



تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی قطاع دایره ای توخالی در تماس با سیال

رضا شهوه^۱، علی اصغر جعفری^۲، عادل مقصودپور^{۳*} و علی رضا محمدزاده^۴

^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

^۲ استادیار، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

^۳ استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵

چکیده

در این پژوهش رفتار ارتعاش غیرخطی قطاع دایروی در تماس با سیال بررسی شده است. ابتدا جابه جایی‌ها در مختصات قطبی برحسب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شده است. کرنش‌ها بر اساس روابط غیرخطی فون کارمن تعیین شده است. سپس با در نظر گرفتن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم بر حرکت تعیین شده است. فشار دینامیکی وارد از سیال بر قطاع با استفاده از حل معادله لاپلاس تابع پتانسیل سرعت سیال و برابری سرعت در سطح تماس سیال و قطاع بر حسب جابه جایی عمودی قطاع بدست آمده است. شکل مودهای فرضی براساس شکل مودهای ارتعاش خطی در نظر گرفته شده است. با استفاده از شکل مودهای فرضی و روش گالرکین معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل زمانی غیرخطی تبدیل شده است. معادلات دیفرانسیلی غیر خطی براساس روش اختلالات حل شده و فرکانس طبیعی غیرخطی تعیین گردیده است. در انتها برای یک ورق قطاع نمونه نتایج عددی ارائه شده و اثر پارامترهایی چون، نسبت ابعادی، زاویه قطاع، شرایط مرزی، چگالی سیال و ارتفاع سیال بررسی شده است؛ همچنین نتایج بدست آمده بدون در نظر گرفتن سیال با پژوهش‌های پیشین (روش DQM) صحت سنجی شده است که همگرایی خوبی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیرخطی؛ قطاع دایره ای توخالی؛ در تماس با سیال؛ روش گالرکین.

Free Nonlinear Vibration Analyzing of Annular Sector Plate in Contact with Fluid

R. Shahveh¹, A.A. Jafari², A. Magsoudpour^{3,*}, A.R. Mohammadzadeh⁴

¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., Science and Research Branch., Islamic Azad Univ., Tehran, Iran.

² Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi Univ of Technology., Tehran, Iran.

^{3,4} Assis. Prof., Mech. Eng., Science and Research Branch., Islamic Azad Univ., Tehran, Iran.

Abstract

In this study, the nonlinear vibration of the annular sector plate in contact with fluid is investigated. The displacements in polar coordinates are considered in terms of the first order shear deformation theory. The strains are determined based on Von-Karman relationships. By considering the kinetic and potential energies and the Hamilton principle, the governing equations of motion are determined. The governing equation of the oscillatory behavior of the fluid is obtained by solving Laplace equation and satisfying its boundary conditions. The shape modes are considered based on linear vibration modes. By using shape modes and Galerkin method, the governing equations have become nonlinear differential equations based on time. The nonlinear differential equations solved based on perturbation method and nonlinear natural frequency is determined. At the end, the numerical results are presented for a sample plate and the effect of parameters such as aspect ratio, sector angle, boundary conditions, fluid density and fluid height have been investigated. Also, the results obtained are verified with the previous research (DQM method) and FEM, which shows good convergence.

Keywords: Nonlinear Vibration; Annular Sector Plate; in Contact with Fluid; Galerkin Method.

۱- مقدمه

سازه‌های شناور با اهداف گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. پل‌های شناور، مخازن شناور و نیروگاه‌های شناور نمونه‌هایی از سازه‌های شناور می‌باشند؛ بنابراین بررسی رفتار ارتعاشی سازه شناور ضروری است. در سال ۱۹۹۱ کواک و همکارانش [۱]، ارتعاش یک ورق دایروی در تماس با سیال ایده‌آل را در حالت متقارن محوری با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. آنها از نسبت فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس بر فرکانس‌های طبیعی ورق بدون تماس با سیال استفاده کردند که ضریب نمو جرم مجازی (AVMI) نامیده می‌شود و نشان دادند که حضور سیال مقدار اینرسی ورق را افزایش داده و در نهایت فرکانس‌های طبیعی ورق در مقایسه با حالت خشک بطور قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند. در سال ۱۹۹۶ کیم و وبستر [۲]، ارتعاشات اجباری ورق شناور نامحدود تحت تاثیر بار متحرک را با استفاده از روش تبدیل فوریه بررسی کردند. آنها همچنین در فرمولبندی مساله اثر نیروی درگ^۲ را در نظر گرفتند. از نتایج جالب کار ایشان، این است که خیز دینامیکی ناشی از بلند شدن هواپیما (مدل شده با بار متحرک) شبیه موج بوده و مانند موج در جهت حرکت هواپیما حرکت می‌کند. آنها همچنین نشان دادند که نیروی درگ ناشی از بلند شدن هواپیما بطور تقریبی متناسب با ریشه انعطاف‌پذیری^۳ ورق است. در سال ۱۹۹۸ واتانابه و همکارانش [۳]، ارتعاشات اجباری ورق‌های شناور مستطیلی تحت تاثیر بار متحرک را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. آنها نشان دادند که عمق آب تاثیر بسزایی در پاسخ دینامیکی ورق دارد؛ اما اگر عمق آب به اندازه کافی بزرگ باشد، افزایش عمق تاثیر ناچیزی بر پاسخ دینامیکی ورق دارد. آنها همچنین نشان دادند که مقدار بیشینه پاسخ دینامیکی ورق تنها لحظات کوتاهی پس از فرود هواپیما (بار متحرک) اتفاق می‌افتد. در سال ۱۹۹۹ اهتا و همکارانش [۴]، به صورت تجربی اثر یک ورق آویزان و متصل به یک سازه شناور (مدل شده با یک ورق) را بر رفتار هیدروالاستیک سازه مورد بررسی قرار دادند. آنها ورق آویزان (ورق کوچکتر) را هم

به صورت افقی و هم به صورت قائم در آب معلق و به سازه اصلی (ورق بزرگتر) متصل کردند. آنها نشان دادند که ورق آویزان افقی تنها در صورتی موثر است (جابجایی‌های ورق بزرگتر را کاهش می‌دهد) که در ارتفاع نسبتاً کم قرار داده شود. در مورد ورق آویزان قائم، آنها نشان دادند که جابجایی‌های ورق بزرگتر با افزایش ارتفاع ورق کوچکتر کاهش می‌یابد. در سال ۲۰۰۰ اندو [۵]، رفتار ارتعاشی VLFS^۴ تحت تاثیر بار متحرک و امواج را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کرد. او نشان داد که امواج باعث افزایش پاسخ دینامیکی VLFS می‌شود و اثر آنها بایستی در طراحی این سازه‌ها مد نظر قرار گیرد. در سال ۲۰۰۰ آمبیلی [۶]، یک حل نیمه تحلیلی برای مساله مقدار ویژه ورق‌ها، پوسته‌ها و ورق-پوسته در تماس با سیال لزج را با در نظر گرفتن تلاطم سیال ارائه نموده است که دارای سطح آزاد است. او در این پژوهش، روش خود را برای یک پوسته استوانه‌ای بدست آورد که بخشی از آن با سیال پر شده است. در سال ۲۰۰۳ مایونگ مو جانگ و همکارانش، فرکانس‌های طبیعی دو ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای معادله حرکت ورق‌های در تماس با سیال از روش بسط سری‌های بسط-فوریه و روش ریلی-ریتر استفاده کردند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج عددی حاصل از نرم افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در نهایت فرکانس‌های طبیعی دو ورق در تماس با سیال و بدون تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفته و اثر فاصله دو ورق بر فرکانس‌های طبیعی ورق‌ها، مورد مطالعه قرار گرفت [۷]. در سال‌های ۲۰۰۳، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸ رنارد و همکارانش [۸-۱۰]، ارتعاشات ورق‌های شناور نامحدود ضخیم تحت بار گسترده متحرک را بررسی کردند. گرچه آنها در هر سه کار خود عنوان ورق را بکار برده‌اند، اما هنگام مدلسازی از تغییر فرم ورق در یک جهت صرف‌نظر کرده (مثلاً طول ورق را در جهت دیگر خیلی کوچک در نظر گرفتند، مانند یک نوار) و مساله تیر تیموشنکو^۵ (که در آن اثر تغییر فرم برشی هم لحاظ می‌شود) را حل کردند. در سال ۲۰۰۹ کوزلفسکی [۱۱]، ارتعاش ورق در تماس با سیال ویسکوز را بررسی نمود. ایشان نشان داد

¹ Added Virtual Mass Incremental

² Drag force

³ Flexibility

⁴ Very Large Floating Structures

⁵ Timoshenko

جهتگیری الیاف کامپوزیت به همراه پارامترهای هندسی ورق روی فرکانس‌های طبیعی، مورد بررسی قرار گرفت.

در پژوهش حاضر تاثیر وجود ستون سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بررسی شده است. معادلات حرکت به وسیله اصل همیلتون و با در نظر گرفتن انرژی‌های کرنشی و جنبشی و کار نیروهای خارجی بدست آمده است. فشار دینامیکی وارد از سیال بر ورق با حل معادله لاپلاس و اعمال شرایط مرزی بر حسب جابه جایی عمودی ورق بدست آمده است. با استفاده از شکل موده‌های فرضی و روش گالرکین معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل زمانی غیرخطی تبدیل شده است. معادلات دیفرانسیلی غیر خطی براساس روش اختلالات حل شده و فرکانس طبیعی غیرخطی تعیین گردیده است.

نوآوری پژوهش حاضر نسبت به پژوهش‌های گذشته در وجود سیال در مجاورت ورق مفروض، استفاده از روش گالرکین (روش نیمه تحلیلی) و حذف اثرات مکانی در معادلات حرکت و استفاده از روش اختلالات (تحلیلی) در حل معادلات زمانی و تعیین فرکانس طبیعی غیرخطی است.

۲- روابط حاکم

یک قطاع دایروی تو خالی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و ضخامت h با زاویه مرکزی α مطابق شکل ۱ فرض می‌شود. فرض می‌شود که ورق در سطح $z = -\frac{h}{2}$ در تماس با سیال قرار داشته باشد. سیال در امتداد ورق مفروض در نظر گرفته شده و عمق ستون سیال H است.

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با صرفنظر از جابه‌جایی صفحه میانی، جابه‌جایی‌ها به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۸]:

$$u_r(r, \theta, z) = z\varphi_r(r, \theta)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = z\varphi_\theta(r, \theta)$$

$$u_z(r, \theta, z) = w(r, \theta) \quad (1)$$

که u_r ، u_θ و u_z به ترتیب جابه جایی یک نقطه دلخواه در امتداد محورهای r ، θ و z و همچنین φ_r و φ_θ بیانگر چرخش‌های محور قائم عرضی به ترتیب حول محورهای r و θ است.

که فرکانس طبیعی ورق در تماس با سیال کاهش می‌یابد. در سال ۲۰۰۹ حسینی هاشمی و همکارانش [۱۲]، ارتعاش ورق مستطیلی میندلین عمودی روی بستر الاستیک و در تماس با سیال را با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی کردند. آن‌ها از روش جداسازی متغیرها و بسط فوریه برای مدل کردن سیال استفاده کردند تا عبارت دقیقی برای حرکت سیال به فرم انتگرالی به دست آوردند. عسگری و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۳، ارتعاش یک ورق دایروی غوطه ور در سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند. در سال ۲۰۱۳ تارپوردی لو و همکاران [۱۴]، ارتعاش آزاد یک ورق دایروی در تماس با سیال محدود و غیرقابل تراکم را بررسی کردند. آن‌ها از دو روش سری‌های بسط-فوریه و روش تغییرات برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق و سیال استفاده کردند که هر دو روش نتایج نزدیک به هم ارائه دادند. در نهایت اثر عمق سیال بر جرم افزوده و فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۱۳۹۵ خورشیدی و عنصری نژاد [۱۵] تحلیل دقیق ارتعاش آزاد ورق های قطاعی کویل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را بررسی کردند. آن‌ها با کارگیری اصل همیلتون و معادله الکترواستاتیکی ماکسول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت را بدست آوردند. آن‌ها معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت را با استفاده از روش جداسازی متغیرها و توابع پتانسیل کمکی، حل کردند. در سال ۲۰۱۷ خورشیدی و همکاران [۱۶]، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی در تماس با سیال را به طور تجربی مورد بررسی قرار دادند. ورق مستطیل به عنوان یکی از دیواره‌های مخزن مکعبی حاوی سیال در نظر گرفته شده است. آن‌ها از آزمایش مودال برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق استفاده کردند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ابعاد مخزن روی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل در تماس با سیال را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۷، کانالس و مانتاری [۱۷] یک روش تحلیلی برای مطالعه ارتعاشات ورق مستطیلی کامپوزیتی ضخیم در تماس با سیال محدود ارائه کردند. میدان جابجایی ورق با استفاده از روش ریتز تقریب زده شد. آن‌ها در تحقیق خود سیال را بصورت ایده ال، غیرویسکوز و غیرقابل تراکم فرض کردند. در نهایت اثر

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (۳)$$

از قانون هوک روابط تنش- کرنش به صورت رابطه (۴) تعیین می‌شود:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\vartheta^2} (e_{rr} + \vartheta(e_{\theta\theta} + e_{zz}))$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\vartheta^2} (e_{\theta\theta} + \vartheta(e_{rr} + e_{zz}))$$

$$\sigma_{r\theta} = 2Ge_{r\theta} = \frac{E}{1+\vartheta} e_{r\theta}$$

$$\sigma_{rz} = 2k^2 Ge_{rz} = \frac{E}{1+\vartheta} e_{rz}$$

$$\sigma_{\theta z} = 2k^2 Ge_{\theta z} = \frac{E}{1+\vartheta} e_{\theta z} \quad (۴)$$

k^2 ضریب تصحیح برشی است که برای قطاع دایروی مقدار آن $\frac{\pi^2}{12}$ است [۲۰]. نیرو و ممان های منته به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \sigma_{ij} dz \quad i, j = r, \theta$$

$$Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{iz} dz \quad i = r, \theta \quad (۵)$$

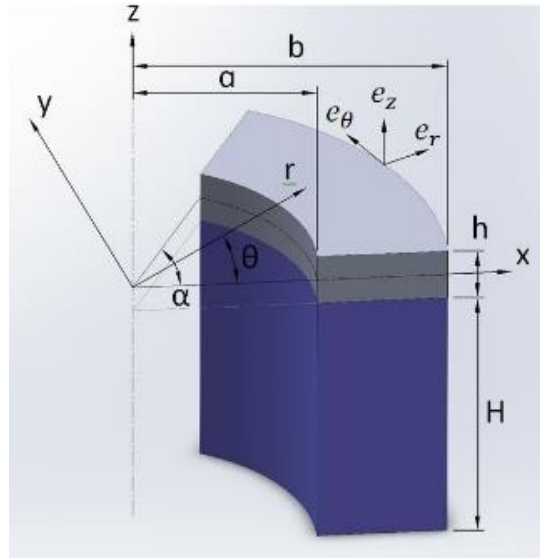
که N نیروی منته، M گشتاور منته و Q نیروی برشی منته است. برای تعیین معادلات حرکت حاکم از اصل همیلتون استفاده می‌شود. طبق این اصل [۱۹]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{n.c}) dt = 0 \quad (۶)$$

که T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و $W_{n.c}$ کار نیروهای خارجی غیر پایستار است. انرژی کرنشی ذخیره شده در ورق از رابطه (۷) تعیین می‌شود [۱۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\alpha \int_a^b (\sigma_{rr} e_{rr} + \sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} e_{r\theta} + 2\sigma_{rz} e_{rz} + 2\sigma_{\theta z} e_{\theta z}) r dr d\theta dz \quad (۷)$$

انرژی جنبشی ورق از رابطه (۸) تعیین می‌شود [۱۹]:



شکل ۱- قطاع دایروی توخالی نسبتاً ضخیم با دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در لایه میانی در تماس با سیال

با استفاده از روابط غیر خطی فون کارمن، روابط کرنش- تغییر مکان در مختصات استوانه‌ای با رابطه (۲) بیان می‌شود [۱۹]:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)$$

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (۲)$$

با جایگذاری از روابط (۱) در روابط (۲) کرنش‌ها به صورت رابطه (۳) تعیین خواهد شد:

$$e_{rr} = z \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \varphi_r \right) + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} - \frac{\varphi_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

- ✓ در نظر گرفتن دامنه محدود برای سیال.
- ✓ صرفنظر کردن از اثر امواج.
- ✓ سیال تراکم ناپذیر، غیر ویسکوز و غیر چرخشی در نظر گرفته شده است.

با توجه به فرضیات گفته شده برای سیال در تماس با ورق، تابع پتانسیل سرعت Φ باید معادله لاپلاس را در دامنه سیال ارضا کند. این معادله در مختصات استوانه‌ای به فرم رابطه (۱۳) است [۱۳ و ۱۴]:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

شرایط مرزی مسئله به فرم رابطه (۱۴) است:

$$\begin{aligned} (v_r)_{r=a,b} = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=b} = 0. \\ (v_\theta)_{\theta=0,\alpha} = 0 &\rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} = 0 \\ (v_z)_{z=-\frac{h}{2}-H} = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}-H} = 0. \\ (v_z)_{fluid} = (v_z)_{plate} \text{ in contact surface} &\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین با استفاده از معادله برنولی و صرفنظر از عبارات غیرچرخشی، فشار سیال در سطح تماس سیال-ورق به صورت رابطه (۱۵) است [۱۳]:

$$p = p|_{z=-\frac{h}{2}} = -\rho_f \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=-\frac{h}{2}} \quad (15)$$

که در آن چگالی سیال در حجم واحد است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی (۱۴) و جایگذاری تابع پتانسیل در رابطه (۱۵) فشار دینامیکی وارد از طرف سیال بر ورق به صورت رابطه (۱۶) خواهد شد:

$$p(r, \theta, t) = -\rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\eta_{mn}H)}{\eta_{mn}} \ddot{w}(r, \theta, t) \quad (16)$$

که η_{mn} از رابطه (۱۷) تعیین خواهد شد:

$$J'_{\beta_m}(\eta a) Y'_{\beta_m}(\eta b) - J'_{\beta_m}(\eta b) Y'_{\beta_m}(\eta a) = 0 \quad (17)$$

که J و Y توابع بسل قطبی نوع اول و دوم و $\beta_m = \frac{n\pi}{\alpha}$ است.

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dV \quad (8)$$

با جایگذاری از رابطه (۱) در رابطه (۸) و انتگرال گیری در راستای ضخامت انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد شد:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\alpha \int_a^b (\rho_2 (\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_\theta^2) + \rho_0 \dot{w}^2) r dr d\theta dz \quad (9)$$

که ρ_0, ρ_2 به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$(\rho_0, \rho_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z^2) \rho(r, \theta, z) dz \quad (10)$$

اگر $p(r, \theta, t)$ فشار اعمالی ناشی از سیال به ورق باشد، تغییرات کار نیروهای خارجی ناپایستار به صورت رابطه (۱۰) خواهد شد:

$$\delta W_{n.c} = \int_0^\alpha \int_a^b (p(r, \theta, t)) \delta w r dr d\theta \quad (11)$$

با جایگذاری از روابط (۴)، (۹) و (۱۱) در رابطه (۶) و استفاده از لم اساس حساب تغییرات، معادلات حاکم بر حرکت ورق مفروض به صورت رابطه (۱۲) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{rr,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (M_{\theta\theta} - M_{rr}) - Q_r &= \rho_2 \ddot{\phi}_r \\ M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{r} M_{r\theta} - Q_\theta &= \rho_2 \ddot{\phi}_\theta \\ Q_{r,r} + \frac{1}{r} Q_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} Q_r + \frac{1}{r} (r w_{,r} N_{rr})_{,r} + \frac{1}{r^2} (w_{,\theta} N_{\theta\theta})_{,\theta} \\ &+ \frac{1}{r} ((w_{,\theta} N_{r\theta})_{,r} + (w_{,r} N_{r\theta})_{,\theta}) \\ &= \rho_0 \ddot{w} + p(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (12)$$

۳- تعیین فشار دینامیکی سیال:

برای بدست آوردن مدل ریاضی یک سیال فرضیات زیر برای رفتار مدل دینامیکی در نظر گرفته می‌شود:

- ✓ جایجایی‌ها و سرعت سیال کوچک فرض می‌شوند (به همین دلیل می‌توان از اثر نیروهای درگ و لیفت سیال صرفنظر نمود). رفتار سیال به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود.
- ✓ سیال ایده‌آل فرض می‌شود، به نحوی که برای آن یک تابع پتانسیل می‌توان یافت.
- ✓ شرایط اولیه سیال صفر در نظر گرفته می‌شوند.
- ✓ فرمولبندی براساس تابع پتانسیل سرعت است.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,r\theta} + \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{w}_{,rr} \bar{w}_{,\theta}^2 \\
 & + \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{w}_{,r}^2 \bar{w}_{,\theta\theta} \Big) \\
 & = \left(\rho_0 + \rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\eta_{mn} H)}{\eta_{mn}} \right) h \tau^2 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

به طوری که:

$$\begin{aligned}
 (A_0, A_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(1, z^2) E}{1 - \vartheta^2} dz \\
 (C_0, C_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(1, z^2) E}{2(1 + \vartheta)} dz
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

جهت حل معادلات بدست آمده (۱۹) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. بدین منظور پاسخ‌ها به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_r(r, \theta, t) &= \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) \bar{T}_{\varphi_r}(\bar{t}) \\
 \bar{\varphi}_\theta(r, \theta, t) &= \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) \bar{T}_{\varphi_\theta}(\bar{t}) \\
 \bar{w}(r, \theta, t) &= \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \bar{T}_w(\bar{t})
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که $\bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r})$ ، $\bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta})$ ، $\bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r})$ ، $\bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta})$ و $\bar{R}_w(\bar{r})$ و $\bar{\theta}_w(\bar{\theta})$ شکل مودها می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی ورق انتخاب می‌شود؛ همچنین $\bar{T}_{\varphi_r}(\bar{t})$ ، $\bar{T}_{\varphi_\theta}(\bar{t})$ و $\bar{T}_w(\bar{t})$ توابع مجهول زمانی است. با جایگذاری از رابطه (۲۰) در رابطه (۱۸) مانده‌های I_1 ، I_2 و I_3 بدست می‌آیند. طبق روش گالری انتگرال حاصل ضرب مانده‌های رابطه (۱۹) در تابع وزنی روی سطح باید برابر صفر شود، بنابراین [۲۱]:

$$\int_0^1 \int_0^1 X_i I_i(\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{۲۲}$$

به طوریکه:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) \\
 X_2 &= \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) \\
 X_3 &= \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta})
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با جایگذاری از روابط (۲۱) و (۲۳) در رابطه (۲۲) دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت (۲۴) تشکیل خواهد شد:

۴- حل معادلات و تعیین فرکانس طبیعی غیرخطی

برای بی بعد سازی معادلات پارامترهای بی بعد (۱۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= b - a \quad \delta = \frac{a}{b - a} \quad \bar{r} = \frac{r}{\bar{R}} - \delta \\
 \bar{\theta} &= \frac{\theta}{\alpha} \quad \bar{w} = \frac{w}{h} \quad \bar{\varphi}_r = \varphi_r = \varphi_r \\
 \bar{\varphi}_\theta &= \varphi_\theta \quad D_m = \frac{Eh^3}{12(1 - \vartheta^2)} \\
 \tau &= \frac{1}{b^2} \sqrt{\frac{D_m}{\rho h}} \quad \bar{t} = \tau t
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با جایگذاری از روابط (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۲) معادلات بی بعد حرکت به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 A_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2} \bar{\varphi}_{r,rr} + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)} \bar{\varphi}_{r,r} - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2} \bar{\varphi}_r \right. \\
 \left. - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{\varphi}_{\theta,\theta} + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{\varphi}_{\theta,r\theta} \right) \\
 + C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{\varphi}_{r,\theta\theta} - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{\varphi}_{\theta,\theta} \right. \\
 \left. - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{\varphi}_{\theta,r\theta} \right) - C_0 \kappa^2 \left(\bar{\varphi}_r + \frac{h}{\bar{R}} \bar{w}_{,r} \right) \\
 = \rho_2 \tau^2 \ddot{\bar{\varphi}}_r \\
 A_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{\varphi}_{r,\theta} + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{\varphi}_{\theta,\theta\theta} \right. \\
 \left. + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{\varphi}_{r,r\theta} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{\varphi}_{r,\theta} \right. \\
 \left. + \frac{1}{\bar{R}^2} \bar{\varphi}_{\theta,rr} - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2} \bar{\varphi}_\theta \right. \\
 \left. + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)} \bar{\varphi}_{\theta,r} - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{\varphi}_{r,r\theta} \right) \\
 - C_0 \kappa^2 \left(\bar{\varphi}_\theta + \frac{h}{\bar{R}(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{w}_{,\theta} \right) = \rho_2 \tau^2 \ddot{\bar{\varphi}}_\theta \\
 C_0 \kappa^2 \left(\frac{1}{\bar{R}} \bar{\varphi}_{r,r} + \frac{h}{\bar{R}^2} \bar{w}_{,rr} + \frac{1}{\bar{R}(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{\varphi}_{\theta,\theta} \right. \\
 \left. + \frac{h}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{w}_{,\theta\theta} + \frac{1}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \left(\bar{\varphi}_r + \frac{h}{\bar{R}} \bar{w}_{,r} \right) \right) \\
 + A_0 \frac{h^3}{\bar{R}^4} \left(\frac{1}{(\bar{r} + \delta)} \bar{w}_{,r}^3 + \frac{3}{2} \bar{w}_{,rr} \bar{w}_{,r}^2 \right. \\
 \left. + \frac{3}{2(\bar{r} + \delta)^4 \alpha^4} \bar{w}_{,\theta\theta} \bar{w}_{,\theta}^2 - \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^3 \alpha^2} \bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$K_{NL} = \begin{bmatrix} K_{NL11} & K_{NL12} & K_{NL31} \\ K_{NL21} & K_{NL22} & K_{NL32} \\ K_{NL31} & K_{NL32} & K_{NL33} \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{\bar{T}}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{T}}_{\varphi_r} \\ \ddot{\bar{T}}_{\varphi_\theta} \\ \ddot{\bar{T}}_w \end{Bmatrix} \quad \{\bar{T}\} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_{\varphi_r} \\ \bar{T}_{\varphi_\theta} \\ \bar{T}_w \end{Bmatrix} \quad (۲۵)$$

که درایه‌های ماتریس جرم و سختی خطی و غیر خطی در رابطه (۲۵) به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$M_{11} = -\rho_2 \tau^2 \int_0^1 \int_0^1 \bar{R}_{\varphi_r}{}^2(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}{}^2(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$M_{22} = -\rho_2 \tau^2 \int_0^1 \int_0^1 \bar{R}_{\varphi_\theta}{}^2(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}{}^2(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$M_{33} = -\tau^2 h \left(\rho_0 + \rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\eta_{mn} H)}{\eta_{mn}} \right) \int_0^1 \int_0^1 \bar{R}_w{}^2(\bar{r}) \bar{\theta}_w{}^2(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$M_{12} = M_{21} = M_{13} = M_{31} = M_{23} = M_{32} = 0$$

$$K_{L11} = \int_0^1 \int_0^1 \left(A_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2} \bar{R}_{\varphi_r}''(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) \right) \right. \\ \left. + C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}''(\bar{\theta}) \right) - C_0 \kappa^2 \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) \right) \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L12} = \int_0^1 \int_0^1 \left(A_2 \left(-\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}'(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{R}_{\varphi_\theta}'(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}'(\bar{\theta}) \right) \right. \\ \left. - C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}'(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{R}_{\varphi_\theta}'(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}'(\bar{\theta}) \right) \right) \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L13} = -C_0 \kappa^2 \frac{h}{\bar{R}} \int_0^1 \int_0^1 \bar{R}_w'(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L21} = \int_0^1 \int_0^1 \left(A_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}'(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{R}_{\varphi_r}'(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}'(\bar{\theta}) \right) \right. \\ \left. + C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}'(\bar{\theta}) - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta) \alpha} \bar{R}_{\varphi_r}'(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}'(\bar{\theta}) \right) \right) \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L22} = \int_0^1 \int_0^1 \left(A_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}''(\bar{\theta}) \right) \right. \\ \left. + C_2 \left(\frac{1}{\bar{R}^2} \bar{R}_{\varphi_\theta}''(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) - \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2} \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_{\varphi_\theta}'(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) \right) \right. \\ \left. - C_0 \kappa^2 \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) \right) \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$[M]\{\ddot{\bar{T}}\} + [K_L]\{\bar{T}\} + [K_{NL}]\{\bar{T}^3\} = 0 \quad (۲۴)$$

که [M] ماتریس جرم، [K_L] ماتریس سختی خطی و [K_{NL}] ماتریس سختی غیر خطی است و به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_L = \begin{bmatrix} K_{L11} & K_{L12} & K_{L31} \\ K_{L21} & K_{L22} & K_{L32} \\ K_{L31} & K_{L32} & K_{L33} \end{bmatrix}$$

$$K_{L23} = -C_0 \kappa^2 \frac{h}{\bar{R} \alpha} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}'_w(\bar{\theta}) \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L31} = C_0 \kappa^2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\bar{R}} \bar{R}'_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) \right) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L32} = C_0 \kappa^2 \frac{1}{\bar{R} \alpha} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) \bar{\theta}'_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{L33} = C_0 \kappa^2 h \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\bar{R}^2} \bar{R}''_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}''_w(\bar{\theta}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{R}^2(\bar{r} + \delta)} \bar{R}'_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \right) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

$$K_{NL11} = K_{NL12} = K_{NL13} = K_{NL21} = K_{NL22} = K_{NL23} = K_{NL31} = K_{NL32} = 0$$

$$K_{NL33} = A_0 \frac{h^3}{\bar{R}^4} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{(\bar{r} + \delta)} \bar{R}_w^3(\bar{r}) \bar{\theta}_w^3(\bar{\theta}) + \frac{3}{2} \bar{R}''_w(\bar{r}) \bar{R}_w^2(\bar{r}) \bar{\theta}_w^3(\bar{\theta}) \right. \\ \left. + \frac{3}{2(\bar{r} + \delta)^4 \alpha^4} \bar{R}_w^3(\bar{r}) \bar{\theta}_w''(\bar{\theta}) \bar{\theta}'_w(\bar{\theta}) - \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^3 \alpha^2} \bar{R}'_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w'^2(\bar{\theta}) \bar{R}_w^2(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \right. \\ \left. + \frac{2}{(\bar{r} + \delta)^2 \alpha} \bar{R}_w^2(\bar{r}) \bar{\theta}_w'^2(\bar{\theta}) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) + \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{R}''_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w'^2(\bar{\theta}) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2(\bar{r} + \delta)^2 \alpha^2} \bar{R}_w^2(\bar{r}) \bar{\theta}_w''(\bar{\theta}) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) \right) \bar{R}_w(\bar{r}) \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) (\bar{r} + \delta) d\bar{r} d\bar{\theta}$$

(۲۶)

$$\bar{\theta}(\bar{\theta}) = \sum_{m=1}^{\infty} (e_m \cos(\alpha \gamma_m \bar{\theta}) + f_m \sin(\alpha \gamma_m \bar{\theta}) \\ + g_m \cosh(\alpha \gamma_m \bar{\theta}) + i_m \sinh(\alpha \gamma_m \bar{\theta}))$$

$$\bar{R}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n J_{\gamma_n}(\lambda_n \bar{R}(\bar{r} + \delta)) \\ + b_n Y_{\gamma_n}(\lambda_n \bar{R}(\bar{r} + \delta)) \\ + c_n I_{\gamma_n}(\lambda_n \bar{R}(\bar{r} + \delta)) \\ + d_n K_{\gamma_n}(\lambda_n \bar{R}(\bar{r} + \delta))) \quad (۳۱)$$

که I و Y توابع بسل قطبی نوع اول و دوم، K و I توابع بسل قطبی نوع اول و دوم اصلاح شده است. λ_n و γ_m مقادیر ثابت است که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود؛ همچنین $d_m, c_m, b_n, a_n, i_m, g_m, f_m, e_m$ ضرایب ثابت است. با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک صفحات برای رابطه (۳۱) شکل مودها برای \bar{w} و $\bar{\varphi}_r$ و $\bar{\varphi}_\theta$ در راستای r, θ به فرم (۳۲) خواهد شد:

۵- شرایط مرزی

در این پژوهش دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار در نظر گرفته می‌شود.

شرط مرزی گیردار:

برای یک مرز شعاعی گیردار باید روابط (۲۷) برقرار باشد:

$$\bar{w} = 0 \quad \bar{\varphi}_r = 0 \quad (۲۷)$$

و برای یک مرز زاویه‌ای گیردار باید روابط (۲۸) برقرار باشد:

$$\bar{w} = 0 \quad \bar{\varphi}_\theta = 0 \quad (۲۸)$$

شرط مرزی ساده:

برای یک مرز شعاعی ساده باید روابط (۲۹) برقرار باشد:

$$\bar{w} = 0 \quad M_{rr} = 0 \quad \bar{\varphi}_\theta = 0 \quad (۲۹)$$

برای یک مرز زاویه‌ای ساده باید روابط (۳۰) برقرار باشد:

$$\bar{w} = 0 \quad M_{\theta\theta} = 0 \quad \bar{\varphi}_r = 0 \quad (۳۰)$$

تعیین شکل مودها:

با توجه به ارتعاشات خطی و بی بعد سازی معادلات شکل مودها در راستای r, θ به صورت (۳۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \{\ddot{T}_0\} + \epsilon\{\ddot{T}_1\} + (\bar{\omega}_{NL}^2 - \epsilon\mu)(\{\bar{T}_0\} + \epsilon\{\bar{T}_1\}) \\ + [\epsilon](\{\bar{T}_0\} + \epsilon\{\bar{T}_1\})^3 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

با مرتب کردن رابطه فوق می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \{\ddot{T}_0\} + \bar{\omega}_{NL}^2\{\bar{T}_0\} + \epsilon(\{\ddot{T}_1\} + \bar{\omega}_{NL}^2\{\bar{T}_1\} - \mu\{\bar{T}_0\} \\ + \{\bar{T}_0\}^3) + O(\epsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

مساوی صفر قرار دادن ضرایب ϵ^0 و ϵ^1 در رابطه (۴۰) روابط (۴۱) حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \{\ddot{T}_0\} + \bar{\omega}_{NL}^2\{\bar{T}_0\} = 0 \\ \{\ddot{T}_1\} + \bar{\omega}_{NL}^2\{\bar{T}_1\} = \mu\{\bar{T}_0\} - \{\bar{T}_0\}^3 \end{aligned} \quad (41)$$

شرایط اولیه برای $\{\bar{T}\}$ با رابطه (۴۲) در نظر گرفته می شود:

$$\{\bar{T}\} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ \frac{w_{max}}{h} \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{T}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

با حل اولین معادله (۴۱) و اعمال شرایط اولیه (۴۲)، \bar{T}_0 به صورت رابطه (۴۳) تعیین خواهد شد:

$$\{\bar{T}_0\} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ \frac{w_{max}}{h} \end{Bmatrix} \cos(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \quad (43)$$

که w_{max} خیز بیشینه در حالت استاتیکی است. اکنون با جایگذاری از رابطه (۴۳) در رابطه دوم (۴۱) معادله به فرم (۴۴) خواهد شد:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_w + \bar{\omega}_{NL}^2 \bar{T}_w = \mu \frac{w_{max}}{h} \cos(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \\ - \left(\frac{w_{max}}{h}\right)^3 \cos^3(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \end{aligned} \quad (44)$$

با جایگذاری از بسط

$$\cos^3(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) = \frac{3}{4} \cos(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) + \frac{1}{4} \cos(3\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_w + \bar{\omega}_{NL}^2 \bar{T}_w \\ = \left(\mu \frac{w_{max}}{h} - \frac{3}{4} \left(\frac{w_{max}}{h}\right)^3 \right) \cos(\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{w_{max}}{h}\right)^3 \cos(3\bar{\omega}_{NL} \bar{t}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_w(\bar{r}) = \bar{R}(\bar{r}) \quad \bar{\theta}_w(\bar{\theta}) = \bar{\theta}(\bar{\theta}) \\ \bar{R}_{\varphi_r}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \bar{R}'(\bar{r}) \quad \bar{\theta}_{\varphi_r}(\bar{\theta}) = \bar{\theta}(\bar{\theta}) \\ \bar{R}_{\varphi_\theta}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{R}(\bar{r} + \delta)} \bar{R}(\bar{r}) \quad \bar{\theta}_{\varphi_\theta}(\bar{\theta}) = \bar{\theta}'(\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (32)$$

۶- تعیین فرکانس طبیعی غیر خطی

برای تعیین فرکانس طبیعی غیر خطی رابطه (۳۴) را در معکوس ماتریس جرم ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[M]\{\ddot{T}\} + [M]^{-1}[K_L]\{\bar{T}\} \\ + [M]^{-1}[K_{NL}]\{\bar{T}^3\} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

از رابطه ارتعاشات خطی می توان رابطه (۳۴) را بیان کرد:

$$[M]^{-1}[K_L]\{\bar{T}\} = \bar{\omega}_L^2\{\bar{T}\} \quad (34)$$

چون ماتریس $[K_{NL}]$ دارای تنها یک درایه است، بنابراین حاصل $[M]^{-1}[K_{NL}]$ که ماتریس اختلال نامیده می شود، فقط دارای یک درایه در سطر سوم و ستون سوم است:

$$[\epsilon] = [M]^{-1}[K_{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad (35)$$

با جایگذاری از روابط (۳۴) و (۳۵) در (۳۳):

$$\{\ddot{T}\} + \bar{\omega}_L^2\{\bar{T}\} + [\epsilon]\{\bar{T}^3\} = 0 \quad (36)$$

اکنون با توجه به روش اختلالات پاسخ سیستم و فرکانس طبیعی غیر خطی به فرم زیر در نظر گرفته می شود [۲۲]:

$$\{\bar{T}\} = \{\bar{T}_0\} + \epsilon\{\bar{T}_1\} + O(\epsilon^2)$$

$$\bar{\omega}_{NL}^2 = \bar{\omega}_L^2 + \epsilon\mu + O(\epsilon^2) \quad (37)$$

که $\bar{\omega}_{NL}$ فرکانس طبیعی غیر خطی بدون بعد، μ پارامتر مجهول فرکانس طبیعی غیر خطی و $O(\epsilon^2)$ بیان کننده خطا است؛ همچنین با توجه اینکه ماتریس $[\epsilon]$ دارای تنها یک درایه در سطر سوم و ستون سوم است، $\{\bar{T}_0\}$ و $\{\bar{T}_1\}$ به فرم رابطه (۳۸) در نظر گرفته می شود:

$$\{\bar{T}_0\} = \begin{Bmatrix} (\bar{T}_{\varphi_r})_0 \\ (\bar{T}_{\varphi_\theta})_0 \\ (\bar{T}_w)_0 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{T}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\bar{T}_w)_1 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

با جایگذاری از رابطه (۳۷) در رابطه (۳۶):

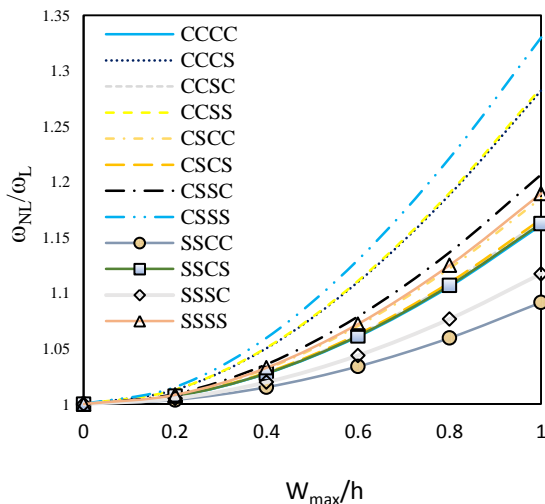
فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد با رابطه (۴۹) تعریف می‌شود:

$$\bar{\omega}_{NL} = \omega_{NL} b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_m}} \quad (49)$$

فرکانس طبیعی غیر خطی قطاع در تماس با سیال به پارامترهای چون نسبت ابعادی، زاویه قطاع و مشخصات سیال و خیز بیشینه (w_{max}/h) نیز وابسته است. در شکل ۲، اثر خیز بیشینه برای دوازده حالت شرایط مرزی بررسی شده است که نشان می‌دهد با افزایش خیز بیشینه، نسبت بی‌بعد فرکانس (فرکانس طبیعی غیر خطی به فرکانس طبیعی خطی) افزایش می‌یابد.

جدول ۱- مقایسه نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی قطاع دایره ای با داده های گزارش شده از مرجع [۱۹]

w_{max}/h	SCSC		CSSS	
	Present	Ref [19]	Present	Ref [19]
۰/۲	۱/۰۱۵۱	۱/۰۱۵۴	۱/۰۱۲۹	۱/۰۱۳۱
۰/۴	۱/۰۶۰۱	۱/۰۶۰۳	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۱۵
۰/۶	۱/۱۳۱۳	۱/۱۳۱۵	۱/۱۱۲۶	۱/۱۱۲۸
۰/۸	۱/۲۲۴۶	۱/۲۲۴۹	۱/۱۹۳۹	۱/۱۹۴۰
۱	۱/۳۳۶۲	۱/۳۳۶۴	۱/۲۹۱۶	۱/۲۹۱۸



شکل ۲- نسبت فرکانسی (فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی) برای دوازده حالت مرزی متفاوت

برای آن که معادله رابطه (۴۵) دارای پاسخ تکین نباشد، باید ضریب $\cos(\bar{\omega}_{NL} \bar{t})$ در سمت راست معادله برابر صفر گردد، بنابراین:

$$\mu \frac{W_{max}}{h} - \frac{3}{4} \left(\frac{W_{max}}{h} \right)^3 = 0 \rightarrow \mu = \frac{3}{4} \left(\frac{W_{max}}{h} \right)^2 \quad (46)$$

در نهایت با جایگذاری از رابطه (۴۶) در رابطه (۳۷) فرکانس غیر خطی بی بعد به صورت (۴۷) تعیین خواهد شد:

$$\bar{\omega}_{NL} = \sqrt{\bar{\omega}_L^2 + \frac{3}{4} \epsilon \left(\frac{W_{max}}{h} \right)^2} \quad (47)$$

۷- بحث

این بخش از مقاله پارامترهای موثر بر فرکانس طبیعی غیر خطی قطاع دایروی تو خالی در تماس با سیال بررسی می‌شود. در این قسمت یک قطاع دایروی توخالی از جنس آلومینیوم با مشخصات رابطه (۴۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$\rho = 2707 \frac{kg}{m^3} \quad E = 70GPa \quad \nu = 0.3 \quad (48)$$

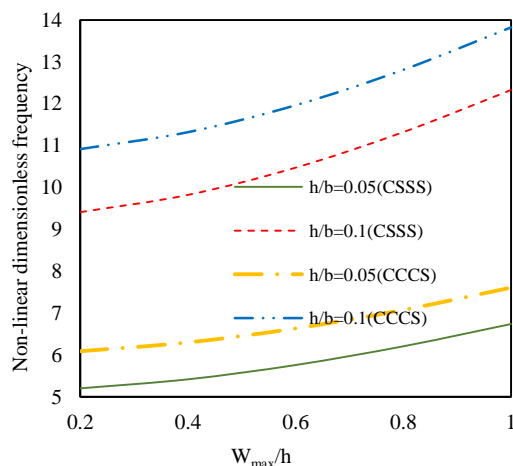
در این مقاله مرز ساده را با S و مرز گیردار را با C نمایش داده می‌شود. برای بیان شرایط مرزی کلی یک قطاع دایروی از چهار حرف استفاده می‌شود که دو حرف اول بیان کننده مرزهای زاویه ای، حرف سوم بیان کننده شرایط مرز شعاع داخلی و حرف چهارم، بیان کننده شرایط مرز شعاع خارجی است. به عنوان نمونه CSSC، بیان کننده مرزهای گیردار و ساده در مرزهای زاویه ای، مرز ساده در شعاع داخلی و مرز گیردار در شعاع خارجی است؛ همچنین باید متذکر شد که جابه جایی در نوع شرایط مرزی زاویه‌ای به دلیل تقارن بی معنی است.

برای صحت سنجی نتایج فرکانس غیر خطی از نتایج گزارش شده از مرجع [۱۹]، استفاده شده است. در مرجع [۱۹] از روش عددی DQM برای تعیین نسبت بی بعد فرکانس $\left(\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} \right)$ استفاده گردیده است. نتایج برای یک قطاع دایروی با زاویه مرکزی ۶۰ درجه و نسبت ابعادی $a/b=0/5$ و $h/b=0/0.5$ بر حسب خیز بیشینه بی بعد (w_{max}/h) برای دو نوع شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ ارائه گردیده است که انطباق بسیار خوبی بین نتایج با داده‌های مرجع [۱۹] وجود دارد.

قطاع دایروی در تماس، افزایش می‌یابد. با کاهش عرض ورق لختی آن کاهش یافته و همچنین ورق صلب تر شده و سختی آن افزایش یافته که منجر به افزایش فرکانس خواهد شد.

در شکل ۵ برای دو حالت CSSS و CCCS اثر نسبت ابعادی h/b بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد بررسی شده است. نتایج برای $h/b=0.5, 0.1$ ارائه شده است. همان طور که در نمودارهای مشخص است، با افزایش h/b (ضخیم تر شدن قطاع) فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایروی در تماس با سیال، افزایش می‌یابد. با افزایش ضخامت ورق جرم آن افزایش یافته و بر سختی آن نیز افزوده می‌شود، اما نسبت افزایش سختی از ازدیاد لختی بیشتر است و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش خواهد یافت.

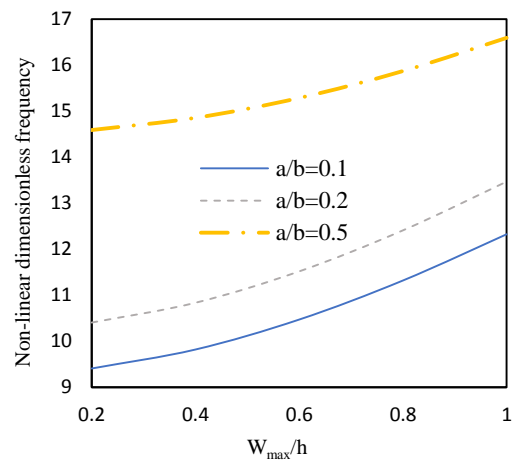
همچنین جهت بررسی اثر زاویه قطاع نمودارهای ۶ و ۷ برای دو حالت CSSS و CCCS ارائه گردیده است. نتایج برای زوایای $240, 120, 90, 45$ ارائه شده است. با افزایش زاویه قطاع، برای یک نسبت ابعادی مشخص، فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد کاهش می‌یابد که این کاهش برای زوایای کمتر از 90 درجه شیب تندتری دارد و برای زوایای بیش تر از 90 با شیب ملایم تری کاهش می‌یابد. با افزایش زاویه قطاع بر جرم ورق افزوده خواهد شد و سختی آن کاهش خواهد یافت که در مجموع منجر به کاهش فرکانس خواهد شد.



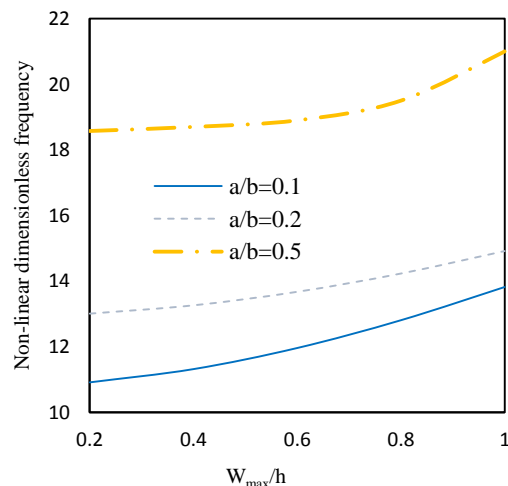
شکل ۵- بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی h/b بر فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CSSS و CCCS

برای بررسی عوامل مختلف بر فرکانس طبیعی غیر خطی به عنوان نمونه از دو حالت CSSS و CCCS استفاده شده است. در شکل‌های ۳ و ۴ برای دو حالت CSSS و CCCS اثر نسبت ابعادی a/b بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد بررسی شده است. نتایج برای $a/b=0.5, 0.3, 0.1$ ارائه شده است.

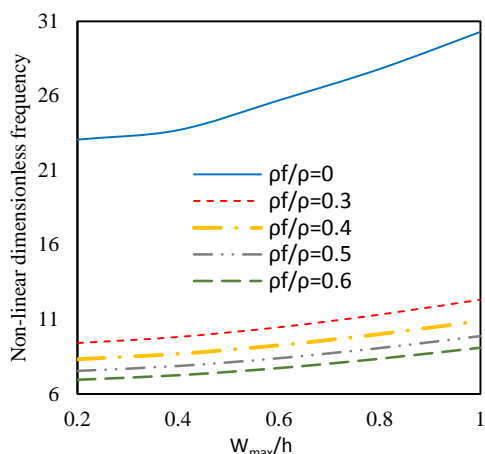
همان طور که در نمودارهای مشخص است، با افزایش a/b (کاهش عرض قطاع) فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد



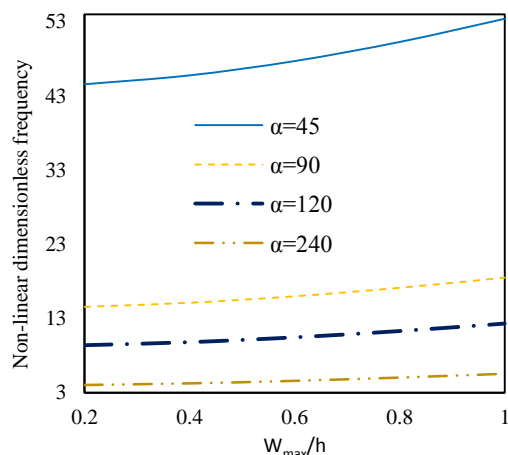
شکل ۳- بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی a/b بر فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CSSS



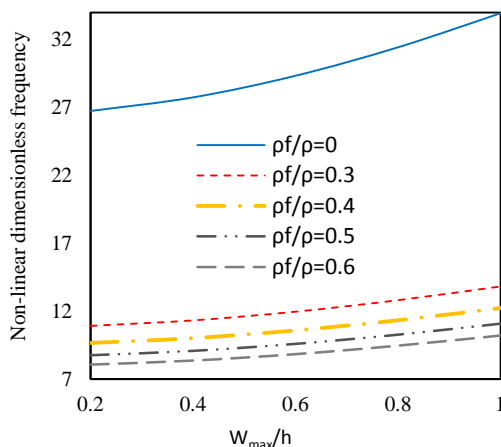
شکل ۴- بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی a/b بر فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CCCS



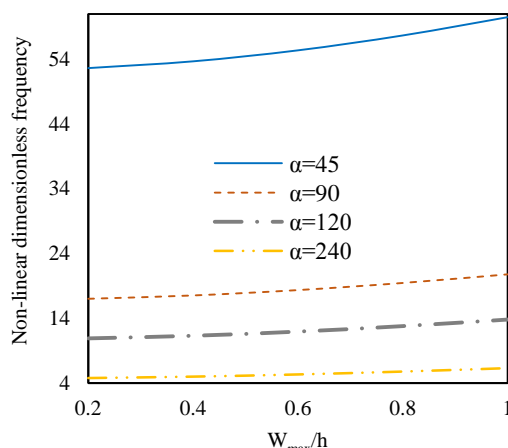
شکل ۸- بررسی اثرات چگالی سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CSSS



شکل ۶- بررسی اثرات تغییرات زاویه قطاع بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CSSS



شکل ۹- بررسی اثرات چگالی سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CCCS



شکل ۷- بررسی اثرات تغییرات زاویه قطاع بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CCCS

ورق افزایش یافته و در نتیجه باعث کاهش فرکانس خواهد شد؛ همچنین از شکل ۸ و ۹ واضح است که در محدوده تغییرات چگالی از ۰ تا ۰/۳ فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع با شیب خیلی زیاد کاهش می‌یابد که بیانگر این نکته است که وجود سیال به میزان قابل توجهی فرکانس طبیعی غیر خطی را کاهش می‌دهد.

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ برای دو حالت CSSS و CCCS تغییر ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی خطی بی بعد قطاع دایروی بررسی شده است. همان طور که در شکل‌های

در شکل‌های ۸ و ۹ برای دو حالت CSSS و CCCS اثرات تغییر چگالی سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع دایروی بررسی شده است. همانطور که شکل‌های ۸ و ۹ مشخص است و انتظار می‌رفت، با افزایش چگالی سیال (سنگین تر شدن سیال) فرکانس طبیعی غیر خطی بی بعد قطاع کاهش می‌یابد؛ چون که سیال غیر لزج فرض شده است و فقط دارای اینرسی است، مانند جرم اضافه شده به ورق رفتار می‌کند. با افزایش چگالی سیال، جرم اضافه شده به

برخورد کرده و به صورت موج مخالف در سیال ایجاد شده و باعث مخالفت با حرکت ارتعاشی قطاع و در نتیجه کاهش فرکانس می‌شود. در ارتفاع کم سیال این پدیده قابل توجه است، اما با افزایش ارتفاع زمان کافی برای رسیدن موج‌های مخالف با ارتعاش قطاع وجود ندارد و هر چه عمق سیال بیشتر شود، تاثیر این پدیده کمتر خواهد شد.

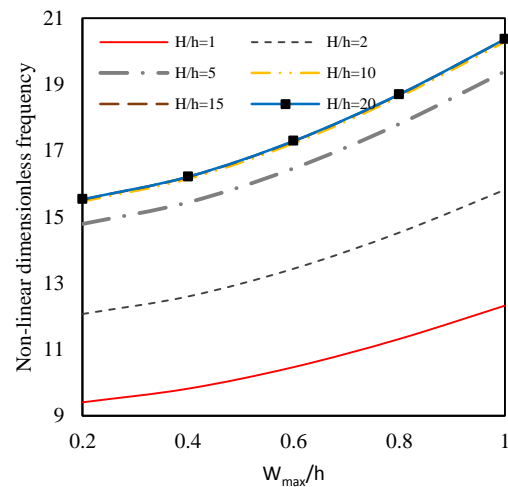
۸- نتیجه گیری

در این پژوهش تاثیر وجود ستون سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بررسی شده است. معادلات حرکت به وسیله اصل همپلتون و با در نظر گرفتن انرژی‌های کرنشی و جنبشی و کار نیروهای خارجی بدست آمده است. فشار دینامیکی وارد از سیال بر ورق با حل معادله لاپلاس و اعمال شرایط مرزی بر حسب جابه جایی عمودی ورق بدست آمده است. با استفاده از شکل مودهای فرضی و روش گالرکین معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل زمانی غیرخطی تبدیل شده است.

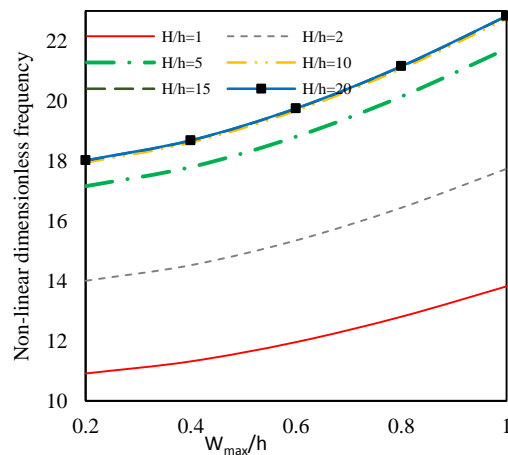
معادلات دیفرانسیلی غیر خطی براساس روش اختلالات حل شده و فرکانس طبیعی غیرخطی تعیین گردیده است. سپس، تاثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت‌های ابعادی، زاویه قطاع، چگالی سیال و ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی غیر خطی بررسی شده است. در انتها برای یک ورق قطاع نمونه نتایج عددی ارائه شده و اثر پارامترهایی چون نسبت ابعادی، زاویه قطاع، شرایط مرزی، چگالی سیال و ارتفاع سیال بررسی شده است؛ همچنین نتایج بدست آمده بدون در نظر گرفتن سیال با پژوهش‌های پیشین (روش DQM) صحت سنجی شده است که همگرایی خوبی را نشان می‌دهد. برای همه شرایط مرزی نتایج زیر قابل ارائه است:

- با افزایش نسبت a/b (کاهش عرض قطاع) فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت h/b (ضخیم شدن قطاع) فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابد.
- با افزایش زاویه قطاع فرکانس طبیعی غیرخطی کاهش می‌یابد.
- با افزایش چگالی سیال فرکانس طبیعی غیرخطی کاهش می‌یابد؛ همچنین در محدوده تغییرات چگالی از ۰ تا ۰/۳ فرکانس طبیعی قطاع با شیب

۱۰ و ۱۱ مشخص است با افزایش ارتفاع سیال فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد ابتدا افزایش می‌یابد، سپس به مقدار ثابتی میل می‌کند و افزایش ارتفاع تاثیر ناچیزی بر فرکانس بی بعد دارد که این نتیجه بیانگر این مطلب است که سیال دور دست تاثیر اندکی بر رفتار ارتعاشی قطاع دایروی دارد. با شروع حرکت ارتعاشی موج ایجاد شده از ارتعاش به سیال وارد شده و در آن منتشر می‌شود و به صفحه صلب پایین



شکل ۱۰- بررسی اثرات ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CSSS



شکل ۱۱- بررسی اثرات ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی غیرخطی بی بعد قطاع دایره توخالی در تماس با سیال برای شرایط مرزی CCCS

- [10] Renard J, Langlet A (2008) Moving pressure running over a plate coupled with a liquid: The analytical stationary response in the one-dimensional case. *J Sound Vib* 310(3): 650-662.
- [11] Kozlovsky (2009) Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J Sound Vib* 326(1): 332-339.
- [12] Hosseini Hashemi Sh, Karimi M, Rokni H, Damavandi T (2010) Vibration analysis of rectangular Mindlin plates on elastic foundations and vertically in contact with stationary fluid by the Ritz method. *Ocean Eng* 37(2-3): 174-185.
- [13] Askari E, Jeong KH, Amabili M (2013) Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *J Sound Vib* 332(12): 3064-3085.
- [14] Tariverdilo S, Shahmardani M, Mirzapour J, Shabani, R (2013) Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl Math Model* 37(1): 228-239.
- [۱۵] خورشیدی کوروش و عنصری نژاد سعید (۱۳۹۵) تحلیل دقیق ارتعاش آزاد ورق های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول. *مجله مکانیک سازه ها و شاره ها* ۶(۴): ۱۲۵-۱۳۸
- [16] Khorshidi K, Akbari F, Ghadirian H (2017) Experimental and analytical modal studies of vibrating rectangular plates in contact with a bounded fluid. *Ocean Eng* 140(1): 146-154.
- [17] Canales FG, Mantari JL (2017) Laminated composite plates in contact with a bounded fluid. Free vibration analysis via unified formulation. *Compos Struct* 162: 374-387.
- [18] Hosseini Hashemin SH, Kalbasi H, Rokni H, Damavandi T (2011) Free vibration analysis of piezoelectric coupled annular plates with variable thickness. *Appl Math Model* 35(7): 3527-3540.
- [19] F Hejripour F, Saidi AR (2011) Nonlinear free vibration analysis of annular sector plates using differential quadrature method. *Mech Eng Sci* 226(2): 485-497.
- [20] Jomehzadeh E, Saidi AR (2009) Analytical solution for free vibration of transversely isotropic sector plates using a boundary layer function. *Thin Wall Struct* 47(1): 82-88.
- [21] Tanmoy B, Mohanty AR (2017) Large amplitude axisymmetric vibration of a circular plate having a circumferential crack. *Int J Mech Sci* 124-125: 194-202.
- [22] Nayfeh AH, Mook DT (2008) Nonlinear oscillations. John Wiley & Sons, New York.

خیلی زیاد کاهش می یابد که بیانگر این نکته است که وجود سیال به میزان قابل توجهی فرکانس طبیعی غیرخطی را کاهش می دهد.

- با افزایش ارتفاع سیال فرکانس طبیعی غیرخطی ابتدا افزایش می یابد، سپس به مقدار ثابتی میل می کند و افزایش ارتفاع تاثیر ناچیزی بر فرکانس طبیعی دارد که این نتیجه بیانگر این مطلب است که سیال دوردست تاثیر اندکی بر رفتار ارتعاشی قطاع دایروی دارد.

۹- مراجع

- [1] Kwak MK, Kim KC (1991) Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. *J Sound Vib* 146(3): 381-389.
- [2] Kim JW, Webster WC (1996) The drag of an airplane taking off from a floating runway. *Proc. 2nd Int. Workshop Very Large Floating Struct. Hayama, Japan* 235-241.
- [3] Watanabe E, Utsunomiya T, Tanigaki S (1998) A transient response analysis of a very large floating structure by finite element method. *Struct Eng/Earthquake Eng* 15(2): 155-163.
- [4] Ohta H, Torii T, Hayashi N, Watanabe E, Utsunomiya T, Sekita K, Sunahara S (1999) Effect of attachment of a horizontal/vertical plate on the wave response of a VLFS. *Proc. 3rd Int. Wksp Very Large Floating Structures, University of Hawaii at Manoa, Honolulu, Hawaii, USA*.
- [5] Endo H (2000) The behavior of a VLFS and an airplane during takeoff/landing run in wave condition. *Mar Struct* 13(4-5): 477-491.
- [6] Amabili M (2000) Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface *J Sound Vib* 231(1): 79-97.
- [7] Myung MJ, Choi YH, Jeong KH (2003) Fluid bounding effect on natural frequencies of fluid-coupled circular plates. *Ksme Int J* 17(9): 1297-1315.
- [8] Renard J, Langlet A, Pennerier O (2003) Response of a large-liquid system to a moving pressure step: Transient and stationary aspects. *J Sound Vib* 265(4): 699-724.
- [9] Renard J, Langlet A, Girault G (2006) Response of an infinite free plate-liquid system to a moving load: theoretical stationary response in the subsonic case. *J Sound Vib* 292(1-2): 124-147.