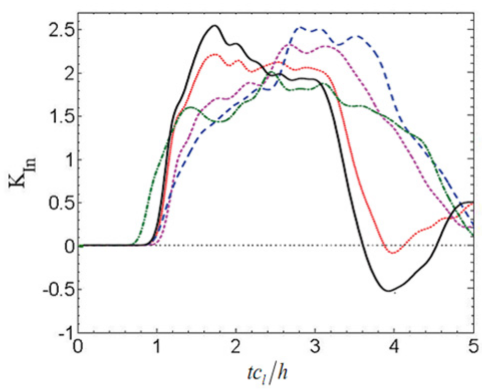
۵-۵- ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی

یک صفحه با طول $h = ۴۰$ واحد و عرض $w = ۲۰$ واحد در نظر گرفته شده‌است که دارای ترک مرکزی مستقیم به طول $2a = ۴/۸$واحد است و صفحه تحت تنش σ قرار دارد. مشخصات ماده $v_{۱۲} = ۰/۰۸۳$ و $E_۱ = ۱۱۸/۳\ GPa$ و $E_۲ = ۵۴/۸\ GPa$ و $G_{۱۲} = ۸/۷۹\ GPa$ و $\rho = ۱۹۰۰ \frac{kg}{m^3}$ می‌باشد. همچنین گام زمانی برابر $\Delta t = 0.02 \frac{h}{c_l}$ در نظر گرفته شده است. که در $c_l = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}$ و C_{22} مولفه ماتریس سفتی می باشد ($\sigma = c\varepsilon$).

در این مثال ضرایب شدت تنش دینامیکی در زمان های مختلف و برای زوایای الیاف مختلف با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش بدست آمده و رسم گردیده است و با نتایج بدست آمده از روش المان مرزی توسط سانچز و همکاران [۶] مقایسه گردیده است. مطابق نمودارها نتایج بدست آمده با توجه به مقادیر گزارش شده قابل قبول است. به عنوان مثال، در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه مقدار بیشینه K_{In} برابر ۲/۳۶۵ می باشد که با مقدار ارائه شده توسط سانچز ۵ درصد اختلاف دارد. همچنین در زاویه ناهمسانگردی ۶۰ درجه مقدار بیشینه K_{IIn} برابر ۰/۵۶۶ است که با مقدار ارائه شده توسط سانچز ۱ درصد اختلاف دارد.

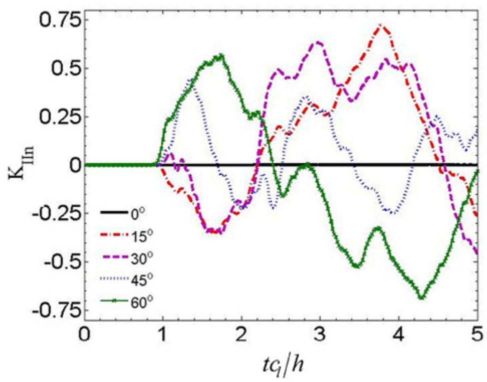


(الف)

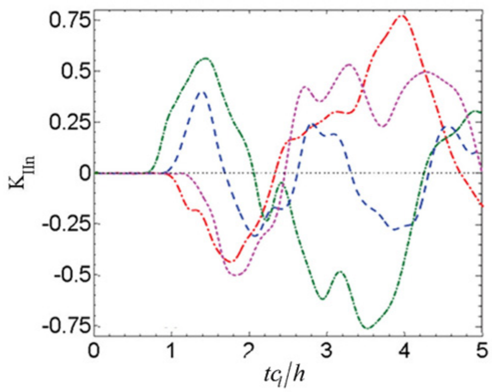


(ب)

شکل ۱۲- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در ترک افقی در زمان‌ها و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (الف)با روش ارائه شده (ب)توسط سانچز و همکاران [۱۱]



(الف)



(ب)

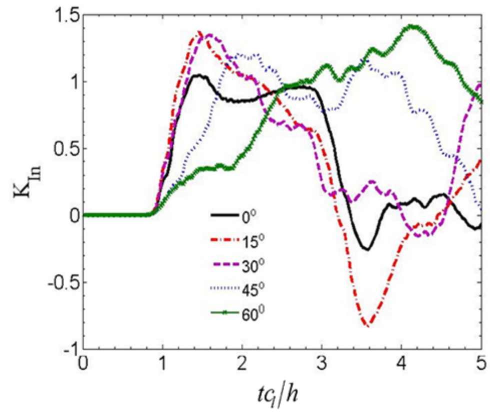
شکل ۱۳- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{IIn} در ترک افقی در زمان‌ها و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (الف)با روش ارائه شده (ب)توسط سانچز و همکاران [۱۱]

مطابق نتایج،زاویه ناهمسانگردی در مواد ارتوتروپیک اثر قابل توجهی روی ضرایب شدت تنش دینامیکی دارد. به عنوان نمونه، همانطور که در شکل ۱۲ و شکل ۱۳ نشان داده شده است، مقدار حداکثر یا حداقل ضرایب شدت تنش دینامیکی و زمان وقوع آن‌ها، برای زوایای مختلف ناهمسانگردی متفاوت می باشد. به عنوان نمونه، مقدار بیشینه K_{In} در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه برابر ۲/۳۶۵ و برای زاویه ناهمسانگردی ۱۵ ، ۳۰ ، ۴۵ و ۶۰ درجه به ترتیب برابر ۱/۸۶۵، ۲/۲۴۶ ، ۲/۴۴۶ و ۱/۸۲۷ می باشد.

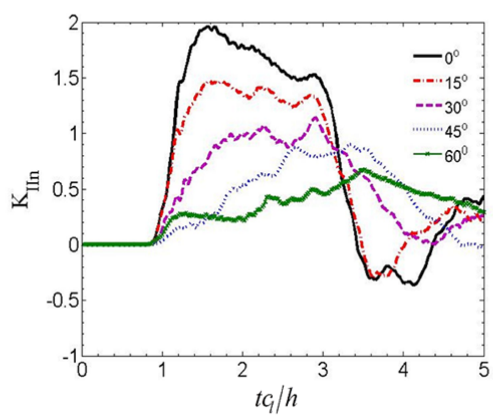
همچنین، زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک برای زوایای ناهمسانگردی مختلف اندکی متفاوت است. با رسیدن موج تنش به نوک ترک، برای تمام زوایا سطوح ترک از هم باز می‌شود. اما برای زوایای ۱۵ و ۳۰ درجه ضریب شدت تنش مود II در ابتدا منفی و سپس مثبت است. این تغییرات برای زوایای بزرگتر عکس است.

۵-۶-ترک مرکزی زاویه‌دار برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی

در این مثال صفحه با خصوصیات مثال قبل و دارای ترک با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۱۴- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{In} در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک با روش ارائه شده



شکل ۱۵- مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد K_{IIn} در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک با روش ارائه شده

با توجه به شکل‌های ۱۲ و ۱۴ زاویه ترک در مقدار ضرایب شدت تنش و رفتار ترک حائز اهمیت است. نمودار شکل‌های ۱۴ و ۱۵ بیانگر تاثیر زاویه ترک بر روی مقادیر حداکثر و حداقل مقدار ضرایب شدت تنش و زمان وقوع آن‌ها می باشد. به عنوان مثال با توجه به شکل ۱۳در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه (θ =۰)، در حالتی که زاویه ترک برابر صفر است (θ =۰)، مقدار K_{IIn} در تمامی زمان ها برابر صفر است، در صورتی که مقدار آن برای زاویه ترک ۴۵ درجه (β =۴۵) با گذشت زمان تغییر می‌کند (شکل ۱۵). همچنین در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه (θ =۰)، مقدار حداکثر یا حداقل K_{In} و زمان وقوع آن‌ها، نیز در زاویه ترک ۴۵ درجه (θ =۴۵)، نسبت به زاویه ترک صفر درجه (θ =۰)، متفاوت است. مقدار حداکثر K_{IIn} با افزایش زاویه ناهمسانگردی افت می‌نماید. برای ترک مایل، تغییر زاویه ناهمسانگردی باعث عوض شدن رفتار آن می‌شود. بطوریکه، در زاویه ناهمسانگردی کمتر از ۳۰ درجه، سطوح ترک با رسیدن موج تنش باز و پس از مدتی بسته می‌شود. اما برای زوایای بزرگتر سطوح ترک بسته نمی‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

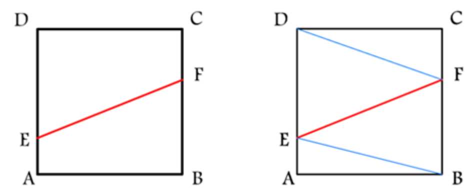
در این مطالعه، روش *XFEM* برای تحلیل دینامیکی ترک های ایستا در محیط‌های دوبعدی از مواد ارتوتروپیک به کار رفته است.

برای یک زاویه ترک مشخص، زاویه ناهمسانگردی علاوه بر مقدار بیشینه ضرایب شدت تنش روی زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک و در نتیجه شروع تغییرات ضرایب شدت تنش، موثر است. مقدار حداکثر و حداقل ضرایب شدت تنش دینامیکی و زمان بسته شدن ترک در زوایای ترک مختلف به زوایای ناهمسانگردی وابسته است. بنابراین، با انتخاب زاویه ناهمسانگردی مناسب می‌توان رفتار ترک را کنترل نمود. نتایج مثال‌های ارائه شده نیز علاوه بر همگرایی ضرایب شدت تنش با ریز شدن المانها به مقدار دقیق و استقلال از سطح انتگرال برهم کنش، تطابق قابل قبولی بین نتایج تحلیل و مقادیر گزارش‌شده را نشان می‌دهد.

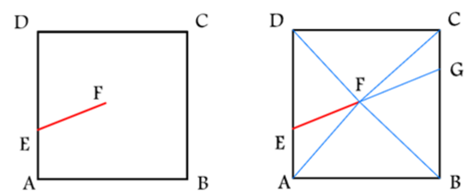
۷- ضمیمه

انتگرال‌گیری گوسی

وقتی ترک المانی را در دو ناحیه قطع کند، برای گره اطراف آن شرایط غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد ایجاد شود، مجموعهٔ المانی اطراف آن گره به دو ناحیه تقسیم می‌شود.برای مثال، برای المان *ABCD* در شکل ۱۶لازم است تا این المان به مثلث‌های کوچکتری تقسیم شده و انتگرال‌گیری روی این زیردامنه‌ها صورت پذیرد. در شکل ۱۷ این مثلث‌بندی برای المان نوک نشان داده شده است.



شکل ۱۶- مثلث‌های استفاده شده برای المان بریده شده توسط ترک (*EF*)



شکل ۱۷- مثلث‌های استفاده شده برای المان حاوی نوک ترک (*F*)

از آنجا که عمل انتگرال‌گیری روی این مثلث‌ها صورت می‌گیرد، جهت دستیابی به نتایج صحیح، در این مثلث‌ها ، از مربع‌سازی گاوسی مرتبه بالاتر استفاده می‌کنیم. در این مقاله، ۱۳ نقطه گاوسی در هر مثلث برای المان نوک و ۳ نقطه گاوسی در هر مثلث کوچکتر در المان‌های بریده شده استفاده شده است.

روند انتگرال‌گیری عددی برای المان‌های برخورد کرده با ترک به صورت زیر است:

۱- ایجاد مثلث‌بندی دلانی برای تشکیل مثلث‌های کوچکتر

۲- برای هر مثلث کوچکتر، مختصات و وزن‌های نقاط گاوسی محاسبه شده و به سیستم مختصات اصلی منتقل شده است.

مراجع

[1] Belytschko T, Black, T (1998) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int J Num Methods in Eng 45(5): 601–620.

[2] Moes N, Dolbow J, Belytschko T (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. Int J for Num Methods in Eng 46(1): 131–150.

[3] Dolbow J (1999) An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics. Ph.D. Thesis, Theo and Appl Mech Northwestern University, Evanston , IL, U.S.A.

[4] Stolarska M, Chopp D L,Moes N, Belytschko T (2001) Modeling crack growth by level sets and the extended finite element method. Int J for Numer Methods in Eng 51(8): 943–960.

[5] Erdogan F (2000) Fracture mechanics. Int J Solids and Structures 37: 171–183.

[6] Sanchez GF, Zhang C, Saez A (2008) A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids. Eng Fract Mech 75: 1412–30.

[7] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A (2006) Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method. Thin-Walled Struct 44(9): 1031–8.

[8] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A (2006) Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partion of unity methods. Finite Elements Anal Des 42(13): 1165–75.

[9] Asadpoure A, Mohammadi S (2007) Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. Int J Num Methods Eng 69: 2150–72.

[10] Motamedi D, Mohammadi S (2009) Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method. Int J Fract 161: 21–39.

[11] Motamedi D, Mohammadi S. (2010) Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method. Eng Fract Mech 77: 3373–93.

[12] Eichen J (1987) An improved method for computing the J_2 integral. Eng Fract Mech 26(5): 691–700.

[13] Song SH, Paulino GH (2006) Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method. Int J of Solids and Structures 43: 4830–4866.

[14] Tada H, Paris PC, Irwin R (1973) The stress analysis of cracks,Handbook. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania.

[15] Kim JH, Paulino GH (2003) The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. Int J Solids Struct 40: 3967–4001.