



## بهینه‌سازی توپولوژی هندسه یک کانال دارای سه خروجی با دبی‌های مشخص در خروجی‌ها

زهرا طالب‌پور<sup>۱</sup>، امیدرضا محمدی‌پور<sup>۲</sup>، حسین عجم<sup>۳</sup> و حمید نیازمند<sup>۴\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

<sup>۲</sup> استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام‌نور، تهران

<sup>۳</sup> دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

<sup>۴</sup> استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۱۳

### چکیده

در مقاله حاضر، هندسه بهینه یک کانال چندراهی دوبعدی با یک ورودی و سه خروجی در  $Re = 10$  مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این ارزیابی، بهینه‌سازی توپولوژی بر اساس روش تخلخل و به کمک شبیه‌سازی شبکه بولتزمن صورت گرفته و در نهایت طرح بهینه با استفاده از آنالیز حساسیت یک تابع هدف ارائه شده است. برخلاف تحقیقات پیشین به جای ثابت نگاه داشتن عرض مجرا در خروجی‌ها، سرعت متوسط در این مقاطع یکسان در نظر گرفته شده درحالی‌که کاهش ۲۶/۰۴ درصدی در مقدار اتلاف انرژی در طرح بهینه گزارش شده است که این خود موید مزیت تغییر در عرض مجرا در مقایسه با تغییر در سرعت متوسط جریان است. بدین ترتیب، شرایط هندسه مجرای ورودی، شامل عرض و موقعیت مجرا نقش به‌سزایی در طرح نهایی خواهد داشت که پرداختن به آن هدف اصلی این تحقیق به شمار می‌رود. نتایج عددی حاکی از آن است که با فرض تغییرات خطی عرض مجرا در خروجی‌ها، کمترین افت توان جریان به‌ازای برابری عرض ورودی با بزرگترین خروجی حاصل خواهد شد. با قرار گرفتن ورودی جریان هم‌راستا با فضای میانی دو خروجی با عرض‌های متوسط و بزرگ، اتلافات به میزان ۲۳/۱۸٪ کمتر از حالتی است که ورودی در مقابل باریک‌ترین مجرا قرار گرفته باشد.

**کلمات کلیدی:** کانال چندراهی؛ جریان آرام؛ بهینه‌سازی؛ بهینه‌سازی توپولوژی؛ روش شبکه-بولتزمن.

## Topology Optimaization of the Geometry of a Three-Outlet Channel with Specified Outlet Flow Rates

Z. Talebpour<sup>1</sup>, O.R. Mohammadipour<sup>2</sup>, H. Ajam<sup>3</sup>, H. Niazmand<sup>4,\*</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Mashhad, Iran.

<sup>2</sup> Asst. Prof., Mech. Eng., Payame Noor Univ., Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Mashhad, Iran.

<sup>4</sup> Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Mashhad, Iran.

### Abstract

In the present paper, the optimal geometry of a two-dimensional multi-channel with one inlet and three outlets is investigated at  $Re=10$ . In this study, the topology optimization based on a porosity method using lattice Boltzmann simulation is adopted to find the optimal layout by computing the sensitivity analysis of an objective function. In contrary to previous studies of the channel with constant width of the outlets, the average velocity of the outlets is maintained as the same while the energy dissipation is reduced by 26.04%, showing the advantages of changing in width of ducts rather than the change in their average velocities. Therefore, the geometry of the inlet duct including width and position of the duct, play an important role in the final design as the main goal of this research. Assuming that the duct width in the outlets changes linearly, the numerical results showed that the equality of inlet width with the largest outlet caused the lowest power loss for the flow. The inlet being parallel to the space between the two outlets with medium and large widths, made a reduction of 23.18% of loss rather than the inlet was set in front of the duct with the smallest size.

**Keywords:** Multi-channel; Laminar Flow; Optimization; Topology Optimization; Lattice-Boltzmann Method.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: +۹۸(۵۱)۳۸۸۰۵۱۰۳

آدرس پست الکترونیک: [niazmand@um.ac.ir](mailto:niazmand@um.ac.ir)

## ۱- مقدمه

مسائل طراحی از جنبه‌های مختلفی نظیر، تکنولوژی‌های میکرو، بایو و مسائل چند منظوره، مورد توجه بسیاری از مهندسان در سال‌های اخیر بوده است. با توجه به اینکه طراحی‌های مهندسی رایج به شدت بر فراست و تجربه مهندسان طراح و به همان اندازه بر پیشرفت‌های مکرر طرح-های استخراج شده تکیه دارد، تنها تجربه مهندسی محدودی می‌تواند در این حوزه از مسائل طرح بالقوه را به دست دهد. به‌علاوه، اثرات فیزیکی در مقیاس‌های طولی کوچک و در مسائل چندمنظوره با توجه به طبیعت غیرخطی‌شان، معمولاً غیرشهودی هستند. در این راستا، ضرورت توسعه روش‌های پیشین در طراحی که بر اساس مدل‌های فیزیکی حاکم انجام می‌گرفتند، مهندسان را به سمت ارائه سبک‌های نوین در طراحی سوق می‌دهد. به‌ویژه، تحلیل و بررسی طرح و استفاده از روش‌های بهینه‌سازی برای مسائل طراحی چندمنظوره و سیالاتی، مهندسان طراح را در جهت حل چالش‌های کنونی مربوطه یاری خواهد کرد.

به‌منظور بهینه‌سازی طرح و ارائه طرح‌های نوین روش‌های مختلفی از قبیل، بهینه‌سازی اندازه، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی توپولوژی به کار گرفته شده‌اند. بهینه‌سازی شکل در چندین دهه به‌عنوان یک زمینه تحقیقاتی پرکار مطرح بوده است. از جمله نمونه دستاوردهای طراحی با این روش، می‌توان به پروفیل‌های بال هواپیما با داشتن کمترین نیروی پسا [۱-۵] و یا نازل با کمترین میزان افت فشار [۶] اشاره کرد. زمانی که برای رسیدن به طرح با کمترین نیروی پسا و یا افت فشار تلاش می‌شود، روش بهینه‌سازی شکل تنها روی شکلی فعالیت دارد که خصوصیات توپولوژیکی آن در حوزه طراحی مشخص است. مطالعات دیگری نیز در استفاده از این روش انجام شده که می‌توان به تحقیق صورت گرفته روی جریان‌های داخلی و خارجی [۷]، ارائه شکل بهینه در میکروکانال‌ها و میکرومیکسرها [۸ و ۹] و مقالات مروری [۱۰ و ۱۱] با کاربرد جریان ناپایدار در کاهش پسای فراصوت و انتقال حرارت اشاره کرد؛ اما در مقایسه با بهینه‌سازی شکل، بهینه‌سازی توپولوژی ابزار قدرتمندی در بهینه‌سازی ساختارها است که نه تنها اصلاح شکل مرزها را انجام می‌دهد، بلکه مرزها و

ساختارهای جدید را نیز درون حوزه طراحی بدون نیاز به شکل اولیه ظاهر می‌کند.

بهینه‌سازی توپولوژی جریان سیال، ابتدا توسط بوروال و پترسون [۱۲] در سال ۲۰۰۳ برای جریان‌های استوکس به کار گرفته شد. آن‌ها با استفاده از روش تخلخل که مشابه روش چگالی در بهینه‌سازی ساختار جامدات است، طرح بهینه را برای مسائل مختلف نازل، اتصال لوله و غیره به دست آوردند؛ در روش تخلخل حوزه طراحی، ابتدا به صورت محیط تماماً متخلخل در نظر گرفته شده و تخلخل به‌عنوان متغیر طراحی قلمداد می‌شود. اضافه کردن نیروی اصطکاکی ساختگی که متناسب با سرعت سیال است، به معادلات استوکس اجازه خواهد داد، در حوزه طراحی میان دو ناحیه سیال و جامد تمایز قائل گردد [۱۳ و ۱۴]. از آنجا که تئوری استوکس تنها برای جریان‌های با عدد رینولدز  $Re < 1$  معتبر است، گرزبورگ-هنسن و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۰۵، این رویکرد را به جریان‌های ناویر-استوکس در اعداد رینولدز پایین بزرگتر از ۱ توسعه دادند. اذمر و همکاران طرح بهینه‌ای برای مانیفولد هوا با به‌کارگیری معادلات ناویر-استوکس سه‌بعدی به دست آوردند [۱۶ و ۱۷]. در این مطالعات عموماً از گسسته‌سازی المان محدود و حجم محدود معادلات جریان بهره گرفته شده است. پینگن و همکاران [۱۸-۲۰]، با اتخاذ معادلات حالت پایدار شبکه بولتزمن جهت شبیه‌سازی میدان جریان، به بررسی و مقایسه نتایج حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی در روش شبکه بولتزمن و روش‌های مرسوم پرداختند. روش شبکه بولتزمن که به‌کارگیری آن موجب حل معادله شبه خطی و ساده شده انتقال بولتزمن به جای حل معادله غیرخطی ناویر-استوکس می‌شود، ضمن ایجاد قابلیت پردازش موازی، فرمولاسیون مسئله را به طور چشم‌گیری ساده می‌نماید [۲۱ و ۲۲]. این روش همچنین توانسته است، شبیه‌سازی جریان سیال در محیط‌های متخلخل را با موفقیت به انجام رساند [۲۳-۲۷].

مطالعات بسیاری جهت ارائه طرح بهینه در مسائل میکرو جریان از قبیل اتصال لوله و یا کانال‌های انشعابی با روش بهینه‌سازی توپولوژی انجام شده است که توانمندی این روش را در استخراج مسیر بهینه جریان نشان می‌دهد. ژائو و همکاران [۲۸]، در طراحی کانال‌های انشعابی با روش بهینه‌سازی توپولوژی، اثر نرخ جریان جرمی مختلف در

تراکم‌ناپذیر و پایا فرض شده است، به ترتیب بقای جرم و اندازه حرکت خطی بوده که به صورت معادلات (۱) و (۲) نوشته می‌شوند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (۱)$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\vec{\nabla}^2\vec{u} - \vec{F} \quad (۲)$$

که در آن  $\vec{u}$  بردار سرعت،  $\rho$  چگالی،  $P$  فشار و  $\nu$  ویسکوزیته سینماتیکی است. جهت مدلسازی جریان در محیط متخلخل از  $\vec{F}$  بردار نیروی خارجی به‌عنوان یک نیروی در خلاف جهت جریان استفاده شده است. به عبارت دیگر، تمام پیچیدگی‌های جریان در محیط متخلخل در این نیروی حجمی نهفته شده است که در بخش‌های بعدی به جزئیات آن پرداخته خواهد شد. در این پژوهش، جریان سیال در یک فضای مستطیلی متخلخل صورت می‌پذیرد که مرزهای آن جز در مقاطع ورود و خروج، به صورت مرز ساکن (شرط عدم لغزش) مدل می‌گردد. در ورودی و خروجی‌ها نیز شرط مرزی از نوع دیرپچله (سرعت معلوم) خواهد بود. شرایط اولیه در کل حوزه محاسباتی به‌صورت مقادیر سرعت صفر و چگالی برابر با یک (چگالی مرجع) در نظر گرفته می‌شود. حوزه جریان سیال بر اساس این مقادیر اولیه و تخلخل یکنواخت در کل حوزه با روش عددی حل می‌شود تا نتایج به شرایط پایای خود برسد. پس از آن میزان تخلخل در فضای حل به کمک روش بهینه‌سازی توپولوژی به‌تدریج تغییر می‌یابد تا در نهایت هندسه نهایی جریان شکل گیرد. پیش از پرداختن به چگونگی تغییر تخلخل در روش بهینه‌سازی، ابتدا نحوه شبیه‌سازی عددی جریان به اختصار معرفی می‌شود.

### ۳- حل معادلات حاکم در محیط متخلخل با روش

#### شبکه بولتزمن

برای حل عددی معادلات جریان از روش شبکه بولتزمن با یک ثابت تخفیف زمانی BGK<sup>۱</sup> استفاده شده است [۳۲]. متغیر اصلی در رابطه بولتزمن تابع توزیع ذره  $f(\vec{x}, \vec{e}, t)$  است که معرف احتمال حضور ذرات با سرعت مشخص  $\vec{e}$  در مکان  $\vec{x}$  و زمان  $t$  است. معادله حاکم بر این تابع توزیع به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود [۳۳]:

خروجی‌های کانال بر طرح بهینه به‌دست آمده را با هدف کمترین میزان اتلافات لزجی در مسیر جریان بررسی کردند.

در مسائل چندراهی، اعمال دبی‌های متفاوت در خروجی‌ها یکی از ارکان اصلی تحلیل به‌شمار می‌رود. در این موارد دیدگاه غالب اعمال توزیع سرعت‌های متفاوت برای هندسه‌های (عرض‌های) یکسان خروجی است [۲۸]. این در حالی است که در بسیاری از کانال‌های چندراهی طبیعی که نمونه‌ای از آن‌ها را می‌توان مسئله سرخ‌گ‌ها و ختم آن‌ها به انشعاب‌های کوچک‌تر [۲۹] در نظر گرفت، اختلاف در جریان جرمی خروجی‌ها، معمولاً از طریق افزایش اندازه عرض مجرا اعمال می‌شود. علت این است که به ازای دبی جرمی ثابت، مجراهای عریض‌تر تنش برشی کمتری را تجربه می‌کنند. با این وجود مطالعه تحقیقات گذشته حاکی از آن است که اثرات تفاوت در هندسه‌های خروجی کمتر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در این پژوهش برای اولین بار، بهینه‌سازی توپولوژی با فرض رشد خطی کانال‌های خروجی اعمال گردیده است. هندسه مورد بررسی شامل، سه خروجی و یک ورودی است که به صورت دو بعدی و به کمک روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی شده است. روش بهینه‌سازی توپولوژی مورد استفاده مبتنی بر تخلخل محیط بوده و با هدف به حداقل رساندن اتلافات انرژی شامل، اتلافات لزجی و اصطکاکی صورت گرفته است. نتایج حاکی از آن است که طرح نهایی در مسئله مورد بررسی در مقایسه با هندسه مشابه آن در مرجع [۲۸]، از اتلافات انرژی کمتری برخوردار است که دلیل دیگر بر ضرورت انجام این تحقیق است.

### ۲- معادلات حاکم در محیط متخلخل و شرایط

#### مرزی

بعد از تحقیقات بوروال و پترسون [۱۲] و در جهت توسعه روش بهینه‌سازی توپولوژی، مدل‌های تعمیم‌یافته بسیاری برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر با دمای ثابت در محیط متخلخل ارائه گردید. در این مطالعه، معادله بریکمن غیرخطی، یا به عبارتی معادله داریسی-استوکس [۳۰ و ۳۱]، برای توصیف جریان سیال لزج در یک محیط متخلخل به‌کار گرفته شده است. قوانین حاکم بر این مسئله که به صورت

<sup>۱</sup> Bhatnagar-Gross-Krook

در این رابطه،  $\varepsilon$  یک ثابت مثبت کوچک و  $\alpha_0$  یک ثابت مثبت بزرگ است. در این پژوهش،  $\alpha_0 = 1 \times 10^3$  و  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  در نظر گرفته شده است. در نهایت کمیت‌های ماکروسکوپی جریان از قبیل، چگالی و سرعت در یک محیط متخلخل بر اساس توابع توزیع محاسبه خواهند شد [۳۵]:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (10)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^8 \vec{e}_i f_i + \frac{\delta t}{2} \hat{F} \quad (11)$$

ویسکوزیته سینماتیکی سیال تابعی از ثابت تخفیف زمانی بوده که به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود [۳۶]:

$$v = (\tau - 0.5)c_s^2 \quad (12)$$

برای مدلسازی شرط عدم لغزش روی دیواره‌های حوزه حل، از پرش معکوس و برای اعمال پروفیل سرعت در ورودی و خروجی‌ها از شرط مرزی زو و هی استفاده شده است [۳۷]. عدد رینولدز در این جریان بر مبنای سرعت متوسط و عرض مجرا در ورودی محاسبه شده و در تمام شبیه‌سازی‌ها برابر با  $Re = 10$  در نظر گرفته شده است.

#### ۴- فرمولاسیون بهینه‌سازی توپولوژی

در روش بهینه‌سازی توپولوژی مقصود بهبود شکل و ارائه مرزهای بهینه یک هندسه بدون نیاز به حل اولیه است، به گونه‌ای که تابع هدف موردنظر در طول مسیر جریان، کمترین مقدار خود را داشته باشد. در حالت کلی یک مسئله بهینه‌سازی توپولوژی برای یک جریان در شرایط پایدار به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$\mathcal{F}(\vec{u}, \varepsilon),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon, \\ \vec{u}, \end{array} \right. \quad \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}, \quad (13)$$

حل معادلات حاکم به‌ازای مقادیر مختلف  $\vec{u}, \varepsilon$  با قید

$\mathcal{F}$  تابع هدف است و  $\varepsilon$  به‌عنوان متغیر طراحی محدود به دو مقدار  $\varepsilon_{\min}$  و  $\varepsilon_{\max}$  است که در بهینه‌سازی توپولوژی این حدود معمولاً برابر با مقادیر متناظر با حوزه سیال ( $\varepsilon_{\max} = 1$ ) و حوزه جامد ( $\varepsilon_{\min} = 0/0.01$ ) در نظر گرفته می‌شوند.

در این پژوهش، تابع هدف، اتلافات انرژی به‌صورت مجموع اتلافات لزجی  $D(\vec{u}, \varepsilon)$  و اصطکاکی  $C(\vec{u}, \varepsilon)$  در نظر گرفته شده که به شرح زیر بیان می‌شوند [۱۳]:

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\vec{x}, t) - f_i(\vec{x}, t)] + \delta t F_i(\vec{x}, t) \quad (3)$$

در معادله (۳)،  $f_i^{eq}$  تابع توزیع تعادلی و  $F_i$  ترم نیروی خارجی مربوط به حوزه متخلخل است که با رابطه (۴-۵) ارائه می‌شوند [۳۴]:

$$f_i^{eq}(\vec{x}, t) = \omega_i \rho \left[ 1 + \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{u} \times \vec{u}) : (\vec{e}_i \times \vec{e}_i - c_s^2 I)}{2\varepsilon c_s^4} \right] \quad (4)$$

$$F_i(\vec{x}, t) = \omega_i \rho \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left[ \frac{\vec{e}_i \cdot \hat{F}}{c_s^2} + \frac{(\vec{u} \times \hat{F}) : (\vec{e}_i \times \vec{e}_i - c_s^2 I)}{\varepsilon c_s^4} \right] \quad (5)$$

در شبکه دوبعدی و ۹ سرعته (D2Q9) سرعت صوت برابر با  $c_s = 1/\sqrt{3}$  بوده و شبکه سرعت و ضرایب وزنی متناظر با آن به صورت رابطه (۶-۷) بیان خواهد شد.

$$e_0 = (0, 0),$$

$$e_{i=1-4} = (\cos\theta_i, \sin\theta_i), \theta_i = (i-1)\frac{\pi}{2}$$

$$e_{i=5-8} = \sqrt{2}(\cos\theta_i, \sin\theta_i), \theta_i = (i-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & \text{for } i = 0 \\ 1/9 & \text{for } i = 1-4 \\ 1/36 & \text{for } i = 5-8 \end{cases} \quad (7)$$

در این پژوهش، برای ارائه دو حوزه سیال و غیر سیال (شبه جامد) در محیط متخلخل، از مدل بوروال و پترسون [۱۲] استفاده می‌شود که در آن ضریب تخلخل  $\varepsilon = 1$  بیان‌گر سیال و  $\varepsilon = 0$  نشان دهنده حوزه کاملاً جامد خواهد بود (به‌منظور جلوگیری از واگرایی حل از محدودیت  $\varepsilon < 1 \times 10^{-3}$  برای حوزه تماماً جامد استفاده شده است). در این روش مرز به جای یک خط، یک ناحیه باریک با ضریب تخلخلی بین دو مقدار حدی  $0.01$  و  $1$  خواهد بود. نیروی خارجی  $\hat{F}$  ناشی از مقاومت محیط متخلخل در برابر جریان که در معادله (۵) ظاهر شده است، به‌صورت رابطه (۸) بیان می‌شود [۱۳]:

$$\hat{F} = -\alpha(\varepsilon)\vec{u} \quad (8)$$

در آن ضریب پسا  $\alpha(\varepsilon)$  به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 \varepsilon \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon + \underline{\varepsilon}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & D(\bar{u}, \varepsilon) + C(\bar{u}, \varepsilon) \\ & + \langle \bar{u}(x, t) - \bar{u}_{LBM}(\varepsilon, x, t), v(x, t) \rangle \\ & + \langle \varepsilon(x, t), \eta_1(x, t) \rangle \\ & + \langle (1 - \varepsilon(x, t)), \eta_2(x, t) \rangle \\ & + \left( \int_{\Omega} \varepsilon(x, t) dx - V(t) \right) \eta_3 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که  $v(x, t) \in \mathbb{R}^3$ ،  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  ضرایب لاگرانژ هستند. از  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  به منظور ضرب داخلی  $\langle f(x, t), g(x, t) \rangle = \iint f(x, t)g(x, t) dxdt$  استفاده شده است. شرط لازم بهینگی مسئله بهینه‌سازی به صورت مشتق تابع لاگرانژ  $\mathcal{L}$  نسبت به متغیر طراحی به صورت روابط (۲۰) بیان می‌شود [۱۳]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon}(x, t) = 0 \quad (۲۰-الف)$$

$$\bar{u}(x, t) - \bar{u}_{LBM}(\varepsilon, x, t) = 0 \quad (۲۰-ب)$$

$$\varepsilon(x, t) \geq 0, \eta_1(x, t) \leq 0, \varepsilon(x, t)\eta_1(x, t) = 0, \forall x \in \Omega,$$

$$\forall t \in [0, T] \quad (۲۰-ج)$$

$$(1 - \varepsilon(x, t)) \geq 0, \eta_2(x, t) \leq 0,$$

$$(1 - \varepsilon(x, t))\eta_2(x, t) = 0,$$

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T] \quad (۲۰-د)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x, T) dx - \bar{V} = 0 \quad (۲۰-ه)$$

به منظور حل معادلات (۲۰)، معادلات دیفرانسیلی جزئی زیر بررسی خواهند شد:

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_{LBM}(\varepsilon, x, t) \quad (t \in [0, T]) \quad (۲۱-الف)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x, t) = \begin{cases} \max \left\{ 0, -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon}(x, t) - M(t) \right\} & \text{if } \varepsilon(x, t) = 0, \\ -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon}(x, t) - M(t) & \text{if } 0 < \varepsilon(x, t) < 1, \\ \min \left\{ 0, -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon}(x, t) - M(t) \right\} & \text{if } \varepsilon(x, t) = 1. \end{cases} \quad (۲۱-ب)$$

و در فرم  $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \delta \varepsilon_k$  خواهیم داشت:

$$D(\bar{u}, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^p v \|\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T\|^2 dx \quad (۱۴)$$

$$C(\bar{u}, \varepsilon) = - \int_{\Omega} \hat{F} \cdot \bar{u} dx = \int_{\Omega} \alpha(\varepsilon) \|\bar{u}\|^2 dx \quad (۱۵)$$

که  $\|\cdot\|$  نشان‌دهنده عملگر نرم بوده و انتگرال بر کل حوزه حل،  $\Omega$ ، اعمال می‌شود. از نقطه نظر فیزیکی، توان  $p$  در یک ناحیه غیرمتخلخل بایستی صفر باشد؛ اما با توجه به مرجع [۱۲ و ۱۳] به منظور دستیابی به همگرایی در بهینه‌سازی، این پارامتر در محدوده  $2 < p < 10$  متغیر است. در این پژوهش تنها قیدهای بهینه‌سازی به کار رفته، حوزه تغییرات تخلخل در حوزه محاسباتی و قید حجم سیال (ماکزیمم مقدار مجاز سیال در حوزه حل) است.

$$0 \leq \varepsilon_k(x, t) \leq 1 \quad (۱۶)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x, t) dx = V(t) \quad (۱۷)$$

که زیرنویس  $k$  مقادیر را در گام زمانی  $kt$  نشان می‌دهد؛ به عبارت دیگر،  $t \in [0, T]$  و  $t = k\delta t$  که  $T$  زمان را در انتهای فرآیند بهینه‌سازی نشان می‌دهد. قید (۱۷) که تابعی از زمان فرآیند بهینه‌سازی است، طبق رابطه (۱۸) به صورت تدریجی به ماکزیمم مقدار خود یا همان کسر حجم سیال موردنظر، میل می‌کند [۱۳].

$$V(t) = (V_0 - \bar{V}) \exp(-\omega t) + \bar{V} \quad (۱۸)$$

که  $\omega$  یک ثابت جهت کنترل همگرایی مسئله است.  $V_0$  حجم اولیه مجاز سیال در حوزه است که بر اساس مقدار اولیه تخلخل در کل حوزه (در این پژوهش برابر با ۰/۰۱ است) تعیین می‌شود و  $\bar{V}$  کسر حجم سیال بوده و به عنوان ورودی مسئله در نظر گرفته می‌شود.

## ۵- آنالیز حساسیت در بهینه‌سازی توپولوژی

مسئله بهینه‌سازی توپولوژی یا همان رابطه (۱۳) یک مسئله گرادیان محور است که با احتساب مشتقات توابع هدف و قیود، مسیرهای موردنظر در حوزه طراحی در دستیابی به حل ممکن و بهینه را به دست می‌دهد. در این رویکرد گرادیان  $dF/d\varepsilon$ ، تابع هدف  $\mathcal{F}$  را به سمت حل بهینه محلی سوق می‌دهد. به منظور محاسبه گرادیان تابع هدف، ابتدا تابع لاگرانژ مربوط به بهینه‌سازی طبق رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

تابع هدف  $\mathcal{F}$  در گام زمانی بعدی نسبت به متغیر طراحی  $\varepsilon_k$ ،

$$\frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial\varepsilon_k} = \frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \bigg|_{\varepsilon} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial\varepsilon_k} + \frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial\varepsilon_k} \bigg|_u \quad (25)$$

معادله حساسیت (۲۵) شامل سه مشتق جزئی  $\partial(D+C)_{k+1}/\partial\varepsilon_k$ ،  $\partial u_{k+1}/\partial\varepsilon_k$  و  $\partial(D+C)_{k+1}/\partial u_{k+1}$  است که بر اساس معادلات توابع هدف  $D$  و  $C$  و رابطه سرعت در محیط متخلخل محاسبه می‌شوند. برای مولفه‌های اول و سوم روابط (۲۶-۲۷) به دست آمده‌اند [۱۳]:

$$\frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \bigg|_{\varepsilon} = \varepsilon_k^p v \Delta u_{k+1}(u_k, \varepsilon_k) \delta r + 2\alpha u_{k+1}(u_k, \varepsilon_k) \delta r \quad (26)$$

$$\frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial\varepsilon_k} \bigg|_u = \frac{p}{2} \varepsilon_k^{p-1} v \|\nabla u_k + (\nabla u_k)^T\|^2 \delta r + \frac{d\alpha}{d\varepsilon_k} \|u_k\|^2 \delta r \quad (27)$$

در رابطه (۲۶)  $u_{k+1}(u_k, \varepsilon_k)$  با استفاده از معادلات شبکه بولتزمن و متغیر طراحی در گام زمانی قبلی محاسبه می‌شود. با فرض پایداری جریان سیال در گام نهایی بهینه‌سازی،  $t = T$  و کوچک بودن عدد رینولدز،  $u_{k+1}(u_k, \varepsilon_k)$  را می‌توان با  $u_k$  وابسته به  $\varepsilon_k$  و  $u_{k-1}$  تقریب زد:

$$\frac{\partial(D+C)_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \bigg|_{\varepsilon} \approx \varepsilon_k^p v \Delta u_k(u_{k-1}, \varepsilon_k) \delta r + 2\alpha u_k(u_{k-1}, \varepsilon_k) \delta r \quad (28)$$

به منظور تخمین مشتق جزئی دوم از رابطه (۲۵)، این نکته قابل توجه است که سرعت  $u_{k+1}$  تابعی از متغیر طراحی  $\varepsilon$  و تابع توزیع  $f$  است. با این حال، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial\varepsilon_k} = \sum_{i=0}^8 \frac{\partial u_{k+1}}{\partial f_i(x, t + \delta t)} \frac{\partial f_i(x, t + \delta t)}{\partial\varepsilon_k} \quad (29)$$

که مولفه اول سمت راست با استفاده از تعاریف (۳) و (۸) طبق رابطه (۳۰) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial f_i} = \frac{\left(\frac{e_i}{1+\alpha\delta t/2} - u\right)}{\rho} \quad (30)$$

$$\varepsilon_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{if } -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon} \delta t - M_k \leq 0, \\ \varepsilon_k - \kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon} \delta t - M_k & \text{if } 0 < -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon} \delta t - M_k \\ 1 & \text{if } -\kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon} \delta t - M_k \geq 1. \end{cases} \quad (22)$$

که ضریب  $\kappa > 0$  به عنوان شاخصی از سرعت همگرایی روش به کاررفته به صورت زیر طبق مراجع [۱۳ و ۱۴] تعریف می‌شود:

$$\max_{\{x|0 < \varepsilon(x) < 1\}} \left( \kappa \frac{d(D+C)}{d\varepsilon}(x, t) \right) = 0.01 \quad (23)$$

متغیر  $M$  در رابطه (۲۲) جهت کنترل حجم سیال در هر گام زمانی طبق الگوریتم زیر به دست می‌آید:

- گام ۱: محاسبه  $\delta\varepsilon_{\text{temp}}^i = -\kappa d(D+C)/d\varepsilon$  و  $\varepsilon_{\text{temp}}^i = \varepsilon_k^i + \delta\varepsilon_{\text{temp}}^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) به عنوان مقادیر موقت تخلخل بر اساس مقادیر آن‌ها در گام زمانی پیشین.
- گام ۲: اختصاص یک مقدار  $\varepsilon_{\text{temp}}(x)$  برای هر گره شبکه با ارضای  $\varepsilon_{\text{temp}}^1 \leq \varepsilon_{\text{temp}}^2 \leq \dots \leq \varepsilon_{\text{temp}}^N$  که  $N = T/\delta t$  تعداد کل نقاط شبکه به جزء مرزهای جامد حوزه است.
- گام ۳: تعریف  $X(\varepsilon_{\text{temp}}^i) = (N-i)\delta r$  که  $\delta r$  حجم هر المان (در حالت سه بعدی) است، بیان کننده حجم تمامی المان‌هایی که  $\varepsilon_{\text{temp}}$  آن‌ها طبق گام ۲ مرتب شده بودند، بزرگتر مساوی  $\varepsilon_{\text{temp}}^i$  باشد.
- گام ۴: با استفاده از  $X(\varepsilon_{\text{temp}})$  و رابطه (۱۷)، انتگرال  $\varepsilon$  را می‌توان با رابطه (۲۴) تخمین زد:

$$\int_{\varepsilon_{k+1}} dx = \int X(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{M_k < \varepsilon_{\text{temp}}^i < 1+M_k} (\varepsilon_{\text{temp}}^{i+1} - \varepsilon_{\text{temp}}^i) \cdot X(\varepsilon_{\text{temp}}^i) \quad (24)$$

- گام ۵: در نهایت، متغیر  $M$  با ارضای رابطه (۲۴) که برابر با  $V_{k+1}$  است، به دست می‌آید.
- در هر گام زمانی بهینه‌سازی متغیر طراحی که در واقع  $\delta\varepsilon_k$  است، میدان جریان گام زمانی بعدی تحت تأثیر قرار می‌گیرد. از این رو جهت محاسبه  $\varepsilon_{k+1}$  در رابطه (۲۲)، مشتق

سرعت معلوم در این مجراها به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$U_{in}(y) = \begin{cases} -\bar{U} \left( y - \frac{9L}{20} \right) \left( y - \frac{11L}{20} \right) & \text{for } \frac{9L}{20} \leq y \leq \frac{11L}{20} \\ 0 & \text{for } y \leq \frac{9L}{20}, \frac{11L}{20} \leq y \end{cases}$$

$$U_{out}(y) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\bar{U} \left( y - \frac{7L}{40} \right) \left( y - \frac{11L}{40} \right) & \text{for } \frac{7L}{40} \leq y \leq \frac{11L}{40} \\ -\frac{1}{3}\bar{U} \left( y - \frac{18L}{40} \right) \left( y - \frac{22L}{40} \right) & \text{for } \frac{18L}{40} \leq y \leq \frac{22L}{40} \\ -\frac{1}{3}\bar{U} \left( y - \frac{29L}{40} \right) \left( y - \frac{33L}{40} \right) & \text{for } y \leq \frac{9L}{20}, \frac{11L}{20} \leq y \end{cases} \quad (34)$$

#### ۶-۱- اعتبارسنجی برنامه عددی

برای اعتبارسنجی برنامه عددی، جریان آرام تراکم‌ناپذیر در یک نازل دوبعدی با یک ورودی و یک خروجی، در عدد رینولدز ۱۰ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. شرایط سرعت سیال در ورودی و خروجی حوزه مطابق مرجع [۱۲] اعمال گردیده است. در این اعتبارسنجی  $N_x$  و  $N_y$  به ترتیب تعداد گره‌ها در جهت  $x$  و  $y$  هر دو برابر ۱۰۰ است و ثابت تخفیف زمانی و ماکزیمم حجم مجاز برای سیال درون حوزه به ترتیب برابر با  $\tau = 0.6$  و  $\bar{V} = 0.5 |\Omega|$  لحاظ گردیده است. نتایج به دست آمده از الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی با هدف کمترین اتلافات لزجتی و اصطکاکی در شکل ۳ با نتایج گزارش شده در مرجع [۱۲] مقایسه شده است. چنانچه در این شکل مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج (شامل هندسه و مرز مجرای بهینه) وجود دارد که نشان از دقت و صحت برنامه عددی نوشته شده دارد.

برای اثبات استقلال نتایج از ابعاد شبکه در مسئله مورد بررسی در این پژوهش (چهارراهی با یک ورودی و سه خروجی)، حوزه طراحی نشان داده شده در شکل ۲ با تعداد گره  $40 \times 40$  و افزایش آن تا  $140 \times 140$  در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده از مقدار تابع هدف در طی فرآیند بهینه‌سازی با احتساب  $Re = 10$ ،  $\tau = 0.6$  و  $\bar{V} = 0.5 |\Omega|$  همان‌طور که در همگرایی حلگر برای شبکه‌های مختلف مشاهده می‌شود، تعداد ۱۲۰ گره در هر دو جهت  $x$  و  $y$  برای این مسئله کافی است.

با استفاده از معادلات شبکه بولتزنم و تعاریف تابع توزیع تعادلی و نیروی خارجی در حوزه متخلخل، روابط (۴) و (۵)،  $f_i$  نسبت به  $\varepsilon$  به صورت رابطه (۳۱) مشتق پذیر خواهد بود:

$$\frac{\partial f_i(x, t + \delta t)}{\partial \varepsilon_k} = \frac{\partial f_i^{col}(x - \delta t e_i, t)}{\partial \varepsilon_k} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{eq}(x - \delta t e_i, t)}{\partial \varepsilon_k} + \delta t \frac{\partial F_i(x - \delta t e_i, t)}{\partial \varepsilon_k} \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_i^{eq}(x, t)}{\partial \varepsilon_k} = -\omega_i \rho \frac{(u_k \times u_k) : (e_i \times e_i - c_s^2 I)}{2c_s^4} \frac{1}{\varepsilon_k^2} \quad (32)$$

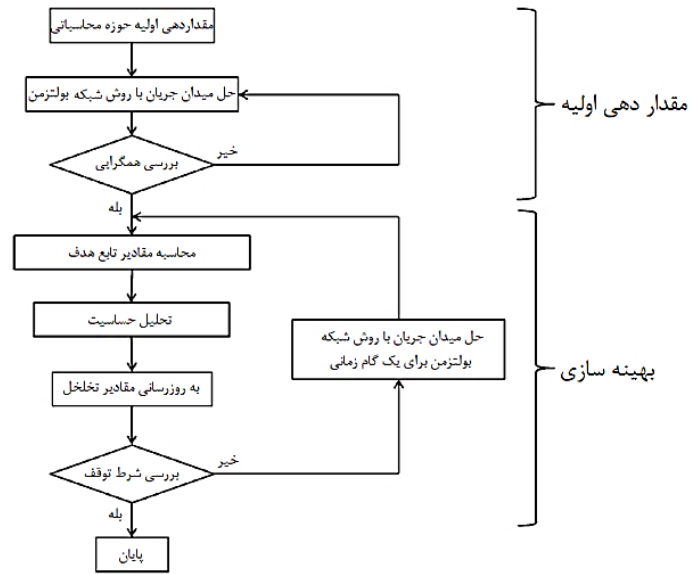
$$\frac{\partial F_i(x, t)}{\partial \varepsilon_k} = -\omega_i \rho \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right)$$

$$\left[ \frac{e_i \cdot u_k}{c_s^2} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \varepsilon_k} + \frac{(u_k \times u_k) : (e_i \times e_i - c_s^2 I)}{c_s^4} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \left( \frac{\alpha_k}{\varepsilon_k} \right) \right] \quad (33)$$

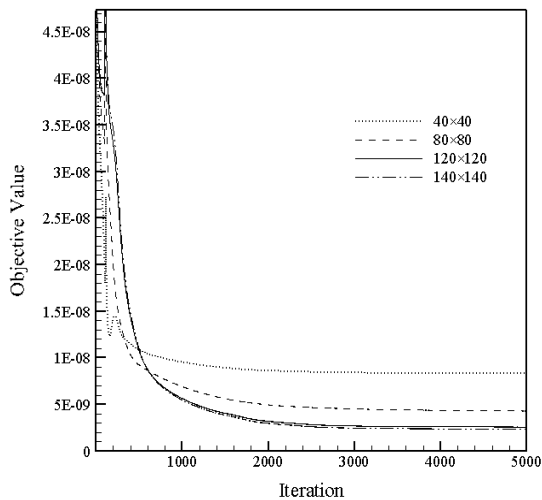
نمودار درختی الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی در شکل ۱ نشان داده شده است. در ابتدا جریان سیال با استفاده از روش شبکه بولتزنم شبیه‌سازی شده و تا رسیدن به حل پایا فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی آغاز نمی‌گردد. پس از محاسبه گرادینان تابع هدف نسبت به متغیر طراحی، توزیع  $\varepsilon$  با استفاده از رابطه (۲۲) به روز می‌شود. پس از چندین تکرار،  $u_k$  و  $\varepsilon_k$  با برقراری کوچکترین کران بالای  $|\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_k| < \delta_u$  و  $|\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k| < \delta_\varepsilon$  که جهت مانیتور کردن حل پایا برای هر دو متغیر به ترتیب سرعت و تخلخل به کار می‌رود، همگرا شده و فرآیند بهینه‌سازی خاتمه می‌یابد. شایان ذکر است که شرط بهینگی تنها مقادیر صفر و یک  $\varepsilon$  را ارضا نمی‌کند و مرز بین دو حوزه سیال و جامد که مقادیر متوسط  $\varepsilon$  را شامل می‌شود، می‌تواند کاهش قابل توجهی را در ضخامت با افزایش تعداد گره‌های شبکه محاسباتی تجربه کند. در این پژوهش، آستانه‌ها برابر با  $\delta_u = 1 \times 10^{-3}$  و  $\delta_\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  در نظر گرفته شده‌اند.

#### ۶- فیزیک مسئله/چندراهی با تعداد ۳ خروجی

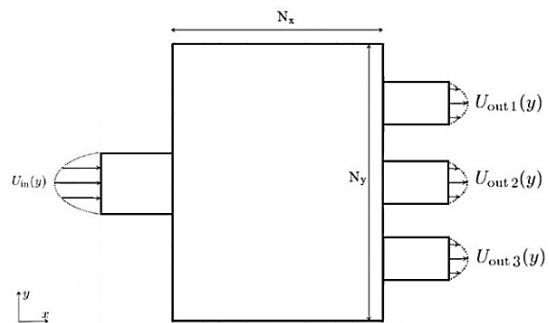
شماتیکی از فیزیک مسئله حاضر در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، یک کانال انشعابی/چندراهی با ارتفاع و طول  $L$  شامل، یک و ۳ مجرا به ترتیب در ورودی و خروجی است که شرایط مرزی



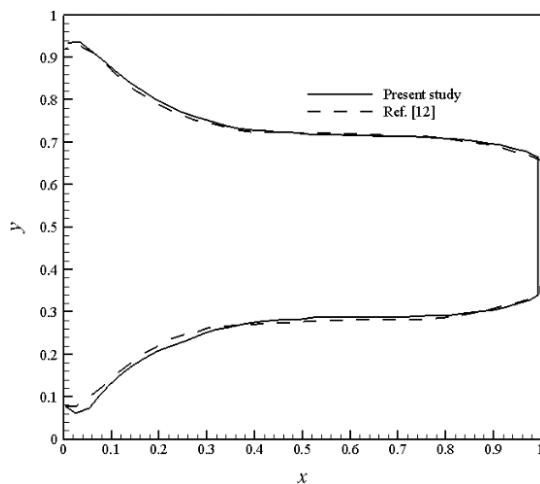
شکل ۱- نمودار درختی روش بهینه‌سازی توپولوژی



شکل ۴- همگرایی تابع هدف در طرح بهینه کانال در حوزه با تعداد گره‌های مختلف در  $Re = 10$ ،  $\tau = 0.06$  و  $|\bar{V}| = 0.05$  برای مطالعه استقلال نتایج از شبکه



شکل ۲- حوزه بهینه‌سازی و شرایط مرزی



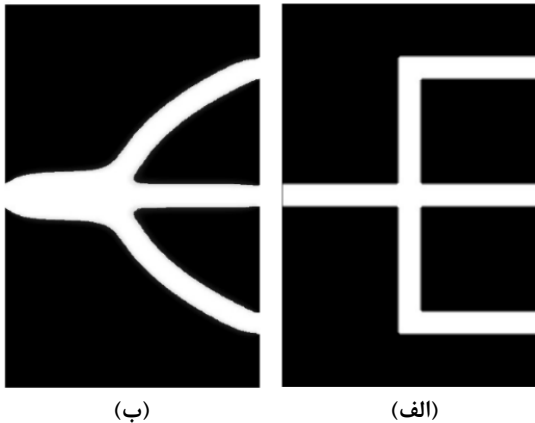
شکل ۳- مقایسه طرح بهینه یک نازل در مطالعه حاضر با

مرجع [۱۲]

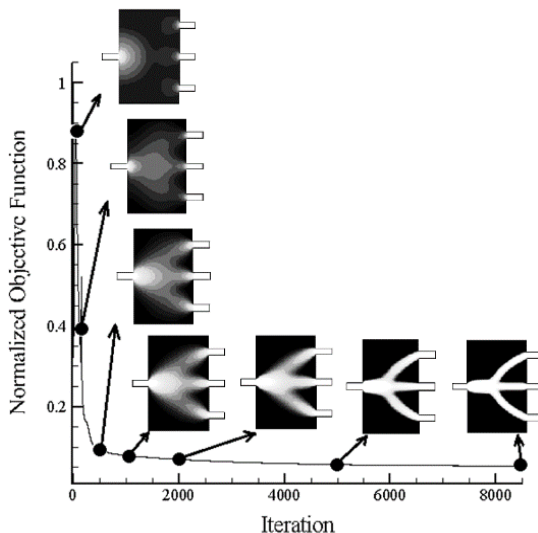
### ۷- نتایج و بحث

چنانچه ذکر شد، هدف در این مقاله به دست آوردن هندسه بهینه یک چندراهی با تعداد ۳ خروجی است، با این فرض که قرار است، تنها درصدی از حوزه توسط سیال اشغال شود. با در نظر گرفتن تعداد  $120 \times 120$  گره برای حوزه محاسباتی، کمینه‌سازی مجموع توابع هدف اتلافات لزجتی





شکل ۵- نتایج الف) طرح بهینه و ب) هندسه مرسوم یک کانال سه-خروجی با دبی جرمی برابر



شکل ۶- فرآیند بهینه‌سازی و تاریخچه تابع هدف بی‌بعد شده برای کانال سه-خروجی با دبی خروجی برابر

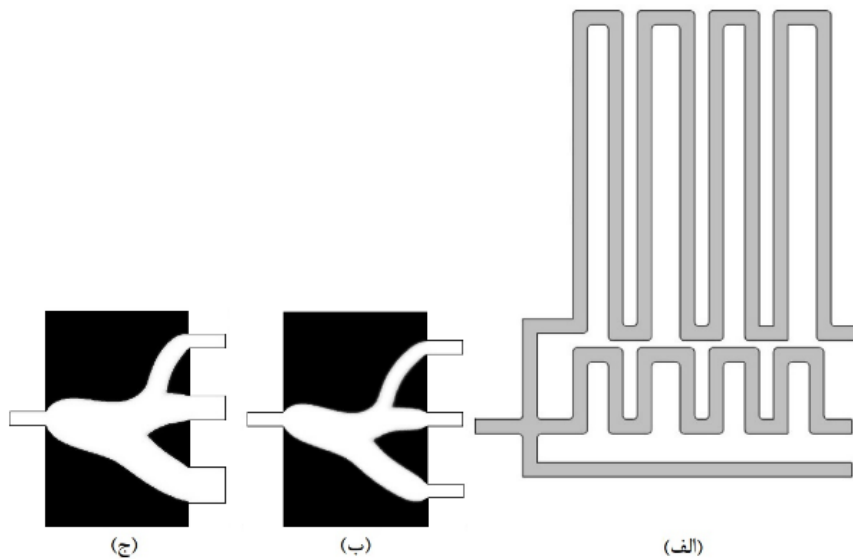
مقایسه با طرح چندراهی با استفاده از روش بهینه‌سازی توپولوژی اشغال می‌کند. موارد (ب) و (ج) دو طرح بهینه را برای این کانال چندراهی نشان می‌دهد که اختلاف جریان جرم در خروجی‌ها را یک‌بار با لحاظ کردن افزایش سرعت متوسط جریان و ثابت نگاه‌داشتن عرض خروجی، مشابه آنچه در مطالعه [۲۸] بررسی شده (شکل ۷-ب) و بار دیگر با افزایش عرض خروجی‌ها و ثابت نگاه‌داشتن سرعت متوسط جریان (شکل ۷-ج)، اعمال کرده است. شایان ذکر است، با توجه به آنچه در طبیعت رخ می‌دهد، به عنوان مثال

و اصطلاحاً جهت دسترسی به مسیر بهینه برای جریان سیال در  $Re = 10$  صورت گرفته است. شایان ذکر است، به منظور جلوگیری از رفتار پیش‌بینی نشده جریان سیال، در نواحی نزدیک به محل‌های ورود و یا خروج سیال، مجراهایی به طول یک‌ششم طول فضای کلی محاسباتی در راستای  $x$  و در محل ورود و خروج سیال اضافه شده که در آن ضریب تخلخل به صورت قید تماماً سیال ( $\varepsilon = 1$ ) لحاظ گردیده است. در ابتدا مقایسه‌ای بین طرح یک چندراهی در حالت مرسوم با طرح بهینه آن انجام می‌شود. سپس شرایط مختلف برای عرض مجرای ورودی لحاظ شده و با مقایسه مقادیر اتلافات انرژی، عرض بهینه برای مجرای ورودی برای ادامه تحقیق اتخاذ می‌شود. در نهایت، موقعیت عرضی مجرای ورودی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

در شکل ۵ طرح یک چندراهی در حالت مرسوم با طرح بهینه آن مقایسه شده است. نتایج اتلافات انرژی در طی مسیر جریان سیال در این دو طرح نشان می‌دهد که کاهش ۴۸/۱۹ درصدی افت توان برای طرح بهینه چندراهی در مقایسه با هندسه مرسوم آن رخ می‌دهد. در این راستا، هندسه طراحی شده با روش بهینه‌سازی توپولوژی با داشتن کمترین اتلافات انرژی در طول مسیر جریان سیال می‌تواند جایگزین مناسب برای چندراهی با هندسه مرسوم در کاربردهای مشابه باشد.

شکل ۶ همگرایی تابع هدف اتلافات انرژی در طی فرآیند بهینه‌سازی را همراه با طرح چندراهی در چند تکرار متوالی نشان می‌دهد. با توجه به شکل، حوزه سیال بین ورودی و خروجی مرکزی حوزه بعد از ۵۰۰ تکرار شکل گرفته و توپولوژی آن مشخص می‌شود. سپس اتصال بین این حوزه سیال و دیگر خروجی‌های حوزه بعد از ۱۰۰۰ تکرار برقرار شده و توپولوژی نهایی سه‌راهی مشاهده و در تکرار ۵۰۰۰ به طرح نهایی همگرا می‌شود.

در شکل ۷ طرح یک چندراهی با هدف نسبت جریان جرمی ۱:۲:۳ در خروجی‌ها در سه حالت مختلف با یکدیگر مقایسه شده است. در طرح به روش مدار الکتریکی معادل (شکل ۷-الف) که قرار است، مقدار مختلف جریان جرم در خروجی‌ها از طریق گروهی از کانال‌ها جهت ایجاد مقاومت در مسیر جریان سیال فراهم شود، فضای بیشتری را در



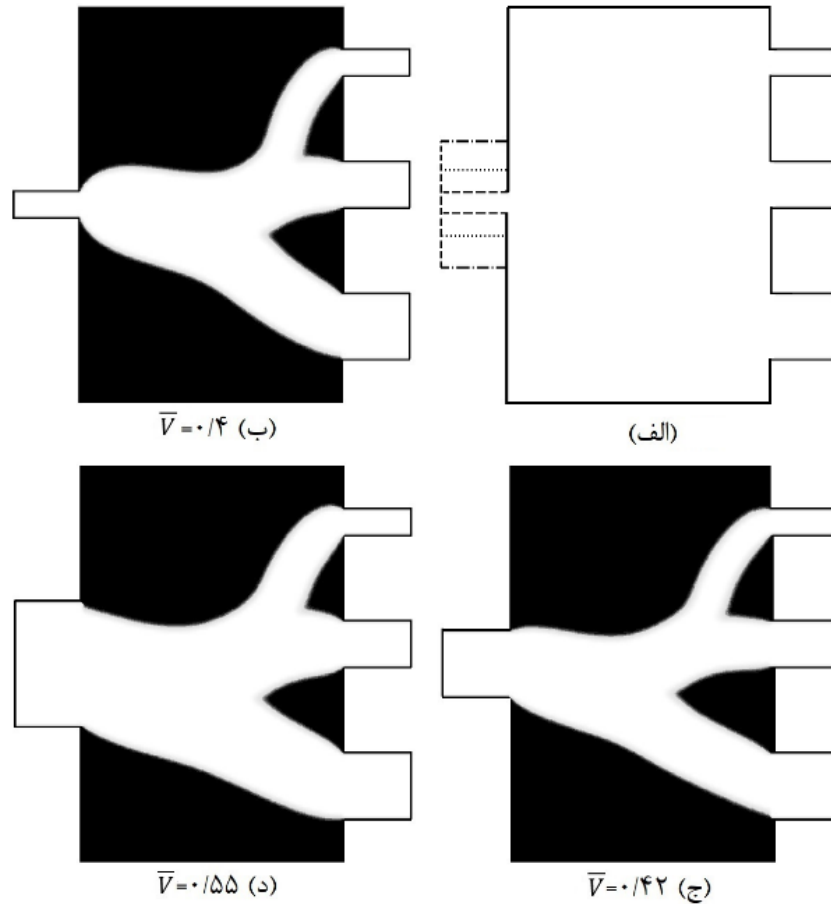
شکل ۷- هندسه کانال سه-خروجی با نسبت جریان جرمی ۱:۲:۳ در خروجی‌ها با روش الف) مدار الکتریکی معادل، بهینه‌سازی توپولوژی با رشد خطی، ب) سرعت متوسط خروجی‌ها و ج) عرض خروجی‌ها

همان میزان جریان جرمی ورودی، در (شکل ۸-۵) مجرای ورودی عرضی معادل با مجموع عرض مجرای خروجی‌ها خواهد داشت. از آنجا که قرار است، حوزه سیال به عرض ورودی و خروجی‌های کانال متصل باشد، ماکزیمم حجم مجاز سیال درون حوزه،  $\bar{V}$ ، برای هر چهار حالت مطابق شکل در نظر گرفته شده است؛ در واقع نیاز است، با افزایش عرض خروجی‌ها و همچنین عرض ورودی مقدار  $\bar{V}$  بزرگتری را اختیار کرد.

جدول ۱ مقادیر اولیه و نهایی تابع هدف و تعداد تکرارها در فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش اندازه عرض مجرا در ورودی حوزه کاهش چشمگیری را در تعداد تکرارهای فرآیند بهینه‌سازی نتیجه می‌دهد. نتایج مقادیر نهایی تابع هدف در طول مسیر جریان سیال برای دو مورد (ب) و (ج) نشان می‌دهد که برای یک میزان دبی جرمی سیال در ورودی و نیز تغییرات خطی عرض خروجی‌ها، اتلافات انرژی در حالت برابری عرض مجرای ورودی با بزرگترین خروجی نسبت به حالت برابری آن با کوچکترین خروجی به میزان ۷۵ درصد کاهش می‌یابد. به علاوه، این اتلافات انرژی برای کانال با سرعت متوسط برابر در ورودی و خروجی‌ها (حالت د) کمتر از سایر موارد به‌دست آمده است.

ختم سرخرگ‌ها به انشعاب‌های کوچک‌تر [۲۹]، اختلاف در جریان جرمی خروجی‌ها از طریق افزایش اندازه عرض آن‌ها ایجاد می‌شود، چرا که افزایش سرعت متوسط جریان افزایش تنش برشی را به همراه خواهد داشت. علاوه بر این، نتایج نشان داده است، نسبت به طرح ارائه شده در مرجع [۲۸]، مقدار اتلافات انرژی در طرح بهینه چندراهی با رشد خطی عرض و سرعت متوسط برابر در مجراهای خروجی،  $26/04$  درصد کاهش خواهد یافت که این خود موید مزیت تغییر در عرض مجرا در مقایسه با تغییر در سرعت متوسط جریان است.

در ادامه با در نظر گرفتن مقدار ثابت جریان سیال از مجرای ورودی، شرایط مختلفی را می‌توان برای اندازه عرض مجرای ورودی در نظر گرفت و برای هر یک طرح بهینه و مقدار اتلافات انرژی در طول مسیر بهینه جریان سیال را گزارش کرد. در این راستا، شکل ۸ کانال‌های طراحی شده را با در نظر گرفتن سرعت متوسط یکسان و رشد خطی اندازه عرض و در نتیجه افزایش خطی جریان جرمی در خروجی‌ها نشان می‌دهد که حالت‌های متفاوت اندازه عرض مجرای ورودی را یک‌بار با برابر قرار دادن اندازه آن با خروجی کوچکتر (شکل ۸-ب) و بار دیگر برابری آن با خروجی بزرگتر (شکل ۸-ج) با یکدیگر مقایسه می‌کند. در حالت دیگر به‌ازای



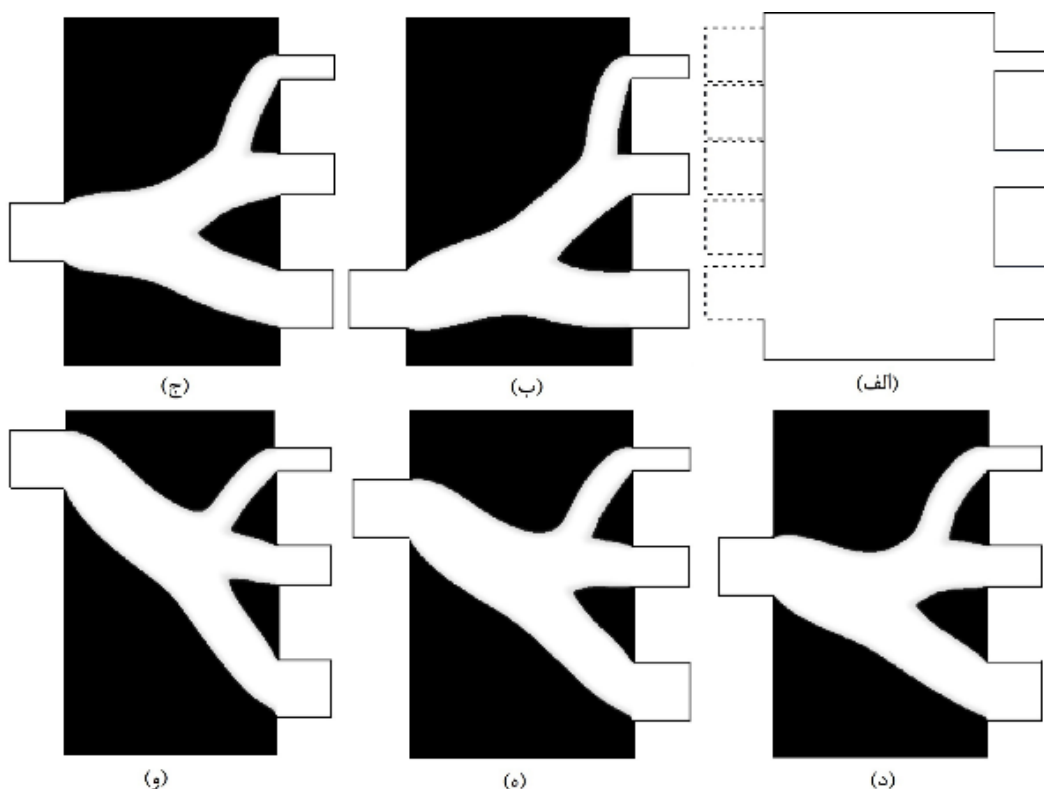
شکل ۸- کانال‌های طراحی شده با جریان جرمی یکسان در ورودی‌ها و جریان جرمی الف) یکسان و ب) تا د) با تغییرات خطی در خروجی‌ها

جدول ۱- مقایسه نتایج بهینه‌سازی برای شرایط مختلف ورودی و خروجی کانال در شبکه  $120 \times 120$ .

تکرار بهینه‌سازی	اتلافات انرژی نهایی	اتلافات انرژی اولیه	
۱۱۵۰۰	$0.1118 \times 10^{-5}$	$2.0796 \times 10^{-5}$	(الف)
۴۷۰۰۰	$0.0713 \times 10^{-5}$	$1.9182 \times 10^{-5}$	(ب)
۶۰۰۰	$0.174 \times 10^{-5}$	$1.1349 \times 10^{-5}$	(ج)
۴۵۰۰	$0.089 \times 10^{-5}$	$1.8491 \times 10^{-5}$	(د)

به‌ازای ۵ موقعیت متفاوت ورودی در ضلع سمت چپ حوزه و تأثیر آن بر طرح بهینه نهایی در شکل ۹ بررسی شده است. بر اساس تجربه طراحان، ورودی کانال بایستی در نزدیکی خروجی‌ها با بیشترین مقدار جریان جرمی سیال قرار گرفته

از آنجا که گاهی نیاز نیست، ورودی در مرکز ساختار قرار داشته باشد که این موقعیت نسبی بین ورودی و خروجی‌های کانال معمولاً توسط طراح تصمیم‌گیری می‌شود، در این پژوهش کانال چندراهی مورد (ج) در شکل ۸ با  $\bar{V} = 0.42$



شکل ۹- نتایج طراحی کانال سه-خروجی با جریان جرمی یکسان در ورودی‌ها و موقعیت‌های نسبی متفاوت ورودی و خروجی‌ها

جدول ۲- مقایسه نتایج بهینه‌سازی برای شرایط مختلف ورودی کانال در شبکه  $120 \times 120$ .

اتلافات انرژی	اتلافات اصطکاکی	اتلافات لزجی	
$0.0178 \times 10^{-5}$	$0.0017 \times 10^{-5}$	$0.0161 \times 10^{-5}$	(ب)
$0.0169 \times 10^{-5}$	$0.0016 \times 10^{-5}$	$0.0153 \times 10^{-5}$	(ج)
$0.0175 \times 10^{-5}$	$0.0017 \times 10^{-5}$	$0.0158 \times 10^{-5}$	(د)
$0.0193 \times 10^{-5}$	$0.002 \times 10^{-5}$	$0.0173 \times 10^{-5}$	(ه)
$0.022 \times 10^{-5}$	$0.0027 \times 10^{-5}$	$0.0193 \times 10^{-5}$	(و)

جهت میزان انحراف آن در طول کانال رقم بزند، قرار گرفتن مجرای ورودی در حالت (و) چرخش بیشتر جریان سیال و در نتیجه تنش برشی و اتلافات لزجی بسیاری را به وجود می‌آورد؛ در حالی‌که با قرار گرفتن ورودی در مقابل خروجی‌ها با جریان جرمی بیشتر، حالت (ج)، جریان سیال مسیر هموارتر با چرخش کمتری درون کانال طی خواهد کرد

باشد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که در حالت قرارگیری مجرای ورودی در نزدیکی خروجی‌ها با جریان جرمی بیشتر (شکل ۹-ج) در مقایسه با حالتی که ورودی در دورترین فاصله از این خروجی‌ها قرار می‌گیرد، کانال شکل هموارتری خواهد داشت. از آنجا که وجود شرایط مختلف برای جریان سیال در ورودی کانال می‌تواند رفتار متفاوتی برای جریان از

در ادامه ارائه نتایج بهینه‌سازی توپولوژی برای یک کانال چندراهی سه-خروجی، اثر معکوس کردن جهت جریان در شرایط مرزی ورودی و خروجی بر طرح بهینه کانال بررسی شد. نتایج عدم تأثیر جهت جریان بر آنچه توسط این روش به دست آمده را نشان داده است. شایان ذکر است، با توجه به بخش آنالیز حساسیت در بهینه‌سازی توپولوژی، تنها گرادیان‌های سرعت در محاسبه  $\delta E$  که قرار است، حوزه سیال از جامد را جدا سازد، نقش دارد و جهت جریان سیال از این قاعده مستثنی است.

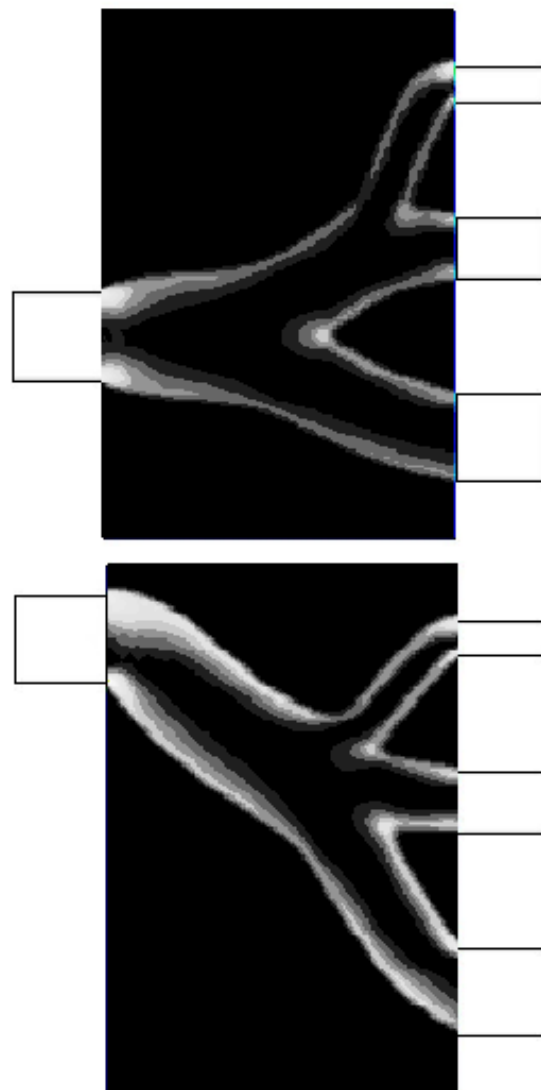
زمان محاسباتی به شدت به تعداد گره‌ها در شبکه‌بندی حوزه حل وابسته است. در این پژوهش با استفاده از یک کامپیوتر شخصی با مشخصات واحد پردازنده مرکزی Intel i7 3.60 GHz و حافظه داخلی 32 GB، زمان لازم برای رسیدن به طرح بهینه کانال چندراهی در شبکه با تعداد گره  $120 \times 120$  در حدود ۴۵ دقیقه بوده است.

#### ۸- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر هندسه بهینه یک کانال انشعابی/چندراهی دوبعدی با تعداد ۳ خروجی در عدد رینولدز  $Re = 10$  با استفاده از روش بهینه‌سازی توپولوژی بر اساس روش شبکه بولتزمن ارائه شد و در آن از روش تخلخل به منظور ارائه طرح بهینه با استفاده از آنالیز حساسیت یک تابع هدف در طول مسیر جریان سیال در محیط متخلخل بهره گرفته شد. در مسئله حاضر جهت جلوگیری از رفتار پیش‌بینی نشده جریان سیال در ورود به‌طور مستقیم به یک محیط متخلخل، مجراهایی بین شرایط مرزی سرعت معلوم و حوزه طراحی تعبیه شد. مطالعه حاضر اثرگذاری شرایط مختلف جریان جرمی سیال در خروجی‌ها را با لحاظ کردن اندازه‌های مختلف برای عرض خروجی‌های کانال، بر هندسه بهینه آن و اتلافات انرژی حاصل برای جریان سیال به‌وضوح روشن کرده است.

نتایج مربوط به بررسی تغییر اندازه عرض مجرا در ورودی و خروجی‌ها نشان داد که برای یک میزان جریان جرمی سیال در ورودی، با در نظر گرفتن سرعت متوسط برابر و تغییرات خطی اندازه عرض و در نتیجه جریان جرمی در خروجی‌ها، در حالتی که عرض ورودی با بزرگترین خروجی برابر باشد، کاهش ۷۵ درصدی برای اتلافات انرژی در طول

که اتلافات لزجی کمتری را نیز باعث خواهد شد. این مطلب مطابق با نتایج ارائه شده در جدول ۲ کاملاً مشهود است و کاهش افت توان جریان سیال به میزان  $23/18$  درصد برای حالت قرارگیری ورودی مقابل مابین خروجی‌های پایین و وسط نسبت به حالت قرارگیری آن در مقابل مجرای خروجی با کمترین جریان جرمی به دست آمده است. مطابق شکل ۱۰، این اختلاف با استفاده از کانتورهای اتلافات انرژی برای دو موقعیت متفاوت (ج) و (و) در نزدیکی ورودی و مرزها ملاحظه می‌شود.



شکل ۱۰- کانتورهای اتلافات انرژی در کانال چندراهی موارد (ج) و (و)

ضرایب وزنی	$\omega_i$	مسیر جریان سیال در مقایسه با برابری عرض ورودی با کوچکترین خروجی بدست می‌دهد. به‌علاوه، این اتلافات انرژی برای کانال با سرعت متوسط برابر در ورودی و خروجی‌ها کمتر از سایر موارد به دست آمده است.
تخلخل (متغیر طراحی)	$\varepsilon$	در بررسی اثر موقعیت نسبی ورودی و خروجی‌های کانال، از آنجا که گاهی نیاز نیست ورودی در مرکز ساختار قرار داشته باشد، نتایج این پژوهش نشان داد که در حالت قرارگیری ورودی در نزدیکی خروجی‌ها با جریان جرمی بیشتر کانال در مقایسه با حالتی که ورودی در دورترین فاصله از این خروجی‌ها قرار گرفته باشد، شکل هموارتری دارد. به‌علاوه، نتایج مقادیر نهایی تابع هدف در طول مسیر جریان سیال، کمترین میزان اتلافات انرژی را برای حالت قرارگیری ورودی مقابل مابین خروجی‌های پایین و وسط نشان داد.
معیار همگرایی سرعت	$\delta_u$	نتایج مربوط به معکوس کردن جهت جریان در شرایط مرزی ورودی و خروجی بر طرح بهینه کانال نیز، عدم تأثیر جهت جریان را بر طرح بهینه حاصل از این روش نشان داده است.
معیار همگرایی تخلخل	$\delta_\varepsilon$	
چگالی ماکروسکوپی	$\rho$	
زمان آسایش	$\tau$	
	بالانویس‌ها	
تعادلی	eq	
	زیرنویس‌ها	
شمارنده گره شبکه	$i$	
شمارنده گام زمانی در فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی	$k$	

### ۹- فهرست علائم

	$c$	اندازه سرعت میکروسکوپی ذرات، m/s
	$c_s$	سرعت صوت
	$e_i$	سرعت ذرات در جهات مختلف شبکه
	$f_i$	تابع توزیع ذره در معادله سرعت
	$f_i^{eq}$	تابع توزیع تعادلی
	$N$	تعداد نقاط شبکه به جز نقاط مرزی
	$P$	فشار، $kg/ms^2$
	$Re$	عدد رینولدز
	$t$	زمان، s
	$\bar{u}$	سرعت ماکروسکوپی، m/s
	$V$	حجم سیال

### ۱۰- مراجع

- [1] Enoksson O (2000) Shape optimization in compressible inviscid flow. Licentiate thesis LiU-TEK-LIC-2000:31, Department of Mathematics, Linkopings Universitet.
- [2] Kim DW, Kim MU (1995) Minimum drag shape in two-dimensional viscous flow. Int J Numer Meth Fl 21(2): 93-111.
- [3] Pironneau O (1973) On optimum profiles in Stokes flow. Int J Eng Fluid Mech 59: 117-128.
- [4] Pironneau O (1974) On optimum design in fluid mechanics. Int J Eng Fluid Mech 64: 97-110.
- [5] Glowinski R, Pironneau O (1975) On the numerical computation of the minimum-drag profile in laminar flow. J Fluid Mech 72: 385-389.
- [6] Çabuk H, Modi V (1992) Optimum plane diffusers in laminar flow. J FLUID MECH 237: 373-393.
- [7] Jameson A (1988) Aerodynamic design via control theory. J Sci Comput 3: 233-260.
- [8] Ivorra B, Hertzog DE, Mohammadi B, Santiago JG (2005) Semi-deterministic and genetic algorithms for global optimization of microfluidic protein-folding devices. Int J Numer Meth Eng 66(2): 319-333.

- lattice-Boltzmann method. *Comput Math Appl* 55: 1514-1524.
- [23] Succi S, Foti E, Higuera F (1989) Three-dimensional flows in complex geometries with the lattice Boltzmann method. *Europhysics Letters* 10: 433-438.
- [24] Langass K, Grubert D, Pet J (1999) Lattice Boltzmann simulations of wetting and its application to disproportionate permeability reducing gel. *J Petrol Sci Eng* 24: 199-211.
- [25] Bernsdorf J, Bernner G, Durst F (2000) Numerical analysis of the pressure drop in porous media flow with lattice Boltzmann (BGK) automata. *Comput Phys Commun* 129: 247-255.
- [26] Kim J, Lee J, Lee KC (2001) Nonlinear correction to Darcy's law for a flow through periodic arrays of elliptic cylinders. *Physica A* 293: 13-20.
- [27] Dabirpour V, Mohammadipour O (2019) Numerical investigation of convection around heated circular cylinder wrapped with Bi-Disperse porous medium in channel. *Modares Mechanical Engineering* 19 (3): 539-548.
- [28] Zhou T, Liu T, Deng Y, Chen L, Qian S, Liu Z (2017) Design of microfluidic channel networks with specified output flow rates using the CFD based optimization method. *Microfluid Nanofluidics* 21: 1-8.
- [29] Bejan A, Zane JP (2012) Design in nature: How the constructal law governs equation in Biology, Physics, Technology, and Social Organization.
- [30] Allaire G (1990) Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. Abstract framework, a volume distribution of holes. *Arch Ration Mech Anal* 113: 209-259.
- [31] Brinkmann HC (1947) A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl Sci Res* 1: 1-27.
- [32] Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M (1954) A Model for collision processes in gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys Rev* 94: 511-525.
- [33] He X, Luo L-S (1997) Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys Rev E* 56(6): 6811-6817.
- [34] Guo Z, Zhao TS (2002) Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Phys Rev* 66: 036-304.
- [35] Mohammadipour OR, Succi S, Niazmand H (2018) General curved boundary treatment for two- and three-dimensional stationary and moving walls
- [9] Molho JI, Herr AE, Mosier BP, Santiago JG, Kenny TW, Brennen RA, Gordon GB, Mohammadi B (2001) Optimization of turn geometries for microchip electrophoresis. *Anal Chem* 73: 1350-1360.
- [10] Mohammadi B, Pironneau O (2001) Applied shape optimization for fluids. *Numer Math Sci Comput*. Oxford University Press, New York.
- [11] Mohammadi B, Pironneau O (2004) Shape optimization in fluid mechanics. *Annu Rev Fluid Mech* 36: 255-279.
- [12] Borrvall T, Petersson J (2003) Topology optimization of fluids in stokes flow. *Int J Numer Meth Fl* 41: 77-107.
- [13] Yonekura K, Kanno Y (2015) A flow topology optimization method for steady state flow using transient information of flow field solved by lattice Boltzmann method. *Struct Multidiscip Optim* 51: 159-172.
- [14] Yonekura K, Kanno Y (2016) Erratum to: A flow topology optimization method for steady state flow using transient information of flow field solved by lattice Boltzmann method. *Struct Multidiscip Optim* 54: 193-195.
- [15] Gersborg-Hansen A, Sigmund O, Haber RB (2005) Topology optimization of channel flow problems. *Struct Multidiscip Optim* 30: 92-181.
- [16] Othmer C (2006) CFD topology and shape optimization with adjoint methods. *VDI Fahrzeug- und Verkehrstechnik*, 13. International congress, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, Würzburg.
- [17] Othmer C, de Villiers E, Weller HG (2007) Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows. 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Miami, FL: AIAA.
- [18] Pingen G, Evgrafov A, Maute K (2007) Topology optimization of flow domains using the lattice Boltzmann method. *Struct Multidiscip Optim* 34: 507-524.
- [19] Pingen G, Evgrafov A, Maute K (2009) Adjoint parameter sensitivity analysis for the hydrodynamic lattice Boltzmann method with applications to design optimization. *Comput Fluids* 38: 910-923.
- [20] Pingen G, Maute K (2010) Optimal design for non-Newtonian flows using a topology optimization approach. *Comput Math Appl* 59: 2340-2350.
- [21] Succi S (2001) The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and Beyond. Oxford University Press.
- [22] Mattila K, Hyväluoma J, Timonen J, Rossi T (2008) Comparison of implementations of the

- [37] Mohamad AA (2011) Lattice Boltzmann method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. Springer Science & Business Media 72-80.
- [36] Chen S, Doolen GD (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annu Rev Fluid Mech 30: 329-364.
- in flow and nonflow lattice Boltzmann simulations. Phys Rev E 98(2): 233041-16.