



DOR:

مدل سازی دینامیکی و طراحی کنترل وضعیت یک فضاپیما در حضور تلاطم

عبدالمجید خوشنود^{۱*}، علی امین زاده^۲، سید محمد مهدی حسنی^۳ و پیمان نیک پی^۴

^۱ دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

^۲ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

^۳ دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

^۴ عضو هیات علمی، پژوهشکده سامانه های ماهواره، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۳

چکیده

این مقاله به مدل سازی دینامیک تلاطم سوخت داخل مخزن فضاپیما و تأثیر آن بر کنترل فضاپیما پرداخته است. تلاطم ناشی از حرکت سوخت موجود در مخزن سیستم پیشران فضاپیما بر کنترل و پایداری آن بسیار تأثیرگذار است. نظر به سادگی تحلیل معادلات حرکت یک جرم متمرکز و صلب نسبت به معادلات دینامیک سیال و به دنبال آن کاهش یافتن حجم محاسبات، می توان دینامیک تلاطم سوخت را با یک مدل مکانیکی جایگزین کرد؛ بنابراین در این پژوهش برای بررسی اثر دینامیک تلاطم سوخت مایع بر کنترل و پایداری فضاپیما، تلاطم سوخت به صورت یک سیستم مکانیکی خطی مدل سازی شده است. بدین منظور دو مدل جرم-فنر و پاندول برای مدل سازی دینامیک تلاطم مورد بررسی قرار گرفته و پارامترهای هر یک نیز برای شبیه سازی مدهای غالب تلاطم محاسبه گردیده است. به ازای هر دو مدل جرم-فنر و پاندول، معادلات دینامیک سیستم خطی سازی شده و سپس با قرار دادن مقادیر پارامترهای فیزیکی هر کدام از سیستم ها و در نظر گرفتن متغیرهای حالت و کنترل، معادلات سیستم به فرم فضای حالت استخراج شده و در نهایت کنترل کننده بهینه خطی روی آن اعمال گردید. نتایج پاسخ زمانی متغیرهای حالت در هر دو مدل و همچنین متغیرهای کنترلی، نشان از پایداری سیستم و کاهش اثر تلاطم در وضعیت ماهواره دارد.

کلمات کلیدی: تلاطم سوخت؛ فضاپیما؛ مدل جرم و فنر؛ مدل پاندول؛ کنترلر LQR.

Dynamic Modeling and Controller Design for a Space Vehicle with Fuel Sloshing

A. Khosnood^{1,*}, A. Aminzadeh², S.M. Mahdi Hassani³, P. Nikpey⁴

¹Associate Professor, Aerospace Engineering Department, K.N.Toosi University of technology, Tehran, Iran.

² PhD student, Aerospace Engineering Department, K.N.Toosi University of technology, Tehran, Iran.

³ PhD, Aerospace Engineering Department, K.N.Toosi University of technology, Tehran, Iran.

⁴ Faculty of Satellite Research Institute, Iranian Space Research.

Abstract

This paper is dedicated to modeling of fuel sloshing dynamics and its effect on the stability and control of the space vehicle. Sloshing due to the liquid movement in the fuel tank of a space vehicle's propulsion system can be effective on the vehicle's control and stability. Force and moment interaction between fuel sloshing and space vehicle's control system will be appeared as a feedback in the control system. Analyzing of a rigid body's equations of motion is simpler in comparison with a fluid dynamics equations which can be led to reduction in computational efforts. Consequently, it is possible to apply a mechanical model instead. So in this paper fuel sloshing is modelled as a linear mechanical system to investigate its effect on the stability and control of the vehicle. For this purpose, two mechanical models, mass-spring and pendulum systems, are applied to model dynamics of a space vehicle with fuel sloshing and each system's parameters are evaluated for simulation of dominant sloshing modes. Nonlinear dynamic equations of both systems are simplified and linearized in MAPLE and then an LQR controller is applied for the state space equations of the systems in MATLAB. Finally time response of states and control inputs demonstrate the stability of the system.

Keywords: Fuel Sloshing; Space Vehicle; Pendulum System; Mass-Spring System; LQR.

۱- مقدمه

تلاطم می‌تواند تأثیر مهمی بر پایداری وسایل فضایی بگذارد که این تأثیر از تداخل نیرویی و گشتاوری تلاطم با سیستم کنترل فضاپیما ناشی می‌شود و به‌صورت فیدبکی در سیستم کنترل ظاهر خواهد شد. برای بررسی اثر دینامیک تلاطم سوخت مایع روی کنترل و پایداری فضاپیما، تلاطم سوخت را می‌توان به‌صورت یک مدل مکانیکی خطی در نظر گرفت. تحلیل معادلات حرکت یک جرم متمرکز و جسم صلب به‌مراتب راحت‌تر از معادلات دینامیک سیال است و حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. زمانی که مایع حجم داخل یک محفظه را به‌طور کامل پر می‌کند، از نظر تئوری ثابت شده که رفتار دینامیکی آن را می‌توان معادل یک جسم صلب در نظر گرفت [۱]؛ اما زمانی که مایع به‌طور کامل حجم محفظه را پر نکرده و سطح مایع بتواند آزادانه حرکت نماید، تلاطم حاصل از حرکت مایع، یک یا تعداد بیشتری فرکانس طبیعی خواهد داشت و دیگر نمی‌توان آن را به‌عنوان یک جسم صلب مدل کرد. تئوری نشان می‌دهد که در این حالت مدل مکانیکی موردنظر باید شامل جرم‌هایی باشد که قادر به نوسان هستند [۲]. به عبارت ساده‌تر، مسئله معادل کردن مدل خطی دینامیک تلاطم سوخت مایع با یک مدل دینامیکی خطی دیگر است. نکته عجیب و حائز اهمیت آن است، در صورتی که دیواره‌های مخزن سوخت مایع صلب باشد، پارامترهای این مدل مکانیکی معادل، مستقل از نیروی تحریکی است که به مخزن سوخت مایع وارد می‌شود و فقط به شکل مخزن سوخت و ویژگی‌های سوخت مایع بستگی دارد [۳].

در سال‌های اخیر مطالعات گسترده‌ای به‌منظور کنترل فضاپیما با در نظر گرفتن اثر تلاطم سوخت روی دینامیک فضاپیما و مقاوم بودن کنترلر طراحی شده برای آن، با استفاده از مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع، انجام گرفته است [۴-۸]. در این راستا روش‌های متعددی برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع درون مخزن پیشنهاد گردیده است. مرجع [۹] مسئله مدل‌سازی و کنترل فضاپیما در حضور دینامیک تلاطم سوخت مایع داخل مخزن فضاپیما را مورد مطالعه قرار داده که در آن تلاطم سوخت با در نظر

گرفتن مدهای غالب تلاطم به‌صورت یک سیستم متشکل از چند پاندول مدل شده است. زاویه اعوجاج گیمبال^۱ موتور پیشران فضاپیما و گشتاور پیچشی حول مرکز جرم فضاپیما، به‌عنوان ورودی‌های کنترلی و کنترل سرعت انتقالی و زوایای حرکت فضاپیما به‌عنوان اهداف کنترلی در نظر گرفته شده‌اند. نویسندگان این تحقیق از مدل غیرخطی دینامیک فضاپیما در حضور مدهای اول و دوم تلاطم به‌منظور طراحی کنترلر فیدبک غیرخطی استفاده کرده‌اند. در مرجع [۱۰] نیز با در نظر گرفتن دینامیک تلاطم سوخت به‌صورت مدل جرم-فنر، مسئله کنترل فضاپیما در مانور صفحه‌ای بررسی شده است. بدین منظور دو سیستم جرم و فنر برای لحاظ کردن مدهای غالب تلاطم مورد استفاده قرار گرفته است. تحقیق [۱۱] با در نظر گرفتن تأثیر حرکت سوخت مایع داخل مخزن روی دینامیک ماهواره، اثر مخرب تلاطم سوخت مایع داخل مخزن روی عملکرد کنترلر و میزان مقاوم بودن کنترلر طراحی شده نسبت به تلاطم سوخت را پیش‌بینی نموده است. دینامیک تلاطم سوخت به‌صورت یک سیستم پاندول مدل شده که پارامترهای آن از طریق تکنیک فیلتر کالمن شناسایی شده‌اند. در مطالعه [۱۲] نیز تلاطم سوخت مایع در حالتی که مخزن مایع پر نباشد، بررسی شده است که در آن دینامیک تلاطم به‌صورت سیستم جرم-فنر مدل‌سازی شده است. مرجع [۱۳] نیز دینامیک فضاپیما را در حضور تلاطم مورد بررسی قرار داده که در آن از مدل پاندول برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم بهره برده است و یک کنترلر غیرخطی بر اساس لیاپانوف برای کنترل تلاطم ناشی از نوسانات سطح آزاد مایع درون مخزن طراحی و اعمال نموده است. در تحقیق [۱۴] نیز، کنترل وضعیت فضاپیما در حضور یک اغتشاش سینوسی فرکانس-پایین طراحی شده است. دینامیک تلاطم به‌صورت پاندول مدل شده و پارامترهای تلاطم با استفاده از روش مشاهده‌گر حالت توسعه‌یافته (ESO) شناسایی شده است. مرجع [۱۵] نیز به بررسی اثر تلاطم با دامنه نوسانات بزرگ پرداخته است. برای این منظور، تلاطم را به‌صورت توپ در حال حرکت نوسانی مدل کرده است. مرجع [۱۶] با مدل‌سازی تلاطم به‌صورت پاندول،

¹ Gimbal Deflection Angle

² Extended State Observer

کنترلرهای خطی کلاسیک (LQR) و هم از کنترلرهای غیرخطی (لیاپانوف و فازی) استفاده شده است که البته برای استفاده از کنترلرهای خطی معادلات دینامیکی با استفاده از تقریب مناسب خطی شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی موفقیت‌آمیز بودن کنترلرهای طراحی شده روی وضعیت فضاپیما و پاندول‌ها را نشان می‌دهد. در تحقیق [۲۴] نیز دینامیک تلاطم به‌وسیله مدل چندآونگی توصیف شده و معادلات دینامیک ترکیب شده فضاپیما و تلاطم به دست آمده است. در مدل ارائه شده، آونگ‌ها به‌طور آزادانه می‌توانند در فضای سه‌بعدی حرکت کنند و این موضوع باعث می‌شود که مدل به واقعیت نزدیک‌تر باشد. معادلات دینامیک ترکیب شده فضاپیما و تلاطم، غیرخطی هستند، بنابراین برای کنترل وضعیت در حالت واقعی‌تر باید از روش کنترل غیرخطی استفاده کرد. در این مقاله برای این منظور، ابتدا دو تابع نامزد لیاپانوف پیشنهاد شده است و پس از آن با استفاده از این توابع کنترلرها به دست آمده‌اند. تأثیر کنترلرهای به‌دست‌آمده بر وضعیت فضاپیما و آونگ‌ها با انجام یک شبیه‌سازی نشان داده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان از عملکرد مناسب کنترلرهای طراحی شده دارند، اگرچه تفاوت اندکی در پاسخگویی دو کنترلر نسبت به یکدیگر دیده می‌شود.

در این مقاله با مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع درون مخزن به‌صورت دو سیستم پاندول و جرم-فنر، اثر تلاطم روی دینامیک فضاپیما بررسی می‌شود. بدین منظور معادلات غیرخطی دینامیک فضاپیما با حضور تلاطم یک‌بار برای مدل پاندول و بار دیگر برای مدل جرم-فنر استخراج شده و معادلات حول نقطه تعادل خطی سازی شده و سپس یک کنترلر LQR برای سیستم طراحی و روی آن اعمال گردیده است.

۲- مدل‌سازی مکانیکی تلاطم سوخت مایع داخل

مخزن

غالباً دو مدل جرم-فنر و پاندول برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع به کار گرفته می‌شود. این دو مدل معادل یکدیگر بوده و در واقع هر دو مدل نیروها و گشتاورهای یکسانی را به دست می‌دهند. فرکانس طبیعی سیستم پاندول $(\frac{g}{l})^{0.5}$ است که خودبه‌خود با تغییر g تغییر کرده و تنظیم می‌شود. به همین دلیل در بحث‌ها بیشتر بر اساس

کنترلر PID برای کنترل اثر تلاطم روی پایداری وضعیت فضاپیما طراحی کرده است.

در تحقیق [۱۷] یک کنترلر غیرخطی برای کنترل وضعیت فضاپیما با حضور تلاطم سوخت، در طول یک انتقال مداری، طراحی شده است. دینامیک تلاطم سوخت به صورت مدل دو پاندولی به ازای مدهای اول و دوم تلاطم در فضای سه‌بعدی مدل‌سازی شده و معادلات کوپل حرکت فضاپیما و تلاطم سوخت نیز با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شده است. تحقیق [۱۸] و [۱۹] نیز مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف مبتنی بر کنترل بهینه و یک روش جدید مبتنی بر کنترل تطبیقی انجام داده است. مدل خطی شده دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم نیز با استفاده از مدل جرم-فنر توصیف شده است. در مرجع [۲۰] دو سیستم کنترل فازی برای پایداری وضعیت فضاپیما در حضور تلاطم ارائه و نتایج آن‌ها با هم مقایسه شده است. کنترلر فازی اول بر اساس روش جبران ساز موازی توزیع یافته (PDC^1) و کنترلر فازی دوم بر اساس روش رگولاتور کوادراتیک^۲ طراحی شده‌اند. بهینگی و مقاوم بودن دو کنترلر فازی طراحی شده، با استفاده از نتایج شبیه‌سازی‌های عددی مقایسه شده است. تحقیق [۲۱] نیز دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم را با استفاده از مدل دو پاندولی، مدل‌سازی و سپس برای کنترل وضعیت فضاپیما در حضور تلاطم، یک کنترلر فازی طراحی کرده است. نویسندگان مرجع [۲۲]، یک کنترلر مد لغزشی فازی بهینه ($OFSM^3$) برای کنترل تلاطم سوخت در فضاپیما در حین مانورهای مداری ارائه کرده‌اند. به منظور محاسبه مقادیر بهینه برای بهره‌های کنترلی جهت مینیمم‌سازی ورودی‌های کنترلی، از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO^4) استفاده شده است. در مطالعه [۲۳] به مدل‌سازی دینامیک تلاطم با استفاده از مدل دو پاندولی در فضای دوبعدی پرداخته شده است. مانور فضاپیما و حرکت پاندول‌ها در صفحه در نظر گرفته شده، بنابراین سیستم فضاپیما و پاندول‌ها سیستمی پنج درجه آزادی خواهد شد. برای پایداری معادلات دینامیکی سیستم معرفی شده هم از

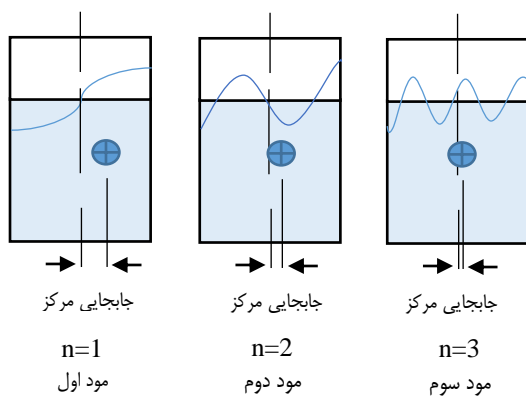
¹ Parallel Distributed Compensation

² Quadratic Regulator

³ Optimal Fuzzy Sliding Mode

⁴ Particle Swarm Optimization

مهم‌ترین اثر دینامیکی تلاطم عرضی مایع روی مخزن حاوی آن، نوسانات افقی مرکز جرم مایع نسبت به مخزن است. این اثر دینامیکی را می‌توان با معادل‌سازی دینامیک تلاطم مایع با یک مدل مکانیکی به‌خوبی نشان داد. شکل ۱ نصف یک موج تلاطم را نشان می‌دهد که دارای یک اوج و یک فرود است و کمترین فرکانس طبیعی را دارد و به آن مد اصلی می‌گویند. درحالی‌که ممکن است، موج تلاطم در ادامه دارای چند اوج و فرود با فرکانس‌های طبیعی بالاتر باشد (شکل ۲).



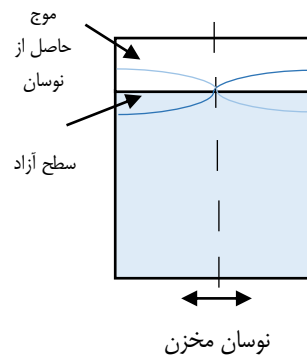
شکل ۲- مدهای مختلف موج تلاطم

با اضافه کردن چند پاندول یا جرم و فنر به ازای هر مد تلاطم می‌توان سیستم تلاطم سوخت با مدهای مختلف را مدل‌سازی نمود. جرم پاندول و یا سیستم جرم و فنر برای مدل‌سازی مدهای بعدی تلاطم در مقایسه با مد اصلی ناچیز است و معمولاً از مدهای بالاتر صرف‌نظر می‌شود. این موارد برای حالتی است که مخزن مایع متقارن باشد و در شرایطی که مخزن غیرمتقارن است، برای هرکدام از محورهای اساسی مخزن یک مد اصلی وجود دارد که جرم‌های سیستم‌های معادل به ازای این مدها می‌توانند قابل توجه باشند که در این صورت باید برای هر یک، مدل پاندول یا جرم و فنر را به دست آورد [۳].

۲-۱- تعیین پارامترهای مدل بر اساس معادلات استاتیکی و دینامیکی تلاطم

در این قسمت معادلات حرکت سیستم جرم - فنر در نظر گرفته شده است (شکل ۳). به دست آوردن معادلات مدل

سیستم پاندول عمل می‌کنند و سپس از تبدیل سیستم پاندول به سیستم جرم-فنر استفاده می‌کنند [۳]؛ بنابراین مزیت مدل پاندول آن است که فرکانس طبیعی آن با شتاب گرانش g تغییر می‌کند که این دقیقاً همان رفتاری است که دینامیک تلاطم مایع دارد؛ فرکانس طبیعی تلاطم سوخت مخزن یک فضاپیما با تغییر شتاب گرانش در طول مسیر تغییر خواهد کرد. هر دو مدل نشان می‌دهند که حرکت عرضی مخزن مایع می‌تواند سبب نوسانات افقی مرکز جرم مایع شود، اما نوسان محوری یا عمودی به مخزن به‌طورکلی تأثیر چندانی روی حرکت مایع نخواهد داشت. البته باید این نکته مهم را نیز اضافه کرد که اگر فرکانس نوسان عمودی مخزن نزدیک به نصف فرکانس طبیعی تلاطم باشد، سطح مایع ناپایدار خواهد شد؛ بنابراین با توجه به این‌که برای ناپایدار شدن سطح مایع باید فرکانس طبیعی اجباری^۱ نزدیک به نصف فرکانس طبیعی تلاطم باشد، در عمل تلاطم عمودی مایع درون مخزن به‌ندرت رخ خواهد داد. زمانی که ظرفی تا قسمتی از مایع پر است، دارای حرکت عرضی باشد و دچار یک تلاطم و نوسان شود، موج ایستاده‌ای در سطح مایع شکل می‌گیرد (شکل ۱).



شکل ۱- شماتیک موج تلاطم

حرکت موج شکل گرفته در سطح آزاد مایع دارای یک فرکانس طبیعی است که به شکل مخزن حاوی آن مایع و همچنین شتاب گرانش (محیط آزمایشگاه) و یا شتاب محوری مخزن مایع (مخزن سوخت موشک) بستگی دارد.

^۱ Forcing Frequency

مربوط به نیرو و گشتاور نیز استخراج شود. نیروی خالص وارد شده بر مخزن در جهت X_0 از رابطه (۴) قابل محاسبه است:

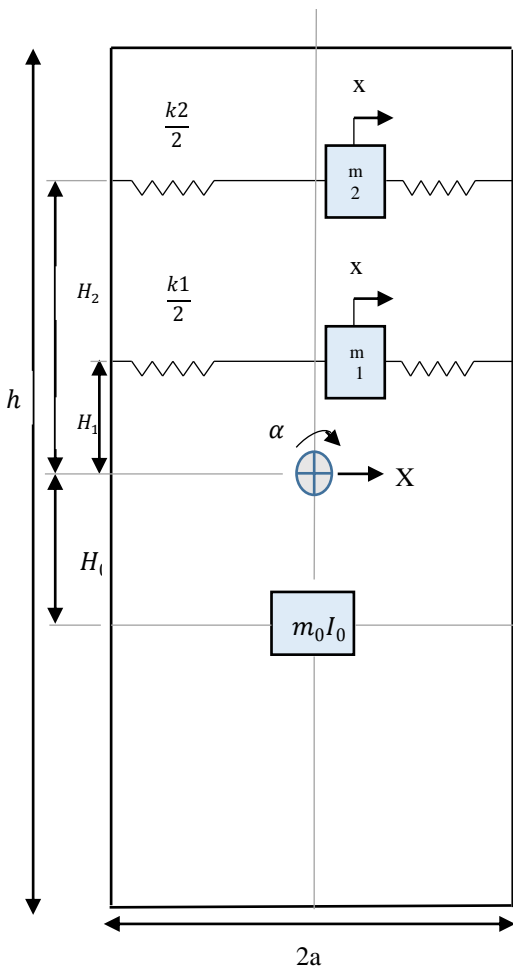
$$-F = m_0(\ddot{x}_0 - H_0\ddot{\alpha}_0) + \sum m_n(\ddot{X}_0 + H_0\ddot{\alpha}_0 + \ddot{x}_n) \quad (۴)$$

که در آن نیروی خالص وارد شده بر مخزن است و $\sin \alpha_0$ با α_0 جایگزین شده است (به ازای مقادیر کوچک α_0). با در نظر گرفتن رابطه (۲)، رابطه (۴) به صورت رابطه (۵) ساده می‌شود:

$$-F = m_0\ddot{X}_0 + \sum m_n(\ddot{X}_0 + \ddot{x}_n) \quad (۵)$$

به همین ترتیب گشتاور خالص وارد بر مخزن عبارت است از:

$$-M = (I_0 + m_0H_0)\ddot{\alpha}_0 + \sum m_n h_n(H_n\ddot{\alpha}_0 + \ddot{x}_n) - g\sum m_n x_n \quad (۶)$$



شکل ۳- سیستم جرم - فنر معادل دینامیکی مدل تلاطم سوخت مایع درون مخزن

تلاطم در این بخش، مستقل از شکل مخزن سوخت مایع و سطح آن است. مخزن مایع به صورت صلب، مایع به صورت ایدئال و بدون ویسکوزیته و همچنین حرکت موج به صورت خطی در نظر گرفته شده است. به منظور سادگی در ترسیم مدل و همچنین شفافیت شکل و فهم آن تنها دو سیستم جرم-فنر در نظر گرفته شده است. درحالی‌که به ازای هر مد تلاطم باید یک سیستم جرم-فنر لحاظ شود. جرم در سیستم جرم-فنر ممان ندارد و تنها ممان سیستم (I_0) از جرم m_0 ناشی می‌شود که به صورت صلب به بدنه مخزن متصل شده است.

همان‌طور که در شکل ۳ نیز قابل مشاهده است، H_n بیانگر فاصله هرکدام از جرم‌ها تا مرکز جرم سیستم و h ارتفاع مخزن است؛ همچنین m_n و k_n به ترتیب بیانگر جرم و فنریت هرکدام از مدهای تلاطم $(n=1,2)$ است. m_0 و I_0 نیز جرم و ممان اینرسی مخزن سوخت هستند که به صورت یک جسم صلب در نظر گرفته شده است. پهنای مخزن $2a$ است و مخزن توسط یک جابجایی محوری X_0 و یک دوران زاویه‌ای α_0 حول مرکز جرم تحریک شده است. هرکدام از جرم‌های سیستم‌های جرم - فنر نیز در اثر جابجایی مخزن، جابجایی x_n از خود نشان می‌دهند.

بر اساس تحلیل استاتیکی، مجموع همه جرم‌های موجود در مدل باید برابر جرم کل مایع باشد و همچنین مرکز جرم مدل باید هم‌سطح مایع باشد [۳]:

$$m_0 + \sum m_n = m_{liq} \quad (۱)$$

$$m_0 H_0 + \sum m_n H_n = 0 \quad (۲)$$

m_{liq} جرم کل مایع درون مخزن به اضافه جرم‌های ناشی از تلاطم مدل‌سازی شده به صورت سیستم‌های جرم-فنر است. روابط (۱) و (۲) برای تعیین پارامترهای مدل کافی نیستند. برای این منظور باید تحلیل دینامیکی سیستم شامل، فرکانس طبیعی، نیرو و گشتاور تلاطم را در نظر گرفت. فرکانس طبیعی سیستم به‌طور کلی به صورت زیر است:

$$\frac{k_n}{m_n} = \omega_n^2 \quad (۳)$$

که ω_n فرکانس طبیعی مد n ام تلاطم است. در واقع این اولین رابطه‌ای است که در انتخاب فنریت و جرم مدل معادل دینامیک تلاطم سوخت اهمیت دارد. از طرفی باید روابط

فرکانس طبیعی تلاطم برای مد n ام نیز از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود:

$$\omega_n^2 = (2n - 1)\pi(g/a)\tanh[(2n - 1)\pi h/a] \quad (13)$$

بنابراین طبق رابطه (۳) و با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) فنریته مدل به صورت رابطه (۱۴) قابل تعیین است [۳]:

$$k_n = m_{liq} \left\{ 8 \left(\frac{g}{h} \right) \frac{\tanh^2[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^2 \pi^2} \right\} \quad (14)$$

از طرفی نیروی وارد بر مخزن مستطیلی در اثر دوران زاویه‌ای α_0 در مرکز جرم و حول محور γ برابر است با:

$$\frac{-F}{m_{liq} \alpha_0 \Omega^2 h} = \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{a}{h} \right)^2 + 8 \left(\frac{a}{h} \right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh \left[\frac{(2n-1)\pi h}{a} \right]}{(2n-1)^3 \pi^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tanh \left[\frac{(2n-1)\pi h}{2a} \right]}{\frac{(2n-1)\pi h}{2a}} + \frac{g}{h \omega_n^2} \right) \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right\} \right\} \quad (15)$$

برای مقایسه ابتدا با استفاده از روابط زیر رابطه ۱۵ را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh \left[\frac{(2n-1)\pi h}{a} \right]}{(2n-1)^3 \pi^3} = \frac{a}{12h}$$

مقایسه نیروی حاصل از دوران نیز همان نتیجه رابطه (۱۲) را برای جرم معادل مدل به دست می‌دهد؛ همچنین موقعیت هر کدام از جرم‌ها و فاصله‌شان تا مرکز جرم سیستم نیز از رابطه (۱۶) تعیین می‌شود [۳]:

$$\frac{H_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2h} \frac{\tanh \left[\frac{(2n-1)\pi h}{2a} \right]}{(2n-1)\pi} \quad (16)$$

همچنین لازم به ذکر است، در صورت محاسبه گشتاور ناشی از جابجایی X_0 و دوران α_0 برای یک مخزن مستطیلی با رابطه (۱۱) نیز نتیجه‌ای مشابه برای تعیین جرم، فنریته و موقعیت هر یک از جرم‌های مدل رقم خواهد خورد. علاوه بر این‌ها گشتاور کل مدل باید شرط زیر را ارضا کند:

$$I_0 + m_0 H_0^2 + \sum m_n H_n^2 = I_{Sy} \left\{ 1 - \frac{4}{1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \frac{768a/h}{1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{\pi^5 (2n-1)^5} \right\} \quad (17)$$

که در آن I_{Sy} بیانگر ممان اینرسی در جهت محور γ سوخت مایع حول مرکز جرم خودش است. در واقع پس از تعیین همه پارامترهای مدل شامل، m_n ، K_n ، H_n با استفاده از این

که g شتاب گرانش، M گشتاور خالص وارد بر مخزن و ترم آخر موجود در این رابطه، گشتاور ناشی از فاصله بین هر کدام از جرم - فنرها تا مرکز جرم مخزن است؛ همچنین معادله حرکت هر کدام از جرم - فنرها با رابطه (۷) است:

$$m_n (\ddot{X}_0 + \ddot{x}_n + H_n \ddot{\alpha}_0) + k_n x_n - m_n g \alpha_0 = 0 \quad (7)$$

شتاب مخزن به صورت نوسانی و با فرکانس Ω در نظر گرفته شده است که بنابراین حرکت خطی و دورانی مخزن به ترتیب به صورت $-X_0 \exp(i\Omega t)$ و $-i\alpha_0 \exp(i\Omega t)$ خواهد بود. رابطه (۷) به صورت (۸) بازنویسی می‌شود:

$$x_n = -\frac{i\Omega^2 X_0}{\omega_n^2 - \Omega^2} - \left(\frac{H_n + g/\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) i\Omega^2 \alpha_0 \quad (8)$$

که در آن از رابطه (۳) نیز برای حذف ترم K_n استفاده شده است. با استفاده از این معادلات، دامنه نیرو و گشتاور وارد بر مخزن سوخت مایع به صورت زیر قابل بیان است [۳]:

$$\frac{F}{i\Omega^2 m_{liq}} = -\left[1 + \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right] X_0 - \alpha_0 \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{\Omega^2 H_n + g}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{M}{i\Omega^2} = -\alpha_0 \left[I_0 + H_0^2 m_0 + \sum H_n^2 m_n + m_{liq} \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{\Omega^2 H_n^2 + 2H_n g + \frac{g^2}{\omega_n^2}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \right] - m_{liq} X_0 \sum \frac{m_n}{m_{liq}} \left(\frac{\Omega^2 H_n + g}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right) \quad (10)$$

حال بر اساس شکل مخزن و سطح مایع درون آن و با مقایسه نیرو و گشتاور تولید شده در آن حالت با روابط به دست آمده، پارامترهای K_n ، m_n ، H_n را می‌توان تعیین کرد. به عنوان مثال نیروی عرضی وارد بر یک مخزن مستطیلی که در راستای محور x به صورت جابجایی X_0 تحریک شده است، از رابطه (۱۱) استخراج می‌شود:

$$\frac{F}{-\Omega^2 X_0 m_{liq}} = 1 + 8 \frac{a}{h} \sum_{n=1}^N \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (11)$$

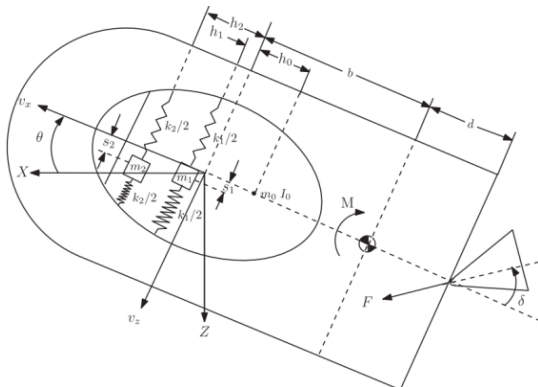
با مقایسه این رابطه با رابطه (۹) جرم معادل مدل برای مد n ام تلاطم از رابطه زیر به دست خواهد آمد [۳]:

$$m_n = m_{liq} \left\{ 8 \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \right\} \quad (12)$$

داخلی (شکل هندسی) فضاپیما ارائه شده که در ادامه دو مدل جرم-فنر و پاندول بررسی گردیده است.

۳-۱- مدل جرم و فنر

مدل جرم و فنر برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت داخل مخزن یک فضاپیما در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴- مدل جرم و فنر برای شبیه‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع داخل مخزن یک فضاپیما [۱۰]

رابطه مقدار I_0 نیز مشخص خواهد شد. روابط بالا نشان می‌دهد که پارامترهای مدل، مستقل از دامنه و فرکانس تحریک اجباری وارده بر مخزن است. علاوه بر این با معادل‌سازی سیستم جرم-فنر با یک سیستم پاندول می‌توان وابستگی فنریت مدل به g را از بین برد که این معادل‌سازی با قرار دادن لولای پاندول در سطح $L_n + H_n$ که در آن $L_n = (g/\omega_n)^{0.5}$ طول پاندول است، به‌سادگی قابل تحقق است. به همین ترتیب می‌توان پارامترهای H_n , m_n , K_n را بر اساس مدل پاندول برای یک مخزن مستطیلی نیز تعیین کرد. پارامترهای مدل پاندول برای مخزن مستطیلی در جدول ۱ به نمایش درآمده است.

۳- مدل‌سازی دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم

سوخت داخل مخزن و معادلات فضای حالت سیستم

در این مقاله دینامیک فضاپیما با در نظر گرفتن اثر تلاطم بررسی می‌شود. فضاپیما به‌صورت یک جسم صلب و مدهای تلاطم سوخت نیز به‌صورت جسم‌های داخلی در نظر گرفته می‌شوند. در این بخش معادلات دینامیک مدهای تلاطم بر اساس ترم‌های سرعت انتقالی، سرعت زاویه‌ای و مختصات

جدول ۱- پارامترهای مدل پاندول برای دینامیک تلاطم در مخزن مستطیلی

پارامتر	مقدار
جرم معادل مد n ام تلاطم (m_n)	$m_{liq} \left[\frac{8a \tanh(2n-1)\pi h/a}{\pi^3 (2n-1)^3 h} \right]$
طول پاندول معادل با مد n ام تلاطم (l_n)	$\frac{a}{\pi(2n-1) \tanh(2n-1)\pi h/a}$
مکان لولای پاندول (h_n)	$\frac{h}{2} - \frac{a}{(2n-1)\pi} \left[\tanh(2n-1)\pi h/2a - \frac{1}{\sinh(2n-1)\pi h/a} \right]$
جرم جسم صلب (m_0)	$m_{liq} - \sum m_n \approx m_{liq} \left[1 - \frac{8a \tanh(2n-1)\pi h/a}{\pi^3 (2n-1)^3 h} \right]$
مکان قرارگیری جسم صلب (h_0)	$\sum m_n (H_n - L_n) / m_0$
ممان اینرسی جسم صلب (I_0)	$I_y = I_{Sy} \left\{ 1 - \frac{4}{1+(\frac{h}{a})^2} + \frac{768a/h}{\pi^5 [1+(h/a)^2]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)^5} \right\} - m_0 H_0^2 - \sum m_n (H_n - L_n)^2$

$$\hat{I} = I + I_0 + mb^2 + m_0 h_0^2 + \sum_{i=1}^N [m_i (h_i^2 + s_i^2) + I_i]$$

$$m_f = m_0 + \sum_{i=1}^N m_i$$

$$p = b + d$$

کلید پارامترهای به‌کاررفته در روابط (۱۸) تا (۲۱) در جدول ۲ فهرست شده‌اند. معادلات کامل و جزئیات بیشتر در [۱۰] آمده است.

از روابط (۱۸) و (۱۹) a_x و a_z محاسبه و در روابط (۲۰)

و (۲۱) جایگزین و سپس خطی سازی حول $(0,0,0,0)$ و با بسط تیلور و استفاده از ماتریس ژاکوبین انجام شده است و بر اساس آن معادلات فضای حالت سیستم با در نظر گرفتن $u = [\delta \ M]^T$ و $x = [\theta \ \dot{\theta} \ s_1 \ \dot{s}_1 \ s_2 \ \dot{s}_2]^T$ به‌دست آمده است.

با در نظر گرفتن مدل جرم-فجر برای دینامیک تلاطم سوخت مایع، معادلات دینامیک فضاپیما در حضور مدهای تلاطم سوخت به‌صورت نهایی زیر است:

$$(m+m_f)a_x + mb\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N m_i (s_i \ddot{\theta} + 2\dot{s}_i \dot{\theta}) = F \cos \delta \quad (18)$$

$$(m+m_f)a_z + mb\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N m_i (\dot{s}_i - s_i \dot{\theta}^2) = F \sin \delta \quad (19)$$

$$m_i (\ddot{s}_i + a_z - h_i \ddot{\theta} - s_i \dot{\theta}^2) + k_i s_i + c_i \dot{s}_i = 0 \quad (20)$$

$$I\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N m_i (s_i a_x - h_i \dot{s}_i + 2s_i \dot{s}_i \dot{\theta}) + mba_z = M + Fp \sin \delta \quad (21)$$

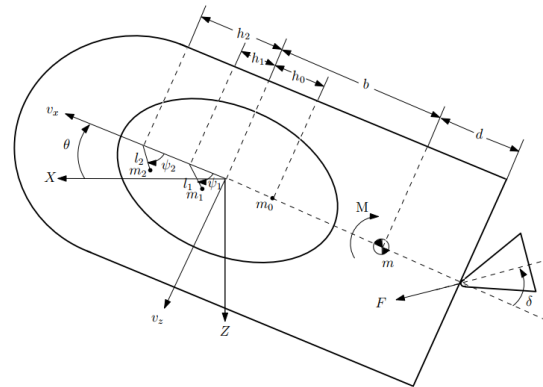
که در آن:

جدول ۲- پارامترهای فیزیکی به‌کاررفته در روابط دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم مدل شده به‌صورت جرم-فجر

توصیف	پارامتر
جرم فضاپیما	m
مجموع جرم سوخت مایع و جرم معادل تلاطم ناشی از حرکت نوسانی سطح آزاد مایع درون مخزن	m_f
جرم معادل با هرکدام از مدهای تلاطم	m_i
میرایی هرکدام از مدهای تلاطم	c_i
فنریت معادل به هرکدام از مدهای تلاطم	k_i
جابجایی فجر معادل با هر یک از مدهای تلاطم در راستای محور Z دستگاه بدنه فضاپیما	s_i
شتاب فضاپیما در راستای محور x بدنه	a_x
شتاب فضاپیما در راستای محور z بدنه	a_z
زاویه گیمبال	δ
زاویه محور x دستگاه بدنه فضاپیما نسبت به محور X دستگاه مرجع	θ
گشتاور وارد بر مخزن	M
فاصله بین محور z دستگاه بدنه و مرکز جرم فضاپیما در راستای محور طولی (x) دستگاه بدنه	b
فاصله بین گیمبال موتور پیشران و مرکز جرم فضاپیما در راستای محور طولی (x) دستگاه بدنه	d
نیروی وارد بر مخزن	F
ممان اینرسی فضاپیما	I
ممان اینرسی سوخت مایع داخل مخزن	I_0
جرم سوخت مایع داخل مخزن که به‌صورت یک جسم صلب در نظر گرفته شده است	m_0
فاصله جسم صلب m_0 تا مبدأ دستگاه بدنه در راستای محور x بدنه	h_0
فاصله جرم معادل با هرکدام از مدهای تلاطم تا مبدأ دستگاه بدنه در راستای محور x بدنه	h_i
ممان اینرسی جرم معادل با هرکدام از مدها	I_i

۳-۲- مدل پاندول

مدل پاندول برای مدل‌سازی دینامیک تلاطم سوخت داخل مخزن یک فضاپیما در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵- مدل پاندول برای شبیه‌سازی دینامیک تلاطم سوخت مایع داخل مخزن یک فضاپیما

با در نظر گرفتن مدل پاندول برای دینامیک تلاطم سوخت مایع، معادلات دینامیک فضاپیما در حضور مدهای تلاطم سوخت به صورت نهایی زیر است:

$$(m+m_f)a_x + \bar{m}b\theta^2 + \sum_{i=1}^N m_i l_i (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_i) \sin \psi_i + \sum_{i=1}^N m_i l_i (\dot{\theta} + \dot{\psi}_i)^2 \cos \psi_i = F \cos \delta \quad (22)$$

$$(m+m_f)a_z + \bar{m}b\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N m_i l_i (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_i) \cos \psi_i - \sum_{i=1}^N m_i l_i (\dot{\theta} + \dot{\psi}_i)^2 \sin \psi_i = F \sin \delta \quad (23)$$

$$\bar{I}\ddot{\theta} - \sum_{i=1}^N m_i l_i h_i [(\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_i) \cos \psi_i - (\dot{\theta} + \dot{\psi}_i)^2 \sin \psi_i] + \bar{m}b a_z - \sum_{i=1}^N \epsilon_i \psi_i = M + F(b+d) \sin \delta \quad (24)$$

$$(I_i + m_i l_i^2) (\ddot{\theta} + \ddot{\psi}_i) - m_i l_i h_i (\ddot{\theta} \cos \psi_i - \dot{\theta}^2 \sin \psi_i) + m_i l_i (a_x \sin \psi_i + a_z \cos \psi_i) + \epsilon_i \psi_i = 0 \quad (25)$$

i = 1, 2, \dots

که در آن:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + I_0 + mb^2 + m_0 h_0^2 + \sum_{i=1}^N m_i h_i^2 \\ \bar{m}b &= mb - \sum_{i=1}^N m_i l_i \\ m_f &= m_0 + \sum_{i=1}^N m_i \end{aligned}$$

کلیه پارامترهای به‌کاررفته در روابط (۲۲) تا (۲۵) در جدول ۳ فهرست شده‌اند. معادلات کامل و جزئیات بیشتر در [۹] آمده است.

از روابط (۲۲) و (۲۳) a_x و a_z محاسبه و در روابط (۲۴) و (۲۵) جایگزین و سپس خطی‌سازی حول $(0,0,0,0)$ و $(0,0,0,0)$ خطی‌سازی حول $(0,0,0,0)$ و با بسط تیلور و استفاده از ماتریس ژاکوبین انجام شده است انجام شده است و بر اساس آن معادلات فضای حالت سیستم با در نظر گرفتن $u = [\delta \ M]^T$ و $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \psi_1 \ \dot{\psi}_1 \ \psi_2 \ \dot{\psi}_2]^T$ به‌دست‌آمده است.

۴- طراحی کنترلر LQR

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، در این مقاله برای مدل‌سازی تلاطم از مدل‌های پاندول و جرم-فنر استفاده شده است که برای کنترل تلاطم تنها دو مد اول تلاطم که مدهای غالب هستند در نظر گرفته شده و از بقیه مدها که اثر ناچیزی روی دینامیک فضاپیما دارند، صرف‌نظر گردیده است؛ بنابراین جهت کنترل دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم، کنترلر فیدبک به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$u = -Kx \quad (26)$$

به صورتی که تابع هزینه زیر را مینیمم سازد:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (27)$$

که در آن u ، x و K به ترتیب بیانگر متغیر کنترلی، متغیر حالت و ماتریس بهره کنترل بوده و همچنین ماتریس‌های وزنی Q و R به ترتیب مثبت نیمه معین متقارن^۱ و مثبت معین^۲ هستند. ماتریس بهره کنترل بهینه (K) برای سیستم با معادله فضای حالت $\dot{x} = Ax + Bu$ از حل معادله ریکاتی (۲۸) به دست می‌آید:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (28)$$

از رابطه (۲۸) ماتریس P محاسبه شده و سپس کنترلر به‌دست‌آمده بر سیستم واقعی (غیرخطی) اعمال خواهد شد.

$$u = -(R^{-1}B^T P)x = -Kx \quad (29)$$

¹ Symmetric Positive-Semidefinite

² Positive-Definite

جدول ۳- پارامترهای فیزیکی به‌کاررفته در روابط دینامیک فضایپایما در حضور تلاطم مدل‌شده به‌صورت پاندول

پارامتر	توصیف
m	جرم فضایپایما
m_f	مجموع جرم سوخت مایع و جرم معادل تلاطم ناشی از حرکت نوسانی سطح آزاد مایع درون مخزن
m_i	جرم پاندول معادل با هرکدام از مدهای تلاطم
l_i	طول پاندول معادل با هرکدام از مدهای تلاطم
ψ_i	زاویه پاندول معادل با هر یک از مدهای تلاطم
a_x	شتاب فضایپایما در راستای محور x بدنه
a_z	شتاب فضایپایما در راستای محور z بدنه
δ	زاویه گیمبال
θ	زاویه محور x دستگاه بدنه فضایپایما نسبت به محور X دستگاه مرجع
M	گشتاور وارد بر مخزن
b	فاصله بین محور z دستگاه بدنه و مرکز جرم فضایپایما در راستای محور طولی (x) دستگاه بدنه
d	فاصله بین گیمبال موتور پیشران و مرکز جرم فضایپایما در راستای محور طولی (x) دستگاه بدنه
F	نیروی وارد بر مخزن
I	ممان اینرسی فضایپایما
I_0	ممان اینرسی سوخت مایع داخل مخزن
m_0	جرم سوخت مایع داخل مخزن که به‌صورت یک جسم صلب در نظر گرفته شده است
h_0	فاصله جسم صلب m_0 تا مبدأ دستگاه بدنه در راستای محور x بدنه
h_i	فاصله لولای پاندول معادل با هرکدام از مدهای تلاطم تا مبدأ دستگاه بدنه در راستای محور x بدنه
I_i	ممان اینرسی پاندول معادل با هرکدام از مدهای تلاطم

۵- نتایج و شبیه‌سازی

در این تحقیق برای مدل‌سازی دینامیک فضایپایما در حضور تلاطم سوخت، از دو مدل جرم-فنر و پاندول استفاده شده است که بدین منظور دو مدل اول تلاطم به‌صورت سیستم مکانیکی جرم-فنر و پاندول شبیه‌سازی گردید. پارامترهای فیزیکی با توجه به روابط (۱) تا (۱۷) برای مدل جرم-فنر و جدول ۱ برای مدل پاندول محاسبه و به ترتیب در جداول ۴ و ۵ فهرست شده است.

اگر تمامی پارامترهای تلاطم که در روابط (۱۸) تا (۲۱) آمده را حذف کنیم، معادلات فضای حالت سیستم دینامیک فضایپایما بدون در نظر گرفتن اثر تلاطم و با فرض $x=[\theta \ \dot{\theta}]^T$ و $u=[\delta \ M]^T$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4.5501 & 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1412 & 0.0493 & 0.1166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.7738 & -0.3219 & -0.1792 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -1.5478 & -0.4899 & -18.6183 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.2639 & 0.0020 \\ 0 & 0 \\ -5.5743 & -0.0013 \\ 0 & 0 \\ -4.6255 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

و در نهایت با قرار دادن پارامترهای فیزیکی فهرست شده در جدول ۵ معادلات فضای حالت سیستم دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم با مدل پاندول نیز به شرح زیر خواهد بود:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0011 & 0 & 4.0598e^{-04} \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3535 & 0 & -1.4819e^{-04} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & -9.5959e^{-05} & 0 & -0.0476 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4.4 & 8.8277e^{-04} \\ 0 & 0 \\ -2.4521 & -3.0049e^{-04} \\ 0 & 0 \\ -0.1823 & -1.74332e^{-05} \end{bmatrix}$$

با توجه به جدول ۶ و از مقایسه محل قرارگیری قطب-های سیستم حلقه باز این نکته قابل مشاهده است که دینامیک فضاپیما بدون در نظر گرفتن اثر تلاطم دارای پایداری بحرانی بوده و در مرز پایداری قرار دارد، به گونه‌ای که با وارد آمدن کوچک‌ترین اغتشاش، سیستم ناپایدار خواهد شد؛ بنابراین در نظر گرفتن اثر تلاطم در طراحی کنترل فضاپیما بسیار ضروری است، چراکه تلاطم می‌تواند به‌عنوان یک اغتشاش سیستم را ناپایدار سازد؛ بنابراین با در نظر گرفتن اثر تلاطم در دینامیک سیستم، این اثر مخرب کنترل و نهایتاً سیستم پایدار خواهد شد. همان‌طور که در جدول ۶ نیز مشاهده می‌شود، با اضافه شدن دینامیک تلاطم به دینامیک فضاپیما در مدل جرم-فنر سیستم ناپایدار شده و دارای ضرایب میرایی بسیار کوچک است که نهایتاً نوسانات سیستم میرا نمی‌شوند. در مدل پاندول نیز ۴ قطب روی

و همچنین با قرار دادن پارامترهای فیزیکی فهرست شده در جدول ۴ معادلات فضای حالت سیستم دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم با مدل جرم-فنر، به‌صورت زیر است:

جدول ۴- پارامترهای فیزیکی به‌کاررفته در مدل جرم-فنر تلاطم سوخت مایع

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
m	975 kg	F	2450 N
I	400 kg.m ²	I ₀	44.1 kg.m ²
I ₁	10 kg.m ²	I ₂	1 kg.m ²
m ₀	205 kg	k ₁	1174 N/m
m ₁	195 kg	k ₂	120 N/m
m ₂	6.5 kg	c ₁	48 N.s/m
h ₀	0.135 m	c ₂	2.75 N.s/m
h ₁	-0.145 m	b	-0.6 m
h ₂	0.035 m	d	1.2 m

جدول ۵- پارامترهای فیزیکی به‌کاررفته در مدل پاندول تلاطم سوخت مایع

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
m	590 kg	F	2250 N
I	400 kg.m ²	I ₀	75 kg.m ²
I ₁	10 kg.m ²	I ₂	1 kg.m ²
m ₀	480 kg	l ₁	0.2 m
m ₁	50 kg	l ₂	0.1 m
m ₂	5 kg	ε ₁	3.7 kg.m ² /s
h ₀	0.05 m	ε ₂	0.5 kg.m ² /s
h ₁	0.6 m	b	1.5 m
h ₂	0.9 m	d	1.5 m

کنترل در حضور تلاطم سوخت نیز از شکل‌های ۷ و ۹ پیداست.

جدول ۶- اثر اضافه شدن دینامیک تلاطم به دینامیک فضاپیما در جابجایی قطب‌های حلقه باز سیستم و ناپایدار کردن سیستم

نسبت میرایی	قطب	سیستم
-۱	۰	دینامیک فضاپیما بدون
-۱	۰	در نظر گرفتن اثر تلاطم
-۱	۰	دینامیک فضاپیما با در
-۱	۰	نظر گرفتن دو مد اول
۰/۰۵۶۳	-۰/۱۵۷+۲/۷۸i	تلاطم به صورت مدل
۰/۰۵۶۳	-۰/۱۵۷-۲/۷۸i	جرم-فنر
۰/۰۰۱۰۱	-۰/۰۰۴۳۴+۴/۳۲i	
۰/۰۰۱۰۱	-۰/۰۰۴۳۴-۴/۳۲i	
-۱	۰	دینامیک فضاپیما با در
-۱	۰	نظر گرفتن دو مد اول
-۱	۰	تلاطم به صورت مدل
۱	۰/۳۵۴	پاندول
۱	-۰/۰۴۷۶	

جدول ۷- مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته

سیستم	قطب‌های حلقه باز	قطب‌های حلقه بسته
دینامیک فضاپیما با در	۰	۰
نظر گرفتن دو مد اول	۰	۰
تلاطم به صورت مدل	-۰/۱۵۷+۲/۷۸i	-۰/۱۳+۰/۴۸۳i
جرم-فنر	-۰/۱۵۷-۲/۷۸i	-۰/۱۳-۰/۴۸۳i
	-۰/۰۰۴۳۴+۴/۳۲i	-۰/۸۱۳+۲/۵۹i
	-۰/۰۰۴۳۴-۴/۳۲i	-۰/۸۱۳-۲/۵۹i
دینامیک فضاپیما با در	۰	-۲۱/۳
نظر گرفتن دو مد اول	۰	-۱/۲+۰/۳۹۳i
تلاطم به صورت مدل	۰	-۱/۲-۰/۳۹۳i
پاندول	۰/۳۵۴	-۰/۳۰۸
	-۰/۰۴۷۶	-۴/۶۹×۱۰ ^{-۱۶}

محور موهومی و ۲ قطب دیگر نیز در سمت چپ محور اما بسیار نزدیک به مبدأ قرار دارند.

حال بر اساس مدل‌سازی‌های انجام شده و با استفاده از کنترلر LQR معرفی شده در بخش قبل، برای کنترل اثر تلاطم مدل شده به صورت جرم-فنر روی دینامیک فضاپیما،

کنترلر به شرح زیر طراحی شده است:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} 0.3162 & 0.5543 & -0.3048 & -0.2459 & -1.2365 & -0.1374 \\ -0.0152 & 0.0258 & -0.0186 & -0.0037 & -0.0366 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

همچنین در مدل پاندول نیز برای حذف اثر تلاطم روی

فضاپیما و پایدارسازی دینامیک فضاپیما در حضور تلاطم،

کنترلر LQR به صورت زیر طراحی گردیده است:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$K =$$

$$\begin{bmatrix} 0.3162 & 0.6055 & 0 & 0.1269 & -0.0008 & -0.0007 \\ -0.0083 & -0.0168 & 0.0007 & -0.0047 & -3.1623 & -3.3002 \end{bmatrix}$$

پس از اعمال کنترلرهای به دست آمده از روش LQR،

مقایسه‌ای بین سیستم حلقه بسته و حلقه باز در هر دو مدل جرم-فنر و پاندول انجام شده است (جدول ۷).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، قطب‌های سیستم حلقه بسته پایدار هستند.

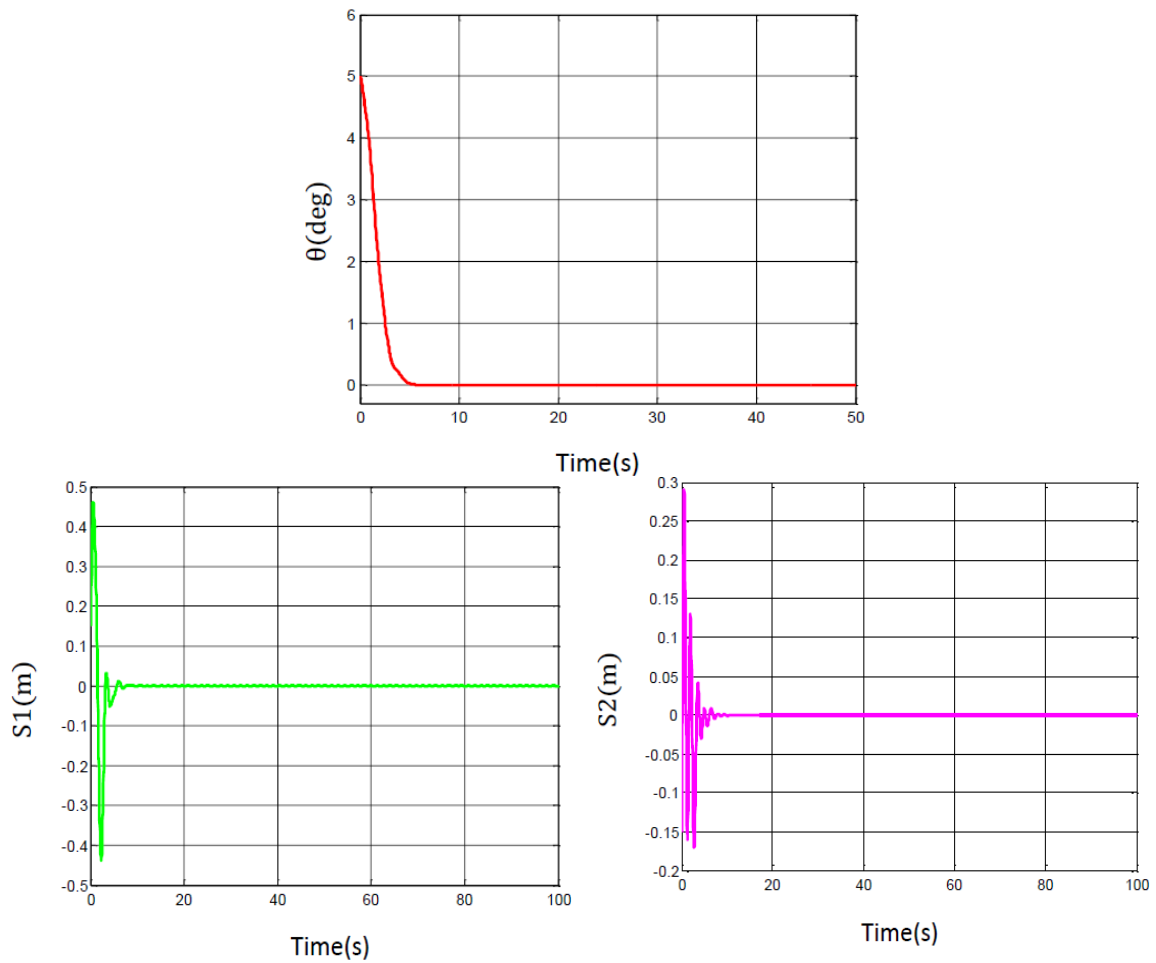
در نهایت با به کارگیری کنترلر LQR طراحی شده بر

اساس مدل خطی‌سازی شده و سپس اعمال آن بر مدل واقعی (غیرخطی) نتایج زیر به دست آمده است.

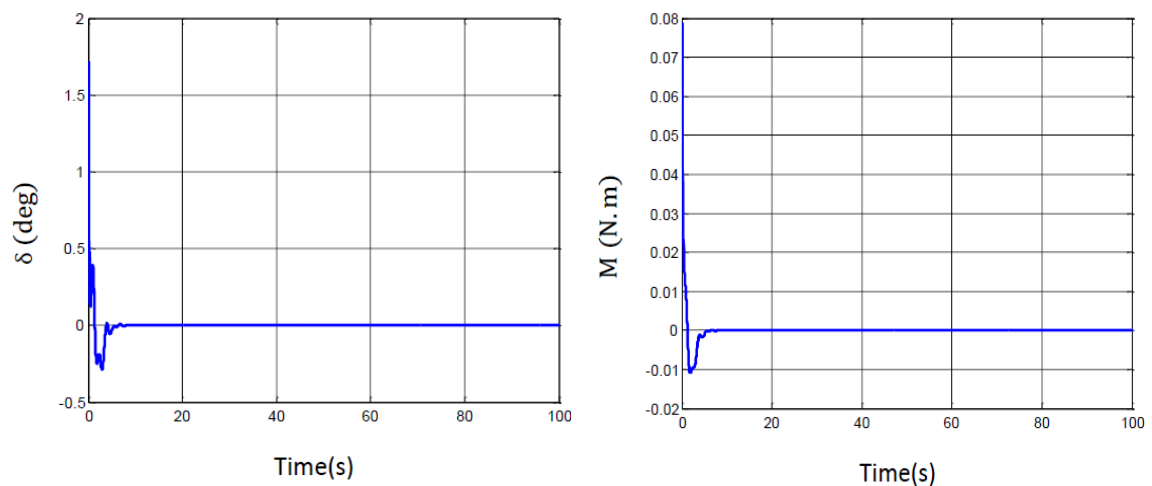
همان‌طور که از شکل‌های ۶ و ۸ مشاهده می‌شود،

در هر دو سیستم جرم-فنر و پاندول، متغیرهای حالت

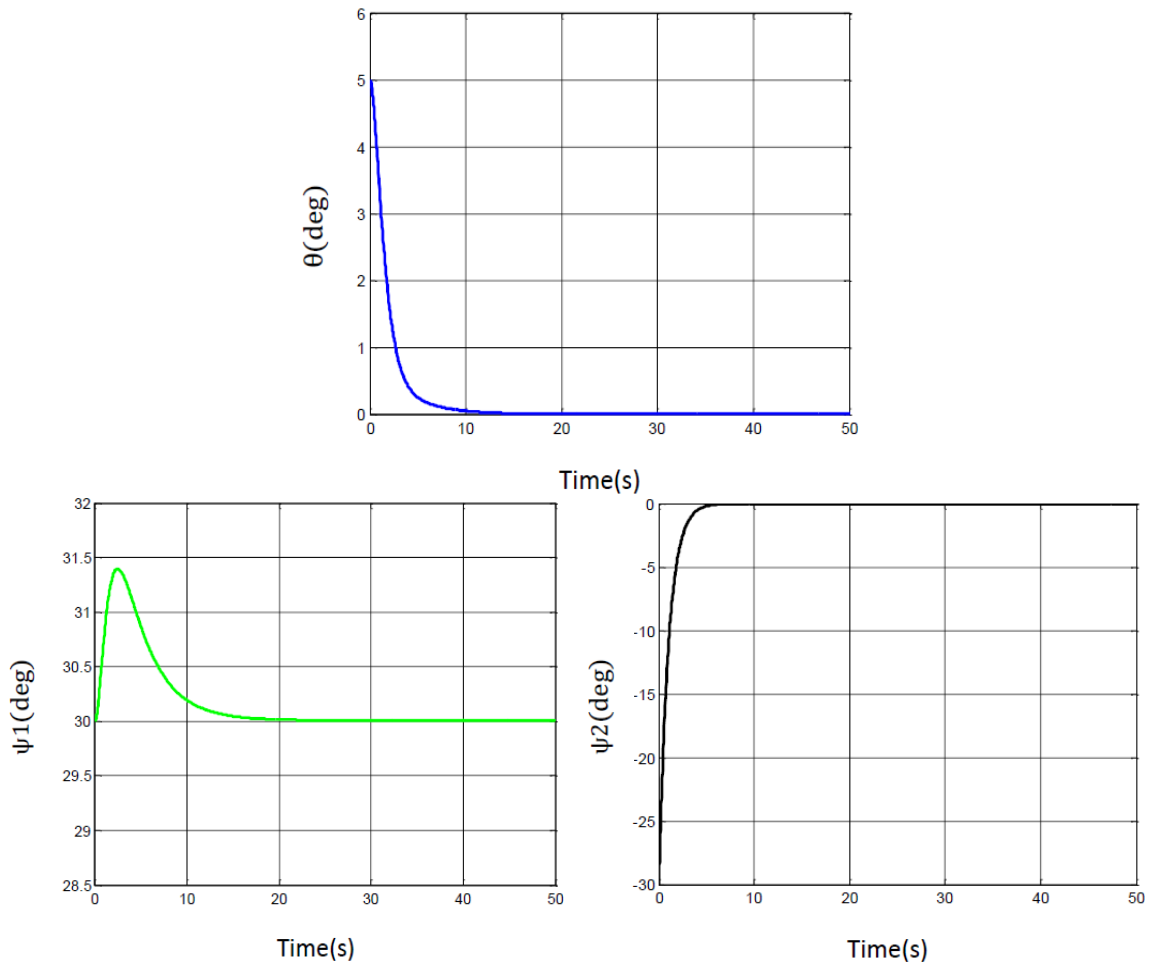
تلاطم به سمت نقطه تعادل در صفر همگرا می‌شوند. عملکرد مناسب کنترلر LQR طراحی شده و پایداری سیستم



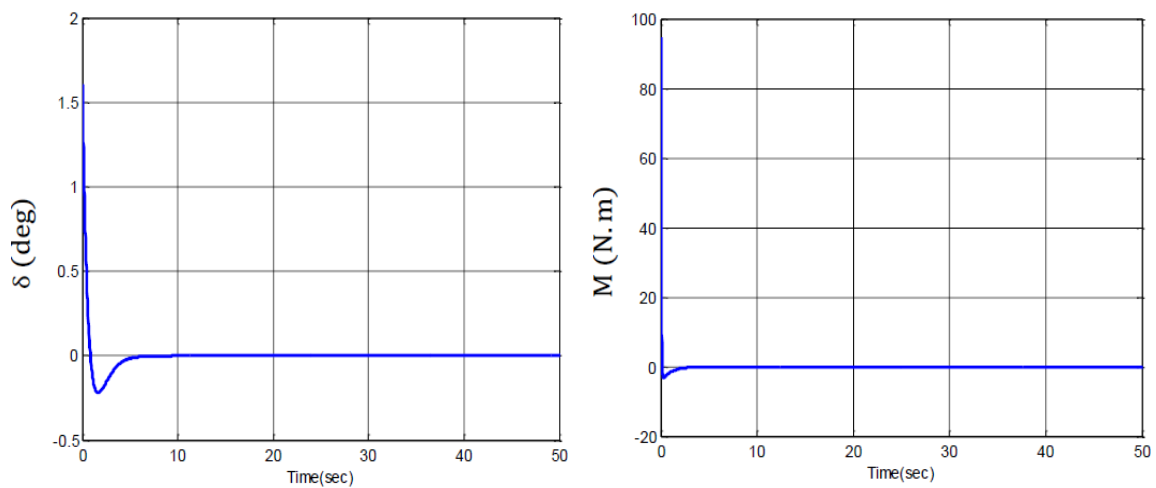
شکل ۶- پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم در مدل جرم-فنر



شکل ۷- زاویه گیمبال δ و ممان M (ورودی‌های کنترلی) در مدل جرم-فنر



شکل ۸- پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم در مدل پاندول



شکل ۹- زاویه گیمبال δ و ممان M (ورودی‌های کنترلی) در مدل پاندول

- [3] Dodge FT (2000) The new dynamic behavior of liquids in moving containers. Southwest Research Inst. San Ant., TX.
- [4] Jafari A, Khoshnood AM, Roshanian J (2010) Nonlinear dynamic modeling and active vibration control of a system with fuel sloshing. World Acad Sci, Eng Tech 61: 269-274.
- [5] Chatman YR (2008) Modeling and Parameter Estimation of Spacecraft Lateral Fuel Slosh. Theses - Daytona Beach 28.
- [6] Kurode S, Bandyopadhyay B, Gandhi B (2009) Sliding mode observer for estimation of slosh states in a moving container. in Ind Tech, ICIT. IEEE International Conference on.
- [7] Thakar PS, Bandyopadhyay B, Gandhi B, Kurode S (2012) Robust control of rotary slosh using integral sliding modes. in Variable Struc Sys (VSS), 12th International Workshop on.
- [8] Cho S, McClamroch M, Reyhanoglu M (2000) Feedback control of a space vehicle with unactuated fuel slosh dynamics. in AIAA Guid., Nav., and Cont. Conf. and Exh.
- [9] Reyhanoglu M, Hervas JR (2011) Nonlinear control of a spacecraft with multiple fuel slosh modes. in Dec. and Cont. and Europ. Cont. Conf. (CDC-ECC), 50th IEEE Conf. on.
- [10] Reyhanoglu M, Hervas JR (2012) Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes. Cont Eng Prac 20: 912-918.
- [11] Souza LCG de, Souza AG de (2014) Satellite attitude control system design considering the fuel slosh dynamics. Shock and Vib 2014.
- [12] Hervas JR, Reyhanoglu M (2014) Thrust-vector control of a three-axis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics. Acta Astro 98: 120-127.
- [13] Navabi M, Davoodi A (2017) 3D modeling and control of fuel sloshing in a spacecraft. in 2017 IEEE 4th Int. Conf. on Know.-Based Eng. and Inn. (KBEI).
- [14] Zhang H, Wang ZJJOS (2016) Attitude control and sloshing suppression for liquid-filled spacecraft in the presence of sinusoidal disturbance. J Sound Vib 383: 64-75.
- [15] Deng M, Yue BJAA (2017) Nonlinear model and attitude dynamics of flexible spacecraft with large amplitude slosh. ACTA Astronaut 133: 111-120.
- [16] Gasbarri P, Sabatini M, Pisculli AJAA (2016) Dynamic modelling and stability parametric analysis of a flexible spacecraft with fuel slosh. ACTA Astronaut 127: 141-159.
- [17] Navabi M, Davoodi A, Reyhanoglu M (2019) Modeling and control of a nonlinear coupled spacecraft-fuel system. ACTA Astronaut 162: 436-446.

۶- نتیجه‌گیری

آنچه در این مقاله انجام شده بررسی مدل‌های مکانیکی مختلف برای مدل‌سازی دینامیک یک فضایپیما در حضور تلاطم سوخت مایع داخل مخزن بوده است. با توجه به سادگی تحلیل معادلات حرکت یک جرم متمرکز و جسم صلب نسبت به معادلات دینامیک سیال و به دنبال آن کاهش یافتن حجم محاسبات، می‌توان دینامیک تلاطم سوخت را با یک مدل مکانیکی جایگزین کرد. به عبارت ساده‌تر، مسئله معادل کردن مدل خطی دینامیک تلاطم سوخت مایع با یک مدل دینامیکی خطی دیگر است. دو مدل مکانیکی جرم-فنر و پاندول به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفت و پارامترهای هریک نیز برای شبیه‌سازی مدهای مختلف تلاطم محاسبه گردید. در این پژوهش برای مدل‌سازی دینامیک فضایپیما در حضور تلاطم سوخت داخل یک مخزن مستطیلی، از دو مدل جرم-فنر و پاندول استفاده شده است که بدین منظور دو مدل اول تلاطم به‌صورت سیستم مکانیکی جرم-فنر و پاندول شبیه‌سازی گردید. معادلات دینامیک هر دو سیستم ساده و خطی سازی شده و سپس با قرار دادن مقادیر پارامترهای فیزیکی هرکدام از سیستم‌ها و با در نظر گرفتن متغیرهای حالت و کنترل، معادلات سیستم به فرم فضای حالت استخراج شده و در نهایت کنترلر LQR روی آن اعمال گردید. نتایج پاسخ زمانی متغیرهای حالت در هر دو مدل و همچنین متغیرهای کنترلی نشان از پایداری سیستم دارد. باین وجود با دقت در نتایج و مشاهده فراجهش^۱ و undershoot در حالت گذرای پاسخ سیستم می‌توان دریافت که استفاده از سیستم‌های کنترلی دیگر می‌تواند در جهت بهبود پاسخ کارگشا باشد.

۷- مراجع

- [1] Zhukoskii NE (1964) On the motion of a rigid body having cavities filled with a homogeneous liquid. Collected Works.
- [2] Okhotsimskii DE (1960) Theory of the motion of a body with cavities partly filled with a liquid. NASA.

¹ Overshoot

- in 2019 5th Conf. on Know. Based Eng. and Inn. (KBEI).
- [22] Navabi M, Davoodi A, Reyhanoglu M (2020) Optimum fuzzy sliding mode control of fuel sloshing in a spacecraft using PSO algorithm. ACTA Astronaut 167: 331-342.
- [23] محمد نوابی و علی داودی، (۲۰۱۹) "مدل‌سازی و کنترل تلاطم سوخت و اثر آن روی وضعیت فضاپیما"، علوم و فناوری فضایی، ۱۱، ۱۱-۲۲.
- [24] Navabi M, Davodi A (2019) Modeling of Fuel Sloshing in a Spacecraft and Control it by Active Control Method Using Nonlinear Control. Modares Mechanical Engineering 19: 2121-2128.
- [18] Coulter N, Moncayo H (2020) Comparison of Optimal and Bioinspired Adaptive Control Laws for Spacecraft Sloshing Dynamics. J Spc Rock57: 12-32.
- [19] Coulter N (2018) design of an attitude control system for a spacecraft with propellant slosh dynamics. Dissertations and Theses 424.
- [20] Mazmany L, Ayoubi MA (2018) Fuzzy attitude control of spacecraft with fuel sloshing via linear matrix inequalities. IEEE T Aero Elec Sys 54: 2526-2536.
- [21] Navabi M, Davoodi A (2019) 2D Modeling and Fuzzy Control of Slosh Dynamics in a Spacecraft.