مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۰/ دوره ۱۱/ شماره ۲/ صفحه ۱۵-۲۴

نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOR:

کوپل مدل پلاستیسیته دوسطحی دافالیاس-پوپوف با روش‌های تخمینی تنش-کرنش ریشه ناچ در مسائل تنش-صفحه‌ای تحت بار تک‌محوره یک‌سویه

فرزین توکلی[1] و رحمت‌الله قاجار[2,*]

[1] دانشجوی دکتری، آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی،تهران، ایران

[2] استاد، آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی،تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۹

چکیده

در اکثر قطعات مکانیکی، ناپیوستگی هندسی یا ناچ وجود دارد. معمولا پاسخ ماده در اطراف این ناپیوستگی‌ها الاستوپلاستیک است. چون تحلیل‌های پلاستیسیته پیچیده و زمان‌بر هستند، محققین، روش‌های تخمینی بر اساس رفتار الاستیک خطی ماده پیشنهاد داده‌اند. در این مقاله، روش تخمینی جدیدی برپایه کوپل‌کردن مدل پلاستیسیته دوسطحی دافالیاس-پوپوف، با روش‌های نیوبر نموی و چگالی انرژی کرنشی معادل نموی، ارائه می‌شود. اگرچه روش جدید معادلات ساده‌ای دارد، اما مدل پلاستیسیته دافالیاس-پوپوف دارای چالش‌ها و پیچیدگی‌هایی است. نحوه‌ی تعیین پارامتر شکل و اثر خط مرزی بر پیش‌بینی مدل، از جمله این چالش‌هاست. به منظور بررسی صحت مدل پیشنهادی و هم‌چنین بررسی چالش‌ها، یک ورق با سوراخ بیضی‌شکل، تحت کشش تک‌محوره یک‌سویه، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرض شده‌است که مساله تنش‌صفحه‌ای و سوراخ عاری از تنش بوده و رفتار الاستوپلاستیک ورق با معادله رامبرگ-آزگود بیان می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در عمده مسائل مهندسی، که در آن‌ها محدوده کرنش کمتر از ۲۰ درصد است، می‌توان از اثر خط مرزی بر پیش‌بینی مدل دافالیاس-پوپوف صرفنظر کرد. هم‌چنین نشان‌داده شده است که پارامتر شکل در یک بازه خاص، مقدار بهینه دارد. نتایج نشان می‌دهد که دقت روش پیشنهادی در تخمین تنش-کرنش، قابل قبول می‌باشد.

کلمات کلیدی: تنش-کرنش پلاستیک؛ ناچ؛ دافالیاس-پوپوف؛ نیوبر نموی؛ چگالی انرژی کرنشی معادل نموی.

Coupling of Dafalias-Popov’s Two-Surface Plasticity with Notch Stress-Strain Estimation Methods in Plane Stress Problems under Monotonic Uniaxial Loading

F. Tavakkoli[1], R. Ghajar[2,*]

[1] PhD. Student, Mechanical Properties Research Lab, Mechanical Engineering Faculty, K. N. Toosi University, Tehran, Iran.

[2] Professor, Mechanical Properties Research Lab, Mechanical Engineering Faculty, K. N. Toosi University, Tehran, Iran.

Abstract

In most mechanical parts, geometrical discontinuities or notches exist. Usually the material response in these discontinuities is elastoplastic. Because of complexity and time consuming of plastic analysis, researchers have proposed estimation methods based on the linear elastic behavior. In this paper, a new estimation method, based on Dafalias-Popov’s two surface plasticity model, is proposed which is coupled with incremental Neuber’s rule and incremental equivalent strain energy density methods. Although the method has simple equations, but Dafalias-Popov’s plasticity model has complexities and challenges, like bounding line effect on the model prediction and shape parameter determination. To verify the model and evaluating the challenges, a plate with elliptical and traction free hole under remote monotonic uniaxial load is considered. Plane stress condition is assumed and elastoplastic behavior is of Ramberg-Osgood type. Results show that the bounding line effect can be neglected, in most engineering problem which strain range is less that 20 percent. It is shown that the shape parameter has optimum value in certain range. Results show that accuracy of the model in stress-strain prediction is in acceptable range.

Keywords: Stress-Plastic Strain; Notch; Dafalias-Popov; Incremental Neuber; Incremental Equivalent Strain Energy Density.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۸۴۰۶۳۲۴۰-۰۲۱؛ فکس: ۸۸۶۷۴۷۴۸-۰۲۱

آدرس پست الکترونیک: ghajar@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

قطعات مکانیکی مثل شفت‌ها عموما تحت بارهای پیچیده سیکلی قرار می‌گیرند. این بارگذاری‌ها منجر به جوانه‌زنی ترک‌های خستگی در نقاط بحرانی، مثل: ناچ‌ها، پخ‌ها و ... می‌شود. لذا تحلیل ناچ یکی از مهم‌ترین مسائل در طراحی قطعات است. اگرچه روش‌های آزمایشی و عددی را می‌توان در بسیاری از این تحلیل‌ها به‌کار برد، اما این روش‌ها زمان‌بر و پرهزینه هستند. بنابراین محققین به دنبال روش‌های تحلیلی ساده‌تری می‌باشند که رفتار الاستوپلاستیک ناچ را تا حد قابل قبولی تخمین بزنند. در سال‌های گذشته روش‌های تخمینی گوناگونی ارائه شده است که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌شود.

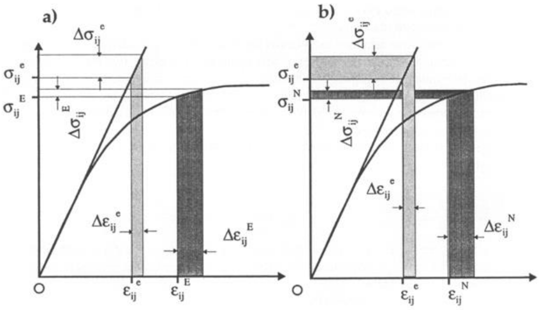
نیوبر[1] [۱] از اولین محققینی بود که تحلیل تنش-کرنش پلاستیک در ریشه ناچ را مورد بررسی قرار داد. نتایج مطالعه او بر یک نمونه منشوری تحت بار برشی پادصفحه‌ای نشان می‌دهد که میانگین هندسی ضریب تمرکز تنش و ضریب تمرکز کرنش با ضریب تمرکز تنش تئوری برابر است. نشان داده شده است که این رابطه برای مسائل صفحه‌ای که حالت تنش صفحه‌ای در آن‌ها برقرار می‌باشد، دقت قابل قبولی دارد [۲]. با اینحال برای مسائل سه بعدی یا مسائلی که حالت تنش‌صفحه‌ای در آن برقرار نیست، رابطه نیوبر اختلاف زیادی با نتایج تجربی دارد [۲].

مولسکی و گلینکا[2] [۳] روش دیگری پیشنهاد دادند که به روش چگالی انرژی کرنشی معادل[3] معروف است. مطابق این روش (که به قانون گلینکا معروف است)، چگالی انرژی کرنشی دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک برابر هستند. مطالعات نشان می‌دهد که این روش در مقایسه با روش نیوبر، در مسائل کرنش صفحه‌ای نتایج دقیق‌تری دارد. هم‌چنین نشان داده‌شده است که روش نیوبر، کرنش پلاستیک را بیشتر از مقدار واقعی و روش چگالی انرژی کرنشی معادل، کرنش پلاستیک را کمتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند [۴].

سینگ[4] [۵] روابط نیوبر نموی[5] و چگالی انرژی کرنشی معادل نموی (گلینکای نموی) [6] را به ترتیب، به عنوان تعمیم روابط نیوبر و چگالی انرژی کرنشی معادل در مسائل سه‌بعدی معرفی نمود. کوپل این روابط و معادلات پلاستیسیته پرانتل-روس تشکیل یک دستگاه معادلات جبری مرتبه اول را می‌دهد، که مجهولات این دستگاه نمو مولفه‌های تنش و کرنش در ریشه ناچ می‌باشد. شکل ۱-(a) روش گلینکای نموی را نشان می‌دهد. طبق این روش نمو انرژی کرنشی الاستیک برابر است با نمو انرژی کرنشی الاستیک-پلاستیک. شکل ۱-(b) روش نیوبر نموی را نشان می‌دهد که در آن نمو چگالی انرژی کرنشی کل الاستوپلاستیک با نمو چگالی انرژی کرنشی کل الاستیک برابر است.

یه[7] و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۸ با درنظرگرفتن این نکته که قانون گلینکا و نیوبر، تنش (یا کرنش) را به‌ترتیب بیشتر و کمتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کنند، قانون ناچ یکپارچه[8] را ارائه دادند، که تنش حاصله بین مقادیر به‌دست آمده از قوانین گلینکا و نیوبر می‌باشد. آن‌ها مدل پلاستیسیته سیکلی جیانگ-شهیداغلو[9] را با قانون ناچ یکپارچه کوپل نموده‌اند.

اینس[10] و گلینکا [۷] با در نظر گرفتن قانون نیوبر به‌صورت برابری نمو انرژی اعوجاجی و کوپل کردن مدل پلاستیسیته سیکلی گارود[11] با آن، نمو میدان تنش-کرنش پلاستیک را در ریشه ناچ محاسبه کردند.



شکل ۱- روش‌های: a) چگالی انرژی کرنشی معادل نموی و b) نیوبر نموی [۵]

[1] Neuber
[2] Molski and Glinka
[3] Equivalent Strain Energy Density (ESED)
[4] Singh
[5] Incremental Neuber
[6] Incremental Equivalent Strain Energy Density (Incremental Glinka)
[7] Ye
[8] Unified Notch Rule
[9] Jiang-Shehitoglu
[10] Ince
[11] Garud

جیان‌هویی[1] و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۴ با اعمال ثوابت مدول الاستیسیته، مدول برشی، ضریب پوآسون و ضریب پوآسون پلاستیک در قانون نیوبر، مدلی ارائه و اعلام کردند که این مدل در مقایسه با قانون نیوبر نتایج بهتری دارد. کامپاگنولو[2] و همکاران [۹] توانایی مدل یه در تخمین رفتار پلاستیک ناچ تحت بارگذاری چندمحوره را مورد بررسی قرار دادند.

مگیولارو[3] و همکاران [۱۰] و [۱۱] قانون ناچ یکپارچه را برای بارگذاری چندمحوره همفاز متناسب تعمیم دادند. آن‌ها در مقاله دیگری، تعمیم قوانین نیوبر و گلینکا به بارگذاری اسمی بیش از حد تسلیم را ارائه کردند [۱۲].

لی[4] و همکاران [۱۳] با اعمال ضریب $(1+\nu_e)/(1+\nu_{eff})$ در روش چگالی انرژی کرنشی معادل، توانستند تنش و کرنش ریشه ناچ تحت بارگذاری‌های تک‌محوره و چندمحوره‌ی یک‌سویه را محاسبه کنند. در این رابطه ν_e ضریب پوآسون الاستیک، ν_p ضریب پوآسون پلاستیک، $\nu_{eff} = (\varepsilon_e\nu_e + \varepsilon_p\nu_p)/\varepsilon$ ضریب پوآسون موثر و ε کرنش کل می‌باشند. نتایج حاصل از اعمال این ضریب در روش چگالی انرژی کرنشی معادل با نتایج حاصل از روش المان محدود و آزمایش، تطابق بسیار خوبی دارد.

اینس و بنگ[5] [۱۴] با کوپل کردن قانون نیوبر نموی انحرافی و رابطه پرانتل رئوس، روش جدیدی برای تخمین تنش-کرنش ریشه ناچ تحت بارگذاری یک‌سویه و سیکلی ارائه دادند.

لی و همکاران [۱۵] برای تخمین تنش-کرنش پلاستیک از کوپل کردن قانون نیوبر و مدل پلاستیسیته جیانگ-شهید-اغلو استفاده کردند. نمونه مورد مطالعه، یک شفت ناچ‌دار و پاسخ ماده تحت مسیرهای بارگذاری متفاوت در فضای تنش، مورد بررسی قرار گرفت.

ماخوتوف و رزنیکوف[6] [۱۶و۱۷] قانون نیوبر را برای مسائل با کرنش پلاستیک بسیار بزرگ (از ۵ برابر کرنش تسلیم تا کرنش شکست) تعمیم دادند. آن‌ها بیان کردند که دقت قانون نیوبر با بزرگ‌شدن ناحیه پلاستیک اطراف ناچ کاهش می‌یابد. اگرچه در اکثر مسائل مهندسی، کرنش پلاستیک محدود است (کمتر از ۵ برابر کرنش تسلیم)، اما در برخی از مسائل کرنش‌های بسیار بزرگ نیز مشاهده شده است.

ستورامان و گوپتا[7] [۱۸] با فرض اینکه چگالی انرژی کرنشی کل در مساله الاستوپلاستیک، ضریبی از چگالی انرژی کرنشی الاستیک است، مدلی ارائه نمودند. نتایج نشان می‌دهد برای مسائل تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، به‌ترتیب، تابعی درجه یک و دو از مدول مماسی است.

روستایی[8] و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۲۰ یک ورق از جنس آلیاژ منیزیم با سوراخ دایروی تحت بارگذاری سیکلی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از دو روش نیوبر و گلینکا، تنش-کرنش پلاستیک سطح سوراخ را تخمین زده و نتایج به‌دست آمده را با روش تجربی همبستگی تصاویر دیجیتال، صحت‌سنجی کردند. نتایج نشان می‌دهد که روش گلینکا دقت بیشتری دارد.

با وجود اینکه مدل‌های نسبتا زیادی در موضوع تخمین تنش-کرنش ارائه شده‌است، اما هم‌چنان این موضوع، جذاب و از جمله چالش‌های محققان است. چرا که اکثر این مدل‌ها، پیچیدگی نسبتا زیادی داشته و بهبود نتایج چندان نمی‌باشد. در حالی‌که هدف از این مدل‌ها، سادگی حل مسائل پلاستیسیته، به‌خصوص مسائل سیکلی، است. عموماً پیچیدگی مدل‌ها ناشی از مدل پلاستیسیته است. مدل پلاستیسیته دوسطحی دافالیاس-پوپوف، مدلی با حجم محاسباتی کم و ساده برای کدنویسی است که بر اساس تحقیقات مولفین مقاله، تاکنون از این مدل در تخمین تنش-کرنش استفاده نشده است. اگرچه معادلات این مدل ساده است، اما هم‌چنان پیچیدگی‌ها و چالش‌هایی دارد. انتخاب خط مرزی و اثر پارامتر شکل از جمله این چالش هاست. در این مقاله پس از ارائه روش تخمینی جدید برمبنای مدل دافالیاس-پوپوف، چالش‌ها و پیچیدگی‌ها و دقت مدل در تخمین تنش-کرنش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

---

[1] Jianhui
[2] Campagnolo
[3] Meggiolaro
[4] Li
[5] Bang
[6] Makhutov and Reznikov
[7] Sethuraman and Gupta
[8] Roostaei

۲- مبانی تئوری

۲-۱- روش‌های تخمینی

قانون نیوبر اولین رابطه‌ای است که مساله پلاستیسیته قطعات ناچ‌دار را به حل الاستیک مرتبط می‌سازد. مطابق این رابطه، چگالی انرژی کرنشی کل (مجموع چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی کرنشی مکمل) در ریشه ناچ در دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک برابر است. به عبارت دیگر

$$\sigma^a \varepsilon^a = \sigma^e \varepsilon^e \qquad (۱)$$

متغیرهای σ و ε به‌ترتیب تنش و کرنش، بالانویس e به معنای الاستیک و بالانویس a به معنای واقعی می‌باشد. در معادله (۱)، ۲ مجهول تنش و کرنش واقعی وجود دارد. برای حل این معادله، یک معادله دیگر لازم است.

از آنجاکه پاسخ پلاستیک مواد به تاریخچه بارگذاری و یا مسیر تنش در فضای تنش وابسته است، معادلات حاکم بر رفتار پلاستیک به صورت نموی نوشته می‌شوند[۲۰]. برای کوپل کردن معادلات پلاستیسیته با یک روش تخمینی، بهتر است از روشی که روابط آن به صورت نموی است، استفاده شود. برای این منظور، از روش گلینکای نموی (معادله (۲)) و نیوبر نموی (معادله (۳)) [۵] استفاده می‌گردد. صورت تک-محوره این معادلات عبارتند از:

$$\sigma^a d\varepsilon^a = \sigma^e d\varepsilon^e \qquad (۲)$$

$$\sigma^a d\varepsilon^a + d\sigma^a \varepsilon^a = \sigma^e d\varepsilon^e + d\sigma^e \varepsilon^e \qquad (۳)$$

معادله (۲) یک مجهول نمو کرنش واقعی و معادله (۳) دو مجهول نمو کرنش واقعی و نمو تنش واقعی دارد. مقادیر سمت راست این معادلات مشخص و از حل الاستیک مساله به‌روش عددی بدست می‌آیند. برای تعیین مجهول‌های معادله (۳) و هم‌چنین نمو تنش واقعی از روش گلینکای نموی، نیاز به معادله دیگری است. این معادله، رابطه بین نمو کرنش واقعی و نمو تنش واقعی است که از مدل پلاستیسیته دافالیاس-پوپوف استخراج می‌شود.

۲-۲- مدل پلاستیسیته دافالیاس-پوپوف

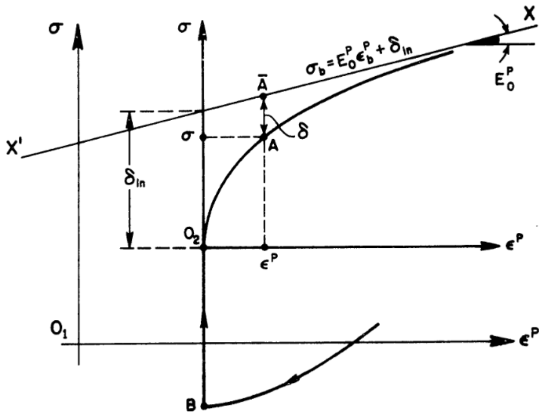
برای توصیف رفتار پلاستیک، مدل‌های گوناگونی ارائه شده-است. درحالت کلی این مدل‌ها براساس تعداد سطوح تسلیم نام‌گذاری می‌شوند. مدل‌های تک‌سطحی، مدل‌هایی هستند که تنها از یک سطح تسلیم استفاده می‌کنند. مدل‌های بدون سطح، حالت خاصی از مدل‌های تک سطحی هستند. در این مدل‌ها فرض می‌شود سطح تسلیم به‌قدری کوچک است که هر نمو تنش نشان‌دهنده یک بارگذاری پلاستیک است. مدل‌های چند سطحی از تعداد زیادی سطوح تسلیم تشکیل شده است. اینکه کدام سطح تسلیم در تنش جاری فعال است بستگی به تاریخچه‌ی بارگذاری دارد. در این مدل‌ها، مدول پلاستیک بین دو سطح خطی است. برای داشتن یک پاسخ هموار تنش-کرنش نیاز به تعداد سطوح زیادی است که منجر به زمان‌بر شدن تحلیل‌های پلاستیک می‌شود. برای رفع این مشکل، مدل‌های پلاستیسیته دو سطحی ارائه شده‌است. در این مدل‌ها، سطح تسلیم درون سطح دیگری (که سطح مرزی نام دارد) محاط شده است.

مدول پلاستیک تابعی از موقعیت سطح تسلیم درون سطح مرزی است. سطح مرزی مشابه سطح تسلیم می‌تواند در فضای ۹ بعدی تنش جابجایی صلب (سخت‌شوندگی سینماتیک) و یا تغییر اندازه بدون جابجایی (سخت‌شوندگی همسانگرد) داشته باشد. سطح تسلیم می‌تواند فقط در یک نقطه، با سطح مرزی در تماس باشد و مجاز به قطع کردن آن نمی‌باشد.

در فضای دوبعدی تنش-کرنش (یا تنش-کرنش پلاستیک)، سطح مرزی به خط مرزی تبدیل می‌شود [۲۱]. به لحاظ هندسی خط مرزی، خطی است که منحنی تنش-کرنش (و در نتیجه منحنی تنش-کرنش پلاستیک) به طور مجانبی به آن همگرا شود. شکل ۲ به طور شماتیک یک منحنی تنش-کرنش پلاستیک پس از باربرداری از نقطه B را نشان می‌دهد. برای سادگی در محاسبات، مبدا دستگاه مختصات از O_1 به O_2 انتقال یافته است. مدول پلاستیک E^P در هر نقطه مثل A، بر حسب فاصله‌ی آن نقطه از خط مرزی $\acute{X}X$ (پارامتر δ) و فاصله نقطه شروع تسلیم از خط مرزی (پارامتر δ_{in}) تعریف می‌شود. به عبارت دیگر

$$E^P = E^P(\delta, \delta_{in}) \qquad (۴)$$

شکل ۲ پارامترهای δ و δ_{in} را در فضای تنش-کرنش پلاستیک نشان می‌دهد. این دو پارامتر به دستگاه مختصات وابسته نمی‌باشند. بنابراین رابطه (۴) مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است. در شکل ۲، نقطه $\bar{\mathrm{A}}$ از تقاطع خطی عمود بر محور کرنش پلاستیک و گذرنده از نقطه A با خط مرزی حاصل می‌شود. δ_{in} فاصله عمودی نقطه شروع تسلیم O_2 از خط مرزی است.



شکل ۲- پارامترهای δ و δ_{in} در فضای تنش-کرنش پلاستیک [۲۲]

دافالیاس و پوپوف[۲۲] تابع مدول پلاستیک را به صورت زیر پیشنهاد دادند

$$E^P = E^P(\delta, \delta_{in}) = E_o^P + h\left[\frac{\delta}{\delta_{in} - \delta}\right] \tag{۵}$$

که در آن E_o^P مدول پلاستیک خط مرزی و h پارامتر شکل است که در حالت کلی تابعی از δ_{in} می‌باشد. پارامتر شکل h را می‌توان با انتگرال‌گیری تحلیلی از رابطه (۵) برحسب δ و ε^P به صورت بسته محاسبه کرد. پارامتر شکل h برحسب δ و ε^P به صورت زیر است [۲۱]:

$$h = \frac{\delta}{\varepsilon^P} + \frac{\delta_{\mathrm{in}}}{\varepsilon^P}\ln\left[\left(\frac{\delta_{\mathrm{in}}}{\delta}\right) - 1\right] \tag{۶}$$

۲-۳- کوپل مدل پلاستیسیته و روش تخمینی

رابطه بین مدول مماسی $E^t = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon$ ، مدول الاستیک $E^e = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^e$ و مدول پلاستیک $E^P = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^P$ به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{E^t} = \frac{1}{E^e} + \frac{1}{E^P} \tag{۷-الف}$$

$$E^t = \frac{E^e E^P}{E^e + E^P} \tag{۷-ب}$$

از روابط (۲) و (۷-الف) روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$\mathrm{d}\varepsilon^a = \frac{\sigma^e}{\sigma^a}\mathrm{d}\varepsilon^e \tag{۸}$$

$$\mathrm{d}\sigma^a = \frac{E^e E^P}{E^e + E^P}\mathrm{d}\varepsilon^a \tag{۹}$$

از رابطه (۸) نمو کرنش واقعی $\mathrm{d}\varepsilon^a$ و سپس از رابطه (۹) نمو تنش واقعی $\mathrm{d}\sigma^a$ محاسبه می‌شوند. معادلات (۸) و (۹) روش گلینکای نموی را بیان می‌کنند.

معادله (۳) معرف روش نیوبر نموی و رابطه زیر را نتیجه می‌دهد

$$\sigma^a\mathrm{d}\varepsilon^a + \frac{E^e E^P}{E^e + E^P}\varepsilon^a\mathrm{d}\varepsilon^a = \sigma^e\mathrm{d}\varepsilon^e + E^e\mathrm{d}\varepsilon^e.\varepsilon^e \tag{۱۰}$$

لذا

$$\mathrm{d}\varepsilon^a = \frac{\sigma^e + E^e\varepsilon^e}{\sigma^a + \frac{E^e E^P}{E^e + E^P}\varepsilon^a}\mathrm{d}\varepsilon^e \tag{۱۱}$$

از (۱۱) نمو کرنش واقعی و با کاربرد آن نمو تنش واقعی به دست می‌آید

$$\mathrm{d}\sigma^a = \frac{E^e E^P}{E^e + E^P}\mathrm{d}\varepsilon^a \tag{۱۲}$$

معادلات (۱۱) و (۱۲) روش نیوبر نموی را بیان می‌کنند.

حل تحلیلی معادلات فوق دشوار ولی حل عددی آن‌ها آسان می‌باشد. حل عددی، نیازمند روند و الگوریتمی است که بتوان فاصله هر نقطه از منحنی تنش-کرنش را از خط مرزی (پارامتر δ) محاسبه نمود. در بخش بعدی این روند ارائه می‌گردد.

۳- روند حل

تعیین فاصله هر نقطه از منحنی تنش-کرنش از خط مرزی، از پیچیدگی‌های مدل پلاستیسیته دوسطحی می‌باشد. برای محاسبه متغیرهای δ و δ_{in} معادله خط مرزی $\acute{X}X$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sigma = E_0^t\varepsilon + b \tag{۱۳}$$

پارامتر b عرض از مبدا و E_0^t مدول مماسی خط مرزی در دستگاه مختصات تنش-کرنش است. محل تقاطع خطی گذرنده از (σ, ε) روی منحنی تنش-کرنش و موازی خط الاستیک، از معادله زیر استخراج می‌شود

$$\sigma^* = \frac{E_0^t}{E^e - E_0^t}(E^e\varepsilon - \sigma) + \frac{bE^e}{E^e - E_0^t} \tag{۱۴}$$

لذا فاصله نقطه مزبور از خط مرزی برابر است با

$$\delta = \sigma^* - \sigma = \frac{E_0^t}{E^e - E_0^t}(E^e\varepsilon - \sigma) + \frac{bE^e}{E^e - E_0^t} - \sigma \tag{۱۵}$$

فاصله نقطه تسلیم σ_{yield} از خط مرزی $\acute{X}X$ (یعنی δ_{in}) از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\delta_{in} = \frac{bE^e}{E^e - E_0^t} - \sigma_{yield} \tag{۱۶}$$

با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در (۵)، مدول پلاستیک بدست می‌آید. سپس از روابط (۹) و (۱۱)، نمو تنش واقعی و از روابط (۸) و (۱۲) نمو کرنش واقعی حاصل می‌شود.

۴- صحت‌سنجی

۴-۱- خط مرزی

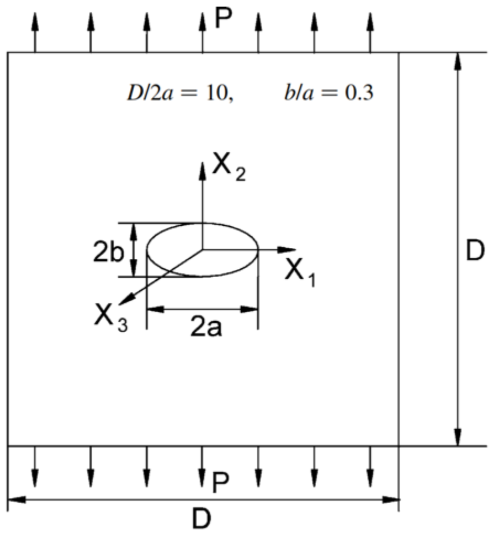
به منظور صحت سنجی مدل پیشنهادی، مطابق شکل ۳، یک ورق همسانگرد با سوراخ بیضی شکل تحت بار تک‌محوره یک‌سویه P بررسی می‌شود. اضلاع ورق ۱۰ برابر قطر بزرگ سوراخ و نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ ۰/۳ می‌باشد. سطح ناچ عاری از تنش و مساله تنش‌صفحه‌ای در نظرگرفته می‌شود. لذا تنش در ریشه ناچ (روی سطح ناچ و انتهای قطر بزرگ سوراخ) تک محوره خواهد بود.

رفتار الاستوپلاستیک ورق با رابطه رامبرگ-آزگود زیر بیان می‌شود

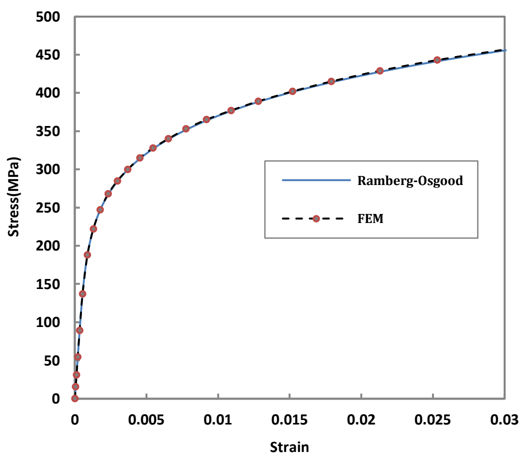
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n} \tag{۱۷}$$

که در آن $K = 850$ MPa، $n = 0.175$ و $E = 270$ GPa است [۱۸]. مدل‌سازی المان‌محدود ورق در آباکوس انجام می‌شود. به دلیل تقارن در هندسه، خواص ماده و بارگذاری، فقط یک چهارم ورق مدل‌سازی می‌شود. تمرکز تنش اطراف ناچ منجر به گرادیان تنش در این ناحیه شده و لذا استفاده از المان‌های مربعی مرتبه دوم اجتناب‌ناپذیر است. پس از بررسی همگرایی، به منظور صحت‌سنجی مدل المان محدود، پاسخ تنش-کرنش ریشه ناچ با رابطه رامبرگ-آزگود مقایسه می‌گردد. به دلیل تک‌محوره بودن تنش در ریشه ناچ، این پاسخ باید طبق رابطه رامبرگ-آزگود باشد. نتایج تنش-کرنش المان محدود و رابطه رامبرگ-آزگود، در شکل ۴ نشان داده‌شده است. همان‌طورکه ملاحظه می‌گردد، نتایج برهم منطبق بوده و لذا صحت مدل‌سازی تایید می‌گردد. لازم به ذکر است بارگذاری دور دست ۱۹۵ MPa و بیشینه کرنش در ریشه ناچ ۰/۰۳ می‌باشد.

اولین گام در مدل دوسطحی دافالیاس-پوپوف تعیین خط مرزی است. همان‌طور که ذکر شد خط مرزی، خطی است که منحنی تنش-کرنش به این خط به طور مجانبی همگرا می‌شود. چگونگی رسم این خط نامشخص و یک چالش است. در مسائلی که منحنی تنش-کرنش به صورت



شکل ۳- ورق با سوراخ بیضی شکل تحت بار یک‌سویه [۱۸]



شکل ۴- منحنی تنش-کرنش ریشه ناچ در ورق با سوراخ بیضی شکل تحت بار دوردست ۱۹۵ MPa

چندخطی است، خط مرزی روی آخرین خط از منحنی تنش-کرنش قرار دارد. در حالت خاص دوخطی، خط مرزی مطابق با خطی است که ناحیه پلاستیک را بیان می‌کند. در مساله حاضر رفتار ماده با معادله رامبرگ-آزگود بیان می‌شود. این معادله از لحاظ ریاضی مجانبی ندارد. اما می‌توان خط مرزی را برای کرنش محدودی درنظر گرفت که در این حالت خط مرزی، بر منحنی تنش-کرنش در این کرنش محدود مماس خواهد بود. در متن حاضر، به بازه کرنش صفر تا این کرنش محدود، محدوده کرنش گفته می‌شود.

چهار کرنش محدود ۰/۰۳، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۵ درنظر گرفته می‌شود. شکل ۵ خطوط مرزی مختلف در محدوده کرنش-های متناظر ۰/۰۳، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۵ را نشان می‌دهد. این خطوط در انتهای محدوده کرنش بر منحنی تنش-کرنش، مماس می‌باشند. در جدول ۱ شیب خطوط مرزی (E_0^t) و عرض از مبدا آن (b) در محدوده کرنش‌های مختلف درج شده است.

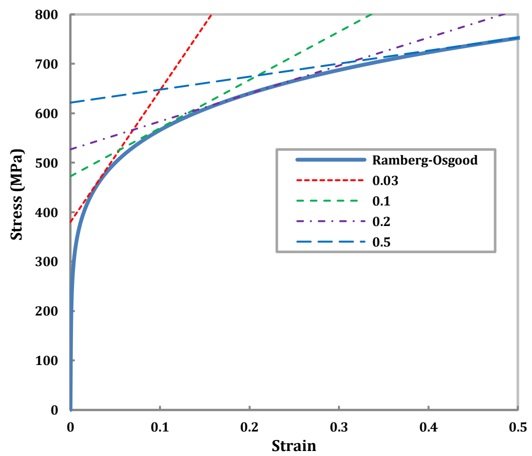
با توجه به اینکه در محدوده کرنش‌های مختلف، خطوط مرزی متفاوتی وجود دارد، لذا دقت مدل دافالیاس-پوپوف به محدوده کرنش وابسته است. این موضوع در شکل ۶ نمایش داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۶ مشهود است، خطای مدل دافالیاس-پوپوف نسبت به رابطه رامبرگ-آزگود، به ازای خط مرزی رسم شده در محدوده‌های ۰/۰۳، ۰/۱ و ۰/۲ ناچیز می‌باشد. درصد خطای نسبی تنش بیشینه در جدول ۱ آمده است. جدول ۱ نشان می‌دهد که اختلاف نسبی تنش بیشینه مدل دافالیاس-پوپوف و رابطه رامبرگ-آزگود به ازای خط مرزی رسم شده در محدوده کرنش ۰/۵، برابر با ۸/۵ درصد می‌باشد. اگرچه این مقدار خطا نسبتا قابل قبول است، اما لازم به ذکر است که کرنش ۰/۵، یعنی کرنش ۵۰ درصد، کرنش بسیار بزرگی است و در اکثر مسائل مهندسی، مقادیر کرنش کمتر از ۲۰ درصد می‌باشد و می‌توان از وابستگی مدل دافالیاس-پوپوف به خط مرزی صرفنظر کرد.

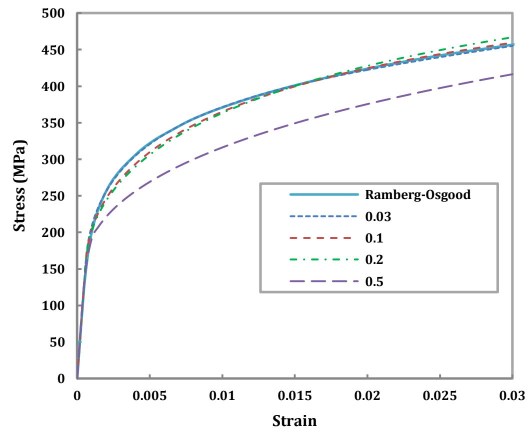
در مسائلی که هیچ‌گونه تخمینی از محدوده کرنش وجود ندارد، پیشنهاد می‌شود که ابتدا خط مرزی در یک محدوده کرنش بزرگ رسم شود. سپس نتایج تحلیل بررسی و بیشینه مقدار کرنش به‌دست آید. با انجام این‌کار محدوده کرنش مورد نیاز برای رسم خط مرزی و تحلیل مساله به‌دست می‌آید. سپس لازم است که خط مرزی بر اساس محدوده کرنش به‌دست آمده اصلاح و تحلیل تکرار گردد. رسم دوباره خط مرزی و تکرار تحلیل مساله، از جمله مشکلات مدل دافالیاس-پوپوف است. البته این موضوع به دلیل عدم وجود مجانب در معادله رامبرگ-آزگود رخ می‌دهد در حالی‌که در بیشتر مواد، این مجانب به طور فیزیکی در منحنی تنش-کرنش واقعی مشاهده و نیازی به ترسیم دوباره خط مرزی و تکرار تحلیل مساله نخواهد بود.

جدول ۱- مقادیر عرض از مبدا، شیب خط مرزی و درصد خطای تنش بیشینه مدل دافالیاس-پوپوف نسبت به رابطه رامبرگ-آزگود در محدوده کرنش‌های متفاوت

محدوده کرنش	۰/۰۳	۰/۱	۰/۲	۰/۵
b (MPa)	۳۸۰	۴۷۲	۵۲۷	۶۲۱
E_0^t (MPa)	۲۶۶۲	۹۷۵	۵۶۵	۲۶۳
خطای نسبی (٪)	۰/۰۰۱	۰/۰۸	۲/۴	۸/۵



شکل ۵- خطوط مرزی در محدوده کرنش‌های مختلف ۰/۰۳، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۵



شکل ۶- پیش‌بینی مدل دافالیاس-پوپوف به ازای خط مرزی در محدوده کرنش‌های مختلف (پیش‌بینی مدل به ازای خطوط مرزی در محدوده کرنش‌های ۰/۰۳، ۰/۱ و ۰/۲ تقریباً یکسان است)

۴-۲- پارامتر شکل

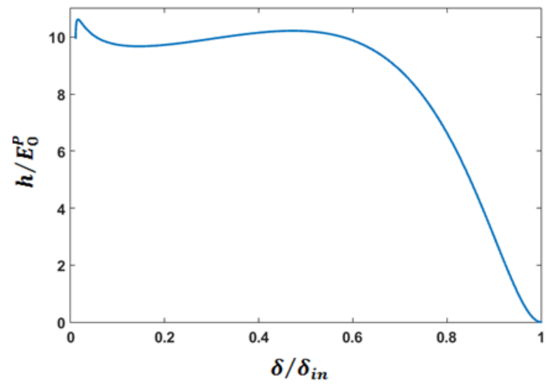
تعیین پارامتر h رابطه (۶) یکی دیگر از چالش‌های استفاده از مدل دافالیاس-پوپوف است. در مرجع [۲۱] پیشنهاد شده که از نقاط $0.1 < \delta/\delta_{in} < 0.5$ برای تعیین پارامتر h استفاده شود. دلیل این پیشنهاد در ادامه مشخص می‌شود. برای این منظور، پارامتر h در نقاط مختلف حساب و اثر آن روی پیش‌بینی مدل دافالیاس-پوپوف بررسی می‌شود. شکل ۷ منحنی تغییرات پارامتر بی‌بعد h/E_0^P را برحسب δ/δ_{in} را نشان می‌دهد.

در بازه $0 < \delta/\delta_{in} < 0.1$ و $0.5 < \delta/\delta_{in} < 1$ تغییرات h/E_0^P زیاد است. لذا انتخاب نقاطی از منحنی تنش-کرنش در این بازه توصیه نمی‌شود. یادآوری می‌شود که منحنی شکل ۷ برای تمامی مواد برقرار و مستقل از رفتار تنش-کرنش می‌باشد.

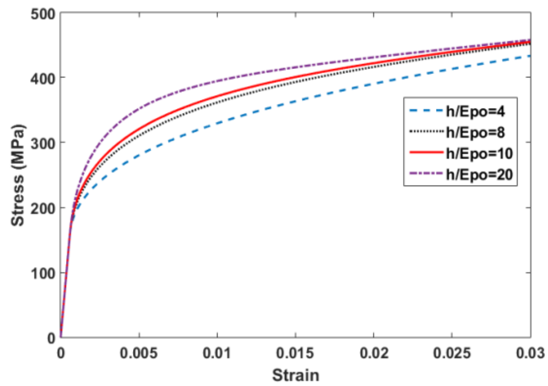
شکل ۸ اثر مقادیر مختلف h بر منحنی تنش-کرنش را نشان می‌دهد. منحنی‌ها به ازای مقادیر $h/E_0^P = 4,8,10,20$ رسم شده‌اند. ملاحظه می‌شود که اثر پارامتر بی بعد h/E_0^P بر منحنی تنش-کرنش به ازای مقادیر بین ۸ الی ۱۰ نسبتا کم می‌باشد. این مقادیر متناظر با $\delta/\delta_{in} = 0.1$ و $\delta/\delta_{in} = 0.7$ است. اما همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود تغییرات پارامتر h به‌ازای نقاط درون بازه $0.1 < \delta/\delta_{in} < 0.5$ کمتر از ۵ درصد است و می‌توان از اثر این تغییرات بر منحنی تنش-کرنش صرف نظرکرد.

۴-۳- کاربرد روش در حل یک مثال

در این بخش، نتایج حاصل از کوپل روش‌های گلینکای نموی و نیوبر نموی با مدل دافالیاس-پوپوف (معادلات (۸) و (۹) روش گلینکا نموی و معادلات (۱۱) و (۱۲) نیوبر نموی)، ارائه می‌گردد. این نتایج از نمونه شکل ۳ حاصل شده‌اند. شکل ۹ و شکل ۱۰ به‌ترتیب تنش σ_{22}^a و کرنش ε_{22}^a ریشه ناچ را برحسب بار دوردست، با استفاده از روش چگالی انرژی کرنشی نموی و نیوبر نموی نشان می‌دهند. پیش بینی بیش از مقدار واقعی روش نیوبر و پیش‌بینی کمتر از مقدار واقعی روش گلینکا در شکل ۹ و ۱۰ مشهود است. روش‌های تخمینی فقط در مسائلی که ابعاد ناحیه پلاستیک اطراف ناچ کوچک باشد، دقت قابل قبولی دارند. با افزایش و بزرگ شدن ناحیه پلاستیک، دقت این روش‌ها کاهش می‌یابد.



شکل ۷- تغییرات پارامتر بی‌بعد h/E_0^P برحسب δ/δ_{in}

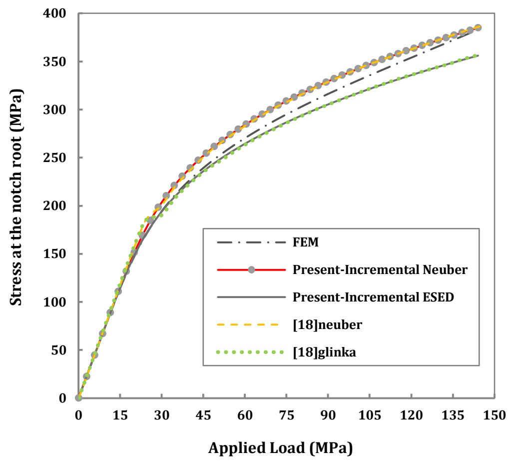


شکل ۸- اثر مقادیر مختلف h/E_0^P بر منحنی تنش-کرنش

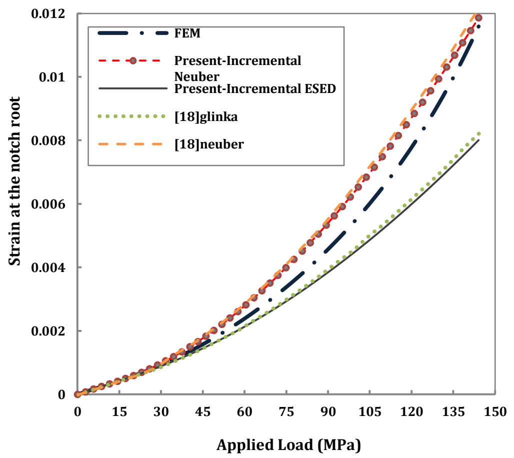
شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان می‌دهند که با افزایش بار دوردست، اختلاف بین تنش (کرنش) پیش‌بینی شده از روش‌های نیوبر و گلینکا نموی با تنش (کرنش) به‌دست آمده از روش عددی، افزایش می‌یابد. هم‌چنین این شکل‌ها نشان می‌دهند که پیش‌بینی معادلات (۱۱) و (۱۲) (نیوبر نموی) نسبت به معادلات (۸) و (۹) (گلینکای نموی) دقت بیشتری دارد. علاوه بر این در شکل‌های ۸ و ۹ نتایج روش نیوبر نموی، گلینکای نموی و عددی [۱۸] آمده است.

جدول ۲ درصد اختلاف تنش و کرنش ریشه ناچ روش‌های مختلف، نسبت به مقادیر متناظر آن‌ها از روش المان محدود را نشان می‌دهد. این جدول بیان کمی شکل‌های ۹ و ۱۰ است. از مقایسه داده‌های موجود در این جدول می‌توان نتیجه گرفت که روش نیوبر نموی حاضر نسبت به روش گلینکا نموی حاضر، دقت بالاتری دارد. اگرچه بین نتایج روش‌های پیشین و روش‌های حاضر تفاوت چندانی مشاهده نمی‌شود، اما سادگی روش حاضر در معادلات حاکم

و خصوصاً کدنویسی، مزیت آن نسبت به روش‌های پیشین است.



شکل ۹- منحنی تنش ریشه ناچ برحسب بار دوردست



شکل ۱۰- منحنی کرنش ریشه ناچ برحسب بار دوردست

جدول ۲- درصد اختلاف تنش و کرنش روش‌های مختلف نسبت به المان محدود برحسب بار دوردست

بار دوردست	۱۰۰(MPa)		۱۲۰(MPa)		۱۴۵(MPa)	
	σ_{22}^{a}	ε_{22}^{a}	σ_{22}^{a}	ε_{22}^{a}	σ_{22}^{a}	ε_{22}^{a}
نیوبر نموی (حاضر)	۵/۶	۱۴	۱/۶	۱۲	۰/۶	۴/۲
گلینکا نموی (حاضر)	۲/۱	۱۸	۸/۵	۲۶	۷/۵	۳۱
نیوبر [۱۸]	۵/۶	۱۶	۱/۶	۱۴	۰/۶	۵/۸
گلینکا [۱۸]	۲/۱	۱۹	۸/۵	۲۰	۷/۵	۳۰

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش تخمینی جدیدی بر پایه مدل پلاستیسیته دافالیاس-پوپوف ارائه گردید. به منظور صحت‌-سنجی روش، یک ورق همسانگرد با سوراخ بیضی شکل تحت بار تک‌محوره یک‌سویه، مورد مطالعه قرار گرفت. روش جدید نسبت به روش‌های پیشین ساده‌تر و حجم محاسباتی کمتری دارد و دقت آن نسبت به روش‌های پیشین اندکی بیشتر است. در استفاده از مدل دافالیاس-پوپوف چالش‌هایی وجود دارد. یکی از این چالش‌ها اثر خط مرزی بر پیش‌بینی مدل است. نتایج نشان می‌دهد که برای محدوده کرنش کمتر از ۲۰ درصد، می‌توان از این اثر صرفنظر کرد. چالش دیگر، تعیین پارامتر شکل می‌باشد. پارامتر شکل تابعی از δ و δ_{in} است. مشاهدات نشان می‌دهد بازه بهینه برای محاسبه پارامتر شکل، $0.1 \leq \delta/\delta_{in} \leq 0.5$ است. در این بازه می‌توان از اثر پارامتر شکل بر پیش‌بینی مدل دافالیاس-پوپوف، صرفنظر کرد. در روش جدید، مدل پلاستیسیته دافالیاس-پوپوف با روش نیوبر نموی و گلینکای نموی کوپل شده است. نتایج نشان می‌دهد روش نیوبر نموی نسبت به روش گلینکا نموی، دقت بیشتری دارد.

۶-منابع

[1] Neuber H (1961) Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. J of Appl Mech 28(4): 544-550

[2] Conle A, Nowack H (1977) Verification of a Neuber-based notch analysis by the companion-specimen method. Exp Mech 17(2): 57-63.

[3] Molski K, Glinka G (1981) A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root. Mat Science and Eng 50(1): 93-100.

[4] Barkey ME (1993) Calculation of notch strains under multiaxial nominal loading [PhD Dissertation]. Urbana, IL: University of Illiois at Urbana-Champaign.

[5] Singh M, Glinka G, Dubey R (1996) Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading. Int J of Fract 76(1): 39-60.

[6] Ye D, Hertel O, Vormwald M (2008) A unified expression of elastic–plastic notch stress–strain calculation in bodies subjected to multiaxial cyclic loading. Int J of Solids and Structures 45(24): 6177-6189.

[7] Ince A, Glinka G (2013) A numerical method for elasto-plastic notch-root stress–strain analysis. The J of Strain Anal for Eng Design 48(4): 229-244.

[8] Jianhui L, Shengnan W, Wuyin J, Wen G (2014) A modified method for calculating notch-root stresses and strains under multiaxial loading. Advances in Mech Eng 6: 513804.

[9] Campagnolo A, Berto F, Marangon C (2016) Cyclic plasticity in three-dimensional notched components under in-phase multiaxial loading at R=−1. Theo and Appl Fract Mech 81: 76-88.

[10] Meggiolaro MA, de Castro JTP, Martha LF (2016) A unified rule to estimate multiaxial elastoplastic notch stresses and strains under in-phase proportional loadings. Frattura ed Integrità Strutturale 10(38): 128-134.

[11] Meggiolaro MA, de Castro JTP, Martha LF, Marques LF (2017) On the estimation of multiaxial elastoplastic notch stresses and strains under in-phase proportional loadings. Int J of Fatigue 100: 549-562.

[12] Meggiolaro MA, de Castro JTP, de Oliveira Góes RC (2016) Elastoplastic nominal stress effects in the estimation of the notch-tip behavior in tension. Theo and Appl Fract Mech 84: 86-92.

[13] Li J, Zhang ZP, Li CW (2017) Elastic-plastic stress-strain calculation at notch root under monotonic, uniaxial and multiaxial loadings. Theo and Appl Fract Mech; 92: 33-46.

[14] Ince A, Bang D (2017) Deviatoric Neuber method for stress and strain analysis at notches under multiaxial loadings. Int J of Fatigue 102: 229-240.

[15] Li J, Zhang ZP, Li CW (2017) A coupled Armstrong-Frederick type plasticity correction methodology for calculating multiaxial notch stresses and strains. J of Failure Anal and Prevention 17(4): 706-716.

[16] Makhutov NA, Reznikov DO (2019) Generalization of Neuber’s rule for the assessmnet of local stresses and strain in stress concentration zones for a wide range of applied strains. Proc Struct Integrity 14: 199-206.

[17] Makhutov NA, Reznikov DO (2019) Assessmnet of local stresses and strain in notched components subjected to extreme loading. Proc Struct Integrity 22: 93-101.

[18] Sethuraman R, Gupta SV (2004) Evaluation of notch root elastoplastic stress-strain state for general loading using an elastic solution. Int J of Pres Vessels and Piping 81(4): 313-25.

[19] Roostaei A, Ling Y, Jahed H, Glinka G (2020) Application of Neuber’s and Glinka’s notch plasticity correction rules to asymmetric magnesium alloys under cyclic load. Theo and Appl Fract Mech 105: 102431.

[20] Khan A, Huang S (1995) Continuum theory of plasticity. John Wiley and Sons.

[21] Dafalias Y, Popov E (1975) A model of nonlinearly hardening materials for complex loading. Acta mechanica 21(3): 173-192.

[22] Dafalis Y (1975) On cyclic and anisotropic plasticity. 1: A general model including material behavior under stress reversals. 2: Anisotropic hardening for initially orthotropic materials [PhD. Dissertation]. Berkely: University of California.