



DOR:

تحلیل ارتعاش آزاد تیر هدفمند ترک‌دار عرضی با استفاده از تئوری‌های تیموشنکو و مرتبه بالای برشی

کرامت ملک‌زاده فرد^۱، علیرضا پورموید^{۲*} و علیرضا رحیمی^۳

^۱ استاد، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء (ص)، تهران

^۳ کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳

چکیده

در این پژوهش، تحلیل دینامیکی تیر ضخیم هدفمند مرکب با وجود ترک عرضی به کمک تئوری تیموشنکو و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات بنیادی و شرایط مرزی تیر هدفمند مرکب و ضخیم با استفاده از تئوری‌های تیموشنکو، ردی و همچنین اصل کمینه‌سازی انرژی سیستم به دست آمده است. فرض شده است، خواص مکانیکی غیر همگن تیر به صورت تابعی از ضخامت به صورت تابع توانی باشد که در آن ضخامت تیر متغیر است؛ همچنین شرایط مرزی دوسرگیردار در نظر گرفته شده است. با توجه به این شرایط، جواب فرم بسته برای فرکانس‌های طبیعی تیر هدفمند مرکب با وجود ترک به دست آمده است. در ادامه نتایج مورد تحلیل قرار گرفته و با نتایج سایر پژوهش‌ها و نرم‌افزار آباکوس مورد صحت‌سنجی قرار گرفت. در نهایت نتایج نشان داد که درصد بهبود جواب حاصل از تئوری مرتبه سوم برشی ردی نسبت به تئوری تیموشنکو برای تیر ضخیم حدود ۲۴ درصد است و برای تیر نازک جواب‌ها به هم نزدیک می‌شوند.

کلمات کلیدی: تیر هدفمند مرکب؛ ترک؛ تئوری مرتبه بالای تیر؛ ارتعاش.

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beam with Transverse Crack Using Timoshenko and Higher order Shear Deformation Theory

K. Malekzadeh Fard¹, A.R. Pourmoayed^{2*}, A.R. Rahimi¹

¹ Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

² Department of Mechanical Engineering, Khatmol Anbia Air Defense, Tehran, Iran.

Abstract

In this research, the dynamic analysis of composite functionally graded thick beam despite transverse cracking with the help of Timoshenko theory and higher - order shear deformation theory has been studied. The governing equations and boundary conditions for composite functionally graded beam and thick using Timoshenko and Reddy theories and also, the principle of system energy minimization has been obtained. It is assumed that the inhomogeneous mechanical properties of the beam as a function of thickness as a function of power in which the thickness of the beam is variable. The boundary condition as clamp-clamp are also considered. According to these conditions, the closed form solution for natural frequencies of composite functionally graded beam despite the crack is obtained. Then, the results were analyzed and by those published in the literature and with the finite element results obtained by ABAQUS are validated. Finally, the results showed that the percentage of improvement of the answer obtained from Reddy's third order shear theory compared to Timoshenko's theory for thick beam is about 24% and for thin beam the answers are close.

Keywords: Composite Functionally Graded Beam, Crack; Higher Order Beam Theory; Vibration.

۱- مقدمه

تیر یکی از اجزای سازه‌ای اصلی است که حوزه کاربردهای آن بسیار گسترده است. سازه‌ها در هوافضا، ماهواره‌ها، لوله‌های اسلحه، بازوهای ربات و کارهای ساختمانی مختلف مانند، ساختمان‌ها، پل‌ها و غیره از نظر هندسه پیچیده هستند و نیز در معرض بارگذاری‌های پیچیده متنوعی هستند؛ بنابراین، برای ساده کردن فرآیند تحلیل، این سازه‌ها می‌توانند به صورت ترکیبی از تیرهای گوناگون با شکل‌ها و اندازه‌های مختلف مدل‌سازی شوند. وجود نقص مانند ترک یا ناچ به دلیل آسیب‌های ساخت، خوردگی محیطی و یا استفاده‌های نابجا می‌تواند سبب افت استحکام و کاهش سفتی سازه شود. از جمله کاربردهای تیرهای پوشش-کاری شده هدفمند در نزدیکی موتورهای جت و مناطق حرارتی است. این تیرک‌ها وظیفه نگهداری موتور و یا کارکرد در سیستم‌های کنترل موتور است. بدیهی است وجود نقص مانند ناچ حاصل از خوردگی می‌تواند خسارات جبران‌ناپذیری را ایجاد کند؛ لذا مدل‌سازی دینامیکی این گونه مسائل بسیار کاربردی و مهم است.

آسیب به شکل ترک در یک سازه به‌طور کلی سبب افزایش محلی انعطاف‌پذیری می‌شود که رشد ترک را در پی دارد. علاوه بر این، ترک سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی ارتعاش شده و بر شکل‌های مود طبیعی اثر می‌گذارد. وجود ترک‌ها در یک جز سازه‌ای گاهی اوقات منجر به خرابی فجیعی می‌شود. برای تشخیص اولیه و موضع‌یابی ترک‌ها، نظارت بر سلامت سازه در دهه‌های اخیر مورد توجه بررسی‌های مختلفی بوده است. این تکنیک‌های نظارت بر سلامت سازه، اطلاعاتی از عمر متوسط^۱ سازه‌ها فراهم می‌کند و به طور هم‌زمان خرابی سازه را تشخیص داده و موقعیت‌یابی می‌کند.

تشخیص آسیب، موقعیت‌یابی و ارزیابی شرایط سازه‌ها همواره حوزه‌های مهم تحقیقاتی بوده‌اند. پاسخ دینامیکی خطی و غیرخطی تیرهای دارای ترک، توسط تعدادی از محققان در دهه‌های اخیر با تکنیک‌های مختلفی بررسی شده

است. از میان مقالات بی‌شمار، برخی از این تحقیقات در زیر ارائه شده‌اند که برای اجرای این کار پژوهشی مفید هستند. اورهان^۲ [۱] در سال ۲۰۰۷، تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری یک تیر دارای ترک را جهت شناسایی ترک در تیر یکسر آزاد مطالعه کرد. در این تحقیق ترک‌های یک لبه و دو لبه مورد ارزیابی قرار گرفتند. او نشان داد که پاسخ دینامیکی ارتعاش اجباری، تغییرات عمق و موقعیت ترک را بهتر از ارتعاش آزاد توصیف می‌کند.

آیدوگدو^۳ و تاسکین^۴ [۲] در سال ۲۰۰۷، ارتعاش آزاد تیر هدفمند با تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند. مدول یانگ تیر در جهت ضخامت بر اساس تابع توانی و تابع‌نمایی تغییر می‌کند. معادلات حاکم با اعمال اصل همپلتون به دست آمدند. روش حل ناویر برای به دست آوردن فرکانس‌ها استفاده شده است.

یانگ^۵ و همکارانش [۳] در سال ۲۰۰۸، یک مطالعه تحلیلی روی ارتعاش آزاد و اجباری تیرهای غیرهمگن اولر-برنولی دارای ترک‌های لبه‌ای باز انجام دادند. این تیر در معرض یک نیروی فشاری محوری و یک بارگذاری عرضی متمرکز است که در امتداد جهت طولی حرکت می‌کند. مدل فنر پیچشی برای مدل‌سازی ترک استفاده می‌شود که سبب انعطاف‌پذیری مقطعی می‌شود. پاسخ اجباری با به کار گرفتن تکنیک بسط سری مودال تعیین شده است.

سینا و همکاران [۴] در سال ۲۰۰۹، یک تئوری تیر جدید متفاوت از تئوری تیر با تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای هدفمند ارائه کردند. آن‌ها فرض کردند که ویژگی‌های تیر در ضخامت تیر با پیروی از یک توزیع با تابع سری توانی ساده بر حسب نسبت حجمی اجزاء اصلی ماده تغییر می‌کنند؛ هم‌چنین با فرض تنش نرمال عرضی صفر، معادلات حرکت حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده‌اند. شرایط مرزی مختلف بررسی و مقایسه بین تئوری‌های تیر مختلف انجام گردیده است. به علاوه، اثرات

² Orhan³ Aydogdu⁴ Taskin⁵ Yang¹ Life Expectancy

می‌شود. توابع آزمایشی نشان‌دهنده انحرافات محوری، عرضی و چرخش مقاطع تیر در شکل‌های چندجمله‌ای بیان می‌شوند. شرایط قیدی تکیه‌گاه‌ها با استفاده از ضرایب لاگرانژ در نظر گرفته می‌شود.

رضایی و شاطریان القلندیس [۱۰] در سال ۲۰۲۰، در مطالعه‌ای پاسخ تحلیل ارتعاش تیر ترک‌دار با معادلات حرکت چند مودی کوپل را بررسی کردند. نتایج آنان نشان داد که با تحریک صرفاً در مود اول، مؤلفه‌های هارمونیک پاسخ ارتعاشی اطلاعات بسیار محدودی در مورد ترک ارائه می‌دهد، درحالی‌که با تحریک هم‌زمان مودهای بالاتر، مؤلفه‌های هارمونیک متعددی به علت وجود ترک در پاسخ ارتعاشی ایجاد می‌شوند که حساسیت زیادی به ترک دارند و از تحلیل آن‌ها اطلاعات دقیقی در مورد موقعیت و عمق ترک حاصل می‌شود.

رسائی و حسن‌نژاد [۱۱] در سال ۲۰۱۱، یک روش جدید برای تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر با ترک تنفسی بر مبنای روش تعادل انرژی مکانیکی ارائه کردند. آن‌ها پدیده باز و بسته شدن ترک را به صورت یک ترک خستگی مدل کردند. تغییرات سفتی محلی در موقعیت ترک در نظر گرفته می‌شود که یک تابع غیرخطی وابسته به دامنه است و فرض می‌شود که در طی یک نیم سیکل، فرکانس‌ها و شکل‌های مود تیر به طور پیوسته با زمان تغییر می‌کند.

یان^۴ و یانگ^۵ [۱۲] در سال ۲۰۱۱، یک مطالعه تحلیلی روی ارتعاش خمشی اجباری تیرهای هدفمند با ترک‌های لبه باز تحت بار ترکیبی بررسی کردند که تحت یک نیروی فشاری محوری و یک بار عرضی متمرکز قرار دارند و در امتداد جهت طولی حرکت می‌کند. بخش دارای ترک به عنوان یک فنر پیچشی مدل‌سازی می‌شوند که انعطاف‌پذیری مقطعی از طریق مکانیک شکست محاسبه می‌شود. پاسخ ارتعاش اجباری با به کار گرفتن تکنیک بسط سری مودال تعیین می‌شود.

خورشیدی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۶، در مطالعه‌ای دیگر، تأثیرات محیط حرارتی بر ارتعاش آزاد

شرایط مرزی، نسبت حجمی و تغییر شکل برشی بر فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود بررسی شده است. بخششی و همکاران [۵] در سال ۲۰۱۸، ارتعاش آزاد ورق قطاعی تابعی مدرج دو بعدی کوپل با پیزوالکتریک بر مبنای تئوری مرتبه سوم تغییرشکل برشی مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری مورد بررسی قرار دادند.

کی^۱ و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۹، پاسخ پساکمانشی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند دارای یک ترک باز را بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو و سینماتیک غیرخطی ون کارمن مطالعه کردند. روش ریتز برای استخراج معادلات حاکم غیرخطی به کار گرفته شده است که با روش نیوتون-رافسون حل می‌شوند؛ همچنین اثر جفت شدن کشش-خمش نیز مطالعه شد.

کیتیپورنچای^۲ و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۹، تیر تیموشنکوی هدفمند را به صورت تیر دو تکه متصل شده به وسیله یک فنر پیچشی با فنریت کم مدل‌سازی کردند. با استفاده از روش ریتز که به وسیله فرآیند تکراری مستقیم دنبال می‌شود، فرکانس‌های غیرخطی اصلی به دست می‌آیند. اثر کوپل شدن کشش-خمش برای ماده‌ی هدفمند نشان می‌دهد که هیچ تأثیری بر مواد ایزوتروپیک ندارد.

خورشیدی و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۸، تحلیل کمانش میکرو صفحه مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده را بررسی کردند. آن‌ها تأثیر پارامترهای گوناگونی از قبیل نسبت طول به عرض، طول به ضخامت، و پارامتر مقیاس طول بر بار بحرانی کمانش بی‌بعد میکرو ورق تابعی مدرج مستطیلی را محاسبه کردند.

سیمسک^۳ [۹] در سال ۲۰۱۰، ارتعاش یک تیر هدفمند با تکیه‌گاه ساده را ناشی از یک جسم متحرک به وسیله‌ی تئوری‌های تیر اولر-برنولی، تیموشنکو و تغییر شکل برشی مرتبه سه، بررسی کردند. سیستم معادلات حرکت به وسیله استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج

^۱ Ke

^۲ Kitipornchai

^۳ Şimşek

^۴ Yan

^۵ Yan

کردن این کمبود و بیان اثرات ترک بر ارتعاش تیر ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند بررسی می‌شود.

۲- روابط حاکم بر مواد هدفمند

مواد هدفمند دسته‌ای از مواد مرکب پیشرفته است که چگونگی تغییرات مدول یانگ، چگالی و نسبت پواسون در یک المان در این دسته مواد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در مواد هدفمند خواصی مثل مدول الاستیسیته، ضرایب انبساط حرارتی و ضریب پواسون وابسته به مختصات می‌باشند. در بیشتر مواد هدفمند خواص مکانیکی تابع مختصات در جهت ضخامت یعنی z می‌باشند [۸]:

$$E = E(z), \rho = \rho(z), \nu = cte \quad (۱)$$

برای بیان خواص مواد هدفمند با استفاده از تابع توانی فرض می‌شود کسر حجمی یکی از مواد پایه ماده هدفمند از تابع توانی به صورت رابطه (۲) پیروی می‌کند [۸].

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^g \quad (۲)$$

که g اندیس توانی و h ضخامت ورق است. در صورتی که کسر حجمی ماده هدفمند به صورت $V(z)$ تعریف شود، آنگاه ویژگی‌های ماده هدفمند به صورت رابطه (۳) قابل بیان خواهد بود [۸]:

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V(z) + \rho_m \quad (۳)$$

که E_m مدول یانگ فلز و ρ_m چگالی فلز در سطح زیرین ورق و E_c و ρ_c مدول یانگ و چگالی سرامیک در سطح بالایی ورق $z = h/2$ است.

اما در مواد هدفمند جدید خواص مواد می‌تواند تابع x و y هم باشد. مثلاً در صنایع داروسازی و اتمی خواص ماده در طول لوله به علت مقاومت در برابر خوردگی و حرارت (با توجه به ورود ماده خورنده در مختصات $x=x_0$ از لوله)، لازم است، تغییر نماید. مواد هدفمند صفحه‌ای، فعلاً کاربردها در توسعه زیادی نیافته است و بیشتر تغییرات در جهت ضخامت مدنظر است و بیشتر کارهای انجام شده در حوزه مواد هدفمند x و y هم تئوری است. خواص مکانیکی این مواد به‌طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر یا از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و این تغییرات به وسیله تغییر تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آنها ایجاد می‌شود.

ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دوبعدی مستقر بر بستر پسترناک را مطالعه کردند. آن‌ها در این تحقیق برای محاسبه مقادیر فرکانس سازه، از روش ریلی-ریتر بر مبنای روش حدافل انرژی کل استفاده کردند.

ابراهیمی ممقانی و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۲۰، ارتعاشات ترمومکانیکی لوله‌های هدفمند محوری حاوی سیال را با هدف افزایش پایداری بررسی کردند. نتایج این مطالعه می‌تواند به مهندسان برای طراحی بهینه سیستم‌های لوله‌کشی ناهمگن کمک کند.

ژنگ^۱ و جی^۲ [۱۵] در سال ۲۰۱۲، یک تیر دارای ترک را به صورت یک تیر بدون ترک با بخش‌های ساده شده‌ی معادل حول ترک تحلیل کردند.

زهو^۳ و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۲۰ در تحقیقی تلاش کردند که ارتعاش نانولوله‌های هدفمند محوری^۴ چرخشی منتقل‌کننده مایعات تحت بارهای محوری بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیر محلی^۵ را بررسی نمایند.

وی^۶ و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۲، یک روش تحلیلی برای حل کردن ارتعاش آزاد تیرهای FGM دارای ترک با بارگذاری محوری با استفاده از مدل فنر پیچشی تعریف کردند. سپس بر اساس روش ماتریس انتقال، فرمول بازگشتی برای رسیدن به معادلات مقدار مشخصه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای FGM توسعه داده شد. آن‌ها نشان دادند که به دلیل کاهش مرتبه دترمینان، روش توسعه‌یافته برای حل تحلیلی مسئله ارتعاش آزاد تیرهای FGM دارای ترک، ساده‌تر و راحت‌تر است.

همان‌طور که اشاره شد، مدل‌های ارائه شده دارای محدودیت در بیان اثر ترک بر ارتعاش تیر ضخیم از جنس مواد هدفمند می‌باشند. دلیل این موضوع افزایش اثر پیچش سطح مقطع در تیرهای ضخیم است. در این مقاله از تئوری مرتبه بالای برشی ردی برای برطرف

¹ Zheng

² Ji

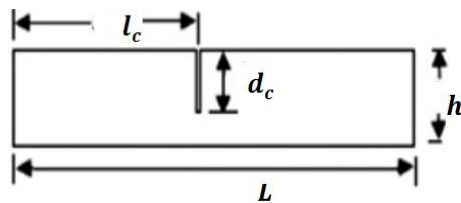
³ Zhu

⁴ Axially Functionally Graded (AFG)

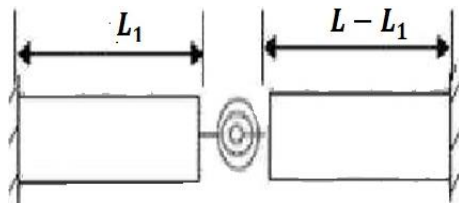
⁵ Nonlocal Strain Gradient Theory (NSGT)

⁶ Wei

ترک حالت دوم می‌تواند در مقایسه با شکستگی حالت اول صرف‌نظر شود؛ بنابراین ترک می‌تواند به عنوان تنها یک فنر پیچشی که اجازه می‌دهد تا یک ناپیوستگی در چرخش تنها در بخش ترک مدل‌سازی شده، در جابجایی عرضی و طولی مداوم در بخش ترک باقی بماند. در تجزیه و تحلیل تیر حاضر یک ترک عرضی باز به تیر دو تکه که توسط یک فنر پیچشی بدون جرم متصل شده که در شکل ۲ نشان داده شده، مدل شده است [۶].



شکل ۱- تیر دو سر گیردار دارای ترک با عمق d_c [۲۱]



شکل ۲- تیر ترک‌دار مدل شده با فنر پیچشی

ناپیوستگی در چرخش سبب انعطاف‌پذیرتر بودن تیر می‌شود. رابطه سفتی خمشی از معادله (۴) به دست می‌آید [۲۱].

$$K_t = \frac{1}{G} \quad (4)$$

که در آن G انعطاف‌پذیری به وجود آمده توسط ناپیوستگی در چرخش است. این انعطاف‌پذیری باید معادل انعطاف‌پذیری ایجاد شده ناشی از وجود ترک باشد تا مدل یک سازه واقعی را به وجود آورد که توسط تئوری مکانیک شکست محاسبه می‌شود [۲۱]:

$$G = \int_0^{\zeta} \frac{72 \pi (1 - \nu^2) \zeta F^2(\zeta)}{E (d_c) h^2} d\zeta \quad (5)$$

که در آن ν ، E ضریب پواسون و مدول الاستیسیته است. $F(\zeta)$ تابع نسبت عمق ترک $\zeta = \frac{d_c}{h}$ است که توسط کیتیورنچای و همکاران [۷] برای نسبت‌های مختلف تغییرات مواد ارائه شده است.

اکثر مواد هدفمند به‌طور معمول از دو ماده سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. با توجه به اینکه ماده ساختاری سرامیک ضریب انتقال حرارت پایین و مقاومت بالایی در برابر درجه حرارت دارد، می‌تواند حرارت بالا را تحمل کند و از طرفی، ماده ساختاری دیگر، یعنی فلز انعطاف‌پذیری مورد نیاز را فراهم می‌کند. قابل توجه است که به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی مشکلات عدم پیوستگی که در سازه‌های کامپوزیتی موجود است، در مواد هدفمند به وجود نمی‌آید [۱۸ و ۱۹].

از مصارف مواد هدفمند، پوشش‌های مقاوم به خوردگی و فرسایش که برای جابجایی سنگ‌های معدن ساینده و سنگین بکار می‌روند، مجراهای مبدل‌های حرارتی، ژنراتورهای ترموالکتریک (دما برقی)، اجزای ماشین‌های حرارتی، صفحات منتشرکننده حرارت، هواضا و صنعت مدار کامپیوتر به این امکان مواد علاقه‌مند است که می‌توانند در برابر گرادیان‌های گرمای بسیار بالایی مقاومت کنند. از مصارف دیگر مواد هدفمند می‌توان به کاربرد آنها در سنسورها، سپرهای مغناطیسی، فن‌آوری هسته‌ها (محفظه‌های نگهدارنده مقاوم به دماهای فوق‌العاده زیاد پلاسما در هم‌جوشی هسته‌ای) اشاره کرد. این مواد حتی در زیست فن‌آوری (بیو تکنولوژی در استخوان‌ها و دندان‌های مصنوعی) هم کاربرد دارند [۲۰].

۳- مدل‌سازی ترک عرضی

کار حاضر بر اساس فرضیه تیر تیموشنکو و تئوری مرتبه بالا برشی است. در تجزیه و تحلیل ارتعاشی کار حاضر یک تیر دارای ترک عرضی با تئوری تیموشنکو و ردی مطرح شده است. فرض بر این است که ترک باز باشد. اثر غیرخطی هندسی ترک با روش تکرار و آزمایش تعیین می‌شود.

شکل ۱ یک تیر ترک‌دار با ترک عرضی باز از عمق a در یک فاصله از انتها گیردار شده است. طول و عمق تیر به ترتیب L و h است.

فنر پیچشی منجر به یک گسستگی در چرخش در بخش ترک می‌شود، درحالی‌که فنر کششی منجر به گسستگی در جابجایی عرضی در بخش ترک می‌شود. نویسندگان مختلف در طرح‌های مختلف نشان داده‌اند که به ترک مد دوم اثرات بسیار کمتری به انرژی کل سیستم دارد، به طوری که سهم

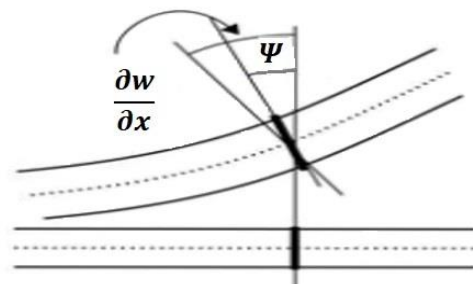
به عنوان نمونه برای $K=5$:

$$F(\zeta) = 0.650 - 0.859\zeta + 12.511\zeta^2 - 72.627\zeta^3 + 267.910\zeta^4 - 535.236\zeta^5 + 545.139\zeta^6 - 211.706\zeta^7 \quad (۶)$$

۴- مدل سازی ارتعاش سازه

۴-۱- تئوری تیموشنکو و استخراج معادلات حاکم

با توجه به تئوری تیر تیموشنکو، شیب کل $(\frac{\partial W}{\partial x})$ به دو قسمت تقسیم می‌شود؛ قسمت اول شامل دوران ناشی از خمش Ψ و قسمت دوم ناشی از تغییر شکل برشی است که در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳- خمش تیر تیموشنکو [۲۲]

روابط جابجایی، تنش و کرنش برای تیر تیموشنکو به صورت زیر است [۷]:

$$U(x, z, t) = U(x, t) + z\{\Psi(x, t)\} \quad (۷)$$

$$W(x, z, t) = W(x, t)$$

که عبارت $U(x, t)$ ، $W(x, t)$ و $\Psi(x, t)$ به ترتیب نشان‌دهنده فشردگی طولی، جابجایی عرضی و دورانی لایه میانی در مختصات مکان و زمان است.

$$\epsilon_x = \frac{\partial W}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (۸)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \Psi \quad (۹)$$

که ϵ_x و γ_{xz} کرنش عمودی و کرنش برشی است [۲۱].

$$\sigma_{xx} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (۱۰)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \Psi \right) \quad (۱۱)$$

همچنین σ_{xx} و γ_{xz} تنش عمودی و تنش برشی است.

۴-۱-۱- معادلات انرژی تیر تیموشنکو

با استفاده از معادلات (۷) تا (۱۱) معادلات جنبشی و پتانسیل تیر ترک‌دار هدفمند به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۱]:

$$PE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \left(\epsilon_x^2 + \frac{1 - \nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right) dz dx \quad (۱۲)$$

$$KE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) dz dx \quad (۱۳)$$

به دلیل وجود ترک، معادلات انرژی دارای ناپوستگی هستند، به همین منظور ابتدا می‌بایست معادلات را برای دو قسمت قبل و بعد ترک نوشت و سپس به دلیل اینکه ترک تیر را به دو قسمت مجزا تقسیم می‌کند، دو مختصات برای جهت طولی قسمت چپ و راست تیر در نظر گرفته می‌شود. هر دو قسمت تیر پس از بی‌بعد کردن معادلات با کمک روابط زیر به صورت مجزا حل می‌شوند (شکل ۴).

$$\zeta = \frac{x}{l_c}, \quad \eta = \frac{x - l_c}{L - l_c} \quad (۱۴)$$

$$u = \frac{U}{h}, \quad w = \frac{W}{h}, \quad \psi = \Psi, \quad \alpha = \frac{l_c}{h}$$

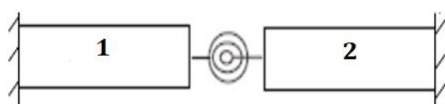
$$\alpha_1 = \frac{L - l_c}{h}$$

$$\omega = \sqrt{l_c(L - l_c) \frac{M_1}{K_1}}, \quad \beta = \frac{L - l_c}{l_c} \quad (۱۵)$$

$$\{m_3 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_4\} = \left\{ \frac{M_3}{M_1 h^2} \cdot \frac{K_3}{K_1 h^2} \cdot \frac{K_2}{K_2 h^2} \cdot \frac{K_4}{K_1} \right\} \quad (۱۶)$$

با استفاده از بی‌بعدسازی فوق عبارت‌های انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$KE = \frac{\omega^2}{2} \int_0^1 (u_1^2 + 2m_2 u_1 \psi_1 + m_3 \psi_1^2 + w_1^2) d\zeta + \beta \int_0^1 (u_2^2 + 2m_2 u_2 \psi_2 + m_3 \psi_2^2 + W_2^2) d\zeta \quad (۱۷)$$



$$\xi = 0 \quad \xi = 1 \quad \eta = 0 \quad \eta = 1$$

شکل ۴- تیر در مختصات بی‌بعد و فنر پیچشی [۲۱]

معادلات جنبشی و پتانسیل تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$PE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-v^2} \left(\varepsilon_x^2 + \frac{1-v}{2} \gamma_{xz}^2 \right) dz dx \quad (۲۲)$$

$$KE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) dz dx \quad (۲۳)$$

پارامترهای سفتی و اینرسی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-v^2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

$$\{K_7, K_8, K_9\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+v)} (1, z^2, z^4) dz$$

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (۲۴)$$

همانند تئوری تیموشنکو، انرژی جنبشی بیشینه تیر دارای ترک طبق تئوری مرتبه سوم برشی ردی را ابتدا می‌بایست نوشت و سپس هر دو قسمت تیر پس از بی‌بعد کردن معادلات با کمک روابط ۱۵ و ساده‌سازی زیر به صورت مجزا حل می‌شوند.

$$KE = KE_1 + KE_2 \quad (۲۵)$$

$$KE_1 = \frac{\omega^2}{2} \int_0^{l_c} \left(u_1^2 + 2m_2 u_1 \psi_1 - \frac{8}{3} m_{41} u_1 \psi_1 - \frac{8}{3 h^2} m_{42} u_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + m_3 \psi_1^2 - \frac{8}{3} m_{51} \psi_1^2 - \frac{8}{3} m_{52} \psi_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{16}{9} m_{61} \psi_1^2 + \frac{32}{9} m_{62} \psi_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{16}{9} m_{63} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + m_1 w_1^2 \right) dx \quad (۲۶)$$

$$KE_2 = \beta \frac{\omega^2}{2} \int_{l_c}^L \left(u_2^2 + 2m_2 u_2 \psi_2 - \frac{8}{3} m_{41} u_2 \psi_2 - \frac{8}{3 h^2} m_{42} u_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + m_3 \psi_2^2 - \frac{8}{3} m_{51} \psi_2^2 - \frac{8}{3} m_{52} \psi_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{16}{9} m_{61} \psi_2^2 + \frac{32}{9} m_{62} \psi_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{16}{9} m_{63} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + m_1 w_2^2 \right) dx \quad (۲۷)$$

$$PE = PE_1 + PE_2 + \frac{1}{2} K_t (\Delta \Psi)^2 \quad (۲۸)$$

$$PE = \frac{\beta}{2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right)^2 + 2k_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \right) + k_3 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \right)^2 + k_4 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right)^2 + k_4 \alpha^2 \psi_1^2 + k_4 \alpha \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \psi_1 \right\} d\zeta + \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right)^2 + 2k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) + k_3 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2 + k_4 \left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right)^2 + k_4 \alpha^2 \psi_2^2 + k_4 \alpha \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \psi_2 \right\} d\eta + \frac{1}{2} K_t (\Delta \Psi)^2 \quad (۱۸)$$

۲-۴- تئوری مرتبه سوم برشی ردی و استخراج معادلات حاکم

روابط جابجایی، تنش و کرنش بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی ردی به صورت زیر است [۲۳]:

$$U(x, z, t) = U(x, t) + z \{ \Psi(x, t) \} - \frac{4 z^3}{3 h^2} \left(\Psi(x, t) + \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right) \quad (۱۹)$$

که عبارت $U(x, t)$ ، $W(x, t)$ و $\Psi(x, t)$ به ترتیب نشان دهنده فشردگی طولی، جابجایی عرضی و دورانی لایه میانی در مختصات مکان و زمان است.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{4 z^3}{3 h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (۲۰)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \left(1 - \frac{4 z^2}{h^2} \right) \left(\Psi + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (۲۱)$$

۱-۲-۴- معادلات انرژی تئوری مرتبه سوم برشی ردی

$$\begin{aligned}
 PE_1 = & \frac{\beta}{2} \int_0^{l_c} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 2k_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - \frac{8}{3} k_{41} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - \frac{8}{3} k_{42} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + k_3 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{8}{3} k_{51} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{8}{3} k_{52} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9} k_{61} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{32}{9} k_{62} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\
 & - 16k_{82} \psi_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 2k_{72} \psi_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 16k_{91} \psi_1^2 + \frac{16}{9} k_{63} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + k_{71} \psi_1^2 \\
 & \left. - 8k_{81} \psi_1^2 + 16k_{92} \psi_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 16K_{93} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 - 8k_8 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + k_7 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PE_2 = & \frac{\beta}{2} \int_{l_c}^L \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + 2k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - \frac{8}{3} k_{41} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - \frac{8}{3} k_{42} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + k_3 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{8}{3} k_{51} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{3} k_{52} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9} k_{61} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{32}{9} k_{62} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{16}{9} k_{63} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 + k_{71} \psi_2^2 - 8k_{81} \psi_2^2 - 16k_{82} \psi_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + 2k_{72} \psi_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\
 & \left. + 16k_{91} \psi_2^2 + 16k_{92} \psi_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + 16K_{93} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 - 8k_8 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + k_7 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \sum_{j=1}^{j=N} A_j \zeta^j (1 - \zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} a_j \\
 u_2 = & \sum_{j=1}^{j=N} a_j (1 - \eta)^{j+1} \\
 w_1 = & \sum_{j=1}^{j=N} B_j \zeta^j (1 - \zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} b_j \\
 w_2 = & \sum_{j=1}^{j=N} b_j (1 - \eta)^{j+1} \\
 \psi_1 = & \sum_{j=1}^{j=N} C_j \zeta^j (1 - \zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} \left\{ 1 + (j + 1) \frac{k_3}{k_t^*} \right\} c_j \\
 \psi_2 = & \sum_{j=1}^{j=N} c_j (1 - \eta)^{j+1} \quad (33)
 \end{aligned}$$

بنابراین تابع انرژی تیر فوق به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\pi = PE - KE \quad (31)$$

۵- توابع حدس

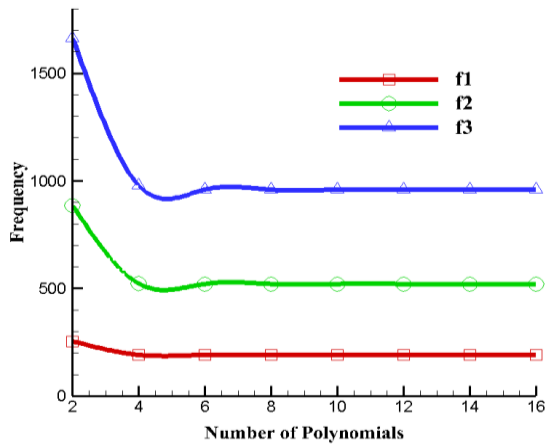
تابع حدس باید به گونه‌ای انتخاب شود که تمامی شرایط مرزی و شرایط سازگاری را ارضاء نماید. برای حل معادله ۳۱ باید تابع حدسی در نظر گرفته شود که شرایط مرزی طبیعی در دو انتهای تیر و شرایط پیوستگی در مکان ترک را ارضاء نماید. برای شرایط مرزی گیردار-گیردار جابجایی عرضی، طولی و دورانی در دو انتهای تیر یعنی در $\zeta = 0, \eta = 1$ صفر فرض می‌شود. شرایط سازگاری در محل ترک به صورت پیوستگی در جابجایی عرضی، طولی و ناپیوستگی در دوران در نظر گرفته می‌شود. دوران در محل ترک به صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شود.

$$M_{at \text{ crack section}} = k_t^* (\psi_2 - \psi_1) = k_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \quad (32)$$

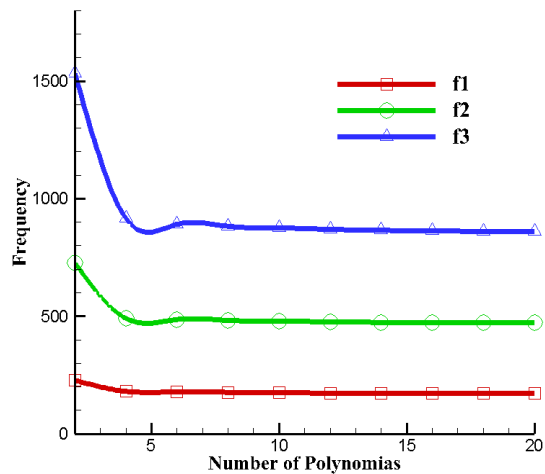
بنابراین تابع حدس زیر برای حل معادله ۳۱ به صورت (۳۳) در نظر گرفته می‌شود.

با وارد کردن توابع حدس در معادله انرژی ۲۵ و ۲۸ و مشتق گرفتن نسبت به شش ثابت مجهول، کمینه انرژی را محاسبه می‌کنیم؛ بنابراین معادله بنیادی تیر دارای ترک به صورت رابطه (۳۴) خواهد بود [۲۱]:

سوم برشی ردی با نتایج به دست آمده از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.



شکل ۵- نمودار همگرایی سه فرکانس اول تئوری تیموشنکو با افزایش تعداد جملات چندجمله‌ای



شکل ۶- نمودار همگرایی سه فرکانس اول تئوری ردی با افزایش تعداد جملات چندجمله‌ای

جدول ۱- مشخصات هندسی و مواد تیر هدفمند [۲۱]

E_1 Gpa	$\rho_1 \frac{Kg}{m^3}$	ν	h	$\frac{L}{h}$	$\frac{d_c}{h}$
۷۰	۲۷۸۰	۰/۳۳	۰/۱	۱۶	۰/۴

$$[K]\{UC\} = \lambda[M]\{UC\} \quad (34)$$

که در آن $[K]$ ، $[M]$ ، $\{UC\}$ و λ به ترتیب ماتریس سختی، ماتریس جرم، ضرایب مجهول و فرکانس طبیعی ω^2 است. با حل مجموعه معادلات فوق فرکانس‌های طبیعی تیر هدفمند دارای ترک با استفاده از دو تئوری تیموشنکو و تئوری مرتبه سوم برشی ردی به دست آمده و نتایج با یکدیگر مقایسه خواهد شد.

۶- تحلیل دینامیکی

پس از تشکیل ماتریس سختی خطی و ماتریس جرم، حل خطی معادله (۳۲) که معادله بنیادی سیستم است، از مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس سختی دینامیکی $M^{-1} * K$ به دست می‌آید. از برنامه نوشته شده در نرم‌افزار میپل جهت استخراج مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس استفاده شده است. شکل ۵ و ۶ نتایج بررسی همگرایی سه فرکانس طبیعی اول سیستم برای هر دو تئوری استفاده شده، با افزایش تعداد جمله‌های چندجمله‌ای را نشان می‌دهد. به وضوح قابل مشاهده است، نتایج زمانی همگرا می‌شود که تعداد جملات از هشت بیشتر می‌شود؛ بنابراین تعداد جملات چندجمله‌ای برای تحلیل تیر توسط تئوری تیموشنکو عدد ۱۰ و برای تحلیل توسط تئوری مرتبه بالای ردی عدد ۱۴ در نظر گرفته شده است. مبنای اعداد در نظر گرفته شده همگرا شدن نتایج در عدد صحیح است.

۷- اعتبار سنجی نتایج

در اولین گام برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، نتایج مطالعات انجام شده را با نمونه مشابه انجام شده در مراجع برای تئوری تیموشنکو مقایسه می‌شود.

مثال ۱: تیر هدفمند مرکب دو سر گیردار که مشخصات هندسه و مواد آن در جدول ۱ داده شده است، مفروض است. در جدول ۲ نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر برای تیر هدفمند مرکب دارای ترک سطحی با تکیه‌گاه دوسرگیردار با نتایج به دست آمده توسط تئوری تیموشنکو و نرم‌افزار انسیس [۱۳] مقایسه شده است. در جدول ۳ نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر شامل تئوری تیموشنکو و تئوری مرتبه

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی پژوهش حاضر با رفرنس [۲۱]

فرکانس‌های طبیعی	تحقیق حاضر تیموشنکو	تیموشنکو [۲۱]	قدرمطلق درصد اختلاف نسبت به	انسیس [۲۱]	قدرمطلق درصد اختلاف نسبت به انسیس
اول	۱۸۴/۲۷	۱۸۵/۹۴	۰/۸	۱۸۵/۹۴	۰/۸
دوم	۵۲۱/۲۳	۵۲۰/۶۵	۰/۱۱	۵۱۶/۹۴	۰/۸۲
سوم	۹۳۰/۹۳	۹۲۷/۳۷	۰/۳۸	۹۲۹/۰۱	۰/۲۵

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های طبیعی پژوهش حاضر با آباکوس و تئوری مرتبه بالا

فرکانس‌های طبیعی	تحقیق حاضر تیموشنکو	تحقیق حاضر آباکوس	قدرمطلق درصد اختلاف	تحقیق حاضر ردی	قدرمطلق درصد اختلاف نسبت به آباکوس
اول	۱۸۴/۲۷	۱۸۵/۲۴	۰/۸	۱۸۲/۲۷	۱/۶
دوم	۵۲۱/۲۳	۵۲۶/۸۵	۱/۰۶	۵۱۹/۱۴	۱/۴۶
سوم	۹۳۰/۹۳	۹۲۲/۲۵	۰/۹۴	۹۲۴/۲۹	۰/۲۲

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی برای ضخامت‌های مختلف

L/h	فرکانس‌های طبیعی	تحقیق حاضر تیموشنکو	تحقیق حاضر آباکوس	تحقیق حاضر ردی
۴	اول	۲۱۷۴/۲۲	۲۱۷۹	۲۱۶۹
	دوم	۵۲۴۱/۴	۵۲۲۳/۶	۵۲۳۳/۲
	سوم	۷۱۳۸/۴	۷۴۴۸/۲	۷۱۲۹/۲
۸	اول	۷۰۴/۵۰	۶۷۳/۷۵	۶۶۶/۴
	دوم	۱۸۴۰/۹۹	۱۸۳۲/۴	۱۸۲۷/۷
	سوم	۳۰۰۸/۸۴	۲۹۲۴/۴	۲۹۰۵/۸
۱۲	اول	۳۲۲/۳۴	۳۱۹/۴۱	۳۱۴/۱۱
	دوم	۱۰۰۲/۲	۸۹۷/۳۰	۹۰۵/۲۵
	سوم	۱۵۴۲/۰۸	۱۵۲۲/۶۰	۱۵۳۵/۲۳
۱۶	اول	۱۸۰/۶۱	۱۸۵/۲۴	۱۷۶/۲۴
	دوم	۵۱۳/۲۵	۵۲۶/۸۵	۵۰۹/۴۴
	سوم	۹۴۲/۳۳	۹۲۲/۲۵	۹۳۷/۵۵

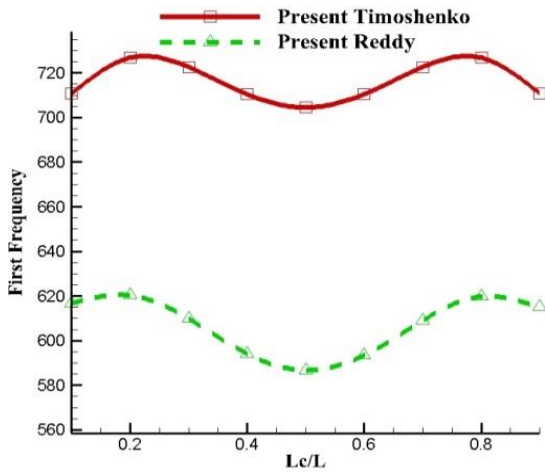
۸- اثرات نسبت لاغری بر پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و ردی

تیر هدفمند دو سر گیردار مفروض است که مشخصات هندسه و مواد آن در جدول ۴ داده شده است. در جدول ۵ نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر برای تیر هدفمند دارای ترک عرضی با تکیه‌گاه دو سرگیردار با استفاده از تئوری تیموشنکو و تئوری مرتبه سوم برشی ردی با نتایج به دست آمده از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.

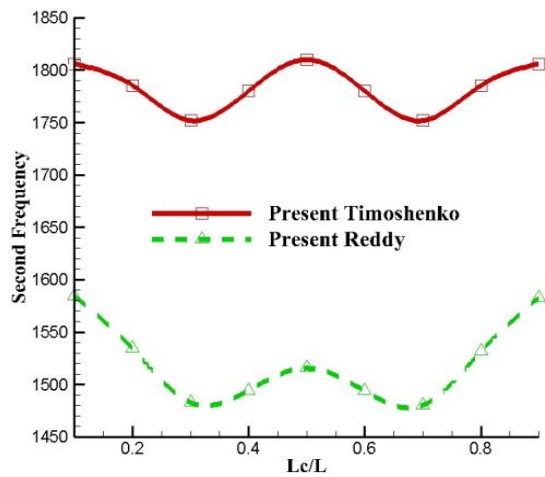
در جدول ۵ مشاهده می‌شود، برای $\frac{L}{h} = 4$ که تیر ضخیم محسوب می‌شود، بهبود جواب توسط تئوری مرتبه سوم برشی ردی نسبت به نتایج المان محدود بهتر است. با افزایش طول تیر و ثابت ماندن ارتفاع آن از ضخامت تیر کاسته شده که سبب نزدیک شدن جواب تئوری ردی به جواب تئوری تیموشنکو می‌شود. از نتایج فوق نتیجه می‌شود که هرچه

جدول ۴- مشخصات هندسی و مواد تیر هدفمند [۲۱]

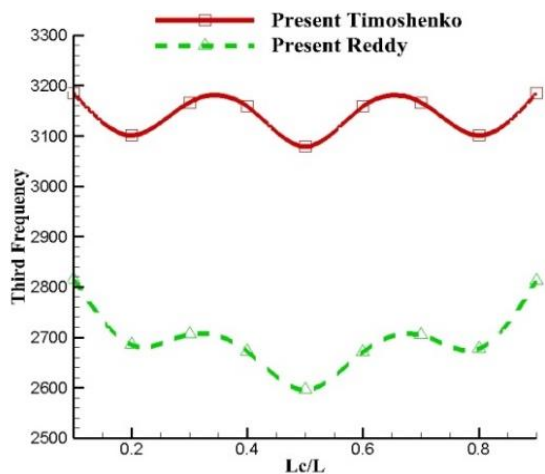
E_1 (Gpa)	ρ_1 ($\frac{Kg}{m^3}$)	ν	h (m)	$\frac{d_c}{h}$
۷۰	۲۷۸۰	۰/۳۳	۰/۱	۰/۴



شکل ۷- فرکانس طبیعی اول با تغییر مکان ترک



شکل ۸- فرکانس طبیعی دوم با تغییر مکان ترک



شکل ۹- فرکانس طبیعی سوم با تغییر مکان ترک

ضخامت تیر بیشتر باشد، اختلاف دو تئوری مشهودتر خواهد بود که این نشان‌دهنده قدرت تئوری مرتبه سوم برشی ردی در بیان اثر پیچش سطح مقطع تیر ضخیم است.

۹- اثرات مکان ترک بر پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و ردی

در شکل‌های ۷ تا ۹ اثرات مکان ترک بر فرکانس طبیعی تیر نشان داده شده است. به دلایل تقارن شرایط مرزی تیر، تغییرات فرکانس طبیعی نیز متقارن است.

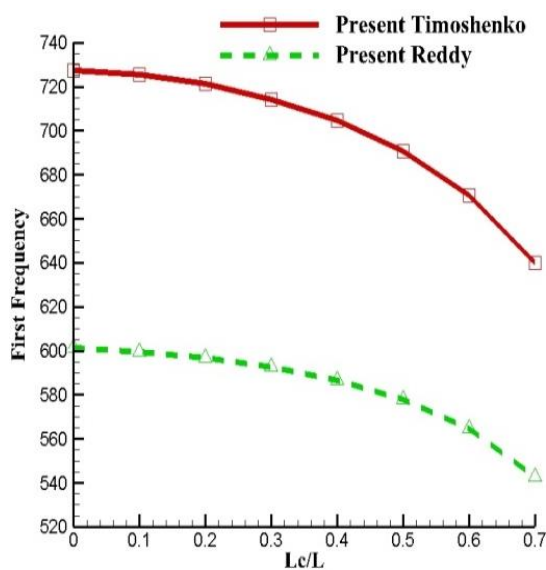
همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی اول تیر با ضخامت $(\frac{L}{h} = 8)$ از کمینه مقدار خود برای مکان ترک نزدیک به انتهای گیردار تیر آغاز شده و به تدریج افزایش می‌یابد و پس از رسیدن به قله در نزدیکی 0.2 از طول تیر، مقدار آن تا مکان میانی تیر کاهش می‌یابد. روند تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول با جابجایی مکان ترک روی تیر با اختلاف عدی حدود 1.9% برای هر دو تئوری استفاده شده تقریباً یکسان است.

در شکل ۸ مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی دوم تیر با ضخامت $(\frac{L}{h} = 8)$ از مقدار خود برای مکان ترک نزدیک به انتهای گیردار تیر آغاز شده و به تدریج تا مکان 0.3 از طول تیر کاهش یافته و سپس تا رسیدن به مکان میانی تیر روند افزایشی را دنبال می‌کند. روند تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول با جابجایی مکان ترک روی تیر با اختلاف عدی حدود 1.9% برای هر دو تئوری استفاده شده تقریباً یکسان است؛ همچنین در شکل ۹ مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی سوم تیر با ضخامت $(\frac{L}{h} = 8)$ به دست آمده از دو تئوری تیموشنکو و ردی برای مکان ترک نزدیک به دو انتهای گیردار تیر متفاوت است. در گراف مربوط به تئوری تیموشنکو مقدار فرکانس طبیعی سوم تیر با شروع از بیشینه مقدار خود در مکان ترک نزدیک به انتهای گیردار تیر تا مکان ترک در 0.2 طول تیر کاهش می‌یابد و پس از آن روند افزایشی را تا مکان ترک 0.35 طول تیر ادامه می‌دهد و از این مکان تا وسط تیر روند کاهشی را طی می‌کند. ادامه روند تغییرات تا انتهای دیگر تیر به صورت متقارن ادامه می‌یابد؛ اما با توجه به گراف مربوط به تئوری ردی مشخص می‌شود که فرکانس طبیعی سوم تیر با شروع از

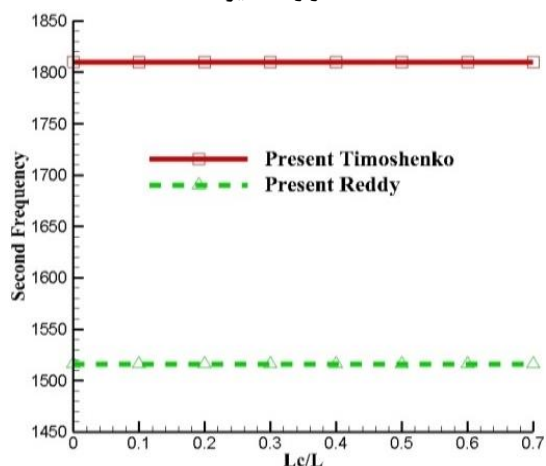
فرکانس طبیعی به دست آمده حاصل از استفاده تئوری تیموشنکو و تئوری ردی در عمق ۰/۱ حدود ۲۰٪ و در عمق ۰/۷ حدود ۱۸٪ است.

۱۱- اثرات گرادیان مواد بر پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و ردی

منظور از گرادیان مواد که با نماد K نمایش داده می‌شود، نسبت مدول الاستیسیته و چگالی سطح بالایی تیر به سطح پایینی تیر است. سه گرادیان ۵، ۰/۲ و ۱



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی اول با افزایش عمق ترک در وسط تیر



شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی دوم با افزایش عمق ترک در وسط تیر

مکان ترک در نزدیکی انتهای گیردار تیر ابتدا تا مکانی نزدیک به ۰/۲ طول تیر دچار افت شده و پس از آن روند افزایشی را تا مکان ترک ۰/۳۵ طول تیر ادامه می‌دهد و از این مکان تا وسط تیر روند کاهشی را طی می‌کند. تفاوت نمودار حاصل از این دو تئوری در کاهش محسوس فرکانس طبیعی سوم در وسط تیر نسبت به سایر مکان‌ها توسط تئوری ردی نسبت به تئوری تیموشنکو است.

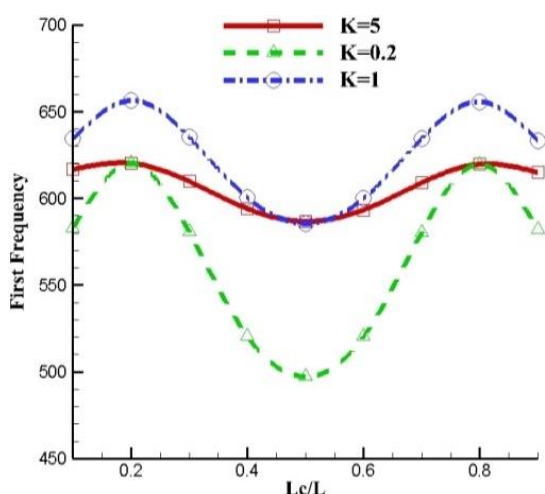
۱۰- اثرات عمق ترک بر پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو و ردی

افزایش عمق ترک، کاهش سفتی سازه و در نتیجه کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه را به همراه دارد. برای مشاهده بهتر این اثر، تغییرات سه فرکانس طبیعی اول تیر را برای عمق‌های مختلف ترک در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ نشان داده شده است.

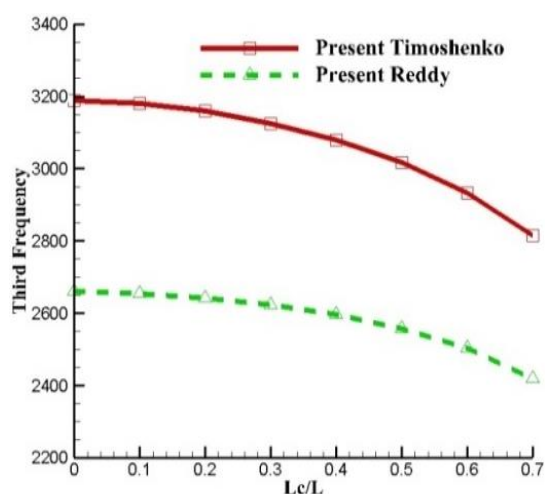
همان‌طور که در تمام شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ مشاهده می‌شود، در تئوری ردی به دلیل در نظر گرفتن اثر پیچش سطح مقطع تیر، برای تیرهای ضخیم بهبود جواب را به همراه دارد. در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش عمق ترک تا مقدار ۰/۷ ارتفاع تیر به صورت پیوسته در حال کاهش است. اختلاف مقدار فرکانس طبیعی به دست آمده حاصل از استفاده تئوری تیموشنکو و تئوری ردی برای $(\frac{L}{h} = 8)$ در عمق ۰/۱ حدود ۲۰٪ و در عمق ۰/۷ حدود ۱۹٪ است. در تئوری ردی به دلیل در نظر گرفتن اثر پیچش سطح مقطع تیر، برای تیرهای ضخیم بهبود جواب را به همراه دارد.

در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی دوم تیر با افزایش مقدار عمق ترک تغییری نمی‌کند. علت این موضوع واقع شدن ترک در مکان گره ارتعاشی است. اختلاف مقدار فرکانس طبیعی دوم به دست آمده حاصل از استفاده تئوری تیموشنکو و تئوری ردی برای $(\frac{L}{h} = 8)$ حدود ۱۹٪ است.

در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی سوم تیر با افزایش عمق ترک تا مقدار ۰/۷ ارتفاع تیر به صورت پیوسته در حال کاهش است. اختلاف مقدار



شکل ۱۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییرات مکان ترک برای نسبت تغییرات مواد مختلف



شکل ۱۴- تغییرات فرکانس طبیعی سوم با افزایش عمق ترک در وسط تیر

بنابراین با قرار گرفتن ترک در این محدوده افت فرکانس طبیعی بیشتر خواهد بود. این اثر را می‌توان در شکل ۱۵ مشاهده کرد. واضح است که طول دامنه شکم ایجاد شده در وسط تیر به دلیل وجود ترک نسبت به سایر شکم‌ها بیشتر است.

۱۲- نتیجه‌گیری

در این تحقیق تأثیر وجود ترک بر رفتار ارتعاشی تیر هدفمند توسط دو تئوری تیموشنکو و تئوری مرتبه سوم برشی ردی بررسی شد. پارامتر ترک توسط فنر پیچشی مدل‌سازی شد. در کار حاضر، عمق ترک، مکان ترک، گرادیان مواد بکار رفته در تیر و شرایط مرزی تیر به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شد. نتایج نشان داد تئوری‌های استفاده شده در این مقاله، رفتار ارتعاشی تیر هدفمند دارای ترک را به خوبی بیان می‌کنند. با بررسی نتایج مشاهده شد، برای تیرهای نازک اختلاف دو تئوری بکار گرفته شده ناچیز و برای تیرهای ضخیم تئوری مرتبه سوم برشی ردی جواب‌های بهتر و دقیق‌تری خواهد داشت. درصد این بهبود جواب حاصل از تئوری مرتبه بالا برای تیر ضخیم به حدود ۲۴ درصد می‌رسد.

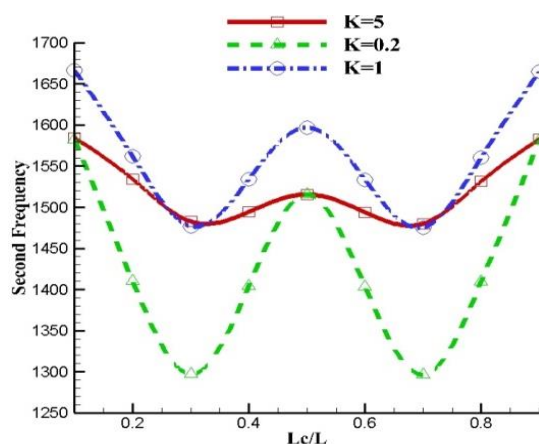
برای تحلیل‌ها انتخاب شده است. بدیهی است، گرادیان $K=1$ بیانگر تیر ایزوتروپیک است. توجه شود که توزیع خاصیت مادی در جهت ضخامت خطی منظور شده است. شکل ۱۳ تا ۱۵ تأثیر مکان ترک بر فرکانس‌های طبیعی تیر با گرادیان مواد متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقدار فرکانس‌های طبیعی تیر هدفمند مرکب بسیار کمتر از تیر ایزوتروپیک است. پدیده جذاب دیگری که می‌توان مشاهده کرد، این است که فرکانس‌های طبیعی برای گرادیان‌های ۵ و ۰/۲ زمانی که مکان ترک هم در گره ارتعاشی قرار می‌گیرد و هم در نقاطی که ممان خمشی صفر می‌شود، بسیار نزدیک به هم هستند؛ همچنین مقدار فرکانس طبیعی تیر در صورتی که مکان ترک در شکم مود ارتعاشی قرار گیرد به شدت کاهش می‌یابد. این موضوع برای فرکانس طبیعی اول تیر که شکم آن در وسط تیر قرار می‌گیرد، در شکل ۱۳ قابل مشاهده است. همچنین در مود ارتعاشی دوم تیر که نقطه گره‌ای در وسط تیر قرار می‌گیرد، کاهش فرکانس طبیعی دوم تیر در صورتی که ترک در این محدوده قرار گیرد، ناچیز خواهد بود که به وضوح در شکل ۱۴ قابل مشاهده است.

در مود ارتعاشی سوم تیر مانند مود ارتعاشی اول شکم مود ارتعاشی در محدوده وسط تیر قرار می‌گیرد،

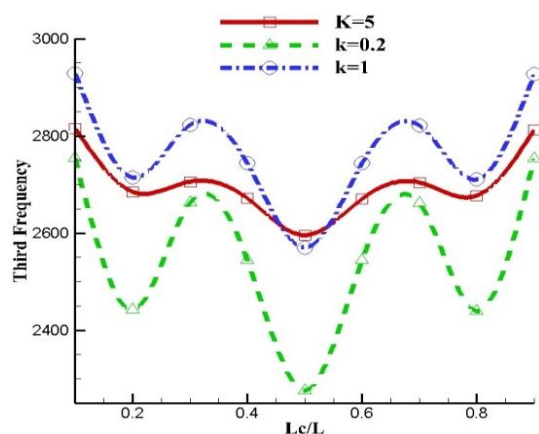
انرژی پتانسیل، J	PE
انرژی جنبشی، J	KE
ضریب پواسون	ν
سفتی پیچشی فنر، mm/rad	K_t
ضریب تصحیح برشی	l
پارامتر اینرسی بدون بعد	m_i
پارامتر سفتی دارای بعد، m/m	K_i
پارامتر سفتی بدون بعد	k_i
فرکانس طبیعی، Hz	ω
ماتریس سفتی	[K]
ماتریس جرم	[M]

۱۴- مراجع

- [1] Orhan S (2007) Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam. NDT&E INT 40(6): 443-450.
- [2] Aydogdu M, Taskin V (2007) Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Mater Des 28(5): 1651-1656.
- [3] Yang J, Chen Y, Xiang Y, Jia X (2008) Free and forced vibration of cracked in homogeneous beams under an axial force and a moving load. J Sound Vib 312(1): 166-181.
- [4] Sina S, Navazi H, Haddadpour H (2009) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. Mater Des 30(3): 741-747.
- [5] Bakhsheshy A, Mahbadi H, Khorshidi K (2018) Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded annular sector plates with piezoelectric layers resting on two-parameter elastic foundation. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering 50(5): 35-38. (In Persian)
- [6] Ke LL, Yang J, Kitipornchai S (2009) Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening. Compos Struct 90(2): 152-160.



شکل ۱۴- تغییرات فرکانس طبیعی دوم با تغییرات مکان ترک برای نسبت تغییرات مواد مختلف



شکل ۱۵- تغییرات فرکانس طبیعی سوم با تغییرات مکان ترک برای نسبت تغییرات مواد مختلف

۱۳- علایم و نشانه‌ها

مدول الاستیسیته، GPa	E
چگالی، kg/m ³	ρ
طول تیر، m	L
فاصله ترک از تکیه‌گاه سمت چپ، m	L_c
عمق ترک، m	d_c
ارتفاع تیر، m	h

- [15] Zheng T, Ji T (2012) An approximate method for determining the static deflection and natural frequency of a cracked beam. *J Sound Vib* 331(11): 2654-2670 .
- [16] Zhu X, Lu Z, Wang Z, Xue L, Ebrahimi-Mamaghani A (2020) Vibration of spinning functionally graded nanotubes conveying fluid. *Eng Comput* 1-22.
- [17] Wei D, Liu Y, Xiang Z (2012) An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks. *J Sound Vib* 331(7): 1686-1700 .
- [18] Ebrahimi-Mamaghani A, Forooghi A, Sarparast H, Alibeigloo A, Friswell MI (2021) Vibration of viscoelastic axially graded beams with simultaneous axial and spinning motions under an axial load. *Appl Math Model* 90: 131-150.
- [19] Mirtalebi, SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT (2019) Vibration control and anufacturing of intelligibly designed axially functionally graded cantilevered macro/micro-tubes. *IFAC Papersonline* 52(10): 382-387.
- [20] Eskandarzadeh Sabet A, Jabari m (2020) Study of functional materials (FGM) Properties and their application in different industries. *Journal of Iranian Ceramic Society* 2(62): 52-65. (In Persian)
- [21] Banerjee A, Panigrahi B, Pohit G (2016) Crack modelling and detection in Timoshenko FGM beam under transverse vibration using frequency contour and response surface model with GA. *Nondestruct Test Eval* 31(2): 142-164.
- [22] Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S (1959) *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.
- [23] Arbind A, Reddy JN, Srinivasa AR (2014) Modified couple stress-based third-order theory for nonlinear analysis of functionally graded beams. *Lat Am J Solids Stru* 11(3): 459-487.
- [7] Kitipornchai S, Ke L, Yang J, Xiang Y (2009) Nonlinear vibration of edge cracked functionally graded Timoshenko beams. *J Sound Vib* 324(3): 962-982.
- [8] Khorshidi K, Ghasemi M, Fallah A (2018) Buckling analysis of functionally graded rectangular microplate in thermal environment based on exponential shear deformation theory using the modified couple stress theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8 (4): 179-196. (In Persian)
- [9] Şimşek M (2010) Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Compos Struct* 92(4): 904-917.
- [10] Rezaee M, Shaterian-Alghalandis V(2020) An Analytical Method for Damped Free Vibration Analysis of a Cracked Beam Considering the Coupled Multimode Equations. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering* 52(1): 41-44. (In Persian)
- [11] Rezaee M, Hassannejad R (2011) A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method. *ACTA Mech Solida Sin* 24(2): 185-194.
- [12] Yan T, Yang J (2011) Forced vibration of edge-cracked functionally graded beams due to a transverse moving load. *Procedia Eng* 14: 3293-3300 .
- [13] Khorshidi K, Bakhsheshi A, Ghadirian H (2016)The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional Functionally Graded Rectangular plates on Pasternak elastic foundation. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 137-147. (In Persian)
- [14] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2020) Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Based Des Struc* 1-30.