



DOR:

## بررسی دینامیکی میکروتیر حاوی جریان سیال بر روی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک و تحت بار محوری با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده

احمد مامندی<sup>۱\*</sup> و علیرضا مهربانی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵

### چکیده

در این مقاله، دینامیک خطی میکروتیر حاوی جریان داخلی سیال تراکم ناپذیر روی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک غیرخطی و تحت تاثیر بار محوری بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده، مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد و گیردار-گیردار و سطح مقطع تیر به صورت مستطیلی و دایره‌ای توخالی در نظر گرفته شده است. اثر تغییر پارامترهای مختلف مانند سرعت جریان سیال، پارامتر مقیاس طول (اثر اندازه)، سفتی خطی و غیرخطی، میرایی، سفتی لایه برشی لزج بستر و نیروی محوری روی فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی میکروتیر بررسی شده است. افزایش نیروی محوری فشاری به کاهش فرکانس‌های طبیعی میکروتیر می‌انجامد؛ همچنین، محدوده پایداری میکروتیر با تکیه‌گاه گیردار-آزاد نسبت به میکروتیر با تکیه‌گاه گیردار-گیردار کمتر است. با در نظر گرفتن نظریه تنش کوپل اصلاح شده، فرکانس و سرعت بحرانی و در نتیجه محدوده پایداری بزرگتری نسبت به مدل کلاسیک تیر پیش‌بینی می‌شود.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات میکروتیر؛ جریان سیال داخلی؛ بستر غیرخطی ویسکوالاستیک-پسترناک؛ بار محوری؛ نظریه تنش کوپل اصلاح شده.

## Dynamic Study of a Microbeam Conveying Fluid Flow on a Viscoelastic-Pasternak Foundation and Subjected to an Axial Load using Modified Couple Stress Theory

A. Mamandi<sup>1\*</sup>, A. Mehrabi moheb<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran.

<sup>2</sup> M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran.

### Abstract

In this paper, dynamic analysis of a microbeam conveying incompressible fluid flow and resting on a nonlinear viscoelastic-Pasternak foundation under the action of an axial load is investigated using the modified couple stress theory. Two boundary conditions including cantilever and clamped-clamped are considered for the microbeam with rectangular and circular hollow cross sections. The effect of changes of different parameters such as fluid flow velocity, the length scale parameter (size effect), linear and nonlinear stiffnesses of foundation, foundation's damping coefficient, shear layer stiffness of foundation and the value of axial force on the linear and nonlinear natural frequency of microbeam have been investigated. Increasing the axial force leading to tangible decreases of the natural frequencies for the microbeam. Moreover, the stability range of a cantilever microbeam is lesser than the one for microbeam with clamped-clamped boundary condition. Also, using the modified couple stress theory, the frequency and critical fluid velocity stability range for the microtube is greater than the one obtained using classical beam's theory.

**Keywords:** Microbeam Vibration; Internal Fluid Flow; Nonlinear Viscoelastic-Pasternak Foundation; Axial Load; Modified Couple Stress Theory.

## ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت و توسعه تکنولوژی‌ها در عرصه علمی و همچنین مهندسی، میکرو و نانولوله‌ها و تیرهای حاوی سیال، جز مهمترین و کلیدی‌ترین اجزای ساختارها شدند و اغلب در کاربردهای مهندسی مثل، ذخیره‌سازی و انتقال سیالات و همچنین در پزشکی مثل تزریق دارو و همچنین در دستگاه‌های میکروسیالی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. در بیشتر تحقیقات انجام شده، تیرهای حامل سیال دارای سرعت ثابت فرض شده و دینامیک سیال و سازه با یکدیگر کوپل شده‌اند. از سوی دیگر، این تیرها به عنوان لوله‌های انتقال سیال در معرض ارتعاشات ناشی از حرکت سیال داخلی و یا سیال خارجی پیرامون خود قرار دارند. محیط پیرامونی این لوله‌ها در شبیه‌سازی‌ها به عنوان بستر در نظر گرفته می‌شود. به عنوان کاربرد، می‌توان به تکنولوژی‌های نوین در حال تکوین برای ساخت مبدل‌های حرارتی پوسته-لوله در مقیاس میکرو/نانو اشاره کرد که علاوه بر جریان سیال درون لوله‌های آنها، جریانی خارجی به عنوان بستری لزج برای لوله مدل می‌شود؛ همچنین، صفحات نگهدارنده پیرامون لوله‌ها به صورت فنرهایی در مدل در نظر گرفته می‌شوند. اثرات غیرخطی هندسی و یا ماده و رفتار غیرخطی بستر همگی در بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی لوله‌های حاوی سیال روی بستر دارای اهمیت بسیار می‌باشند. در ذیل به برخی از کارهای انجام شده اشاره می‌شود.

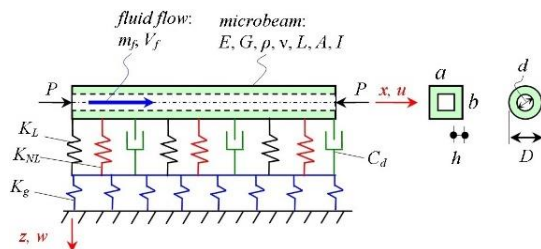
مدرس صادقی و همکارانش [۲]، دینامیک سه‌بعدی لوله یکسرگردار حاوی جریان را مطالعه کرده‌اند. قایش و همکارانش [۳]، حرکت لوله یکسرگردار حاوی جریان را با عدم فرض انبساط ناپذیر بودن لوله، به صورت دوبعدی مورد مطالعه قرار داده‌اند. وانگ و لیو [۴]، اثرات مقیاس‌های طول کوچک را روی ارتعاشات و ناپایداری میکرو لوله‌ها و نانوتیرهای حاوی جریان داخلی مایع، مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. تانگ و همکارانش [۵]، مدلهای نظریه را برای ارتعاشات سه‌بعدی لوله‌های خمیده حاوی سیال با شرایط تکیه‌گاهی دوسرگردار گسترش دادند و به بررسی اثرات زاویه باز، پارامترهای مقیاس کوچک و سرعت سیال روی مشخصه‌های ارتعاشاتی پرداختند. دای و همکارانش [۶]، دینامیک و ناپایداری میکروتیرهای حاوی سیال را بررسی

کردند. آنها در مورد اثرات مقیاس طول ماده، پروفایل غیریکنواخت سرعت‌های جریان و نیروی الکترواستاتیک غیرخطی روی فرکانس طبیعی و بحث ناپایداری میکروتیر به تحقیق پرداختند. وانگ و همکارانش [۷]، دینامیک میکرولوله‌های حاوی سیال را با استفاده از اثرات اندازه میکروتیر و میکروسیال مورد مطالعه قراردادند. آنها لوله را به صورت مستقیم با شرایط مرزی دوسرگردار و به شکل خمیده در نظر گرفتند و اثرات پارامتر مقیاس طول ماده و اثرات اندازه میکروسیال را روی فرکانس طبیعی و سرعت سیال مورد بررسی قرار دادند. ژیا و وانگ [۸]، معادلات حاکم بر میکرولوله‌های حاوی جریان سیال را با استفاده از مدل تیر تیموشنکو و در رابطه با نظریه تنش-کوپل اصلاح شده به دست آوردند. آنها تاثیرات پارامتر مقیاس طول ماده و نسبت پواسون را روی فرکانس طبیعی و سرعت‌های بحرانی برای شرایط تکیه‌گاهی دوسر ساده، مطالعه کردند. آهنگر و همکارانش [۹]، نظریه تنش کوپل اصلاح شده را برای تحلیل ارتعاشات میکروتیرهای حاوی جریان سیال بکار گرفتند و اثرات پارامتر مقیاس طول ماده را روی مقادیر فرکانس طبیعی و مقادیر متفاوتی از سرعت‌های بحرانی سیال بررسی کردند. کورال و اوزکایا [۱۰]، به تحلیل یک میکروتیر حاوی سیال با شرایط مرزی دوسرگردار با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده پرداختند و با استفاده از نظریه اغتشاشات تاثیرات میکروساختار و بستر الاستیک را روی ارتعاشات مورد تحلیل قرار دادند. ژانگ و مگواید [۱۱]، به بررسی اثر سطوح انرژی روی پاسخ دینامیکی و ناپایداری نانوتیرهای حاوی سیال پرداختند. آگوز و سیولاک [۱۲]، تاثیرات پارامتر مقیاس طول را روی پاسخ استاتیکی میکروتیرها با استفاده از نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی کردند. آگوز و سیولاک [۱۳ و ۱۴]، خمش استاتیکی، کمانش و رفتار ارتعاشی میکروتیرها را بر اساس نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده مورد تحلیل قرار دادند. یین و همکارانش [۱۵]، ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌های دوسرگردار ساده حاوی سیال را با استفاده از نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی کردند و اثرات پارامتر مقیاس طول و قطر خارجی را روی فرکانس طبیعی و سرعت سیال مورد بررسی قرار دادند. حسینی و بهالدینی [۱۶]، تحلیل پایداری میکرولوله‌های یکسرگردار حاوی سیال را بر اساس نظریه گرادیان کرنش

مرزی شامل یکسرگیردار-یکسر آزاد و دوسر گیردار به دست آمده‌اند؛ همچنین، تاثیر تغییر پارامترهای مختلف از قبیل پارامتر مقیاس طول، سفتی خطی بستر وینکلر، سفتی برشی بستر پسترناک، نیروی محوری و نسبت ضخامت به طول و عرض سطح مقطع بر حسب سرعت سیال داخل میکرولوله و شرایط مرزی مختلف روی مقادیر ویژه فرکانس طبیعی در بحث پایداری و نوع ناپایداری مورد بررسی قرار گرفته است. این موارد را می‌توان جنبه‌های اصلی نوآوری پژوهش کنونی نسبت به کارهای پیشین دانست. لازم به ذکر است که صحت‌سنجی نتایج در نمودارها در حالت‌های خاص با مراجع انجام شده است.

## ۲- استخراج مدل ریاضی

در شکل ۱، یک میکروتیر با طول  $L$ ، جرم بر واحد طول  $m$ ، سطح مقطع  $A$ ، ممان اینرسی  $I$ ، مدول الاستیسیته خطی  $E$ ، مدول الاستیسیته برشی  $G$ ، چگالی  $\rho$ ، نسبت پواسون  $\nu$  که روی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک غیرخطی با سفتی‌های خطی  $K_L$  و  $K_{NL}$  و ضریب میرایی  $C_d$  و لایه برشی با سفتی  $K_g$  قرار گرفته نشان داده شده است. این میکروتیر در دو انتهای خود بار محوری  $P$  را تحمل می‌کند. داخل تیر جریان سیالی با جرم بر واحد طول  $m_f$  و سرعت  $V_f$  در حال حرکت است. برای تحلیل نتایج در مدل‌سازی فرض شده که سطح مقطع تیر به دو شکل شامل، الف- مقطع مستطیلی تو خالی به ابعاد  $a$  و  $b$  و ضخامت  $h$  و ب- مقطع دایره‌ای تو خالی با قطرهای داخلی و خارجی به ترتیب  $d$  و  $D$  باشد. فرض شده که محورهای داخلی و  $x$  و  $z$  به ترتیب در راستاهای طولی روی تار خنثای تیر و در راستای عرضی (جانبی) یعنی عمود بر تار



شکل ۱- میکروتیر حاوی جریان سیال با دو سطح مقطع در نظر گرفته شده روی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک و تحت تاثیر بار محوری در دو انتها

اصلاح شده مورد تحلیل قرار دادند. تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی و کماتش میکرولوله حاوی جریان سیال بر اساس نظریه تنش کوپل با استفاده از روش هموتویی توسط یانگ و همکارانش [۱۹] بررسی شده است. برداشت انرژی لوله دوسرگیردار حاوی سیال تحت بار تحریک خارجی در مدل تیر اویلر-برنولی با سفتی غیرخطی و میرایی خطی توسط ممقانی و همکارانش [۲۰] بررسی شده است؛ همچنین، پدیده دوشاخگی هاپف و SMR در پاسخ سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل ارتعاشات غیر فعال تیر اویلر-برنولی غوطه‌ور در سیال با در نظر گرفتن فنر غیرخطی و میرایی خطی و تحت تحریک به صورت جریان سینوسی توسط ممقانی و همکارانش [۲۱] مطالعه شده است. تحلیل ارتعاشات و بررسی انشعاب هاپف و زین اسبی یک تیر اویلر-برنولی دوسرگیردار متصل به چاه غیرخطی انرژی در مقاطع مختلف تحت تحریک هارمونیک توسط ممقانی و همکارانش [۲۲] بررسی شده است. با به کارگیری روش گالرکین و مقادیر ویژه برای بررسی پایداری در مدل تحلیل دینامیکی جریان دوفاز در یک لوله عمودی [۲۳]، تحلیل دینامیکی نانولوله از ماده FG حاوی نانوسیال تحت میدان مغناطیسی طولی با در نظر گرفتن اثر اندازه [۲۴] و تحلیل ارتعاشی ماکرو/میکرو لوله‌های از ماده FG تحت تاثیر حرکت سیال [۲۵] توسط ممقانی و همکارانش انجام شده است. در [۲۶] توسط سعیدیها و کرمی محمدی، رفتار دینامیکی لوله دو سر مفصل حاوی جریان سیال مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است که خواص مواد آن به صورت تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

با بررسی مقالات چاپ شده پیشین مشخص می‌شود که تاکنون تحقیق مستقلی که در برگرفته استخراج معادله حاکم بر حرکت در ارتعاشات غیرخطی یک میکرو لوله حاوی جریان داخلی سیال روی بستر ترکیبی ویسکوالاستیک-پسترناک غیرخطی (با سفتی‌های بستر خطی و غیرخطی از مرتبه سوم) و همزمان تحت تاثیر نیروی محوری فشاری باشد با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده و مقایسه نتایج آن با نتایج گزارش شده در نظریه کلاسیک تیرها انجام نشده است. از سوی دیگر، در این پژوهش نتایج تحلیل برای میکرولوله با دو سطح مقطع شامل الف- سطح مقطع مستطیلی تو خالی، ب- سطح مقطع دایره‌ای تو خالی، برای دو شرط

با جایگذاری روابط (۶) و (۷) در روابط (۵)

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{xz} = 0, \quad (9)$$

و با جایگذاری روابط (۸) در رابطه (۲)، در حالت تنش صفحه‌ای مولفه‌های تنش عبارتند از:

$$\sigma_{xx} = \lambda(1-2\nu)\varepsilon_{xx} + 2G\varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad (10)$$

با جایگذاری روابط (۹) در رابطه (۴)، روابط (۱۱) به دست می‌آیند [۵] و [۱۰]:

$$m_{xy} = 2l^2 G \chi_{xy} = 2Gl^2 \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = -Gl^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2},$$

$$m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{xz} = 0, \quad (11)$$

با استفاده از اصل هامیلتون برای به دست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی از مجموع انرژی‌های جنبشی  $T$  و کرنشی  $U$  و کار نیروهای خارجی  $W_e$  داریم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = T - (U - W_e),$$

$$\rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta W_e dt, \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۸) الی (۱۱) در رابطه (۱)، معادله کلی انرژی کرنشی میکروتیر به دست می‌آید:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L (EI + GAl^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (13)$$

انرژی کرنشی سیال تراکم ناپذیر داخل لوله عبارت است از:

$$U_f = 0, \quad (14)$$

انرژی جنبشی میکروتیر با صرف نظر نمودن از ارتعاشات طولی آن عبارت است از:

$$T_b = \frac{1}{2} m \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (15)$$

سرعت سیال داخل تیر عبارت است از [۹] و [۱۶]:

$$u_i = V_f, \quad u_j = \frac{\partial w}{\partial t} + V_f \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_{tot} = u_i + u_j = V_f + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V_f \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (16)$$

و انرژی جنبشی سیال داخل میکرولوله با سرعت  $u_{tot}$  عبارت است از:

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L \left[ V_f^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V_f \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (17)$$

انرژی (کار) ناشی از بار محوری فشاری  $P$  برابر است با:

$$U_p = -\frac{1}{2} \int_0^L P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (18)$$

و کار نیرو خارجی ناپایستار  $W_{nc}$  و شکل تغییراتی  $\delta W_{nc}$  عبارت است از:

خنثای تیر) در حالت بدون تغییر شکل قرار داشته و جابجایی تیر در راستای جانبی با  $w$  و جابجایی طولی ناشی از جابجایی جانبی با  $u$  (معادلات (۶) و (۷) را ببینید) نشان داده شده‌اند؛ همچنین، جهت مثبت محور  $z$  به سمت پایین در نظر گرفته شده است.

انرژی کرنشی ذخیره شده  $U_b$  در یک ماده الاستیک ایزوتروپیک خطی که فضای  $V$  را اشغال می‌کند (با یک المان حجم  $dV$ ) از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که،  $\varepsilon_{ij}$  تانسور کرنش،  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش،  $\chi_{ij}$  تانسور متقارن انحنای  $m_{ij}$  تانسور بخش انحرافی تنش کوپل (مرتبط با انحنای) می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵، ۸ و ۱۰]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2Gl^2 \chi_{ij}, \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad \theta_i = \frac{1}{2} (e_{ijk} u_{j,k}), \quad (5)$$

که در آنها  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر،  $e_{ijk}$  نماد جایگشت،  $u_i$  بردار جابجایی در راستای محور  $x_i$   $\theta_i$  چرخش حول محور  $x_i$   $\varepsilon_{ij}$  تانسور کرنش و  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش که هر دو متقارن هستند،  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده،  $G$  و  $\lambda$  ضرایب ثابت لامه هستند که عبارتند از  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  و  $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  با

فرض دستگاه مختصات دکارتی  $(xyz)$  قرار گرفته بر راستاهای طولی و جانبی تیر، میدان جابجایی  $(u, v, w)$  وابسته به مکان و زمان  $t$  به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$u(x, y, z, t) = u(x, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x},$$

$$v(x, y, z, t) = 0, \quad w(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (6)$$

و میدان چرخشی و دورانی به صورت رابطه (۷) است:

$$\theta_x = \theta_z = 0, \quad \theta_y = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (7)$$

در حالت تنش صفحه‌ای (با فرض  $\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} = 0$ )، به کمک قوانین هوک تعمیم یافته و با در نظر گرفتن خمش تک محوری میکروتیر و اینکه تنش خارج صفحه‌ای در راستای عمود بر صفحه  $xy$  یعنی  $\sigma_{yy} = 0$  است. مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (۸) به دست می‌آیند [۲۹ و ۳۰]

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (8)$$

میکروتیر و  $\partial\theta/\partial t$  سرعت زاویه‌ای که  $\theta = \partial w/\partial x$  است. با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۲۴) است [۳]:

$$W = \frac{w}{L}, X = \frac{x}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_b}}, \beta = \frac{m_f}{m_f + m} = \frac{m_f}{m_f + \rho A},$$

$$v_f = V_f L \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \rightarrow v_f^2 = V_f^2 L^2 \frac{m_f}{EI} = \frac{L^2}{EI} (V_f^2 L^2 m_f)$$

$$c_d = \frac{C_d L^2}{\sqrt{EI}(m_f + m_b)}, p = \frac{PL^2}{EI}, k_g = \frac{K_g L^2}{EI}$$

$$k_l = \frac{K_l L^4}{EI}, k_{nl} = \frac{K_{nl} L^6}{EI}, \alpha = \frac{GAL^2}{EI}, \quad (24)$$

معادله حاکم بر حرکت میکروتیر حاوی سیال متحرک (رابطه (۲۳)) به صورت رابطه (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$(1 + \alpha)W'''' + (v_f^2 - k_g + p)W'' + k_l W + k_{nl} W^3 + c_d \dot{W} + 2\sqrt{\beta} v_f (\dot{W})' + \ddot{W} = 0, \quad (25)$$

در آن علامت (.) نشان‌دهنده اولین مشتق زمانی بر حسب  $\tau$  و علامت (')، نشان‌دهنده اولین مشتق مکانی بر حسب  $x$  است. در این مقاله برای حل معادله حاکم بر حرکت از روش گالرکین استفاده شده است که با کمک آن معادله حرکت به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان تبدیل می‌شود. پاسخ ارتعاشات مکانی-زمانی به صورت جمع مودهای ارتعاشی به صورت رابطه (۲۶) فرض می‌شود:

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(x) q_r(t), \quad (26)$$

که در آن،  $\varphi_r(x)$  توابع شکل بی‌بعد مود  $r$ ام وابسته به شرایط مرزی مساله و  $q_r(t)$  ضرایب زمانی متناظر با توابع تقریب می‌باشند. برای شرایط مرزی گیردار-آزاد شکل مودها و مقادیر مجذور فرکانس‌های طبیعی عبارتند از [۹]:

$$\varphi_r(x) = (-\cos\lambda_n x + \cosh\lambda_n x) - (B_n) \cdot (\sinh\lambda_n x - \sin\lambda_n x),$$

$$B_n = \left( \frac{\cos\lambda_n + \cosh\lambda_n}{-\sin\lambda_n + \sinh\lambda_n} \right),$$

$$\lambda_1 = 1.8751, \lambda_2 = 4.6941, \lambda_3 = 7.8547, \lambda_4 = 10.9956 \quad (27)$$

برای شرایط مرزی دوسرگیردار شکل مودها و مقادیر مجذور فرکانس‌های طبیعی عبارتند از [۹]:

$$W_{nc} = -\frac{1}{2} \int_0^L C_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \rightarrow \delta W_{nc} = -\int_0^L C_d \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w dx, \quad (19)$$

همچنین، شکل تغییراتی انرژی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک غیرخطی  $\delta W_{vpf}$  عبارت است از:

$$\delta W_{vpf} = \int_0^L (K_L w + K_{NL} w^3 + K_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_d \frac{\partial w}{\partial t}) \delta w dx, \quad (20)$$

با جایگزینی روابط به‌دست آمده برای مجموع انرژی‌های کرنشی و انرژی‌های جنبشی میکروتیر و سیال متحرک و همچنین شکل تغییراتی کار نیروهای خارجی در رابطه (۱۲) و با توجه به شکل تابع لاگرانژ  $L$  به صورت زیر است:

$$L = (T_b + T_f) - (U_b + U_f + U_p) + W_{vpf} + W_{nc}, \quad (21)$$

داریم که

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_f \int_0^L [V_f^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V_f \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L (EI + GAL^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (K_L w + K_{NL} w^3 + K_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_d \frac{\partial w}{\partial t}) \delta w \right\} dt, \quad (22)$$

با انتگرال‌گیری جز به جز و با استفاده از اصول حساب تغییرات برای هر یک از جمله‌های رابطه بالا و پس از کمی ساده‌سازی، معادله حاکم بر حرکت ارتعاش جانبی میکروتیر  $w(x, t)$  به‌دست می‌آید:

$$(EI + GAL^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_f V_f^2 + P - K_g) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m V_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m_f + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C_d \frac{\partial w}{\partial t} + K_L w + K_{NL} w^3 = 0, \quad (23)$$

که  $EI$  مدول صلبیت میکروتیر وابسته به نوع جنس و هندسه تیر و  $GAL^2$  پارامتر ایجاد شده برای میکروتیر با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده (اثر اندازه) است. لازم به ذکر است که در نظریه کلاسیک تیرها جمله  $GAL^2 (\partial^4 w / \partial x^4)$  در سمت چپ معادله حاکم بر حرکت (۲۳) که مربوط به پارامتر مقیاس طول (اثر اندازه) است، در نظر گرفته نمی‌شود؛ همچنین، در معادله (۲۳)، ترم  $\partial^2 w / \partial t^2$  ناشی از شتاب در حرکت عرضی، ترم  $\partial^2 w / \partial x \partial t$  مربوط به شتاب کریولیس ناشی از سرعت  $V_f$  در راستای محور طولی

با استفاده از کدنویسی در محیط نرم افزار Mathematica برای حل معادله حاکم بر حرکت وابسته به زمان (۳۲) و از حل معادله مشخصه حاکم بر رابطه فرکانسی، مقادیر ویژه فرکانس طبیعی سیستم (تابعی از متغیرهای هندسی و فیزیکی مسئله) به صورت اعداد مختلط به دست می آیند که پایداری و نوع ناحیه ناپایداری در پاسخ ارتعاشی سیستم بر اساس علامت بخش حقیقی (میرایی سازه) و بخش موهومی (فرکانس سازه) این مقادیر ویژه تعیین می گردد. لازم به ذکر است که تعداد مودهای ارتعاشی پاسخ برای رسیدن به جواب صحیح، حائز اهمیت است. برای تیر یکسرگردار، برای  $\beta$  های کوچک ( $\beta < 0.3$ ) استفاده از دو مود کافی است و برای مقادیر بیشتر  $\beta$ ، مودهای سوم و بالاتر نقش آشکارتری ایفا می کنند. از سوی دیگر، افزایش میرایی باعث کاهش اثر مشارکت مودهای بالاتر می شود و می توان برای تقریب از مودهای کمتری استفاده کرد (مراجع [۹، ۱۶، ۱۷ و ۱۸] را ببینید).

### ۳- تحلیل و بحث در نتایج

در این بخش به تحلیل و بررسی نتایج و اعتبار سنجی آنها با منابع موجود در حالت های خاص موجود برای مسئله پرداخته می شود.

#### ۳-۱- میکروتیر با سطح مقطع مستطیلی

در این بخش، نتایج تحلیل ارتعاشات میکروتیر با سطح مقطع مستطیل شکل حاوی جریان داخلی سیال با شرط مرزی دوسرگردار روی بستر ترکیبی غیرخطی ویسکوالاستیک-پسترناک با مشخصات زیر ارائه شده و نتایج در حالت های خاص موجود با مرجع [۹] مقایسه و صحت سنجی شده اند.

$$E = 1.44 \text{ GPa}, \nu = 0.38, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \\ L = 250 \mu\text{m}, b = 17.6 \mu\text{m}, h = 0.1b, \beta = 0.1, a = 5b, \\ A = 5b^2 - (b-2h)(5b-2h), I = \frac{5b^4 - (5b-2h)(b-2h)^3}{12},$$

#### ۳-۱-۱- بررسی اثر تغییر پارامتر مقیاس طول

در شکل ۲-الف و ۲-ب، تاثیر تغییر پارامتر مقیاس طول بی بعد ( $l/b = 0, 0.5, 1$ ) به ترتیب در منحنی های مربوط به بخش موهومی (فرکانس اصلی ارتعاشات) و بخش حقیقی

$$\varphi_r(x) = (\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x) + (B_n)(\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x), \\ B_n = \left( \frac{\cos \lambda_n - \cosh \lambda_n}{\sin \lambda_n + \sinh \lambda_n} \right), \\ \lambda_1 = 4.7300, \lambda_2 = 7.8532, \lambda_3 = 10.9956, \lambda_4 = 14.1372 \quad (28)$$

شکل بی بعد شده رابطه (۲۶) را در معادله حرکت بی بعد (۲۵) جایگذاری کرده و سپس رابطه به دست آمده را در توابع شکل مود متناظر بی بعد شده  $\varphi_s(X)$  ضرب کرده و نسبت به متغیر مستقل مکانی بی بعد  $X$  از صفر تا یک (به دلیل بی بعد بودن معادله حرکت) انتگرال گیری می شود. نتیجه نهایی یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان بی بعد  $\tau$  به صورت رابطه (۲۹) است:

$$(1 + \alpha)\lambda_r^4 \delta_{sr} q_r(\tau) + k_r \delta_{sr} q_r(\tau) + (v_f^2 - k_p + p)c_{sr} q_r(\tau) + (2\sqrt{\beta} v_f b_{sr} + c \delta_{sr}) \dot{q}_r(\tau) + \delta_{sr} \ddot{q}_r(\tau) + k_{nl} n_{sr} q_r^3(\tau) = 0, \quad (29)$$

لازم به ذکر است که رابطه (۲۹) با فرض  $N = 1$  در رابطه (۲۶) به دست آمده است. با توجه به رابطه (۳۰):

$$\int_0^1 \varphi_s(X) \varphi_r^{(4)}(X) dX = \lambda_r^4 \delta_{sr}, \quad (30)$$

مقادیر انتگرالی ضرایب در معادله (۲۹) به صورت رابطه (۳۱) می باشند:

$$c_{sr} = \int_0^1 \varphi_s(X) \varphi_r''(X) dX, \quad b_{sr} = \int_0^1 \varphi_s(X) \varphi_r'(X) dX, \\ n_{sr} = \int_0^1 \varphi_s(X) \varphi_r^3(X) dX, \quad \delta_{sr} = \int_0^1 \varphi_s(X) \varphi_r(X) dX, \quad r = 1, 2, 3 \quad (31)$$

برای تعداد مودهای دلخواه  $N$  با مرتب سازی معادله (۲۹):

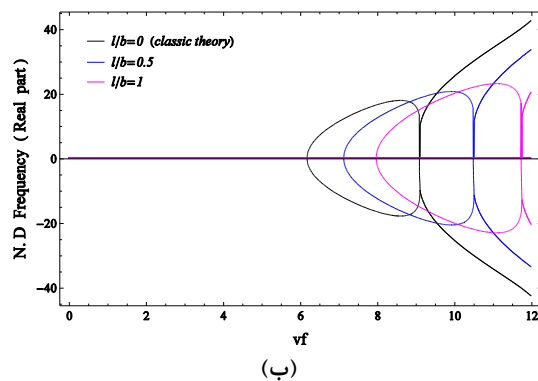
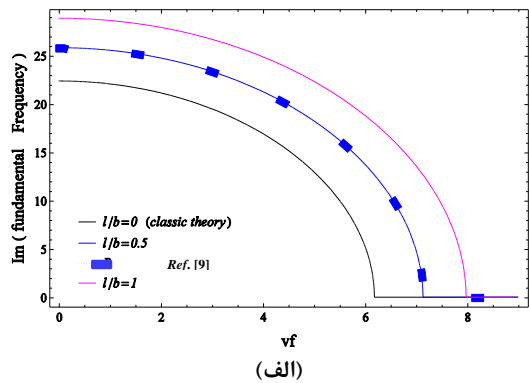
$$[M] \ddot{q}_r(T) + [C] \dot{q}_r(T) + [K]_l q_r(T) + [K]_{nl} q_r^3(T) = 0, \quad (32)$$

مقادیر ماتریس های جرم  $[M]$ ، سفتی خطی  $[K]_l$  و سفتی غیرخطی  $[K]_{nl}$  و میرایی  $[C]$  به صورت (۳۳) تعریف می شوند:

$$[M] = \delta_{sr}, [C] = 2v_f \sqrt{\beta} b_{sr} + c \delta_{sr}, \\ [K]_l = (1 + \alpha)\lambda_r^4 \delta_{sr} + k_r \delta_{sr} + (v_f^2 - k_g + p)c_{sr}, \quad (33) \\ [k]_{nl} = k_{nl} n_{sr},$$

با تعریف  $q_r(\tau) = q(r).e^{\Omega \tau}$  که در آن فرکانس طبیعی  $\Omega$  در حالت کلی به صورت یک عدد مختلط ( $\Omega = \zeta + i\omega$ ) است و جایگذاری آن در معادله (۳۰) به عنوان نمونه برای بستر خطی رابطه (۳۴) به دست می آید:

$$\det[[M]\Omega^2 + [C]\Omega + [K]_l] = 0, \quad (34)$$



شکل ۲- تغییرات الف) بخش موهومی و ب) بخش حقیقی مقدار ویژه در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی دوسرگیردار برحسب سرعت سیال  $v_f$  برای پارامترهای مقیاس طول بی بعد مختلف

شروع شده است (مطابق با مقدار فرکانس اول بی بعد برای تیر دوسرگیردار در معادله (۲۹)،  $\lambda_1 = \sqrt{\omega_1}$ ).

### ۳-۱-۲- بررسی اثر تغییر پارامتر سفتی خطی و سفتی برشی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک

در شکل‌های ۳-الف و ۳-ب، به ترتیب منحنی‌های مربوط به بخش موهومی و بخش حقیقی مقادیر ویژه، برای مقادیر مختلف سفتی خطی بستر وینکلر  $k_l$  (ترم خطی بستر)، بدون در نظر گرفتن میرایی  $c_d$  و لایه برشی  $k_g$ ، در ارتعاشات میکروتیر نشان داده شده است. از شکل ۳-الف و ۳-ب مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی خطی بستر وینکلر، ناپایداری کمانشی در سرعت‌های بالاتری اتفاق می‌افتد.

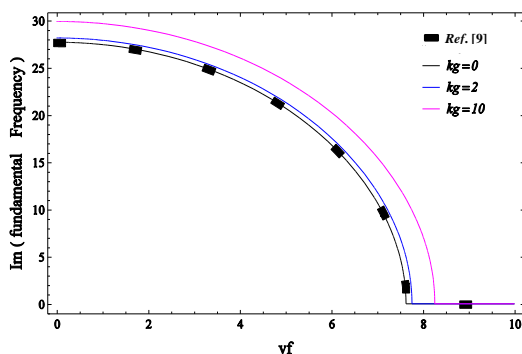
(میرایی ارتعاشات) مقادیر ویژه ارتعاشات غیرخطی میکروتیر برحسب سرعت سیال  $v_f$  با شرایط مرزی دوسرگیردار در حالت بدون بستر و بدون نیروی محوری ( $c_d = 0, k_l = 0, k_g = 0, p = 0$ ) با استفاده از نظریه کلاسیک و نظریه تنش کوپل اصلاح شده نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که مقدار در نظر گرفته شده  $l/b = 0$ ، مربوط به نظریه کلاسیک تیرها است که در آن اثر اندازه در معادله حاکم در نظر گرفته نمی‌شود. به عبارت دیگر، با فرض اثر اندازه  $l = 0$  معادله حاکم در نظریه تنش کوپل به معادله حاکم در نظریه کلاسیک تیرها تبدیل می‌شود. از شکل ۲-الف مشاهده می‌شود که در هر دو نظریه با افزایش سرعت سیال مقدار فرکانس طبیعی (بخش موهومی مقدار ویژه) کاهش می‌یابد تا اینکه برای مود اول و پایه سیستم در سرعت بحرانی به صفر می‌رسد و ناپایداری کمانشی (دوشاخگی‌ای که در منحنی بخش موهومی مقدار ویژه اتفاق می‌افتد و دو مقدار برابر اما با علامت مخالف در نمودار بخش حقیقی مقدار ویژه مشاهده می‌شود (شکل ۲-ب را ببینید)) اتفاق می‌افتد. این یک ناپایداری ساختاری استاتیکی است که به موجب آن میکروتیر، ارتعاش نخواهد کرد، اما همچنان مودهای بالاتر پایدار باقی مانده‌اند؛ همچنین، سرعت بحرانی که در آن ناپایداری کمانشی اتفاق می‌افتد، به فرکانس طبیعی وابسته نیست و سرعت بحرانی برای محدوده‌ای از سرعت سیال تعریف می‌شود که در آن محدوده سرعت سیال، فرکانس مود اول برابر با صفر است و برای یک سرعت خاص سیال تعریف نمی‌شود. لازم به ذکر است که محدوده قبل از سرعت بحرانی را محدوده پایداری گویند [۹، ۱۶، ۱۷ و ۱۸]. از شکل ۲-ب مشاهده می‌شود، در نظریه کلاسیک با افزایش سرعت سیال، سرعت ناپایداری مقدار  $6/28$  و در نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای مقادیر پارامتر مقیاس طول بی بعد  $0.5$  و  $1$  سرعت ناپایداری به ترتیب دارای مقادیر  $7/28$  و  $8/18$  است. بعد از این مقادیر، نمودارها دوشاخه‌ای شده و مجدداً تکرار می‌شوند. به عبارت دیگر، مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر مقیاس طول مقادیر فرکانس طبیعی غیرخطی (نقطه دوشاخه‌ای شدن) به دست آمده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده به سمت راست (مقادیر بیشتر) جابجا می‌شود. لازم به ذکر است که در نمودار شکل ۲-الف برای حالت سیال با سرعت صفر در نظریه کلاسیک تیرها ( $l/b = 0$ ) فرکانس بی بعد از  $22/4$

### ۳-۱-۳- بررسی اثر تغییر نیروی محوری

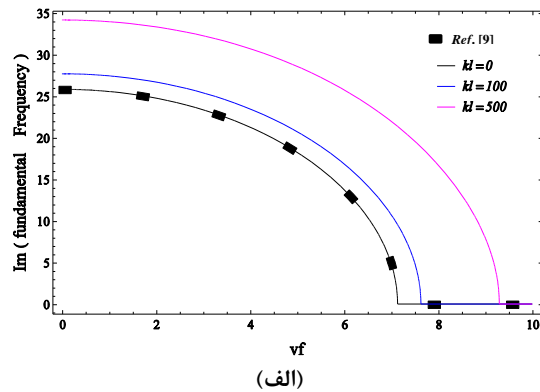
در شکل ۵، تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) مود اول ارتعاشی برحسب سرعت سیال  $v_f$ ، برای مقادیر  $a=5, h=0.1, l=b/2, \beta=0.1, c_d=0, k_l=100, k_g=2$  و پارامتر مقیاس طول بی بعد  $0.5$  و برای مقادیر مختلف نیروی محوری در ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با مقطع مستطیل شکل و با شرط مرزی دوسر گیردار نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می شود که با تغییر نوع نیروی محوری از نیروی فشاری (نیرو با علامت مثبت) به نیروی کششی (نیرو با علامت منفی) وارد بر میکروتیر، مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی میکروتیر افزایش می یابد.

### ۳-۱-۴- بررسی اثر تغییر نسبت ضخامت به عرض سطح مقطع

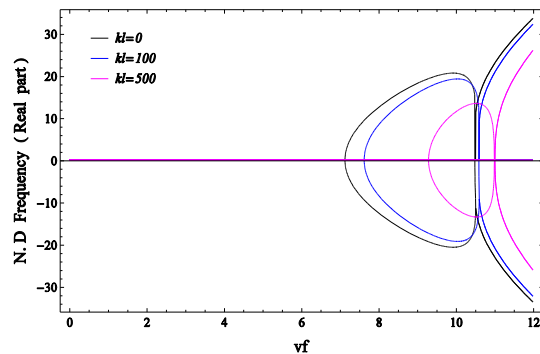
در شکل ۶، نمودار تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه برحسب سرعت سیال  $v_f$ ، برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به عرض سطح مقطع  $(h/b=0.01, 0.1, 1)$  میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار نشان داده شده است. از این شکل نتیجه مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت به عرض سطح مقطع میکروتیر، مقدار فرکانس طبیعی میکروتیر افزایش می یابد؛ یعنی با ثابت ماندن عرض سطح مقطع میکروتیر و با افزایش ضخامت آن، فرکانس ارتعاشات میکروتیر نیز افزایش می یابد.



شکل ۴- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) برحسب سرعت سیال  $v_f$  در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار برای مقادیر مختلف سفتی برشی بستر ویسکوالاستیک-پسترناک



(الف)



(ب)

شکل ۳- تغییرات (الف) بخش موهومی و (ب) بخش حقیقی مقدار ویژه در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار برحسب سرعت سیال  $v_f$  برای مقادیر مختلف سفتی خطی بستر وینکلر

در شکل ۴، منحنی بخش موهومی (فرکانس ارتعاشات) مقدار ویژه برای مقادیر مختلف سفتی برشی بستر پسترناک  $k_g$  و بستر بدون در نظر گرفتن سفتی و میرایی ویسکوالاستیک در ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار برای مقادیر  $a=5, h=0.1, l=b/2, \beta=0.1, c_d=0, p=0$  نشان داده شده است. از این شکل می توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار  $k_g$ ، فرکانس ارتعاش افزایش یافته و در بخش میرایی فرکانس ارتعاشات، ناپایداری کمانشی برای میکروتیر اتفاق می افتد. با بررسی اثر بستر وینکلر (الاستیک خطی) و پسترناک بر فرکانس میکروتیر مشاهده می شود که هر دو نوع بستر وینکلر و پسترناک فرکانس سیستم را افزایش می دهند که البته برای بستر پسترناک افزایش سفتی سیستم به دلیل وجود سفتی برشی، بیشتر از مدل وینکلر است، به نحوی که با تغییرات کوچک در مقدار کمیت این بستر مقدار حساسیت فرکانس بیشتر است.

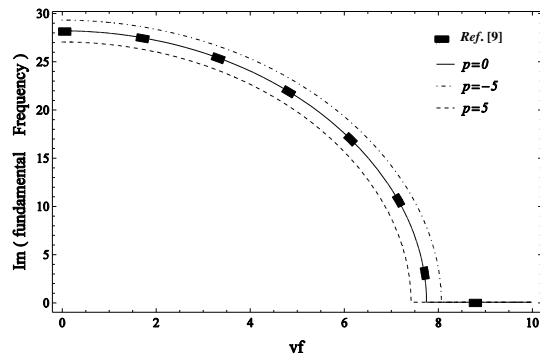


۳-۲-۱- بررسی اثر تغییر اندازه قطر خارجی میکرولوله

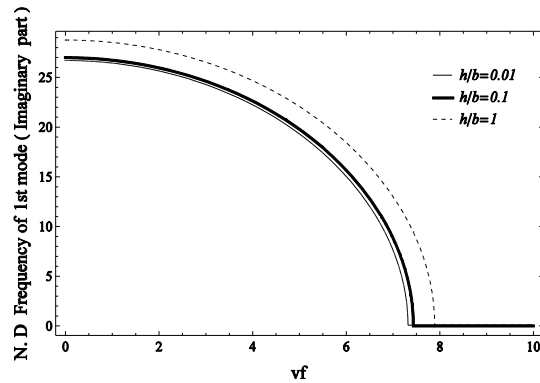
در شکل ۷-الف و ۷-ب، به ترتیب منحنی تغییرات بخش حقیقی و بخش موهومی مقادیر ویژه ارتعاشات میکروتیر یکسرگیردار با قطر خارجی  $D=10\ \mu\text{m}$  و همچنین، در شکل ۸-الف و ۸-ب، منحنی تغییرات بخش حقیقی و بخش موهومی مقادیر ویژه برای میکروتیر با قطر خارجی  $D=100\ \mu\text{m}$ ، برحسب سرعت سیال  $v_f$  برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول نشان داده شده‌اند. مطابق شکل ۷ و ۸ بخش موهومی مقدار ویژه سیستم برای مود پایه اول پس از یک سرعت خاص ناپدید شده و بخش حقیقی مقدار ویژه این مود به دو شاخه مجزا تقسیم می‌شود که این سرعت خاص، سرعت بحرانی دوشاخگی نامیده می‌شود [۱۷]. حال هر چه سرعت سیال بیشتر شود، مود اول فوق میرا شده و ارتعاشی در این مورد مشاهده نمی‌گردد. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود که مقادیر فرکانس ارتعاشی که توسط نظریه تنش کوپل اصلاح شده پیش بینی شده‌اند، بیشتر از مقادیر فرکانس در حالتی که از نظریه کلاسیک استفاده شده است و این به دلیل آن است که در این نظریه سفتی خمشی پیش‌بینی شده برای میکروتیر افزایش می‌یابد.

لازم به ذکر است که در نمودار شکل ۷-الف و ۸-الف برای حالت سیال با سرعت صفر در نظریه کلاسیک تیرها ( $I/b=0$ ) فرکانس بی‌بعد از حدود  $3/5$  شروع شده است (مطابق با مقدار فرکانس اول بی‌بعد برای تیر یکسر گیردار در معادله (۲۸)،  $\lambda_1 = \sqrt{\omega_1}$ ).

با بررسی بخش حقیقی مقادیر ویژه فرکانس ارتعاشات میکرولوله با تکیه‌گاه گیردار-آزاد (شکل ۷-ب و شکل ۸-ب را ببینید) مشاهده می‌شود که برخلاف انتظار و نمودارهای مربوط به حالت نظریه کلاسیک تیرها، زمانی که فرکانس صفر می‌شود (شکل ۷-الف و شکل ۸-الف را ببینید)، مقدار میرایی سیستم منفی مانده و در این حالت انتظار ناپایداری دیورژانس وجود ندارد. به‌طور کلی، میرایی سازه‌ای موجود در سیستم، رخداد ناپایداری را به تاخیر می‌اندازد. لازم به ذکر است که هر چند در این حالت بخش موهومی مقدار ویژه همانند حالت ناپایداری دیورژانس صفر می‌شود، ولی با توجه به اینکه بخش حقیقی مقدار ویژه منفی است، بنابراین سیستم پایدار خواهد بود و صفر بودن بخش موهومی مقادیر ویژه لزوماً باعث ناپایداری سیستم نمی‌شود [۲۷ و ۲۸].



شکل ۵- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) برحسب سرعت سیال  $v_f$  در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی دوسرگیردار برای مقادیر مختلف نیروی محوری



شکل ۶- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه برحسب سرعت سیال  $v_f$  در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی دوسرگیردار برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به عرض سطح مقطع

۳-۲- میکروتیر با سطح مقطع دایره‌ای توخالی

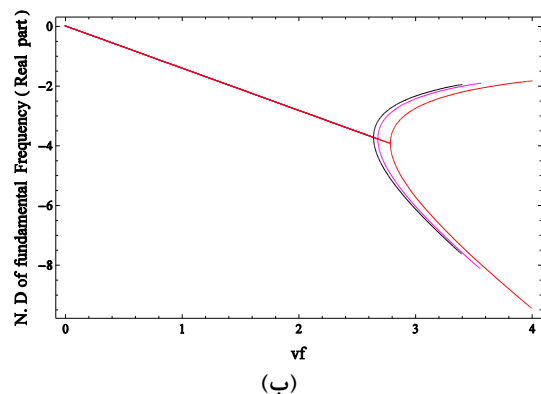
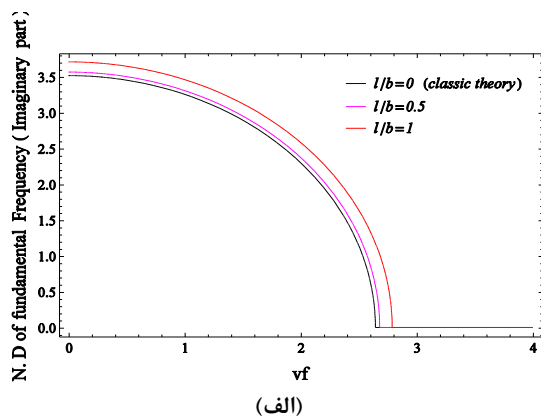
در این بخش، نتایج تحلیل ارتعاشات غیرخطی و خطی برای میکروتیر با سطح مقطع دایره‌ای توخالی حاوی جریان داخلی سیال برای دو شرط مرزی گیردار-آزاد و دوسرگیردار روی بستر ترکیبی غیرخطی ویسکوالاستیک-پسترناک با مشخصات زیر (مگر آنکه در موردی مشخصات دیگری ذکر شده باشد) ارائه شده و نتایج با مرجع [۱۶] در حالت‌های خاص موجود مقایسه و صحت‌سنجی شده‌اند.

$$E = 1.44\ \text{GPa}, \nu = 0.35, \rho = 1000\ \text{kg/m}^3, L = 250\ \mu\text{m},$$

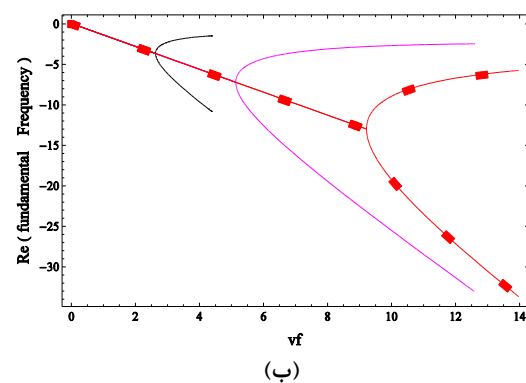
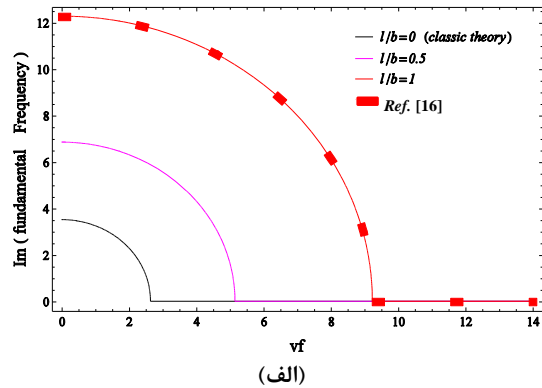
$$b = 17.6\ \mu\text{m}, D = 10\ \mu\text{m}, \zeta = d/D = 0.8, L/D = 20,$$

$$A = \pi/4 [D^2 - (\zeta \cdot D)^2], I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (\zeta \cdot D)^4],$$

مقدار ضریب میرایی بی‌بعد بستر  $c_d = 0, 1, 10$  را برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-آزاد را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که با افزایش میرایی بستر، مقادیر فرکانس و مقدار سرعتی که در آن ارتعاشات مود پایه سیستم متوقف می‌شود، هردو کاهش می‌یابند. نمودار شکل ۹ ناپایداری واگرایی را نشان می‌دهد که در آن با افزایش سرعت سیال فرکانس اول صفر می‌شود [۱، ۱۶ و ۱۸]. نکته قابل توجه این است که سرعت جریان بحرانی برای وقوع ناپایداری واگرایی (تغییر علامت قسمت حقیقی یا همان مثبت شدن مقدار ویژه فرکانسی) تا زمانی که شاهد واگرایی استاتیکی و ناپایداری کماتشی در سیستم هستیم، کاملاً از مقدار پارامتر میرایی و ضریب میرایی ویسکوزیته بستر مستقل است؛ اما ناپایداری واگرایی مربوط به حرکت دینامیکی سیستم فقط در یک نقطه اتفاق می‌افتد.



شکل ۸- تغییرات الف) بخش موهومی و ب) بخش حقیقی مقدار ویژه ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد با  $D = 100 \mu\text{m}$  بر حسب سرعت سیال  $v_f$  برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی‌بعد



شکل ۷- تغییرات الف) بخش موهومی و ب) بخش حقیقی مقدار ویژه ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد با  $D = 10 \mu\text{m}$  بر حسب سرعت سیال  $v_f$  برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی‌بعد

همچنین، با مقایسه نتایج به‌دست آمده در شکل ۷-الف و ۸-الف می‌توان مشاهده کرد که با افزایش نسبت بی‌بعد  $l/b$  مقدار فرکانس برای حالت سیال با سرعت صفر افزایش یافته است. به بیان دیگر برای میکروتیر با در نظر گرفتن اثر اندازه، مقدار فرکانس افزایش یافته است. از سوی دیگر، با مقایسه نتایج به‌دست آمده در شکل ۷-ب و ۸-ب مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت بی‌بعد  $l/b$ ، مقدار سرعت دوشاخگی افزایش یافته است. به بیان دیگر برای میکروتیر با قطر کمتر و در نظر گرفتن اثر اندازه مقدار سرعت دوشاخگی و همزمان مقدار بخش حقیقی مقدار ویژه فرکانس افزایش یافته است.

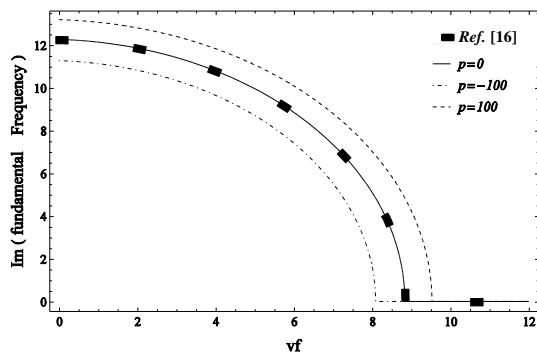
### ۳-۲-۲- بررسی اثر تغییر ضریب میرایی بستر

شکل ۹-الف و ۹-ب به ترتیب منحنی تغییرات بخش موهومی و بخش حقیقی مقادیر ویژه بر حسب سرعت سیال برای سه

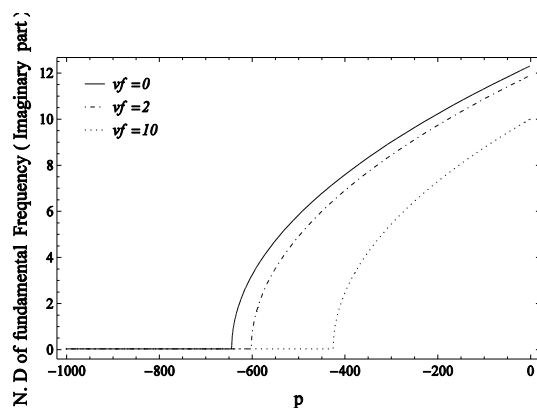
جریان صفر است، افزایش مقدار نیروی محوری فشاری تا مقدار ۷۰۰ باعث کاهش فرکانس طبیعی شده و برای مقادیر بزرگتر از ۷۰۰ فرکانس طبیعی صفر است. برای نمودارهای مربوط به سرعت جریان داخلی برابر با مقدار ۲ و ۱۰، افزایش مقدار نیروی فشاری به ترتیب تا ۶۰۰ و ۴۲۰ روند کاهشی فرکانس طبیعی را به دنبال دارد و بعد از این مقادیر نیروی محوری، فرکانس طبیعی صفر می‌شود.

### ۳-۲-۵- بررسی اثر تغییر پارامتر سفتی خطی بستر

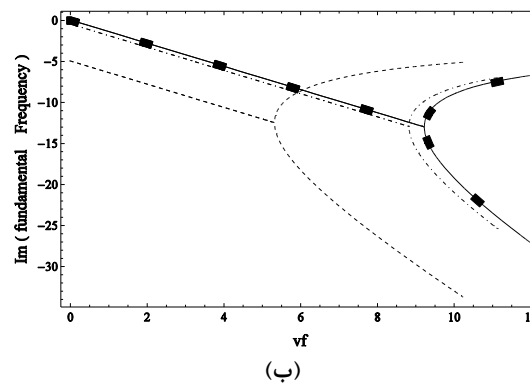
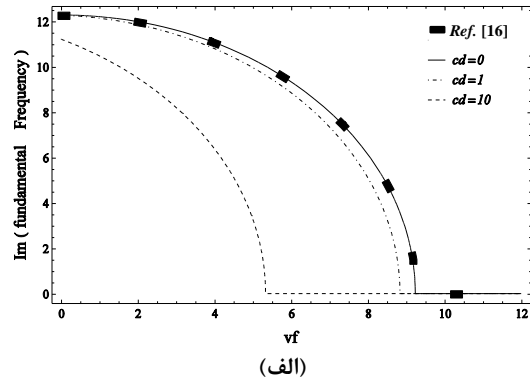
شکل ۱۲-الف و ۱۲-ب به ترتیب تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه بر حسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  برای



شکل ۱۰- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) در مود اول ارتعاشی میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد بر حسب سرعت سیال برای مقادیر مختلف نیروی محوری  $p$



شکل ۱۱- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه بر حسب نیروی محوری  $p$  برای مقادیر مختلف سرعت جریان داخلی  $v_f$  برای میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد



شکل ۹- تغییرات (الف) بخش موهومی و (ب) بخش حقیقی مقدار ویژه در ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد بر حسب سرعت سیال  $v_f$  برای مقادیر مختلف ضریب میرایی بستر

### ۳-۲-۳- بررسی اثر تغییر نیروی محوری

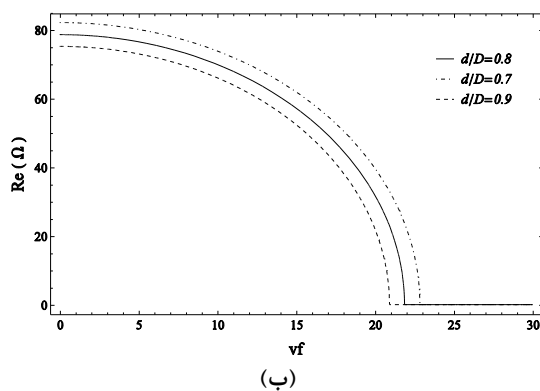
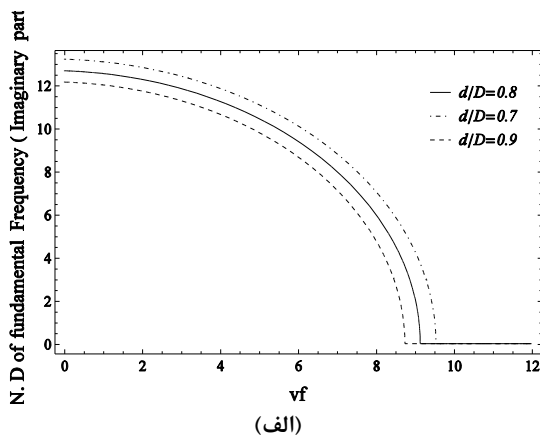
در شکل ۱۰، تغییرات بخش موهومی مقادیر ویژه فرکانس طبیعی مود اول ارتعاشی بر حسب سرعت سیال  $v_f$ ، برای مقادیر مختلف نیروی محوری در ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش نیروی فشاری وارد بر میکروتیر، فرکانس طبیعی میکروتیر و همچنین محدوده پایداری کاهش می‌یابد [۱۶-۱۸].

### ۳-۲-۴- بررسی اثر تغییر سرعت سیال عبوری

شکل ۱۱، تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) بر حسب نیروی محوری  $p$  برای مقادیر مختلف سرعت جریان داخلی  $v_f$  برای میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که وقتی مقدار سرعت

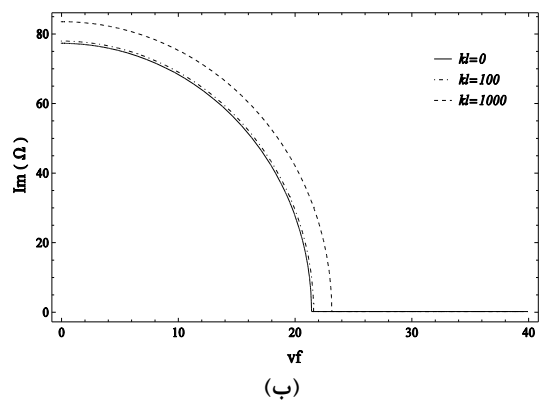
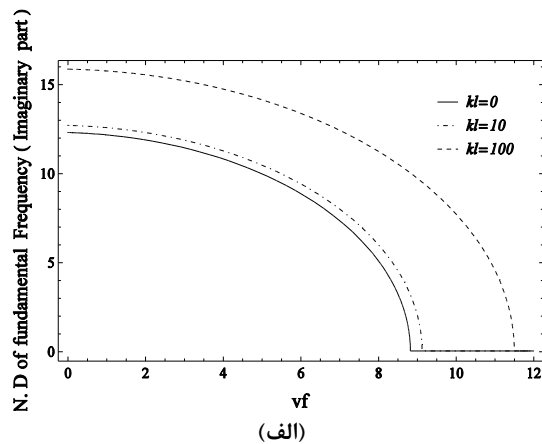
فرکانس طبیعی در یک سرعت ثابت با نرخ کندتری اتفاق می‌افتد.

۳-۲-۶- بررسی اثر تغییر ضخامت جداره به قطر خارجی شکل ۱۳-الف و ۱۳-ب تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) بر حسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  را برای مقادیر مختلفی از ضخامت جداره میکروتیر به قطر خارجی آن، به ترتیب برای شرط مرزی گیردار-آزاد و شرط مرزی دوسرگیردار نشان می‌دهند. از مشاهده نمودارها، حساسیت مقادیر فرکانسی به ضخامت جداره آشکار می‌شود، به طوری که با افزایش ضخامت جداره، فرکانس ارتعاشات به صورت محسوسی کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه بر حسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  برای مقادیر مختلف ضخامت جداره به قطر خارجی میکروتیر، الف) شرط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد و ب) شرط مرزی دوسرگیردار

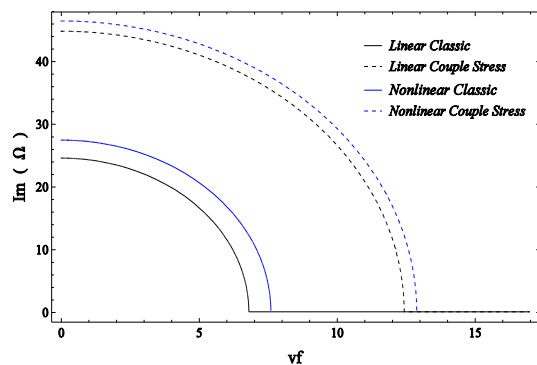
مقادیر مختلفی از سفتی وینکلر (خطی)  $k_f$  پارامتر بستر به ترتیب برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-آزاد و دوسرگیردار را نشان می‌دهند. از شکل ۱۲-الف و ۱۲-ب مشاهده می‌شود که فرکانس ارتعاشات در حالتی که بستر خطی در سیستم وجود نداشته باشد ( $k_f = 0$ )، با افزایش سرعت جریان داخلی به ترتیب تا مقدار  $8/7$  و  $21/8$  روند کاهشی دارد و در این مقادیر به صفر می‌رسد. علاوه بر این، در یک سرعت ثابت با افزایش مقدار ضریب خطی سفتی بستر، فرکانس ارتعاشات روند افزایشی دارد. لازم به ذکر است که در شکل ۱۲-الف برای میکروتیر یکسرگیردار-یکسر آزاد به دلیل داشتن قید ثابت کمتر تکیه‌گاهی نسبت به میکروتیر با شرایط مرزی دوسرگیردار، افزایش یا کاهش مقدار



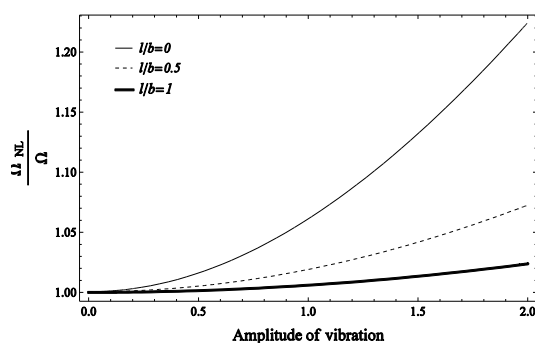
شکل ۱۲- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه بر حسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  برای مقادیر مختلف سفتی خطی بستر، الف) میکروتیر با شرط مرزی گیردار-آزاد و ب) میکرولوله با شرط مرزی دوسرگیردار

می‌دهد. مشاهده می‌شود که در نظریه کلاسیک تیر (با پارامتر مقیاس طول برابر با مقدار صفر) نمودار کاملاً رفتار غیرخطی دارد، ولی با افزایش پارامتر مقیاس طول، نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد و رفتار منحنی به سمت خطی بودن میل می‌کند و تا حدود دامنه ارتعاشات ۰/۵، فرکانس ارتعاشات کاملاً به صورت خطی بوده و پس از آن رفتار غیرخطی مشهود است.

شکل ۱۷، تغییرات نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلفی از سفتی خطی بستر  $k_f$  برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی خطی

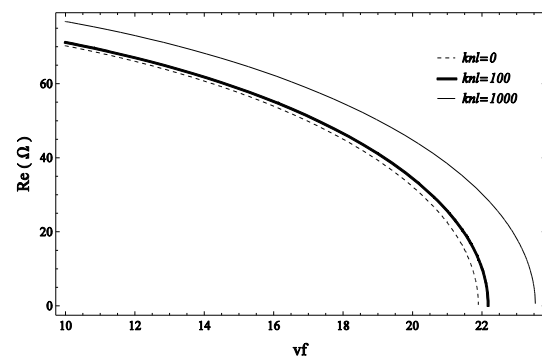


شکل ۱۵- تغییرات بخش موهومی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی گیردار-گیردار بر حسب سرعت سیال  $v_f$  برای دو حالت بستر خطی و غیرخطی در دو نظریه کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده



شکل ۱۶- تغییرات نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول ماده بی‌بعد برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار

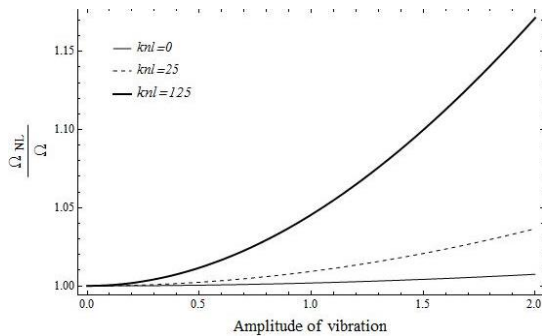
۳-۲-۷- بررسی اثر تغییر سفتی غیرخطی بستر شکل ۱۴، تغییرات بخش حقیقی مقدار ویژه (فرکانس طبیعی) برحسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  برای مقادیر مختلفی از ضریب سفتی غیرخطی بستر برای میکروتیر با شرایط مرزی دوسرگیردار را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار سفتی غیرخطی بستر، فرکانس ارتعاشات افزایش می‌یابد.



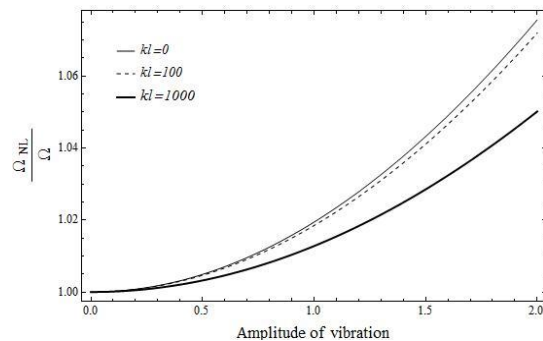
شکل ۱۴- تغییرات بخش حقیقی مقدار ویژه بر حسب سرعت جریان سیال داخلی  $v_f$  برای مقادیر مختلف سفتی غیرخطی بستر برای میکروتیر با شرط مرزی دوسرگیردار

شکل ۱۵، منحنی تغییرات بخش موهومی فرکانس طبیعی ارتعاشات میکروتیر با شرط مرزی گیردار-گیردار برحسب سرعت سیال  $v_f$  برای دو حالت بستر خطی و غیرخطی در نظریه‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده را نشان می‌دهد. از نمودارها مشاهده می‌شود که فرکانس ارتعاشات در حالت غیرخطی مقدار بیشتری را نسبت به حالت خطی در هر دو نظریه دارد؛ همچنین می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از نظریه غیرکلاسیک تنش کوپل (با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول) فرکانس ارتعاشات مقدار بیشتری را نشان می‌دهد؛ همچنین، با افزایش سرعت جریان داخلی  $v_f$  در هر دو نظریه و برای هر دو حالت بستر خطی و غیرخطی مقدار فرکانس طبیعی میکروتیر کاهش می‌یابد.

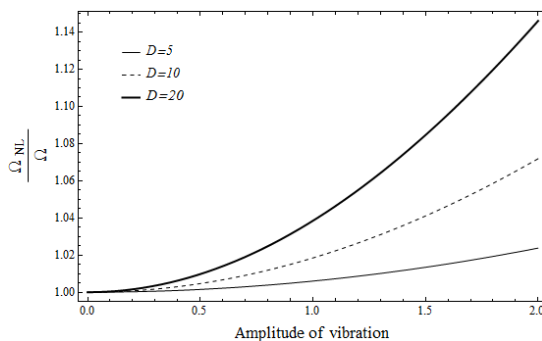
شکل ۱۶، تغییرات نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلفی از پارامتر مقیاس طول با فرض چشم پوشی از نیروی فشاری  $\psi$  میرایی  $c_d$  و لایه برشی  $k_g$  بستر و همچنین با فرض  $k_f = 10, k_{nl} = 50$  را برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار نشان



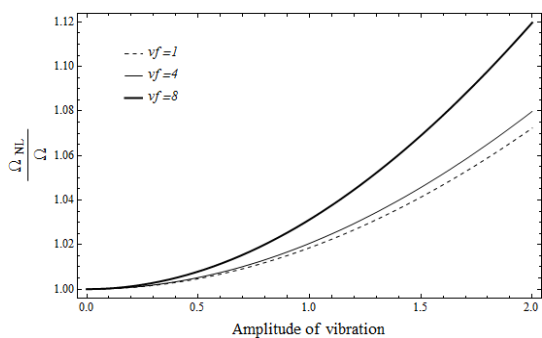
شکل ۱۸- تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات میکروتیر با شرایط مرزی گیردار- گیردار برای مقادیر مختلف سفتی غیرخطی بستر  $k_{nl}$



شکل ۱۷- تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلف سفتی خطی بستر  $k_l$  برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار



شکل ۱۹- تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات میکروتیر با شرایط مرزی گیردار- گیردار برای مقادیر مختلف قطر خارجی میکرولوله



شکل ۲۰- تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلف سرعت جریان داخلی  $v_f$  برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار

بستر، نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی میکروتیر کاهش می یابد و شیب آن کمتر شده است.

شکل ۱۸، تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات برای مقادیر مختلفی از پارامتر سفتی غیرخطی بستر برای میکروتیر با شرایط مرزی گیردار- گیردار را نشان می دهد. روند تغییرات فرکانس بی بعد در این شکل برخلاف شکل ۱۷ است، یعنی با افزایش مقدار ضریب سفتی غیرخطی بستر نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی بیشتر می شود.

شکل ۱۹، تغییرات نسبت فرکانس بی بعد غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار برای مقادیر مختلفی از قطر خارجی میکرولوله را نشان می دهد. از این شکل مشاهده می شود که افزایش قطر خارجی میکروتیر تاثیر مهمی بر رفتار غیرخطی نسبت بی بعد فرکانس دارد.

شکل ۲۰، تغییرات نسبت بی بعد فرکانس غیرخطی به خطی برحسب دامنه ارتعاشات میکروتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار برای مقادیر مختلف سرعت جریان داخلی  $v_f$  را نشان می دهد. مشاهده می شود که با افزایش سرعت داخلی جریان در میکروتیر مقدار نسبت بی بعد فرکانس غیرخطی به خطی افزایش یافته است.

#### ۴- نتیجه گیری

۱- مشاهده گردید که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اندازه، اختلاف بین نتایج به دست آمده از نظریه کلاسیک و غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح

شده کاهش یافته و برای مقادیر بالای این نسبت نتایج نظریه غیرکلاسیک به نتایج نظریه کلاسیک میل می کند.

۷- مشاهده شد که در سرعت‌های سیال نسبتاً کمتر از سرعت بحرانی، تغییرات فرکانس نسبت به تغییر سرعت سیال برای میکروتیر با شرط مرزی یکسرگیردار بسیار آرام‌تر از میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار اتفاق می‌افتد و فرکانس ارتعاش این نوع شرط مرزی در سرعت‌های کم سیال، به‌صورت محسوسی تحت تاثیر سرعت سیال داخلی نیست.

۸- مقادیر فرکانس خطی ارتعاشی که توسط نظریه تنش کوپل اصلاح شده پیش‌بینی شده‌اند، بیشتر از فرکانس در حالت کلاسیک هستند و این به دلیل آن است که سفتی خمشی خطی پیش‌بینی شده برای میکروتیر در این نظریه افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش ابعاد میکروتیر سفتی میکروتیر افزایش و یا به بیان دیگر، فرکانس طبیعی ارتعاشات افزایش می‌یابد.

۹- با افزایش میرایی بستر، مقادیر فرکانس و مقدار سرعتی که در آن ارتعاشات مود پایه سیستم متوقف می‌شود، هردو کاهش می‌یابند. نکته قابل توجه این است که سرعت جریان بحرانی برای وقوع ناپایداری واگرایی (تغییر علامت قسمت حقیقی یا همان مثبت شدن مقدار ویژه فرکانسی) تا زمانی که ناپایداری کمانشی در سیستم وجود دارد، کاملاً از مقدار پارامتر میرایی و ضریب میرایی لزوج بستر مستقل است.

۱۰- فرکانس ارتعاشات در حالت بستر کاملاً غیرخطی مقدار بیشتری را نسبت به حالت بستر خطی دارا است؛ همچنین، با افزایش سرعت جریان داخلی در هر دو نظریه و در هر دو حالت بستر خطی و غیرخطی باعث کاهش مقدار فرکانس طبیعی می‌شود.

## ۵- مراجع

- [1] Foldvari M, Bagonluri M (2008) Carbon nanotubes as functional excipients for nanomedicines: II. Drug delivery and biocompatibility issues. *Nanomed-Nanotechnol* 4: 183-200.
- [2] Modarres-Sadeghi Y, Paidoussis MP, Semler C (2008) Three-dimensional oscillations of a

۲- نتیجه گرفته شد که برای هر دو نوع شرط مرزی میکروتیر شامل تکیه‌گاه گیردار-گیردار و گیردار-آزاد با افزایش سرعت سیال داخل میکروتیر، فرکانس طبیعی ارتعاشات میکروتیر کاهش یافته تا اینکه برای مود اول و پایه سیستم در سرعت بحرانی به صفر می‌رسد.

۳- مشاهده گردید که برای میکروتیر با تکیه‌گاه یکسرگیردار از آنجایی که این نوع تکیه‌گاه در دو انتهای خود مقید نیست (مقید نبودن این نوع تکیه‌گاه در سر آزاد و دارای سفتی سازه‌ای کمتر نسبت به میکروتیر با تکیه‌گاه دوسر گیردار)، ناپایداری از نوع کمانشی را تجربه نمی‌کند. در حالی که برای میکروتیر با تکیه‌گاه دوسر گیردار، در مود اول، ناپایداری کمانشی پیش‌بینی می‌شود که در سرعت بحرانی می‌تواند اتفاق افتد که به موجب آن فرکانس طبیعی صفر می‌شود.

۴- با بررسی اثر مقیاس طول (اثر اندازه) در نظریه تنش کوپل اصلاح شده مشاهده گردید که رفتار دینامیکی میکروتیر حاوی سیال وابسته به پارامتر مقیاس اندازه است. در نظریه غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده به دلیل بالاتر بودن سفتی خطی سیستم در این مدل، فرکانس و سرعت بحرانی و در نتیجه محدوده پایداری بزرگتری را نسبت به مدل کلاسیک تیر پیش‌بینی می‌کند، به‌طوری‌که با افزایش پارامتر مقیاس طول این افزایش چشمگیرتر است.

۵- مشاهده شد که در هر دو نوع بستر وینکلر (بستر الاستیک) و بستر ویسکوالاستیک-پسترناک، فرکانس سیستم با افزایش مقدار سفتی بستر افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که افزایش سفتی کلی سیستم در مدل ویسکو-پسترناک به دلیل وجود سفتی لایه برشی، بیشتر از مدل بستر وینکلر است.

۶- مشاهده شد که محدوده پایداری میکروتیر با شرط مرزی یکسرگیردار-یکسر آزاد از محدوده پایداری در شرط مرزی دوسر گیردار کمتر است.

- [16] Hosseini M, Bahaadini R (2016) Size dependent stability an alysis of cantilever micro-pipes conveying fluid based on modified strain gradient theory. *Int J Eng Sci* 101: 1-13.
- [17] Gregory R, Paidoussis M (1966) Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. I. Theory. *P Roy Soc Lond A Mat.* 423(1730): 14-40.
- [18] Holmes P (1977) Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis. *J Sound Vib* 53(4): 471-503.
- [19] Yang T-Z, Ji S, Yang X-D, Fang B (2014) Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes. *Int J Eng Sci* 76: 47-55.
- [20] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynam* 86(3): 1761-1795.
- [21] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. *Int J Eng Sci* 138: 427-447.
- [22] Ebrahimi-Mamaghani A, Khadem SE (2016) Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using anonlinear energy sink. *Modares Mechanical Engineering* 16(9): 186-194. (in Persian)
- [23] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-ghrebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *J Fluid Struct* 87: 150-173.
- [24] Ebrahimi-Mamaghani A, Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Mostoufi N (2020) Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes. *Mater Res Express* 6(12): 1250c5.
- [25] Mirtalebi SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT, Mostoufi N (2019) Vibration control and manufacturing of intelligibly designed axially functionally graded cantilevered macro/micro-tubes. *IFAC-PapersOnLine* 52(10): 382-387.
- [۲۶] سعیدیها م، کرمی محمدی ا (۱۳۹۸) تحلیل ارتعاشات لوله حاوی جریان سیال، از جنس ماده هدفمند تابعی در راستای ضخامت. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۱۶-۱۰۷-۹(۴).
- [۲۷] رضایی م، عرب ملکی و (۱۳۹۸) ارائه حل تحلیلی برای مطالعه رفتار دینامیکی لوله‌های ویسکوالاستیک حامل cantilever pipe conveying fluid. *Int J Nonlin Mech* 43(1): 18-25.
- [3] Ghayesh MH, Paidoussis MP, Amabili M (2013) Nonlinear dynamics of cantilevered extensible pipes conveying fluid. *J Sound Vib* 332(24): 6405-6418.
- [4] Wang Q, Liew KM (2007) Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures. *Phys Lett A* 363: 236-242.
- [5] Tang M, Ni Q, Wang L, Luo Y, Wang Y (2014) Size-dependent vibration analysis of a microbeam in flow based on modified couple stress theory. *Int J Eng Sci* 85: 20-30.
- [6] Dai HL, Wang L, Ni Q (2015) Dynamics and pull-in instability of electrostatically actuated microbeams conveying fluid. *Microfluid Nanofluid* 18: 49-55.
- [7] Wang L, Liu HT, Ni Q, Wu Y (2013) Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure. *Int J Eng Sci* 71: 92-101.
- [8] Xia W, Wang L (2010) Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory. *Microfluid Nanofluid* 9: 955-962.
- [9] Ahangar S, Rezazadeh G, Shabani R, Ahmadi G, Toloie A (2011) On the stability of a microbeam conveying fluid considering modified couple stress theory. *Int J Mech Mater Des* 7: 327-342.
- [10] Kural S, Özkaya E (2017) Size-dependent vibrations of a microbeam conveying fluid and resting on an elastic foundation. *J Vib Control* 23(7): 1106-1114.
- [11] Zhang J, Meguid SA (2016) Effect of surface energy on the dynamic response and instability of fluid-conveying nanobeams. *Eur J Mech A-Solid* 58: 1-9.
- [12] Akgoz B, Civalek O (2012) Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory. *Arch Appl Mech* 82: 423-443.
- [13] Akgoz B, Civalek O (2011) Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. *Int J Eng Sci* 49: 1268-1280.
- [14] Akgoz B, Civalek O (2013) A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *Int J Eng Sci* 70: 1-14.
- [15] Yin L, Qian Q, Wang L (2011) Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid. *Appl Math Model* 35: 2864-2873.



- [29] Boresi P, Chong KP, Lee JD (2011) Elasticity in engineering mechanics. 3<sup>rd</sup> edn. John Wiley & Sons, Inc.
- [30] Saad M (2014) Elasticity, theory, applications, and Numerics. 3<sup>rd</sup> edn. Academic Press.

سیال با اعمال فرم کلی مدل ساختاری. نشریه پژوهشی  
مهندسی مکانیک ایران ۲۹-۶ (۱): ۲۱.

- [28] Kheiri M (2014) Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends. J Fluid Struct 49: 360-385.