

## کنترل فعال ارتعاشات پوسته مخروطی مدرج تابعی چرخان از طریق وصله‌های پیزوالکتریک

محمد جعفری نیاسر<sup>۱\*</sup>، علی اصغر جعفری<sup>۲</sup>، محسن ایرانی رهقی<sup>۳</sup> و محمد جواد بابایی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

<sup>۳</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

<sup>۴</sup> کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵

### چکیده

در مقاله حاضر کنترل دامنه ارتعاشات اجباری یک پوسته مخروطی از جنس مواد مدرج تابعی در حالت چرخان با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک از جنس مواد مدرج تابعی تحلیل گردیده است. تعداد ۴ تکه پیزوالکتریک داخل پوسته و مشابه همین روی پوسته قرار گرفته است. برای بدست آوردن دینامیک سیستم از روش انرژی و نظریه کلاسیک استفاده شده است. پاسخ ارتعاشات با شرایط مرزی دو سر ساده به صورت عبارتی با جدا سازی توابع مکان و زمان و همچنین ضرایب متغیر با زمان برای هر متغیر سیستم در نظر گرفته شده است. پس از آن با قرار دادن پاسخ‌های در نظر گرفته شده در توابع انرژی و در نهایت استفاده از معادله لاگرانژ، دینامیک حاکم بر سیستم حاصل می‌شود. فرکانس‌های طبیعی پوسته غیرچرخان و چرخان با نتایج پژوهش‌های قبلی مقایسه شده است؛ همچنین برای کنترل ارتعاشات از پسخورد سرعت استفاده شده است، به گونه‌ای که ولتاژ سنسور که وابسته به سطح، ضخامت و محل قرارگیری هر سنسور است محاسبه شده و در ولتاژ عملگر از آن استفاده می‌شود. در ادامه، کنترل سیستم ابتدا در مود اول و سپس برای سیستم همگرا شده انجام می‌گیرد، نتایج نشان می‌دهد که در هر دو حالت حلقه کنترلی به خوبی دامنه ارتعاشاتی اجباری را مستهلک می‌کند.

**کلمات کلیدی:** پوسته مخروطی چرخان؛ پوسته مدرج تابعی؛ وصله‌های پیزوالکتریک؛ کنترل فعال ارتعاشات.

## Active Control of Vibration of Rotating FG Conical Shell via Piezoelectric Patches

M. Jafari Niasar<sup>1\*</sup>, A. A. Jafari<sup>2</sup>, M. Irani Rahaghi<sup>3</sup>, M.J Babaei<sup>4</sup>

<sup>1</sup> MS.c, Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Assis Prof., Mech. Eng., Kashan University, Kashan, Iran.

<sup>4</sup> MS.c, Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

### Abstract

In this paper, control of forced vibration amplitude of a rotating FG conical shell are studied using FG piezoelectric patches. Four piezoelectric patches are placed inner and outer of the shell. In order to obtain the system dynamic equations, the energy method and the classical plate theory are used and simply supported boundary conditions are considered. Each system variable is considered as an expression by separation of variables with variable-time coefficients. Subsequently by substitution the considered responses in the energy functions and finally using the Lagrange equation, governing equation of the system are obtained. Natural frequencies are compared with the result of previously researches in cases of non-rotating and rotating shell. Also to control vibration, velocity feedback is used so that sensor voltage, which is dependent on the surface, thickness, and location of each sensor, is calculated and it is used in the actuator voltage. In the following section, control of the system is done for first mode and then convergent system. Results show, Closed-loop system well dampens amplitude of forced vibrations, in both cases.

**Keywords:** Rotating Conical Shell; FGM Shell; Piezoelectric Patches; Active Control of Vibration.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۵۲۸۱۹۳۸۷

آدرس پست الکترونیک: [mohammad.jafariniasar@gmail.com](mailto:mohammad.jafariniasar@gmail.com)

## ۱- مقدمه

امروزه استفاده از پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای در صنایع دریایی، هوافضا، توربین‌های گاز، سیستم‌های جداساز گریز از مرکز و ... گسترش یافته است. شناسایی فرکانس طبیعی از پایه‌های بحث ارتعاشات است، چرا که می‌توان از شکست و خسارات سنگین جلوگیری کرد. همچنین در بعضی از محیط‌های کاری نیاز است که پوسته در برابر تنش‌های حرارتی و مکانیکی بالا مقاوم باشد؛ بنابراین لازم است، خواص مکانیکی به درستی انتخاب گردد. اگر از مواد کامپوزیتی استفاده گردد، به دلیل لایه لایه بودن احتمال ایجاد گسستگی و تمرکز تنش وجود دارد. به همین دلیل نیاز است که خواص پوسته به صورت پیوسته تغییر کند. مواد مدرج تابعی این مشکل را حل کرده‌اند. خواص این مواد به صورت تدریجی از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج آن ترکیب فلز و سرامیک است که ترکیب این دو باعث مقاومت حرارتی بالا و استحکام می‌شود. در سیستم‌های دوار سرعت بالا با محیط‌های کاری خاص، علاوه بر موارد گفته شده نیاز است که ارتعاشات هرچند با دامنه‌های کوچک وجود نداشته باشد؛ چرا که در بعضی موارد باعث ایجاد پدیده تشدید و در نهایت شکست کلی سازه می‌شود. لذا نیاز به یک سیستم کنترلی حلقه بسته حس می‌شود. یک سیستم حلقه بسته از ۴ جزء سازه، سنسور، عملگر و کنترلر تشکیل شده است. در این قبیل سازه‌ها پیزوالکتریک به طور معمول نقش سنسور و عملگر را بازی می‌کند. در بهترین حالت سنسور و عملگر به ترتیب داخل و روی پوسته به صورت یک لایه قرار می‌گیرد. در ادامه با انتخاب روش کنترلی مناسب، می‌توان دامنه ارتعاشات را کاهش داد. در زمینه ارتعاشات و کنترل آن پژوهش‌هایی انجام شده که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

لم و هوا [۱] ارتعاشات پوسته مخروطی چرخان را تحلیل کردند. آن‌ها معادلات را با استفاده از روش نیوتون بدست آورده، سپس با استفاده از روش گالرکین به حل معادلات سیستم پرداختند. کروبوی و ایرانی [۲]، ارتعاشات پوسته استوانه‌ای چرخان مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک مدرج تابعی را بررسی کردند. آنها از نظریه برشی مرتبه اول برای مدل سازی استفاده کردند. همچنین اثر عدد موج و

نسبت ضخامت پوسته به ضخامت پیزوالکتریک را روی فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار دادند.

لی و همکاران [۳] کنترل فعال پوسته مخروطی با استفاده از مواد پیزوالکتریک را مطالعه کردند. برای اینکار آن‌ها از ۸ تکه پیزوالکتریک به صورت متقارن و غیر متقارن استفاده کردند و از روش‌های پس‌خورد سرعت و کنترل بهینه مربعی خطی برای کنترل سیستم بهره جستند. جعفری و همکاران [۴]، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با لایه پیزوالکتریک را بررسی کردند. آن‌ها فرکانس طبیعی را بر اساس پارامترهای مختلف سیستم از جمله شعاع، ضخامت و شماره مود محاسبه کردند. عارفی [۵]، تحلیل الکترواستاتیکی پوسته میکروالاستیک با لایه‌های پیزوالکتریک، قرار گرفته بر بستر پاسترناک را انجام داد. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی توسعه یافته بدست آمده و در طول این تحقیق پارامترهایی نظیر، طول، پتانسیل الکتریکی و تغییر شکل سازه مورد بررسی قرار گرفته است. سونگ و همکاران [۶]، به بررسی کنترل فعال ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی از طریق وصله‌های پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها از نظریه تغییر شکل برشی برای مدل سازی استفاده کردند. همچنین اثرات حرارتی را نیز در نظر گرفته و در نهایت به وسیله روش پس‌خورد سرعت و کنترل بهینه مربعی خطی اقدام به کنترل دامنه ارتعاشات کردند. وانگ و کائو [۷]، تحلیل ارتعاشات پوسته مخروطی چرخان با سرعت چرخش بالا را بررسی کردند. آن‌ها تاثیر سرعت چرخش و انواع شرایط مرزی الاستیک را روی فرکانس طبیعی بررسی کردند. فاطمی مقدم و احمدی [۸]، کنترل فعال ارتعاشات پوسته مخروطی غیرچرخان را در حضور اغتشاش از طریق لایه پیزوالکتریک بررسی کردند. آنها از روابط دائل و وون کارمن برای مدل سازی استفاده و همچنین اثرات دامنه تحریک خارجی و زاویه راس مخروط را روی پاسخ فرکانسی مطالعه کردند.

به طور کلی کنترل ارتعاشات روتورها (سیستم‌های چرخان) جزو مباحث مهم است. از آنجایی که پیزوالکتریک‌ها جزو مواد گران قیمت هستند، لذا در این پژوهش سعی شده این امر مهم با صرف پیزوالکتریک کمتر نسبت به سایر پژوهش‌ها انجام گیرد. به همین دلیل از وصله به جای لایه

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z\{K\}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + zK_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{0\theta} + zK_\theta$$

$$= \frac{1}{r(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \sin(\alpha) + w \cos(\alpha)}{r(x)} - z \left( \frac{1}{r(x)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r(x)^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos(\alpha) + \frac{1}{r(x)} \sin(\alpha) \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{0x\theta} + zK_{x\theta}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} v - 2z \left( \frac{1}{r(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos(\alpha)}{r(x)} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{r(x)^2} v \right) \quad (2)$$

### ۲-۲- روابط تنش- کرنش

ارتباط بین تنش و کرنش از طریق ماتریس سفتی سیستم حاصل می‌شود. این ماتریس مربعی و وابسته به مدول یانگ سیستم است. رابطه بین تنش - کرنش و میدان - جابه‌جایی برای پوسته و پیزوالکتریک به صورت زیر است [۱۰]:

$$\sigma = C_f \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{-h}{2} < z < \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} \sigma_p = C_p \varepsilon - e^T E \\ D = e \varepsilon + \zeta E \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{sensor} : \frac{-h}{2} - h_s < z < \frac{-h}{2} \\ \text{actuator} : \frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} + h_a \end{cases}$$

$$\sigma_i = \{\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}\}^T, \quad i = f, p$$

$$\varepsilon_i = \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{x\theta}\}^T, \quad i = f, p \quad (3)$$

سطر اول رابطه بین تنش و کرنش پوسته را نشان می‌دهد. سطر بعدی مربوط به پیزوالکتریک است که ارتباط بین تنش، کرنش و میدان الکتریکی، همچنین ارتباط بین جابه‌جایی، کرنش و میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. دو سطر آخر نیز تنش و کرنش صفحه‌ای را بیان می‌کنند. عبارات داخل روابط ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳، ۱۱]:

پیزوالکتریک استفاده شده است. همچنین بحث مهم دیگر خواص پیزوالکتریک است. در این مقاله خواص پیزوالکتریک به صورت نوعی از مدرج تابعی در نظر گرفته شده که کنترل سیستم در مودهای مختلف با استفاده از آن انجام گرفته است.

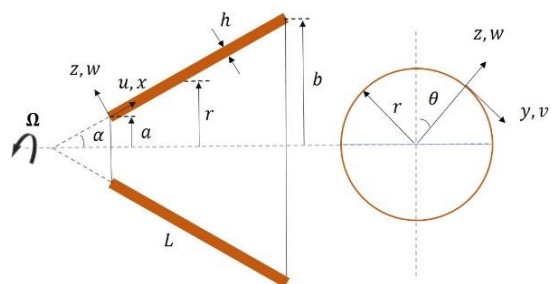
### ۲- مدل‌سازی

در بعضی پژوهش‌ها دینامیک حاکم بر سیستم با استفاده از روش نیرویی بدست آمده سپس از روابط نیرو-تنش و تنش-کرنش استفاده شده تا معادلات بر حسب کرنش مرتب شوند. در نهایت با انتخاب روابط کرنش - جابه‌جایی، جابه‌جایی نیز درون معادلات ارتعاشی سیستم ظاهر می‌شود. اما در این مقاله از روش انرژی و با استفاده از روابط کرنش- جابه‌جایی و پاسخ‌های هارمونیک در نظر گرفته شده برای ارتعاشات، معادلات حاکم بر سیستم بدست می‌آید.

### ۲-۱- روابط کرنش - جابه‌جایی

تفاوت در نظریه‌های مختلف در تعریف متفاوت روابط بین کرنش - جابه‌جایی است. به همین علت معادلات به دست آمده برای نظریه‌های مختلف، متفاوت از یکدیگر است. در این مقاله از نظریه کلاسیک و از روابط کرنش - جابه‌جایی لاو [۹] استفاده شده است. در این نظریه از تنش و کرنش نرمال و برشی عرضی در راستای ضخامت پوسته صرف نظر شده و تنها تنش‌های صفحه‌ای وجود دارد. نکته قابل ذکر آنکه شعاع پوسته در راستای محور مخروط همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، متغیر است و به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$r(x) = a + x \sin(\alpha) \quad (1)$$



شکل ۱- شماتیک پوسته مخروطی چرخان

$$\begin{cases} Q_{ij}^p = Q_{ij}^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N & e_{ij} = e_{ij}^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N \\ \zeta_i = \zeta_i^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N & \rho_p = \rho^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{sensor} : \frac{-h}{2} - h_s < z < \frac{-h}{2} \\ \text{actuator} : \frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} + h_a \end{cases} \quad (7)$$

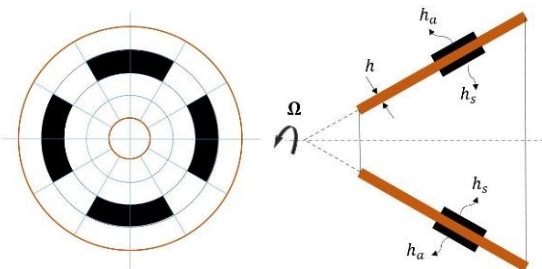
سطر اول و دوم تغییر مدول یانگ و چگالی پوسته را در طی ضخامت نشان می‌دهد. زیروند  $C$  و  $M$  به ترتیب مربوط به خواص سرامیک و فلز است؛ همچنین  $P$  نیز ضریب ناهمگنی پوسته مدرج تابعی (اندیس ماده مدرج تابعی) است و بازه تغییرات آن صفر تا بی نهایت است. دو سطر میانی روابط  $\gamma$  برای پیزوالکتریک است. جایی که تغییر خواص، برخلاف پوسته بین دو جنس همسانگرد نیست. نکته قابل ذکر آنکه نسبت پواسون در پوسته ثابت در نظر گرفته شده است.

#### ۲-۴- جانمایی سنسور و عملگر

در این مقاله پیزوالکتریک به عنوان عملگر و سنسور استفاده شده است. همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، مخروط در راستای  $x$  به ۴ و در راستای  $\theta$  به ۱۲ قسمت تقسیم شده است. ۴ پیزوالکتریک با زاویه ۳۰ درجه روی پوسته به عنوان عملگر و مشابه همین در قسمت داخلی پوسته به عنوان سنسور در نظر گرفته شده است.

#### ۲-۵- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی پوسته برابر است با حاصل ضرب بردار تنش در بردار کرنش [۲]. برای عملگر یک ترم الکتریکی در انتگرال انرژی اضافه خواهد شد، اما برای سنسور از تاثیر ولتاژ آن (سنسور) روی خودش صرف نظر می‌شود، لذا فقط به عنوان



شکل ۲- نحوه قرارگیری پیزوالکتریک در سیستم

$$E = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} Q_{11}^p & Q_{12}^p & 0 \\ Q_{21}^p & Q_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^p \end{bmatrix} \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_f(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E_f(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{66} = \frac{E_f(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (4)$$

از آنجا که مدل‌سازی پیزوالکتریک همانند پوسته به صورت جدار نازک است، لذا می‌توان از میدان الکتریکی در جهت  $x$  و  $\theta$  صرف نظر کرد [۳]. بنابراین تنش و جابه‌جایی الکتریکی برای پیزوالکتریک به صورت رابطه (۵) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11}^p \varepsilon_x + Q_{12}^p \varepsilon_\theta - e_{31} E_z & D_x &= 0 \\ \sigma_\theta &= Q_{21}^p \varepsilon_x + Q_{22}^p \varepsilon_\theta - e_{32} E_z & D_\theta &= 0 \\ \sigma_{x\theta} &= Q_{66}^p \varepsilon_{x\theta} & D_z &= e_{31} \varepsilon_x + e_{32} \varepsilon_\theta + \zeta_3 E_z \end{aligned} \quad (5)$$

همچنین میدان در راستای ضخامت نیز برابر با ولتاژ عملگر بخش بر ضخامت پیزوالکتریک خواهد بود [۳].

$$E_z = \frac{V_a}{h_a} \quad (6)$$

#### ۲-۳- تابع تغییر خواص

خواص پوسته به صورت مدرج تابعی بین دو جنس مختلف و خواص پیزوالکتریک نیز از یک جنس شروع شده و در طول ضخامت متغیر خواهد بود. روابط برای هر دو به صورت زیر است [۱۲، ۱۳]:

$$\begin{cases} E_f(z) = (E_C - E_M) \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^P + E_M \\ \rho_f(z) = (\rho_C - \rho_M) \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^P + \rho_M \end{cases} \rightarrow \frac{-h}{2} < z < \frac{h}{2}$$

$$\vec{R} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$\vec{\Omega} = -\Omega \cos(\alpha)\hat{i} + \Omega \sin(\alpha)\hat{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{R} \quad (11)$$

بردار سرعت برای پیزوالکتریک و پوسته برابر است، بنابراین انرژی جنبشی وصله‌های پیزوالکتریک همانند انرژی جنبشی پوسته محاسبه می‌شود با این تفاوت که چگالی آنها متفاوت است. با این فرض رابطه انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه (۱۲) خواهد بود [۷]:

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\rho_f(z) \vec{V} \cdot \vec{V}) dV$$

$$T_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_a} \int_k (\rho_p(z) \vec{V} \cdot \vec{V}) dV$$

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \int_k (\rho_p(z) \vec{V} \cdot \vec{V}) dV \quad (12)$$

#### ۸-۲ - معادلات حاکم بر سیستم

در این قسمت پاسخ معادلات ارتعاشی سیستم برای شرایط مرزی دو سر ساده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۴]:

$$u(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^6 A_{mni} p_{mni}(t) \cos(n\theta) + \omega_{mni} t \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^6 B_{mni} p_{mni}(t) \sin(n\theta) + \omega_{mni} t \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^6 C_{mni} p_{mni}(t) \cos(n\theta) + \omega_{mni} t \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

عبارت  $A_{mni} p_{mni}(t)$  برای هر متغیر در واقع ضربی است مجهول که تابع زمان است. پاسخ فوق را با باز کردن توابع هارمونیک روی متغیر  $\theta$  می‌توان به صورت رابطه (۱۴) نوشت:

یک جرم اضافه در نظر گرفته می‌شود [۶]. بنابراین انرژی کرنشی سنسور همانند پوسته محاسبه خواهد شد. روابط به صورت رابطه (۸) است:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_f^T \varepsilon) dV$$

$$U_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_a} \int_k (\sigma_p^T \varepsilon - D^T E) dV$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \int_k (\sigma_p^T \varepsilon) dV$$

$$dV = r(x) dz dx d\theta \quad (8)$$

#### ۶-۲ - انرژی تنش محیطی

در اثر چرخش پوسته، نیروی گریز از مرکز در پوسته ایجاد شده که با نوشتن رابطه تعادل در جهت شعاعی پوسته، بدست می‌آید. از آنجایی که چرخش پوسته روی پیزوالکتریک‌ها نیز تاثیر می‌گذارد، لذا انرژی تنش محیطی علاوه بر پوسته برای وصله‌های پیزوالکتریک نیز باید محاسبه شود. انرژی ایجاد شده به صورت رابطه (۹) قابل بیان است [۷]:

$$N_{\theta i} = \rho_i(z) \Omega^2 r(x)^2 \quad \rightarrow \quad i = f, p$$

$$U_{hf} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N_{\theta f} \epsilon_{\theta}^0 dV$$

$$U_{ha} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_a} \int_k N_{\theta p} \epsilon_{\theta}^0 dV$$

$$U_{hs} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} \int_k N_{\theta p} \epsilon_{\theta}^0 dV \quad (9)$$

همچنین کرنش ایجاد شده مربوط به این نیرو به صورت رابطه (۱۰) است [۷، ۱۴]:

$$\epsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{r(x)^2} \left\{ \frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin(\alpha) + w \cos(\alpha) \right)^2 + \left( v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

#### ۷-۲ - انرژی جنبشی

بردار جابه‌جایی، سرعت چرخش و سرعت کلی در دستگاه محور مختصات بدنی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
 u(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 A_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \right) \cos n\theta - \left( \sum_{i=1}^6 A_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t \right) \sin n\theta \right] \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\
 v(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 B_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \right) \sin n\theta + \left( \sum_{i=1}^6 B_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t \right) \cos n\theta \right] \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\
 w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 C_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \right) \cos n\theta - \left( \sum_{i=1}^6 C_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t \right) \sin n\theta \right] \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

پس از قرار دادن رابطه (۱۶) در روابط (۱۷) و (۱۸) حاصل به صورت عبارت‌های گسسته بدست می‌آید، سپس با استفاده از معادله لاگرانژ معادلات ارتعاشی به ODE بدست می‌آید [۱۴]. ضمناً نیروی خارجی وارد بر سیستم (اغتشاش) در نقطه  $x_0$  و  $\theta_0$  در سه جهت ارتعاشی به صورت رابطه (۱۹) در نظر گرفته شده است:

$$U_t = U_c + U_a + U_s + U_{hc} + U_{ha} + U_{hs} \tag{۱۷}$$

$$T_t = T_c + T_a + T_s \tag{۱۸}$$

$$\vec{f} = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} \tag{۱۹}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_t}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_t}{\partial q} + \frac{\partial U_t}{\partial q} = Q \tag{۲۰}$$

به این ترتیب معادلات ناهمگن سیستم که با یکدیگر کوپل هستند، برای هر مود به صورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K_1 + K_2 + K_3)q + K_a V_a = F \tag{۲۱}$$

$$q = \begin{Bmatrix} u_1^{mn} \\ u_2^{mn} \\ v_1^{mn} \\ v_2^{mn} \\ w_1^{mn} \\ w_2^{mn} \end{Bmatrix}$$

$$V_a = \begin{Bmatrix} v_{a1} \\ v_{a2} \\ v_{a3} \\ v_{a4} \end{Bmatrix}$$

عبارات موجود داخل پرانتزهای رابطه (۱۴) به صورت توابعی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_1^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 A_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \\
 u_2^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 A_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t \\
 v_1^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 B_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \\
 v_2^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 B_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t \\
 w_1^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 C_{mni} p_{mni}(t) \cos \omega_{mni} t \\
 w_2^{mn}(t) &= \sum_{i=1}^6 C_{mni} p_{mni}(t) \sin \omega_{mni} t
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در نهایت پاسخ به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [u_1^{mn}(t) \cos n\theta - u_2^{mn}(t) \sin n\theta] \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\
 v(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [v_1^{mn}(t) \sin n\theta + v_2^{mn}(t) \cos n\theta] \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\
 w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [w_1^{mn}(t) \cos n\theta - w_2^{mn}(t) \sin n\theta] \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$A_{si}$  سطح هر سنسور،  $z_m$  مختصات صفحه میانی سنسور، همچنین  $\bar{K}_{si}$  بردار ضریب جابه‌جایی است و بالاخره  $i$  تعداد وصله‌های پیزوالکتریک سنسور است. ولتاژ  $i$  امین سنسور با رابطه زیر محاسبه می‌شود [۶]:

$$V_{si}(t) = \frac{h_s}{\zeta_3 A_{si}} Q_{si}(t) = \left( \frac{h_s}{\zeta_3 A_{si}} \bar{K}_{si} q \right) = K_{si} q \quad (24)$$

$$K_s = [k_{i1}^s \quad k_{i2}^s \quad k_{i3}^s \quad k_{i4}^s \quad k_{i5}^s \quad k_{i6}^s] \quad (25)$$

$K_{si}$  ضریب نهایی است و رابط بین جابه‌جایی و ولتاژ سنسور است. زیروند  $i$  در ماتریس  $K_{si}$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس است که وابسته به تعداد سنسورهاست. با توجه به اینکه ۴ سنسور مدل‌سازی شده، بنابراین ابعاد این ماتریس در هر مود به طور خاص (۴ × ۶) خواهد بود.

#### ۲-۱۰- اعمال پس‌خورد

ولتاژ عملگر به عنوان ورودی به سیستم تلقی می‌شود. در این مقاله برای کنترل ارتعاشات سیستم از پس‌خورد سرعت استفاده شده که برای این منظور از ولتاژ سنسور کمک گرفته می‌شود. در رابطه زیر از ولتاژ سنسور مشتق گرفته و ضریب  $K_t$  به آن اضافه می‌شود:

$$V_a = -K_t \frac{dV_s}{dt} = -K_t K_s \dot{q} \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۱) معادله جدید سیستم به صورت رابطه (۲۷) بدست می‌آید:

$$M\ddot{q} + (C - K_a K_t K_s)\dot{q} + (K_1 + K_2 + K_3)q = F \quad (27)$$

پس‌خورد سرعت باعث ایجاد یک ماتریس دمپر در سیستم می‌شود. از آنجایی ماتریس دمپر جدید سیستم دیگر پادمتقارن نیست، لذا فرکانس‌های طبیعی بدست آمده علاوه بر قسمت موهومی دارای مقدار حقیقی نیز خواهند بود.  $K_t$  ماتریس بهره پس‌خورد و ابعاد آن (۴ × ۴) است. نکته قابل ذکر آنکه به دلیل وجود ۴ ورودی و ۴ خروجی، کنترل این سیستم، یک کنترل چند متغیره مربعی<sup>۱</sup> است.

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \cos n\theta_0 \cos\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \\ -f_1 \sin n\theta_0 \cos\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \\ f_2 \sin n\theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \\ f_2 \cos n\theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \\ f_3 \cos n\theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \\ -f_3 \sin n\theta_0 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \end{Bmatrix}$$

$$K_a = [k_{i1}^a \quad k_{i2}^a \quad k_{i3}^a \quad k_{i4}^a \quad k_{i5}^a \quad k_{i6}^a]^T$$

$$(T = \text{transpose}) \quad (22)$$

$M$  ماتریس جرم،  $C$  ماتریس ژيروسکوپ و  $K_a$  ماتریس ضریب ولتاژ عملگر در معادله است؛ همچنین سه ماتریس سختی در معادله وجود دارد.  $K_1$  ماتریس سختی ناشی از انرژی کرنشی،  $K_2$  ناشی از ترم چرخش موجود در انرژی تنش محیطی و  $K_3$  ناشی از ترم چرخش موجود در انرژی جنبشی است. ماتریس ژيروسکوپ به صورت پادمتقارن، ماتریس‌های سختی و جرم نیز به صورت متقارن خواهد بود. بنابراین چرخش در پوسته باعث به وجود آمدن دو ماتریس سختی و یک ماتریس دمپر می‌شود.

همانطور که مشخص است، با وجود ۳ متغیر در سیستم درجه معادلات دو برابر تعداد متغیرهای سیستم است، دلیل ظاهر شدن چنین پدیده‌ای وجود ۲ تابع زمان برای هر متغیر سیستم است. اگر برای هر متغیر تنها یک تابع زمانی در نظر گرفته شود، توابع متعامدی که ضرایب مشتقات اول زمانی هستند، به یکدیگر برخورد کرده و نتیجه آن می‌شود که درایه‌های ماتریس ژيروسکوپ صفر بدست می‌آید.

زیروند  $i$  در ماتریس  $K_a$  برابر با تعداد ستون‌های ماتریس است که وابسته به تعداد وصله‌های پیزوالکتریک عملگر است. از آنجایی که ۴ عملگر وجود دارد، بنابراین ابعاد این ماتریس در هر مود به طور خاص (۶ × ۴) خواهد بود.

#### ۲-۹- ولتاژ سنسور

بر طبق رابطه زیر مقدار بار ایجاد شده روی هر سنسور برابر است با انتگرال روی سطح جابه‌جایی الکتریکی سنسور در جهت ضخامت [۶]:

$$Q_{si}(t) = \int_{A_{si}} D_z dA = \bar{K}_{si} q \rightarrow z = z_m \quad (23)$$

<sup>1</sup> Square MIMO

### ۳- بحث و نتایج

در این بخش در مرحله اول به منظور حصول اطمینان از مدل‌سازی، اعتبارسنجی فرکانس طبیعی انجام می‌شود. بدین منظور در جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بی بعد نشان داده شده در رابطه (۲۸) با نتایج مرجع [۱] مقایسه شده است.

$$\Omega^* = \Omega b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}}$$

$$f_f = \omega_f b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}}$$

$$f_b = \omega_b b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}} \quad (28)$$

همانگونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، بیشترین تفاوت ۰/۱۷ درصد بوده و تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاضر و نتایج مرجع مورد نظر وجود دارد. در جدول ۲ فرکانس طبیعی بی بعد مخروط چرخان همسانگرد بدون پیزوالکتریک با نتایج مرجع [۱۵] مقایسه می‌شود. نتایج این جدول انطباق خوب روش حل تحلیلی که در این پژوهش استفاده شده است و روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته<sup>۱</sup> را نشان می‌دهد.

در ادامه با گسترش وصله‌های پیزوالکتریک و تبدیل آنها به لایه، فرکانس‌های طبیعی استوانه غیرچرخان با دو لایه پیزوالکتریک بر اساس ضرایب ناهمگنی پوسته مدرج تابعی (P)

جدول ۱- فرکانس طبیعی بی بعد مخروط ثابت همسانگرد  
 $h/b = 0.01$  ,  $L \sin(\alpha)/b = 0.25$  ,  $m = 1$  ,  $v = 0.3$   
 $\Omega^* = 0$  ,  $\alpha = 30^\circ$

$n$	LAM [۱]	Present	Difference
۲	۰/۸۴۲۰	۰/۸۴۰۵	٪ -۰/۱۷
۳	۰/۷۳۷۶	۰/۷۳۷۳	٪ -۰/۰۴
۴	۰/۶۳۶۲	۰/۶۳۶۶	٪ ۰/۰۶
۵	۰/۵۵۲۸	۰/۵۵۳۲	٪ ۰/۰۷
۶	۰/۴۹۵۰	۰/۴۹۵۱	٪ ۰/۰۲

<sup>۱</sup> Generalized Differential Quadrature

رسم گردیده و با مرجع [۱۳] که اطلاعات نمودار آن استخراج شده مقایسه شده است. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، دو نمودار با اختلاف بسیار جزئی روی هم منطبق هستند. خواص مکانیکی و نسبت‌های هندسی برای این مقایسه در مرجع مورد بیان شده است.

مقایسه بعدی نیز، مربوط به یک پوسته مخروطی غیرچرخان همسانگرد به همراه دو لایه پیزوالکتریک است که داخل و روی پوسته گسترانیده شده است. در جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از این پژوهش و روش المان محدود مقایسه شده است. همچنین اشکال ۴ تا ۷ شکل مودهای مربوطه را بیان می‌کند. با توجه به اطلاعات ارائه شده، درستی مدل‌سازی پیزوالکتریک به اثبات رسیده و باید ذکر شود که اختلاف اندک بین نتایج به تفاوت در روش حل برمی‌گردد. خواص و نسبت‌های هندسی در نظر گرفته شده نیز به صورت زیر است:

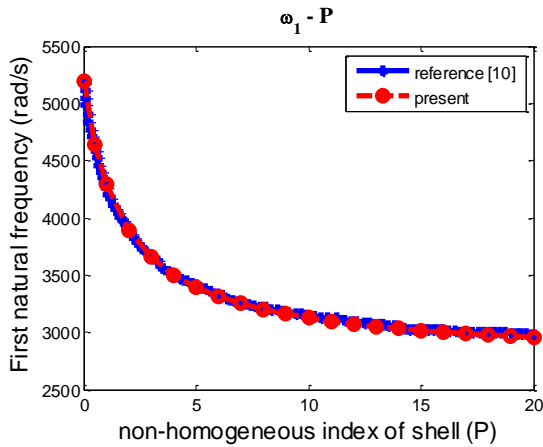
جدول ۲- فرکانس طبیعی بی بعد مخروط چرخان همسانگرد  
 $\alpha = 30^\circ$  ,  $h/a = 0.01$  ,  $L/a = 6$  ,  $m = 1$  ,  $v = 0.3$  ,  
 $\Omega^* = 0.1$

$f$	$n$	۱	۲	۳	۴
	Han [۱۵]	۰/۶۶۹۲	۰/۴۰۹۵	۰/۳۳۶۲	۰/۳۷۹۷
$f_f$	Present	۰/۶۸۰۶	۰/۴۰۰۵	۰/۳۳۶۶	۰/۳۸۲۸
	Difference	٪ ۱/۷	٪ - ۲/۲	٪ ۰/۱۲	٪ ۰/۸۲
	Han [۱۵]	۰/۸۱۱۶	۰/۵۳۲۰	۰/۴۳۰۸	۰/۴۵۳۸
$f_b$	Present	۰/۸۳۸۸	۰/۵۲۱۲	۰/۴۲۷۸	۰/۴۵۴۵
	Difference	٪ ۳/۳	٪ - ۲/۰	٪ - ۰/۷	٪ ۰/۱۵

جدول ۳- فرکانس طبیعی مخروط غیرچرخان همسانگرد  
 با دو لایه گسترش یافته پیزوالکتریک (HZ)

$n$	Present	Abaqus	Difference
۱	۱۱۷۷/۷	۱۱۴۸/۹	٪ ۲/۵۱
۲	۶۸۳/۳	۷۰۵/۲	٪ -۳/۱۱
۳	۴۴۶/۵	۴۵۸/۳۶	٪ -۲/۶۶
۴	۳۲۸/۶	۳۲۲/۱۷	٪ ۱/۹۹





شکل ۳- مقایسه فرکانس طبیعی اول استوانه غیرچرخان به همراه دو لایه پیزوالکتریک با مرجع [۱۳]

Geometric parameters:

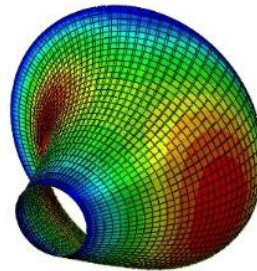
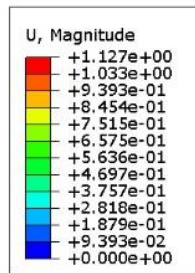
$$\begin{cases} \alpha = 30^\circ, h/a = 0.01, L/a = 6 \\ m = 1, \Omega = 0, h_a/h = 0.25 \\ h_s/h = 0.25, N = 0, P = 0 \end{cases}$$

shell:

$$E_f = 380 \text{ (GPa)}, \rho_f = 3800 \left(\frac{kg}{m^3}\right), \nu = 0.33$$

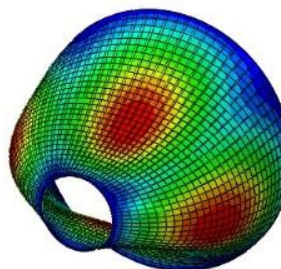
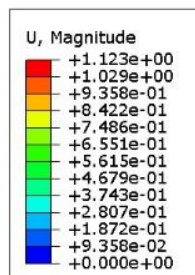
Piezoelectric:

$$\begin{cases} Q_{11} = 139 \text{ (GPa)}, Q_{12} = 77.8 \text{ (GPa)} \\ Q_{66} = 30.6 \text{ (GPa)}, \rho_p = 7800 \left(\frac{kg}{m^3}\right) \end{cases}$$



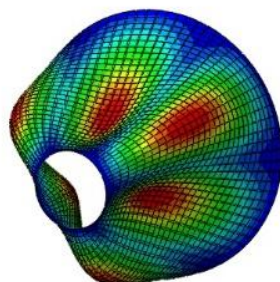
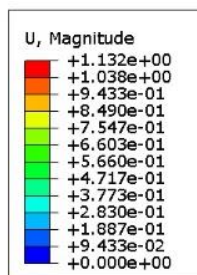
ODB: Job-4365.odb Abaqus/Standard 3DEXPERIENCE R2016x HotFix 2  
Step: Step-1  
Mode 143: Value = 5.21075E+07 Freq = 1148.9 (cycles/time)  
Primary Var: U, Magnitude

شکل ۴- شکل مود  $m = 1, n = 1$



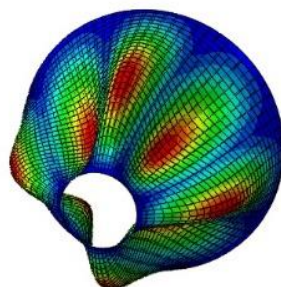
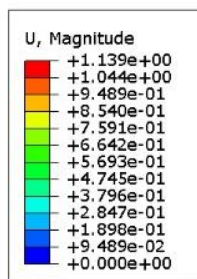
ODB: Job-4365.odb Abaqus/Standard 3DEXPERIENCE R2016x HotFix 2  
Step: Step-1  
Mode 66: Value = 1.96329E+07 Freq = 705.20 (cycles/time)  
Primary Var: U, Magnitude

شکل ۵- شکل مود  $m = 1, n = 2$



ODB: Job-4365.odb Abaqus/Standard 3DEXPERIENCE R2016x HotFix 2  
 Step: Step-1  
 Mode 30: Value = 8.29422E+06 Freq = 458.36 (cycles/time)  
 Primary Var: U, Magnitude

شکل ۶- شکل مود  $m = 1, n = 3$



ODB: Job-4365.odb Abaqus/Standard 3DEXPERIENCE R2016x HotFix 2  
 Step: Step-1  
 Mode 13: Value = 4.09767E+06 Freq = 322.17 (cycles/time)  
 Primary Var: U, Magnitude

شکل ۷- شکل مود  $m = 1, n = 4$

جدول ۲- خواص پیزوالکتریک (PZT - 4)

$Q$ GPa			$e$ $Cm^{-2}$		$\zeta$ $10^{-9} F.m^{-1}$	$\rho$ $\frac{kg}{m^3}$
$Q_{11}^0$	$Q_{12}^0$	$Q_{66}^0$	$e_{31}^0$	$e_{32}^0$	$\zeta_{33}^0$	$\rho_p^0$
۱۳۹	۷۷/۸	۳۰/۶	-۵/۲	-۵/۲	۵/۶۲	۷۸۰۰

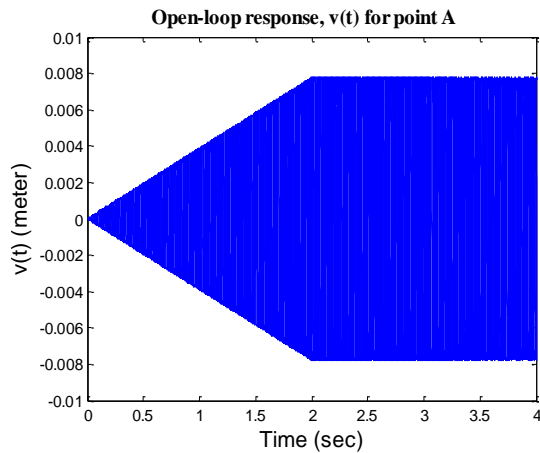
جدول ۳- نسبت های هندسی

$\frac{h}{a}$	$\frac{L}{a}$	$\frac{h_a}{h}$	$\frac{h_s}{h}$	$\alpha$ (deg)	$N$	$P$	$\frac{\Omega}{s}$ ( $\frac{rev}{s}$ )
۰/۰۱	۶	۰/۲۵	۰/۲۵	۳۰	۲	۱	۱۵۰

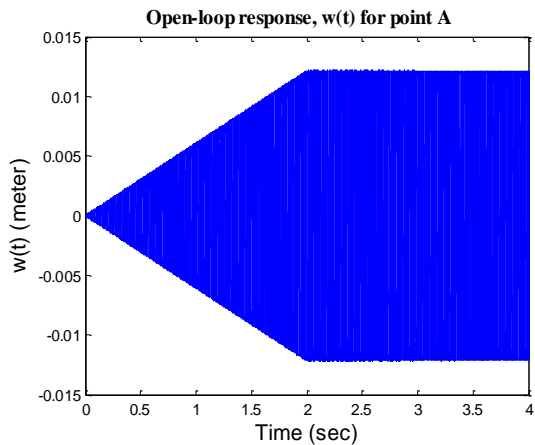
جدول ۱- خواص مکانیکی پوسته

	$E_f$ (GPa)	$\rho_f$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$\nu$
$Al_2O_3$	۳۸۰	۳۸۰۰	۰/۳۳
Al	۷۰	۲۷۰۰	۰/۳۳

گام بعدی بررسی پاسخ ارتعاشات و کنترل آن است. برای این کار باید خواص پوسته، پیزوالکتریک و نسبت‌های هندسی مشخص شده باشند. پیزوالکتریک انتخاب شده از نوع  $PZT - 4$  است. همچنین از آلومینا برای قسمت بیرونی و از آلومینیوم برای قسمت داخلی پوسته استفاده شده است. در جداول ۱ تا ۳ موارد ذکر شده مشخص شده است [۱۳، ۱۶].



شکل ۹- پاسخ مدار باز مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $v$



شکل ۱۰- پاسخ مدار باز مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $w$

به سرعت کم شده تا اینکه به صفر رسیده است که این نشان دهنده منفی بودن قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های طبیعی (قطب‌های مدار بسته) سیستم است. همچنین ماکزیمم ولتاژ عملگر برای کنترل سیستم در شکل ۱۳ ارائه شده است، در این نمودار ملاحظه می‌شود که برای کنترل سیستم تشدید شده در مود اول به ۴۰۰۰ ولت اختلاف پتانسیل نیاز است.

$$A = (x_0, \theta_0) = \left(\frac{L}{4}, 0\right) \quad (29)$$

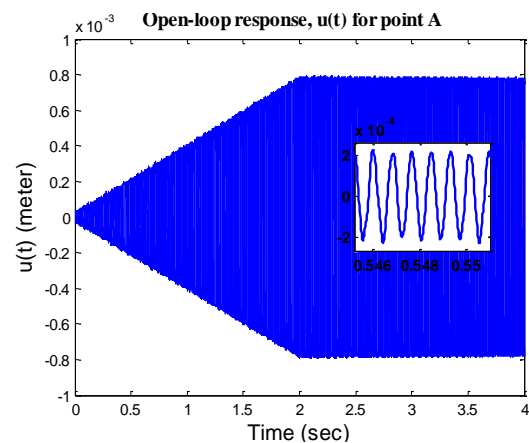
$$F = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} \rightarrow \begin{cases} f_1 = a \cos(\omega_{1b} t) \\ f_2 = a \cos(\omega_{1b} t) \\ f_3 = a \cos(\omega_{1b} t) \end{cases} \quad (30)$$

$\rightarrow a = 4 \text{ (KN)}$

### ۳-۱- کنترل و بررسی یک مود خاص

در این بخش فرض شده شرایط کاری محیطی به گونه‌ای است که امکان فعال شدن یک مود خاص وجود دارد که در اینجا مود اول ارتعاشات در نظر گرفته شده است. بنابراین مهم است که این مود کنترل شود. باید ذکر شود که برای حل معادله دیفرانسیل توصیف کننده دینامیک سیستم از روش عددی رانگ کوتاه<sup>۱</sup> مرتبه چهار با زمان نمونه برداری بسیار کوچک استفاده شده است.

نمودارهای ۸ تا ۱۱ پاسخ سیستم تشدید شده نقطه  $A$  است، به طوری که نیروی خارجی با بزرگی ۴ کیلو نیوتون و فرکانس تحریک برابر با اولین فرکانس پسرونده در بازه بین صفر تا دو ثانیه به سیستم (نقطه  $A$ ) اعمال می‌شود را در دو حالت مدار باز<sup>۲</sup> و بسته<sup>۳</sup> نشان می‌دهد. در این حالت نمودارهای مدار باز بیان می‌کند که دامنه نوسانات در زمان بسیار کوتاه به طور وحشتناکی رشد کرده و پس از برداشتن نیرو، سیستم با دامنه ثابت به ارتعاشات ادامه می‌دهد. البته به دلیل دامنه نسبتاً بالا احتمالاً سیستم دچار از هم پاشیدگی و تخریب می‌شود. با توجه به نمودارهای ۱۲ تا ۱۱ سیستم کنترل با بهره پسخورد  $K_{t1}$  (موجود در پیوست) توانسته از افزایش شدید دامنه جلوگیری کرده و آن را روی مقدار ثابتی نگه دارد، پس از آنکه تحریک خارجی برداشته شده نیز دامنه

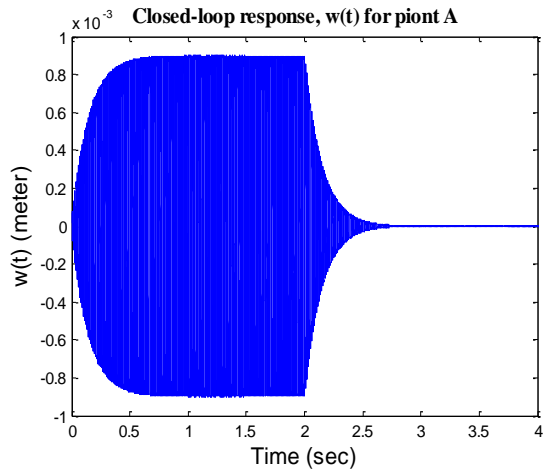


شکل ۸- پاسخ مدار باز مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $u$

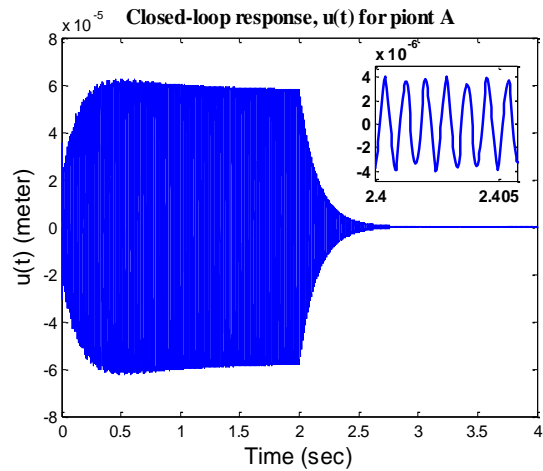
<sup>۱</sup> Runge-Kutta

<sup>۲</sup> Open-Loop

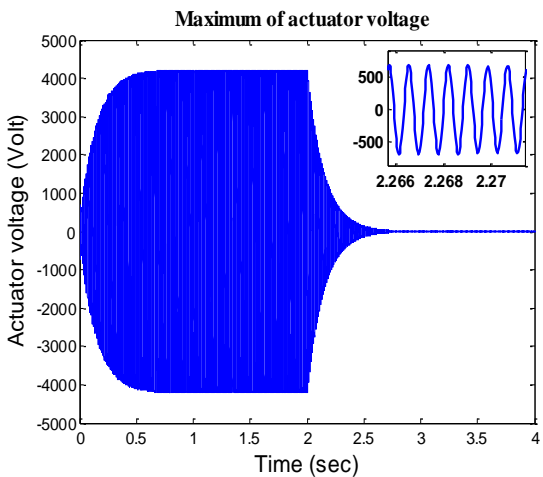
<sup>۳</sup> Closed-Loop



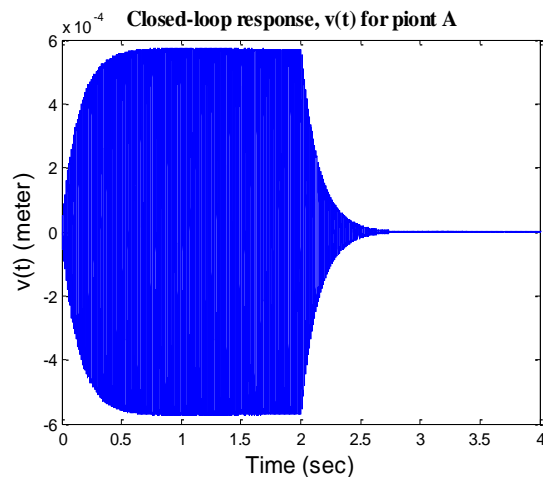
شکل ۱۱- پاسخ مدار بسته مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $w$



شکل ۱۲- پاسخ مدار بسته مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $u$



شکل ۱۳- بیشترین ولتاژ عملگر برای کنترل ارتعاشات مود اول سیستم در حال تشدید



شکل ۱۴- پاسخ مدار بسته مود اول سیستم در حالت رزونانس در جهت  $v$

سیستم همگرا شود. در این حالت می‌توان گفت، تقریباً تاثیر همه مدها در پاسخ آمده است. اشکال ۱۵ و ۱۶ پاسخ سیستم در جهت ضخامت ( $w(t)$ ) به نیروی پله اعمالی به نقطه  $A$  را نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود، همگرایی پاسخ تقریباً در  $m = 3, n = 3$  افتاده است. باید ذکر شود که به دلیل اهمیت بالای مود طولی، در اینجا تنها سیگما روی این مود ( $m$ ) باز شده است.

### ۲-۳- کنترل تمام مدها

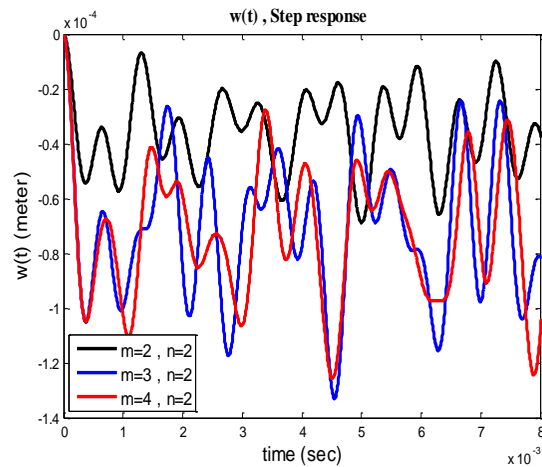
در بیشتر مواقع شرایط خاصی بر سیستم حاکم نیست و تحریک خارجی ممکن است، مود خاصی را فعال نکند. در این صورت همه مدها در پاسخ نقش خواهند داشت؛ بنابراین ابتدا باید پاسخ کلی سیستم شناسایی شده سپس برای آن کنترلر مناسبی طراحی شود. اولین قدم بازکردن سیگما در رابطه (۱۶) و بدست آوردن معادلات سیستم از ابتدا است. پس از آن باید پاسخ سیستم رسم شده و تعداد جملات سیگما تا جایی بالا برود که پاسخ

از صفر فاصله گرفته، اما در جهت  $w$  همچنان روی صفر قرار دارد. در پاسخ‌های مدار بسته ملاحظه می‌شود که سیستم پایدار مجانبی بوده و دامنه ارتعاشات پس از چندین ثانیه صفر می‌شود. نکته قابل ذکر وجود خطای حالت ماندگار در جهت  $u$  و  $v$  است که به دلیل باقی ماندن نیروی پله در سیستم ایجاد شده و به علت تداخل شدید بین پاسخ‌ها، امکان حذف آن وجود ندارد؛ همچنین بیشترین ولتاژ مورد نیاز برای کنترل سیستم در این حالت در شکل ۲۳ ترسیم شده که نشان می‌دهد، ولتاژی در حدود ۸۰۰ ولت برای کنترل ارتعاشات نیاز است.

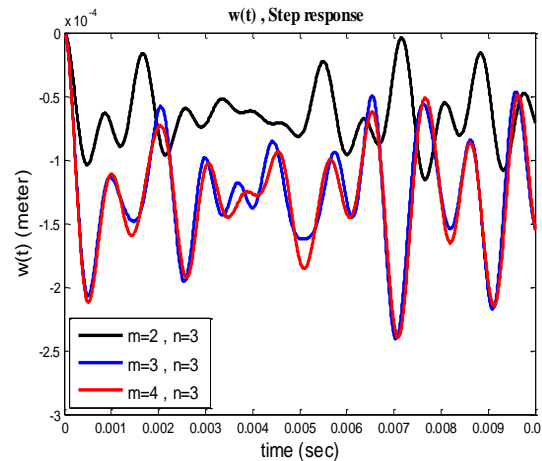
$$F = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} \rightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = -30 \text{ (KN)} \end{cases} \quad (31)$$

حلقه کنترلی توانسته در دو حالت (تک مود و سیستم همگرا شده) مختلف، عمل کنترل را به خوبی انجام دهد و سیستم را پایدار مجانبی کند. از آنجایی که پاسخ سیستم شدیداً نوسانی است (به دلیل وجود فرکانس‌های طبیعی بزرگ)، لذا پارامترهای درصد فراجش<sup>۱</sup>، زمان صعود<sup>۲</sup> و اوج<sup>۳</sup> برای سنجش عملکرد سیستم حلقه بسته مناسب نیستند و تنها می‌توان از زمان استقرار<sup>۴</sup> استفاده نمود، یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پاسخ به مقدار نهایی خود برسد. همانطور که مشاهده می‌شود، زمان استقرار متغیرها در حالت اول کمتر از یک ثانیه و در حالت دوم، حدوداً ۵ ثانیه است که می‌توان با بزرگتر کردن بهره پسخورد این زمان را کاهش داد، اما باید توجه داشت که حداکثر ولتاژ عملگر نیز به طبع آن رشد می‌کند.

نکته قابل ذکر آنکه نمودارهای پاسخ در این پژوهش برای یک نقطه  $(A)$  ترسیم شده است، ولی از آنجایی که پاسخ زمانی سیستم کنترل شده، لذا نمودار هر نقطه دیگری از پوسته به همین صورت پایدار مجانبی خواهد بود.



شکل ۱۵- همگرایی پاسخ در جهت  $w(t)$  در  $n = 2$

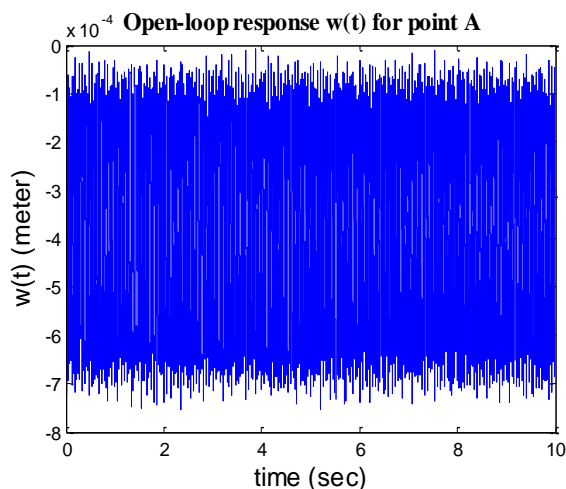


شکل ۱۶- همگرایی پاسخ در جهت  $w(t)$  در  $n = 3$

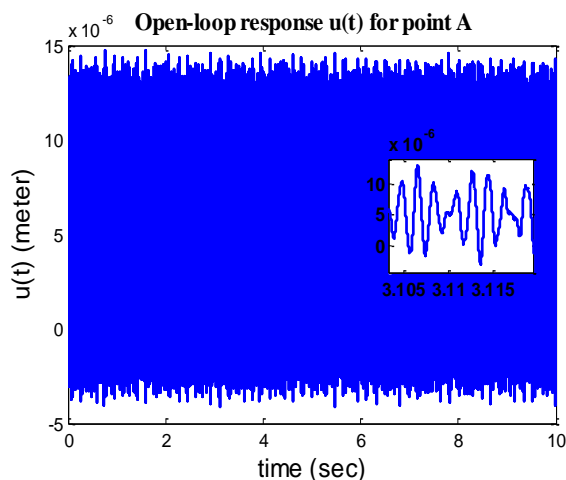
بهره کنترلی در این بخش به صورت قطری انتخاب شده که در پیوست با نام  $K_{t2}$  ارائه شده است. تحریک پله به سیستم اعمال شده و نتایج سه جهت ارتعاشاتی  $(u, v, w)$  در نقطه  $A$  ترسیم شده است.

پاسخ کنترل نشده و حلقه بسته سیستم با اعمال بار پله ۳۰ کیلو نیوتونی به نقطه  $A$  که در رابطه ۳۱ بیان شده است، در نمودارهای ۱۷ تا ۲۲ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که این نیرو باعث ایجاد دامنه ارتعاشات ثابت ۰/۳ میلی متری در راستای ضخامت  $w(t)$  شده است. دلیل این دامنه ثابت عدم وجود دمپینگ در حالت مدار باز در سیستم است. همچنین نقطه تعادل ارتعاشات مدار باز در جهت‌های  $u$  و  $w$

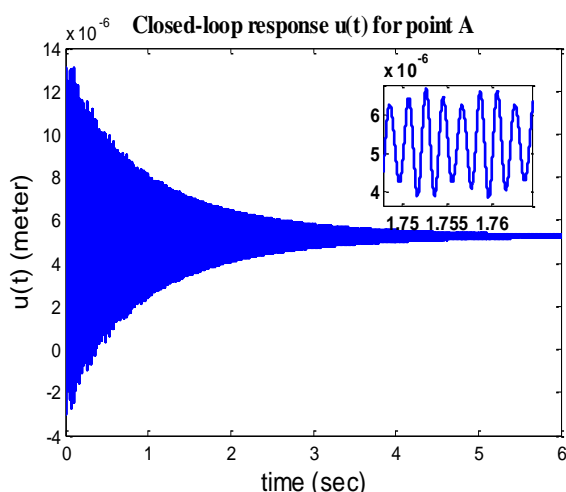
<sup>1</sup> Overshoot  
<sup>2</sup> Rise Time  
<sup>3</sup> Peak Time  
<sup>4</sup> Settling Time



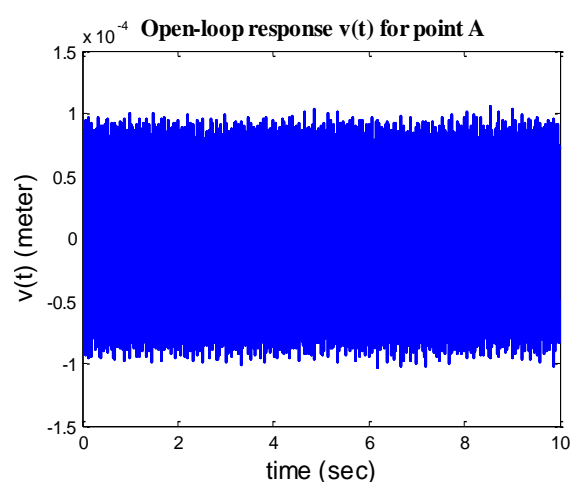
شکل ۱۸- پاسخ مدار باز سیستم همگرا شده در جهت  $w$  ناشی از نیروی پله



شکل ۱۷- پاسخ مدار باز سیستم همگرا شده در جهت  $u$  ناشی از نیروی پله



شکل ۲۰- پاسخ مدار بسته سیستم همگرا شده در جهت  $u$  در حضور نیروی پله



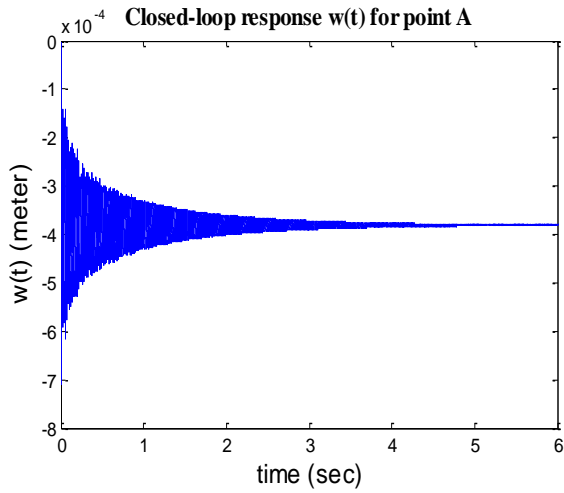
شکل ۱۹- پاسخ مدار باز سیستم همگرا شده در جهت  $v$  ناشی از نیروی پله

#### ۴- نتیجه گیری

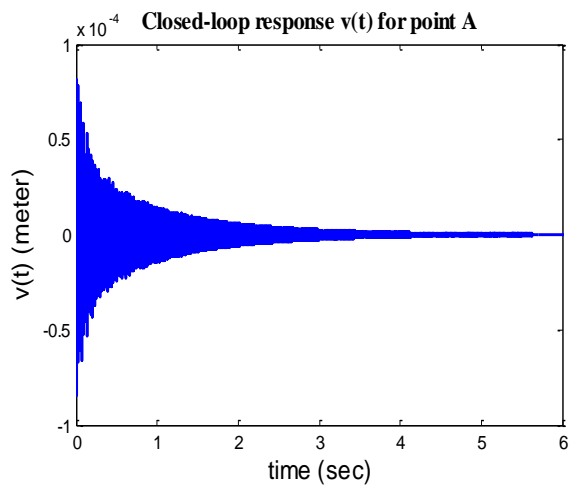
در این مقاله، کنترل فعال ارتعاشات پوسته مخروطی مدرج تابعی چرخان از طریق وصله‌های پیزوالکتریک با خاصیت مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفت. ۴ جفت وصله سنسور و عملگر به ترتیب داخل و بیرون پوسته قرار داده شده است. دینامیک سیستم با استفاده از نظریه کلاسیک و با روابط کرنش-جابجایی لاو بدست آورده شده است. در مدل‌سازی به جای استفاده از روابط پیچیده اصل همیلتون و رسیدن به معادلات با مشتقات جزئی، پاسخ در نظر گرفته شده درون

انتگرال‌های انرژی محاسبه شده برای سیستم قرار داده شده تا معادلات مسئله مستقیماً به صورت معادلات زمانی بدست آید. کنترل سیستم به صورت چند متغیره و با روش پس‌خورد سرعت با توجه به شرایط محیطی برای دو حالت یک مود خاص و سیستم همگرا شده انجام گرفت که نتایج حاصله پایدار مجانبی بودن سیستم را نشان داد.

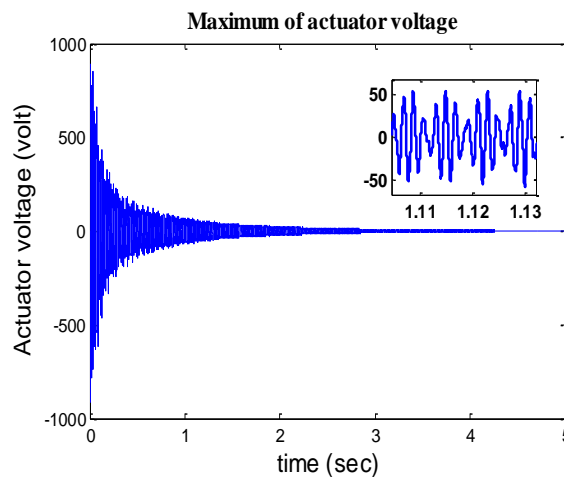
- ۴ جفت وصله پیزوالکتریک به راحتی می‌تواند ارتعاشات یک روتور پوسته مخروطی را مستهلک کند.



شکل ۲۲- پاسخ مدار بسته سیستم همگرا شده در جهت  $w$  در حضور نیروی پله



شکل ۲۱- پاسخ مدار بسته سیستم همگرا شده در جهت  $v$  در حضور نیروی پله



شکل ۲۳- بیشترین ولتاژ عملگر برای کنترل سیستم همگرا شده در حضور نیروی پله

- هر چه مودهای ارتعاشاتی بیشتری برای کنترل مد نظر باشد، بهره پسخورد نیز به طبع آن باید افزایش یابد.
  - برای کنترل ارتعاشات یک سیستم در حال رزونانس انرژی بیشتری نسبت به حالت غیر رزونانس مورد نیاز است.
  - به دلیل وجود تداخل بین جهت‌های ارتعاشی امکان حذف خطای حالت ماندگار در پاسخ مدار بسته پوسته مخروطی چرخان وجود ندارد.
- ۵- فهرست علائم
- |   |   |
|---|---|
| <p><math>(m)</math> شعاع کوچک پوسته</p> <p><math>(m)</math> شعاع بزرگ پوسته</p> <p><math>(m)</math> ضخامت پوسته</p> <p><math>(m)</math> ضخامت وصله عملگر</p> <p><math>(m)</math> ضخامت وصله عملگر</p> | <p><math>a</math></p> <p><math>b</math></p> <p><math>h</math></p> <p><math>h_a</math></p> <p><math>h_s</math></p> |
|---|---|

$$K_{t2} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$L$  طول پوسته ( $m$ )

$C_f$  ماتریس سفتی پوسته ( $Pa$ )

$C_p$  ماتریس سفتی پیزوالکتریک ( $Pa$ )

$e$  ماتریس تاثیر پذیری ( $C.m^{-2}$ )

$E_z$  میدان الکتریکی در راستای عرضی ( $V.m^{-1}$ )

$E_f$  مدول یانگ پوسته مخروطی ( $Pa$ )

$N_\theta$  نیروی گریز از مرکز ( $N.m^{-2}$ )

علائم یونانی

$\alpha$  زاویه رأس مخروط ( $Rad$ )

$\varepsilon$  کرنش

$\sigma_f$  تنش پوسته ( $Pa$ )

$\sigma_p$  تنش پیزوالکتریک ( $Pa$ )

$\zeta$  ماتریس دی الکتریک ( $10^{-9} F.m^{-1}$ )

$\nu$  نسبت پواسون

$\rho_f$  چگالی پوسته مخروطی ( $Kg.m^{-3}$ )

$\rho_p$  چگالی پیزوالکتریک ( $Kg.m^{-3}$ )

$\Omega$  سرعت چرخش پوسته ( $Rad/s$ )

$\omega_f$  فرکانس طبیعی پیشرو ( $Rad/s$ )

$\omega_b$  فرکانس طبیعی پسرو ( $Rad/s$ )

۶- پیوست

$$K_{t1} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 \end{bmatrix}$$

### ۷- منابع

- [1] Lam KY, Hua L (1997) Vibration analysis of a rotating truncated circular conical shell. Int J Solids Struct 34: 2183-2197.
- [2] Karroubi R, Irani-Rahaghi M (2019) Rotating sandwich cylindrical shells with an FGM core and two FGPM layers: free vibration analysis. Appl Math Mech-Engl 40: 563-578.
- [3] Li FM, Song ZG, Chen ZB (2012) Active vibration control of conical shells using piezoelectric materials. J Vib Control 18: 2234-2256.
- [4] Jafari AA, Khalili SMR, Tavakolian M (2014) Nonlinear vibration of functionally graded cylindrical shells embedded with a piezoelectric layer. Thin-Walled Struct 79: 8-15.
- [5] Arefi M (2019) Third-order electro-elastic analysis of sandwich doubly curved piezoelectric micro shells. Mech based des Struc 1-30.
- [6] Song ZG, Zhang LW, Liew KM (2016) Active vibration control of CNT-reinforced composite cylindrical shells via piezoelectric patches. Compos Struct 158: 92-100.
- [7] Wang J, Cao Y, Lin G (2016) Vibration analysis of high-speed rotating conical shell with arbitrary boundary conditions. Proc Meet Acoust 29: 065001
- [8] Moghaddam SMF, Ahmadi H (2020) Active vibration control of truncated conical shell under harmonic excitation using piezoelectric actuator. Thin-Walled Struct 151: 106642.
- [9] Li H, Lam KY, Ng TY (2005) Rotating shell dynamics. Elsevier.
- [۱۰] جعفری نیاسر م، جعفری ع ع، ایرانی رهقی م (۱۳۹۸) بررسی تاثیر وصله‌های پیزوالکتریک بر روی فرکانس ارتعاشات روتور پوسته‌ی مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی. کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات.
- [۱۱] عطاریان م، جعفری ع ع (۱۳۸۹) بررسی ارتعاشات آزاد مخزن استوانه‌ای حاوی سیال با پوسته FGM. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.
- [12] Arefi M (2015) The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers. Smart Struct Syst 15:1345-1362.



- [15] Han Q, Chu F (2014) Parametric resonance of truncated conical shells rotating at periodically varying angular speed. *J Sound Vib* 333: 2866-2884.
- [16] Mehralian F, Beni YT (2018) Vibration analysis of size-dependent bimorph functionally graded piezoelectric cylindrical shell based on nonlocal strain gradient theory. *J Braz Soc Mech Sci* 40: 27.
- [13] Arefi M, Karroubi R, Irani-Rahaghi M (2016) Free vibration analysis of functionally graded laminated sandwich cylindrical shells integrated with piezoelectric layer. *Appl Math Mech-Engl* 37: 821-834.
- [14] Sun S, Liu L, Cao D (2018) Nonlinear travelling wave vibrations of a rotating thin cylindrical shell. *J Sound Vib* 431: 122-136.