



بررسی غیرخطی آیروالاستیسیته صفحه ترک‌دار همسانگرد در جریان فراصوت

سید سعید مظفریان^۱ و جلیل رضایی پزند^{۲*}

^۱ دانشجوی دکتری، آزمایشگاه سازه‌های هوشمند و کامپوزیتی، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ استاد، آزمایشگاه سازه‌های هوشمند و کامپوزیتی، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۰

چکیده

در مقاله حاضر، مدلی تحلیلی جهت بررسی پاسخ غیرخطی آیروالاستیک صفحه ترک‌دار در جریان فراصوت ارائه شده است. به این منظور معادله خمش خالص دوبعدی صفحه همسانگرد ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی ساده پیشنهاد شده است. برای تشکیل این معادله، مدل‌سازی صفحه بر اساس تئوری صفحه کلاسیک و روابط غیرخطی ون-کارمن، مدل خط-فتر برای ناحیه ترک و تئوری خطی پیستون برای محاسبه فشار آیرودینامیکی در نظر گرفته شده است. با اعمال روش گلرکین و مودهای فرضی صفحه، معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی به معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های معمولی تبدیل می‌شود. سپس با بهره‌گیری از روش حل عددی رانج-کوتا این معادلات، حل و نتایج بررسی شده است. بعد از مقایسه نتایج با منابع تحلیلی و اطمینان از صحت روش، اثرهای ابعاد و جهت ترک بر پایداری آیروالاستیک صفحه، مرز فلاتر و نوسان‌ها چرخه محدود مطالعه گردید. نتایج نشان می‌دهد، وجود ترک باعث وقوع زود هنگام فلاتر، افزایش بیشینه دامنه نوسان‌ها چرخه محدود و در نهایت کاهش سرعت ناپایداری آیروالاستیک صفحه می‌شود.

کلمات کلیدی: صفحه ترک‌دار؛ پایداری آیروالاستیک؛ نوسان‌های چرخه محدود؛ فلاتر؛ روش گلرکین.

Investigation of Nonlinear Aero-Elastic of Isotropic Cracked Plate in Supersonic Flow

S. S. Mozafareiyani¹, J. Rezaee Pazhand^{2,*}

¹ Ph.D. Student, Smart and Composite Structures Lab, Department of Mechanical Engineering, Fedowski University of Mashhad, Mashhad, Iran.

² Professor, Smart and Composite Structures Lab, Department of Mechanical Engineering, Fedowski University of Mashhad, Mashhad, Iran.

Abstract

In the present study, an analytical model was presented for investigating the nonlinear aero-elastic response of cracked plate in supersonic flow. In this context, two-dimensional equations of cracked induced isotropic plate were proposed considering pure bending loading and simply support boundary condition. To form this equation, plate modeling based on the classical plate theory (CPT) and the von-Karman nonlinear relations. Also, the Line-Spring Model (LSM) and linear piston theory were considered for crack location and aerodynamic effect, respectively. Applying the Galerkin's method and plate assume modes, the partial differential equations (PDEs) are transformed into ordinary differential equations (ODEs). Then, by using Runge-Kutta numerical solution method, these equations (PDEs) were solved and the results were investigated. Eventually, some of effective aero-elastic parameters like flow condition and crack size were prescribed within the limit cycle oscillation (LCO) in flutter status. Results demonstrate that the presence of crack was leading early flutter, increasing the maximum amplitude of the limit cycle oscillations and aero-elastic instability that can ultimately reduce the structural performance.

Keywords: Cracked Plate; Aero-Elasticity Stability; Limit Cycle Oscillation (LCO); Flutter; Galerkin's Method.

۱- مقدمه

فلاتر صفحه‌ای^۱ نوعی ناپایداری دینامیکی است که حاصل برهم‌کنش نیروهای آبرودینامیکی و خواص الاستیک سازه است و روی یک سمت سازه‌های هوایی مانند پوسته‌های فضایی رخ می‌دهد [۱]. سازه‌های فضایی مانند بالک موشک‌ها و قسمتی از پوسته یک بال، این پدیده را تجربه می‌کنند. پس از وقوع فلاتر صفحه‌ای، نوسان‌ها صفحه با سیکلی محدود ادامه پیدا می‌کنند که این نوسان در حوزه زمان، می‌تواند باعث پدیده‌هایی مانند خستگی شود که باعث ضعف، تغییر شکل و در نهایت به تخریب آن می‌شود. جهت پیش‌بینی رفتار سازه‌های هوایی، قسمت‌های مختلف آن‌ها عموماً به صورت تیر یا صفحه در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه مهم است، در مدل‌سازی از تئوری‌های مناسب برای نزدیک شدن به رفتار واقعی سازه‌ها توجه کرد.

دیگر مواردی که در نظر گرفتن آن در طراحی و تحلیل سازه‌های هوایی ضروری به نظر می‌رسد، ترک‌های بوجود آمده حین فرآیند ساخت و نیز پس از باربرداری آنهاست. وقوع ترک در طول عمر سازه‌ها بسیار محتمل است؛ بنابراین هنگام استفاده از سازه‌های ترک خورده بدون تأیید ایمنی، می‌تواند با خطرهای متعددی همراه باشد [۲]. این ترک‌ها باعث تغییر در مشخصه‌های آبرو الاستیک صفحه در شرایط بارگذاری می‌شوند.

در ادامه به مهم‌ترین پژوهش‌های انجام شده در زمینه آبرو الاستیسیته صفحه‌های بدون ترک، آبرو الاستیسیته صفحه‌های دارای ترک و ارتعاشات صفحه‌های دارای ترک پرداخته می‌شود.

داول [۳] در سال ۱۹۶۶ در پژوهشی نوسان‌های غیرخطی و اثر پارامترهای مختلف بر پاسخ صفحه را مورد بحث و بررسی قرار داد. اثرهای پارامترهایی همچون نسبت منطری صفحه، نسبت جرمی، فشار استاتیک و نیروی داخل صفحه (مانند اثرهای دمایی) مورد تحلیل قرار گرفت. این محقق دریافت که برای یک صفحه کمانش یافته تحت اثر فشار آبرودینامیک، نوسان‌های همساز غیر ساده^۲ اما متناوب^۳

امکان پذیر است. این محقق یک سال بعد در بخش دوم پژوهش خود [۴]، نوسان‌ها را در شرایط آبرودینامیکی مختلف مورد بررسی قرار داد. ژو و می [۵] در سال ۱۹۹۳ به بررسی المان محدود نوسان‌ها غیرخطی یک صفحه فلزی در جریان فراصوت، همراه با اثرهای دمایی پرداختند. در این پژوهش بر ضرورت تحلیل تنش‌های حرارتی برای فلاتر صفحه‌ای غیرخطی تأکید شد. در این پژوهش نشان داده شده که استفاده از المان‌های مثلثی، پاسخی دقیق‌تر در مسائل غیرخطی و فلاتر ارائه می‌کند. ژائو و همکاران [۶] در سال ۱۹۹۴ در پژوهشی همین فرآیند حل المان محدود را برای صفحه‌ای کامپوزیتی انجام دادند. لیبرسکو و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۴، فلاتر خطی و غیرخطی یک صفحه تیتانیومی را در جریان فراصوت و توزیع دمایی بالا مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش از تئوری کلاسیک صفحه و روابط غیرخطی ون-کارمن برای سازه و تئوری پیستونی مرتبه اول برای آبرودینامیک استفاده شد. آنان از توزیع دمای غشایی برای اثرهای دمای بالا بهره جستند. از نتایج این تحقیق، کاهش مرز فلاتر و ناپایداری در اثر اثرهای دمایی بود. نوازی و حدادپور [۸] در سال ۲۰۰۷، طی پژوهشی پایداری آبروترموالاستیک صفحه‌ای از جنس مواد هدفمند^۴ را مورد بحث و بررسی قرار دادند. آنان با بهره‌گیری از اصل همپلتون، بر مبنای تئوری کلاسیک صفحه‌ها برای سازه، تئوری پیستونی مرتبه اول برای آبرودینامیک و نیز توزیع دمای پایای یک بعدی برای اثرهای حرارتی، معادلاتی هم‌بند^۵ با مشتق‌های جزئی ارائه دادند. آنان دریافتند که تغییرات یکنواخت و غیر یکنواخت حرارت در راستای ضخامت تأثیری بر مرز پایداری ندارد. سونگ و لی [۹] در سال ۲۰۱۴ آبروترموالاستیک صفحه‌ای کامپوزیتی متأثر از بار آبرودینامیکی و حرارتی حاصل از امواج شوک را مورد بررسی قرار دادند. این پژوهش افزایش تغییرات دمایی را همراه با افزایش ناپایداری آبروترموالاستیک صفحه نشان می‌داد. موسی زاده و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۵ به تحلیل آبروترموالاستیک صفحه‌ای با فرض خمش استوانه‌ای پرداختند. آنان این صفحه فلزی را با روش‌های گلرکین^۶ و حجم محدود

^۴ Functionally Grade Martial (FGM)

^۵ Couple

^۶ Galerkin's Method

^۱ Panel Flutter

^۲ Nonsimple Harmonic

^۳ Periodic

جهته بر مشخصه‌های آیروالاستیسیته یک صفحه مربعی را مطالعه کردند. از نتایج این پژوهش این بود که در برخی موقعیت‌ها و ابعاد، ترک باعث تأخیر در فلاتر می‌شود. عبدالله و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۸، آیروالاستیسیته صفحه کامپوزیتی با ترک لبه‌ای را مورد تحلیل قرار دادند. آنان با استفاده روش المان محدود برای سازه و برای آیرودینامیک و همبندی کامل بین این دو مدل، تأثیر پارامترهای ترک و زوایای الیاف بر فلاتر را مورد بحث قرار دادند. آنان دریافت که بر خلاف انتظار در برخی زوایای الیاف و ابعاد ترک، فلاتر دیرتر اتفاق می‌افتد.

رایس و لوی [۱۸] در سال ۱۹۷۲ برای اولین بار خط ترک پیوسته را با مدل خط-فنر^۱ (LSM) ارائه کردند. آنان بر مبنای تئوری کلاسیک صفحه‌ها، نتیجه‌های کشش و خمش ناحیه ترک را بر اساس نتیجه‌های کشش و خمش داخلی در دوردست فرمول بندی کردند. در این پژوهش با در نظر گرفتن فرض تنش صفحه ضریب شدت تنش برای این صفحه دارای ترک مرکزی تعیین شد. وو و شین [۱۹] در سال ۲۰۰۵، پاسخ غیر خطی دینامیکی و ناپایداری صفحه ترک‌دار را به صورت تحلیلی بدست آوردند. آنان با کمک تئوری کلاسیک صفحه‌ها و روابط غیر خطی ون-کارمن معادله حرکت خمشی را تشکیل دادند. سپس با کمک روش گلرکین به حل معادلات پرداختند. در این تحقیق اثرهای نسبت منظری صفحه و اندازه ترک، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این پژوهشگران نشان داد که افزایش نسبت ترک یا بار داخل صفحه باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود. ایسرر و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۰۹، صفحه‌ای همسانگرد با ترک مرکزی را به شیوه تحلیلی مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. آنان با استفاده از مدل خط-فنر، فرکانس اول صفحه‌های سالم و ترک‌دار با شرایط مرزی مختلف را محاسبه کردند. از مشاهدات این پژوهش، کاهش فرکانس طبیعی اول در ترک بود. اسماعیل و کارتمل [۲۱] در سال ۲۰۱۲ کار ایسرر و همکاران [۲۰] را با در نظر گرفتن زاویه برای ترک مرکزی صفحه همسانگرد ادامه داد. باس و ماهانتی [۲۲] در سال ۲۰۱۳، کار اسماعیل و کارتمل [۲۱] را با تغییر مکان ترک در راستای خط ترک ادامه دادند. دیبا و همکاران [۲۳] در

مورد بحث قرار دادند. در این تحلیل آیرودینامیک‌های ناویراستوکس و نیز تئوری پیستونی مرتبه اول و سوم مورد استفاده و مقایسه شد. از مهم‌ترین نتایج این تحقیق، تعیین مرز فلاتر پوسته با انحنای متغیر با استفاده از معادلات جریان پتانسیل (غیرلزج) و جریان ناویراستوکس (لزج) بود. جیانگ و لی [۱۱] در سال ۲۰۱۸، تحلیل المان محدود آیروترموالاستیک یک صفحه دوزنقه‌ای کامپوزیتی را ارائه کردند. این مطالعه با شرایط جریان فراصوت و وجود امواج شوک صورت گرفت. این محققان نشان دادند که با افزایش زوایای الیاف کمانش حرارتی بحرانی در ابتدا افزایش و سپس به سرعت کاهش می‌یابد.

چن و لین [۱۲] در سال ۱۹۸۵، مسأله فلاتر صفحه‌ای نازک همسانگرد با ترکی لبه‌ای را، به روش المان محدود مورد تحلیل قرار دادند. معادلات المان محدود آنان بر مبنای تئوری کلاسیک و روابط غیرخطی ون-کارمن و نیز تئوری خطی مرتبه اول پیستون تشکیل داده شد. در این تحقیق دریافتند که ترک باعث کاهش نقطه واگرایی و فلاتر می‌شود. پیداپارتی و چانگ [۱۳] در سال ۱۹۹۸ با روش المان محدود، به تحلیل فلاتر صفحه‌ای کامپوزیتی با ترک لبه‌ای پرداختند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که در بیشتر زوایای الیاف، ترک باعث وقوع زودتر فلاتر شده و در برخی زوایا در رفتاری متناقض فلاتر دیرتر حادث می‌شود. وانگ و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۰۵، به بررسی واگرایی و فلاتر یک صفحه یکسرگردار کامپوزیتی با ترک لبه‌ای پرداختند. این صفحه دارای نسبت منظری بالا بود که در مدل‌سازی، به صورت یک تیر یک بعدی با همبندی خمش-پیچش مدل شد. آنان دریافتند که ترک، بسته به زاویه الیاف باعث کاهش یا افزایش واگرایی و فلاتر می‌شود. نتایج این پژوهش به یک بال کامپوزیتی تعمیم داده شد. ناتاراجان و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۳، تحلیلی برای فلاتر صفحه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی با ترک مرکزی، به روش المان محدود ارائه کردند. آنان برای مدل‌سازی از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی سازه و از تئوری مرتبه اول خطی آیرودینامیک استفاده کردند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که فرکانس و فشار بحرانی با افزایش طول ترک کاهش یافته و در صورت هم راستا شدن ترک به زاویه جریان حداقل می‌شود. اسدی گرجی و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۵، تأثیر یک ترک سراسری تک

^۱ Line-Spring Model (LSM)

این معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی، با کمک روش گلرکین و موده‌های فرضی به معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های معمولی تبدیل می‌شوند. معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های معمولی با استفاده از روش رانج-کوتای مرتبه ۴ و ۵ و در نظر گرفتن شش مود در طول صفحه (x) و یک مود در عرض صفحه (y) حل می‌شود. صفحه مربعی مورد نظر دارای تکیه‌گاه ساده در تمامی وجوه است. پس از بی‌بعد سازی پارمترها این حل انجام می‌شود و در ادامه اثرهای ابعاد و جهت ترک و نیز شرایط ورودی هوا بر پایداری آیروالاستیسیته، نقطه فلاتر و نوسان‌ها چرخه محدود مورد بحث و تحلیل قرار می‌گیرد.

۲- معادلات حاکم

مدل صفحه دارای ترک‌های مرکزی، تحت جریان فراصوتی در شکل ۱ نشان داده شده است. L_1 ، L_2 و h طول، عرض و ضخامت صفحه، V_∞ سرعت جریان آزاد هوا، Δp فشار آیرودینامیک یکنواخت حاصل از جریان هوا، a و b نصف طول ترک است.

صفحه‌های که تحت جریان مافوق صوت قرار دارند، عموماً صفحه‌های نازک هستند. در این صورت می‌توان با تئوری صفحه کلاسیک بر مبنای فرض کرشلف، به مدل سازی آن‌ها پرداخت. میدان جابجایی بر اساس این تئوری، میدان جابه‌جایی صفحه (u, v, w) به صورت زیر است [۲۸]:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w \end{aligned} \quad (1)$$

جهت تشکیل معادلات حاکم فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- از نیروهای برشی صرف نظر می‌شود.
- از اینرسی دورانی صرف نظر می‌شود.
- از جابه‌جایی در طول و عرض صفحه (u و v) صرف نظر می‌شود.

رابطه کرنش-جابجایی را بر اساس تئوری غیر خطی صفحه ون-کارمن و فرضیات در نظر گرفته شده، به صورت زیر خواهد بود [۲۸]:

سال ۲۰۱۴ ارتعاشات غیرخطی صفحه‌ای با ترک زاویه‌دار و مرکزی را مورد بحث و تحلیل قرار دادند. آنان با استفاده از مدل آشفستگی، اثرهای زاویه ترک، طول ترک و مکان نیروی خارجی بر مشخصه دینامیکی صفحه را مورد ارزیابی قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که دامنه ارتعاشات غیرخطی به شدت به خواص ترک بستگی دارد. جوشی و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۵ به بررسی اثرهای حرارتی بر ارتعاشات صفحه همسانگرد ترک‌دار پرداخت. آنان با استفاده از تئوری کلاسیک و فرمول غیرخطی برگر، اثرهای هم‌بند ترک-دما را بر مشخصات دینامیکی بررسی کردند. از نتایج این تحقیق کاهش فرکانس طبیعی اول با اثرهای هم‌بند بود. جوشی و همکاران [۲۵] یک سال بعد همین پژوهش را برای صفحه ترک‌دار کامپوزیتی با در نظر گرفتن اثر دما انجام دادند. گوپتا و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۶، به تأثیر زوایای الیاف بر ارتعاشات غیرخطی میکرو صفحه‌ای با ترک مرکزی پرداختند. این محققان با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و نیز اضافه کردن اثرهای میکروسازه‌ای با تئوری بهبود یافته تنش هم‌بند^۱ معادلات خمشی صفحه را تشکیل دادند. آنان اثرهای نسبت منطری صفحه، اندازه ترک و زوایای الیاف برای شرایط مرزی مختلفی را حل کردند. نتیجه حاصل از این پژوهش نشان داد که وجود دو ترک بر دمای کماتش بحرانی و فرکانس طبیعی تأثیر می‌گذارد. معزز و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۸، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای با ترک زاویه‌دار سطحی را تحلیل و بررسی کردند. آنان از مدل خط-فنر استفاده کردند. این پژوهشگران روش خود را با نرم افزار المان محدود آباکوس مقایسه و نتایج خوبی را مشاهده کردند. در این پژوهش، تأثیرات هندسه پوسته استوانه‌ای و مشخصات ترک بر فرکانس طبیعی بررسی شد.

در مقاله حاضر، مسأله غیر خطی آیروالاستیسیته صفحه دارای ترک‌های مرکزی برای نخستین بار ارائه شده است. برای رسیدن به حل مذکور، با بهره‌گیری از تئوری کلاسیک، روابط غیرخطی ون-کارمن و مدل خط-فنر ناحیه ترک، بخش سازه مدل می‌شود. روش پیستونی مرتبه اول برای آیرودینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نهایت معادله حرکت صفحه ترک‌دار در جریان فراصوت تشکیل می‌شود.

^۱ Modified Couple Stress Theory

$$+2 \frac{d^2 M_{xy}}{dxdy} - I_0^l \ddot{w} - \Delta p - Ps = 0 \quad (۶)$$

w جابه‌جایی عرضی، Ps فشار استاتیکی محیط و $I_0^l = \rho h$ است.

N_{yy} و N_{xx} و M_{yy} ، M_{xx} و M_{xy} منتجه‌های نیروی داخل صفحه، محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (۷)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (۸)$$

برای مطالعه اثر ترک بر رفتار غیرخطی آیرولاستیک صفحه‌ها، از مدل خط-فتر (LSM) استفاده شده است. مدل خط-فتر براساس تئوری کلاسیک صفحه‌ها (CPT) نخستین بار توسط رایس و لوی [18] ارائه شد. آنان ترک سطحی موجود روی صفحه را به صورت فتری پیوسته مدل‌سازی کرده که مسأله الاستیسیته سه بعدی را به یک مسأله الاستیسیته دو بعدی کاهش می‌دهد. این مدل ارتباطی بین کشش و ممان در محل ترک مرکزی و نقاط دور دست صفحه برقرار می‌کند. بر مبنای LSM و با توجه به شکل ۲، رابطه بین منتجه‌های نیرو و گشتاور ناحیه ترک مرکزی (\bar{M}_{yy} و \bar{N}_{yy}) و منتجه‌های نیرو و گشتاور در دور دست (M^*_{yy} و N^*_{yy}) را بدین صورت ارائه شد [۳۰]:

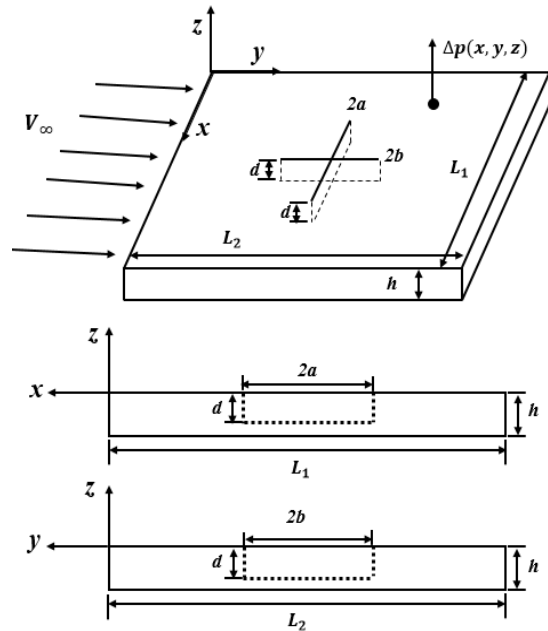
$$\bar{N}_{xx} = N^*_{xx} \times \frac{2b}{(6\alpha_{tb} + \alpha_{tt})(1 - \nu_y^2)h + 2b} \quad (۹)$$

$$\bar{M}_{xx} = M^*_{xx} \times \frac{2b}{3\left(\frac{\alpha_{tb}}{6} + \alpha_{bb}\right)(3 + \nu_y)(1 - \nu_y)h + 2b} \quad (۱۰)$$

$$\bar{N}_{yy} = N^*_{yy} \times \frac{2a}{(6\alpha_{tb} + \alpha_{tt})(1 - \nu_x^2)h + 2a} \quad (۱۱)$$

$$\bar{M}_{yy} = M^*_{yy} \times \frac{2a}{3\left(\frac{\alpha_{tb}}{6} + \alpha_{bb}\right)(3 + \nu_x)(1 - \nu_x)h + 2a} \quad (۱۲)$$

α_{tt} ، α_{bb} و α_{tb} ضرایب نرمی ترک برای کشش، خمش و کشش-خمش است. این ضرایب به صورت زیر تعریف خواهند شد [۲۰]:



شکل ۱- صفحه همسانگرد دارای ترک‌های مرکزی در جریان فراصوت

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \quad (۲)$$

$$\kappa = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (۳)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

رابطه تنش-کرنش چنین تعریف می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۵)$$

E ضریب الاستیک و ν ضریب پواسون است.

بنابر فرضیات بیان شده، مرجع [۲۸] با استفاده از روش انرژی و لم اساسی حساب تغییرات و نیز مرجع با کمک تعادل نیرو و گشتاور روی یک المان [۲۹]، معادله خمش صفحه را به صورت رابطه (۶) بیان می‌کنند:

$$\frac{d}{dx} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{d}{dy} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{d^2 M_{xx}}{dx^2} + \frac{d^2 M_{yy}}{dy^2}$$

$$+2 \frac{d^2}{dxdy} (M_{xy} + \bar{N}_{xy}) - I_0^l \ddot{w} - \Delta p - Ps = 0 \quad (17)$$

۳- روش حل

جهت حل معادله حرکت، ابتدا متغیرها جداسازی می‌شوند. میدان جابه‌جایی w به صورت شکل مودهای فرضی^۱ و مختصات تعمیم یافته^۲، به شکل زیر در نظر گرفته خواهند شد:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x, y) g_{ij}(t) \quad (17)$$

که در آن n و m شماره مود، φ بردار شکل مود و g بردار مختصات تعمیم یافته است. برای یک صفحه با تکیه‌گاه‌های ساده، شکل مودهای فرضی این چنین تعریف می‌شود [۳۱]:

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{L_2}\right), \quad i = 1, 2, 3 \dots n, j = 1, 2, 3 \dots m \quad (18)$$

معمولاً پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi = \frac{x}{L_1}, \eta = \frac{y}{L_2}, W = \frac{w}{h}, \tau = \frac{t}{\chi},$$

$$\chi = L_1^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, P = \frac{L_1^4 Ps}{Dh}, F = \omega \chi,$$

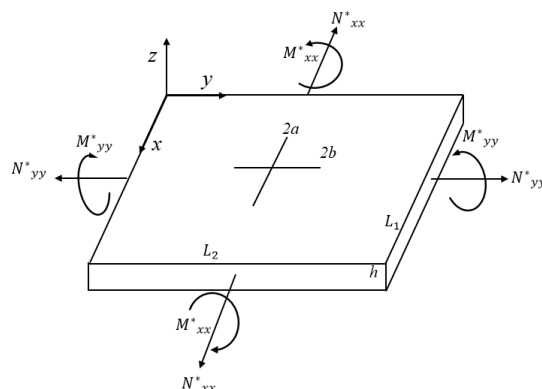
$$D = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)}, \mu = \frac{\rho_\infty L_1}{\rho h},$$

$$\lambda = \frac{2q_\infty L_1^3}{M_\infty D}, \gamma_1 = \frac{h}{L_1}, \gamma_2 = \frac{h}{L_2},$$

$$\Gamma_1 = \frac{a}{L_1}, \Gamma_2 = \frac{b}{L_2}, \quad (19)$$

λ فشار آیرودینامیک بی‌بعد، μ نسبت جرمی، τ زمان، ω فرکانس بعددار، F فرکانس بی‌بعد و P فشار استاتیکی است.

در ادامه با استفاده از روش گلرکین که براساس حداقل کردن باقیمانده وزنی است، با ضرب هر معادله از



شکل ۲- نیرو و گشتاور داخلی روی یک صفحه ترک دار

$$\alpha_{tt} = 1.1547\zeta^2 * \begin{pmatrix} 1.98 - 0.54\zeta + 18.56\zeta^2 \\ -33.7\zeta^3 + 99.26\zeta^4 - 211.9\zeta^5 \\ +436.84\zeta^6 - 460\zeta^7 + 289.98\zeta^8 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\alpha_{bb} = 1.1547\zeta^2 * \begin{pmatrix} 1.98 - 3.28\zeta + 14.43\zeta^2 \\ -31.26\zeta^3 + 63.56\zeta^4 - 103.36\zeta^5 \\ +147.52\zeta^6 - 127.69 + 61.5\zeta^8 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\alpha_{tb} = 1.1547\zeta^2 * \begin{pmatrix} 1.98 - 1.91\zeta + 16.01\zeta^2 \\ -34.84\zeta^3 + 83.93\zeta^4 - 103.36\zeta^5 \\ +256.72\zeta^6 - 244.67\zeta^7 + 133.55\zeta^8 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$\zeta = \frac{d}{h}$ است ($0.1 < \zeta < 0.7$) که d عمق ترک است (شکل ۱). در این پژوهش $\zeta = 0.6$ در نظر گرفته شده است.

فشار آیرودینامیکی با استفاده از تئوری مرتبه اول پیستونی به نحو زیر تعریف می‌شود [۳]:

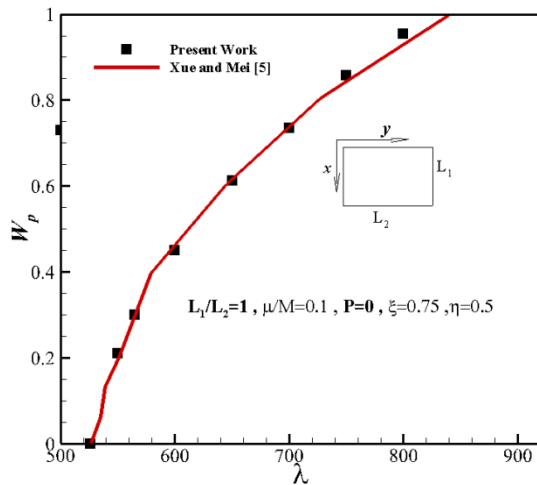
$$\Delta p = \frac{2\rho_\infty}{\beta} \left(\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial w}{V_\infty \partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2, \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \quad (16)$$

ρ_∞ چگالی و M_∞ عدد ماخ جریان هوا می‌باشند. در نهایت رابطه (۶) با اضافه شدن ترک به صورت رابطه (۱۷) نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left((N_{xx} + \bar{N}_{xx}) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{d}{dy} \left((N_{yy} + \bar{N}_{yy}) \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{d^2}{dx^2} (M_{xx} + \bar{M}_{xx}) + \frac{d^2}{dy^2} (M_{yy} + \bar{M}_{yy})$$

¹ Assume Mode Shapes

² Generalized Coordinate



شکل ۳ - مقایسه مطالعه حاضر با نتایج مرجع ژو و می [۵]

۴-۲- پاسخ غیرخطی آیرودینامیک صفحه ترک‌دار رفتار آیرودینامیک صفحه‌ای مربعی با ترک‌های مرکزی و شرایط تکیه‌گاهی ساده، برای نسبت پواسون $\nu = 0.3$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به یادآوری است که نتایج ارائه شده بی‌بعد است.

مطابق شکل ۴ نوسان‌ها صفحه با اعمال جابه‌جایی اولیه قبل از رسیدن به فشار آیرودینامیکی بحرانی ($\lambda_{cr} = 280$)، مستهلک شده و به صفر میل می‌کند که این پایداری صفحه را در $\lambda = 260 > \lambda_{cr}$ نشان می‌دهد.

جدول ۱- مقایسه فرکانس طبیعی اول (rad/s) صفحه ترک‌دار با تکیه‌گاه ساده

ابعاد صفحه	یک ترک a=0.025		دو ترک عمود بر هم a=b=0.025	
	مرجع [۳۰]	کار حاضر	مرجع [۳۰]	کار حاضر
$L_1 = 1$ $L_2 = 1$	۲۹۳/۰	۲۹۱/۸	۲۷۴/۶	۲۷۲/۲
$L_1 = 0/5$ $L_2 = 1$	۷۶۴/۰	۷۶۳/۲	۶۶۹/۳	۶۶۱/۸
$L_1 = 1$ $L_2 = 0/5$	۶۸۲/۷	۶۷۹/۸	۶۶۹/۳	۶۶۱/۸
$L_1 = 0/5$ $L_2 = 0/5$	۱۱۷۲/۲	۱۱۶۷/۹	۱۰۹۸/۸	۱۰۸۹/۱

مجموعه معادلات باقیمانده در شکل مود مربوطه و سپس انتگرال‌گیری دوگانه روی طول و عرض صفحه، می‌توان معادلات حاکم بر حرکت را به شکل رابطه (۲۱) نوشت:

$$\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \varphi_{ij}(x, y) R(\varphi_{ij}(x, y), g_{ij}(t)) dx dy = 0 \quad (21)$$

این باقیمانده $R(\varphi_{ij}(x, y), g_{ij}(t))$ معادله w است. بدین صورت تشکیل می‌شوند که مدهای فرضی و مختصات تعمیم یافته در رابطه (۲۱) جای‌گذاری می‌شود. در واقع روش جداسازی متغیرها و باقیمانده وزنی، معادلات با مشتق‌های جزئی^۱ را به معادلات با مشتق‌های معمولی^۲ تبدیل می‌کند. در پایان این مشتق‌های معمولی مرتبه دوم که از جنس $g_{ij}(t)$ هستند، با کمک روش عددی رانج-کوتا محاسبه می‌شوند.

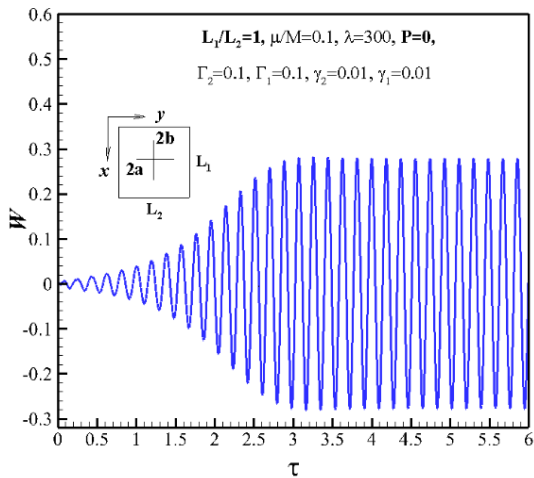
۴- نتایج

۴-۱- اعتبار سنجی

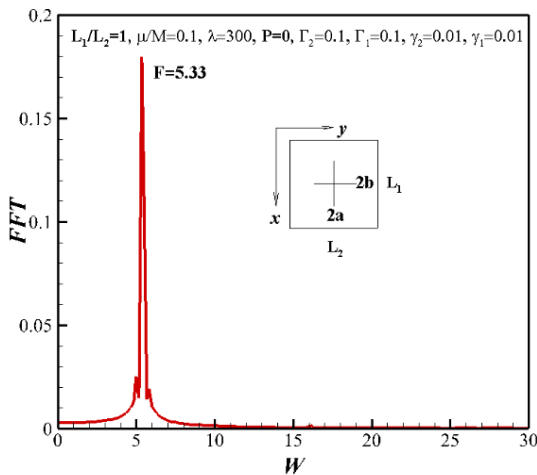
در ابتدا ضروری است که تعداد مدهای مورد استفاده جهت تضمین همگرایی جواب تعیین شود. منابع [۳۰، ۳۱] تعداد مدهای در نظر گرفته شده جهت همگرایی مسئله آیرودینامیک صفحه‌ها سالم و ترک‌دار را $n = 6$ در راستای x و $m = 1$ در راستای y معرفی کردند. در پروژه حاضر، همین تعداد مود در نظر گرفته شده است. جهت اعتبارسنجی کار حاضر، مقایسه‌ای با مدل آیرودینامیک دو بعدی صفحه با منبع ژو و می [۵] انجام گرفت. با توجه به اینکه در شکل ۳ بیشترین درصد خطا ۲ درصد است، لذا تطابق خوبی را بین پژوهش حاضر و کار ژو و می [۵] نشان می‌دهد. W_p نشان دهنده بیشینه دامنه نوسان‌ها چرخه محدود است. اعتبارسنجی ارتعاشات آزاد صفحه مربعی ترک‌دار با مرجع [۳۰] در جدول ۱ آورده شده است. فرکانس اول بی‌بعد در ابعاد متفاوت ترک مقایسه شده است. نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد، تطابق خوبی را نشان داد.

¹ Partial Differential Equation

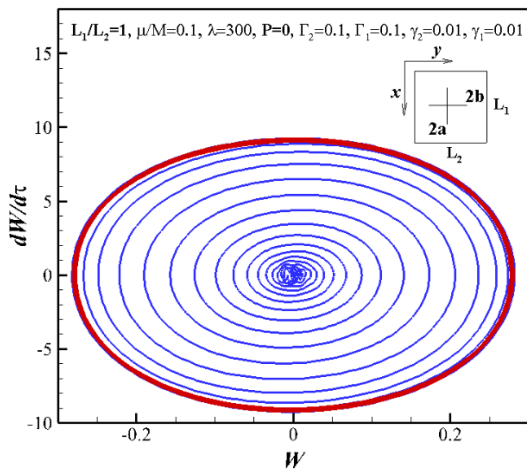
² Ordinary Differential Equation



شکل ۵- نوسان‌ها صفحه ترک‌دار بر حسب زمان ($\lambda_{cr} < \lambda$)



شکل ۶- نمودار طیف فرکانسی صفحه ترک‌دار ($\lambda_{cr} < \lambda$)

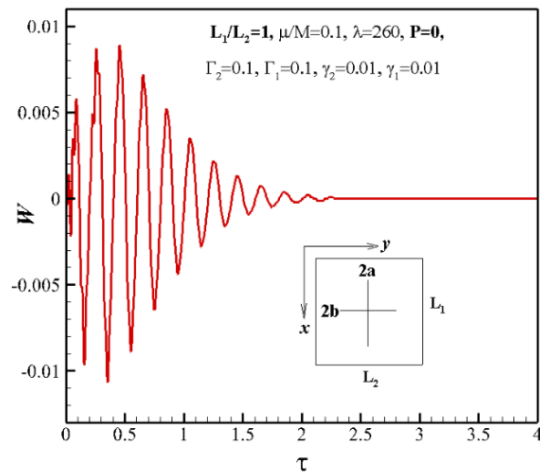


شکل ۷- نمودار فازی صفحه ترک‌دار ($\lambda_{cr} < \lambda$)

همان‌گونه که در شکل ۵ قابل مشاهده است، ارتعاشات صفحه با افزایش فشار آیرودینامیکی ($\lambda = 300$) با عبور از فشار آیرودینامیکی بحرانی (نقطه فلاتر)، دارای نوسان‌ها چرخه محدود با دامنه 0.28 تا 0.28 می‌شود. در شکل ۶ طیف فرکانسی^۱ بی‌بعد شده نوسان‌ها چرخه محدود با استفاده تبدیل فوریه سریع^۲ (FFT) نشان داده شده است. در این نمودار بیشترین دامنه، نمایش دهنده فرکانس غالب نوسان‌ها سیکل محدود است. در شکل ۷ نمودار فازی نوسان‌ها چرخه محدود، نشان دهنده نوسان‌ها صفحه حول یک نقطه تعادل ثابت با شروع از نقطه صفر است. در این نمودار فازی یک حلقه بسته (به رنگ قرمز) با نوسان‌های یکسان در بالا و پایین نقطه تعادل نمایش داده شده است که این نشان از حرکت هارمونیک ساده صفحه است.

۴-۳- اثر ابعاد و جهت ترک بر آیرودالاستیسیته صفحه

در ادامه به بررسی تأثیر ابعاد و جهت ترک بر آیرودالاستیسیته صفحه پرداخته می‌شود. در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب، تأثیر اندازه ترک ($\Gamma_2 = 0, \Gamma_1 \neq 0$) بر نوسان‌ها سیکل محدود بر حسب زمان و نمودار فازی در شرایط هندسی و آیرودینامیکی ذکر شده آمده شده است. در شکل ۸ مشاهده



شکل ۴- نوسان‌ها صفحه ترک‌دار بر حسب زمان ($\lambda_{cr} > \lambda$)

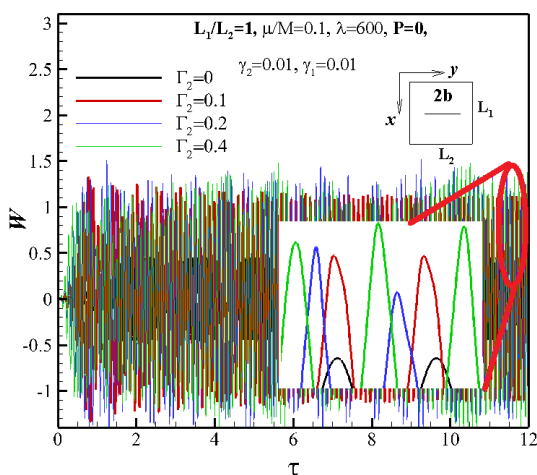
^۱ Frequency Spectrum
^۲ Fast Fourier Transform

تعادل متقارن است. در این نمودار با افزایش طول ترک، فقط یک حلقه بسته با نقطه تعادل ثابت A قابل مشاهده است که نوسان‌ها در بالا و پایین نقطه تعادل متقارن است؛ بنابراین نوسان‌های صفحه دارای حرکت هارمونیک ساده است.

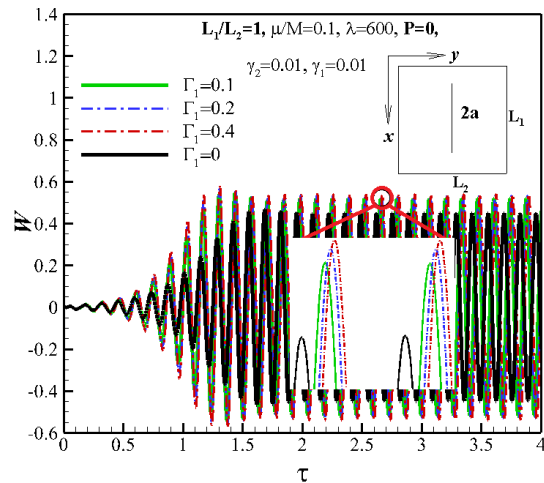
شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب نوسان‌ها سیکل محدود بر حسب زمان و نمودار فازی را با وجود ترک $\Gamma_2 \neq 0, \Gamma_1 = 0$ در راستای y (موازی با جریان سیال) را نشان می‌دهند. در شکل ۱۰ وجود ترک در راستای y با افزایش اندازه ترک دامنه نوسان‌ها همراه بوده و پایداری آیرولاستیک کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که برای طول ترک‌های متفاوت $\Gamma_2 = 0/1, \Gamma_2 = 0$ ، در راستای y ، حداکثر دامنه نوسان‌ها به ترتیب $0/448, 0/448, 1/11$ بوده و حرکت صفحه هنوز نوسان‌های سیکل محدود است. با افزایش طول ترک $\Gamma_2 = 0/2$ و $\Gamma_2 = 0/4$ دیگر حرکت صفحه دارای نوسان‌های با سیکل محدود نیست و صفحه دارای حرکت نامنظم آشوبناک (Chaos) می‌شود.

با مقایسه تأثیر جهت ترک (شکل‌های ۸ و ۱۰) بر رفتار آیرولاستیک صفحه، این نتیجه حاصل می‌شود که ترک در راستای جهت هوا باعث افزایش بیشتر دامنه نوسان‌ها و میل کردن صفحه به نوسان‌های آشوبناک بیشتر شده و پایداری صفحه را به‌طور محسوسی کاهش می‌دهد.

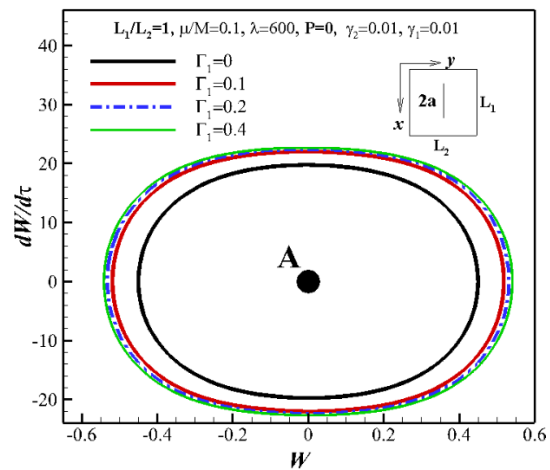
بر اساس شکل ۱۱، نمودار فازی ابعاد ترک ترسیم شده است. در شکل ۱۱ (الف) یک حلقه نا متقارن بسته دیده می‌شود که نشان دهنده حرکت پریودیک غیر هارمونیک است.



شکل ۱۰- مقایسه نوسان‌ها سیکل محدود صفحه ترک دار



شکل ۸- مقایسه نوسان‌ها سیکل محدود صفحه ترک دار

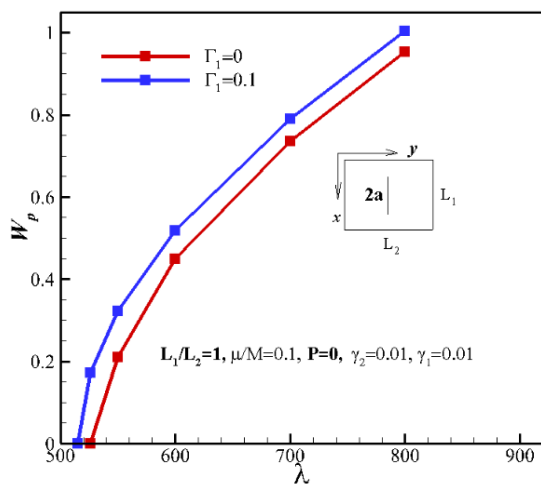


شکل ۹- مقایسه نمودار فاز صفحه ترک دار

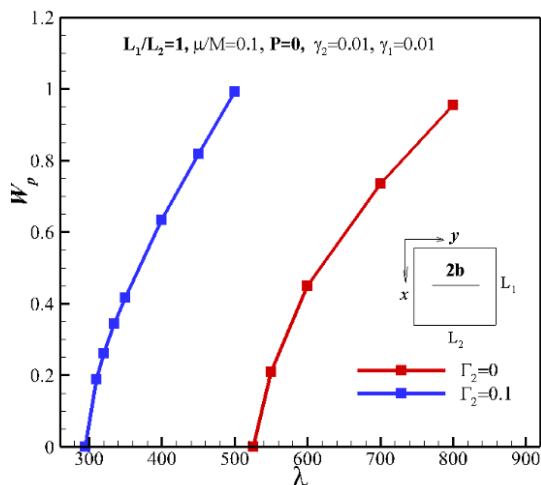
می‌شود که با افزایش طول ترک‌های متفاوت $\Gamma_1 = 0$ ، $\Gamma_1 = 0/1$ ، $\Gamma_1 = 0/2$ و $\Gamma_1 = 0/4$ در جهت x ، دامنه نوسان‌ها به ترتیب $0/488, 0/518, 0/531$ و $0/540$ شد. با افزایش طول ترک، دامنه نوسان‌ها افزایش می‌یابد که دلیل این اتفاق کاهش سفتی سازه متأثر از وجود ترک است؛ بنابراین وجود ترک باعث بوجود آمدن نقص در سازه و افزایش جابه‌جایی صفحه در بارگذاری شده و تخریب آن را تسریع می‌بخشد. لازم به ذکر است، این ترک در راستای عمود بر جریان سیال است. برای طول ترک‌های متفاوت بیان شده، نمودار فاز در شکل ۹ قابل نمایش است. در این نمودار با افزایش طول ترک، فقط یک حلقه بسته با نقطه تعادل ثابت A قابل مشاهده است که نوسان‌ها در بالا و پایین نقطه

در شکل‌های ۱۱ (ب) و (ج) حرکت آشوبناک با وجود ترک نگه داشتن فشار آیرودینامیک ورودی، تأثیر ابعاد و جهت ترک بررسی شد. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ بیشینه دامنه نوسان‌های سیکل محدود W_p صفحه ترک دار بر حسب فشار آیرودینامیک ورودی λ نمایش داده شده است.

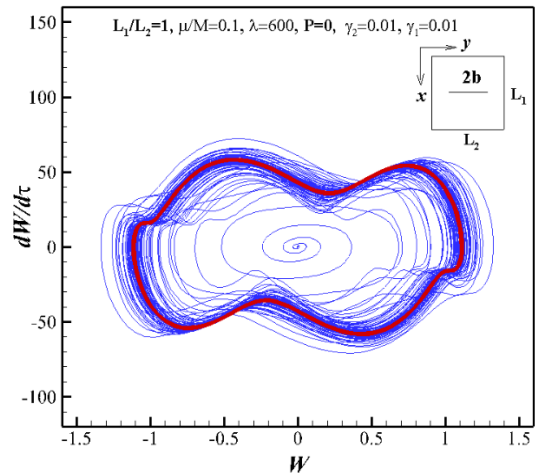
در شکل ۱۲ برای ترک در راستای x ($\Gamma_2 = 0, \Gamma_1 \neq 0$) نشان داده شده است که با وجود ترک دامنه بیشینه نوسان‌ها سیکل محدود بیشتر شده، مرز فلاتر عقب‌تر رفته و زودتر



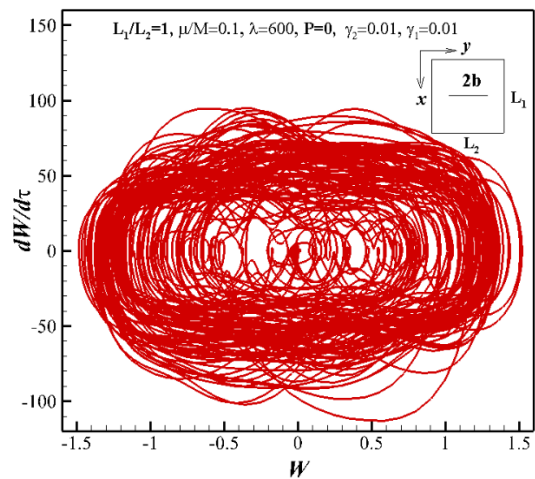
شکل ۱۲- دامنه بیشینه نوسان‌ها بر حسب فشار آیرودینامیک برای صفحه ترک دار



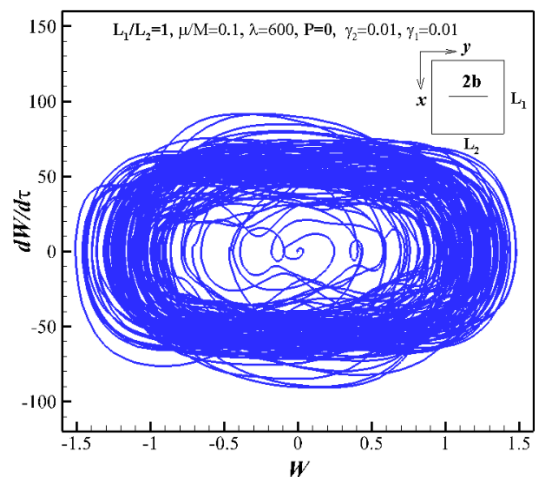
شکل ۱۳- دامنه بیشینه نوسان‌ها بر حسب فشار آیرودینامیک برای صفحه ترک دار



الف) ترک $\Gamma_2 = 0.1$



ب) ترک $\Gamma_2 = 0.2$



ج) ترک $\Gamma_2 = 0.4$

شکل ۱۱- مقایسه نمودار فاز صفحه ترک دار

حساسیت بیشتری برخوردار بوده و به بررسی بیشتر نیاز دارد.

- با وجود ترک، در فشارهای آیرودینامیکی بالا امکان خارج شدن صفحه از رفتار نوسانی سیکل محدود به صورت هارمونیک ساده و حتی پریودیک و میل به سمت ارتعاشات صفحه با رفتار آشوبناک وجود خواهد داشت.

۶- مراجع

- [1] Parka JS, Kima JH, Moon SH (2005) Thermal post-buckling and flutter characteristics of composite plates embedded with shape memory alloy fibers. *Comp Part B: Eng* 36 (8): 627-636.
- [2] Fakoor M, Mehri Khansari N (2018) General mixed mode I/II failure criterion for composite materials based on matrix fracture properties. *Theo and App Fract Mech* 96: 428-442.
- [3] Dowell EH (1966) Nonlinear oscillations of a fluttering plate. *AAA* 4: 1267-1275.
- [4] Dowell EH (1967) Nonlinear oscillations of a fluttering plate II. *AAA*: 1856-1862.
- [5] Xue DY, Mei CH (1993) Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow. *AIAA* 31: 154-162.
- [6] Zhou RC, Xue DY, Mei Ch (1994) Finite element time domain—modal formulation for nonlinear flutter of composite panels. *AIAA* 32 (10): 2044-2052.
- [7] Librescu L, Marzocca P, Silva WA (2004) Linear/nonlinear supersonic panel flutter in a high-temperature field. *Jou of Aircr* 41: 918-924.
- [8] Navazi HM, Haddadpour H (2006) Aero-thermoelastic stability of functionally graded plates. *Com Stru* 80 (4): 580-587.
- [9] Song ZG, Li FM (2014) Aerothermoelastic analysis of nonlinear composite laminated panel with aerodynamic heating in hypersonic flow. *Comp: Part B* 56: 830-839.
- [۱۰] موسی زاده ح، قدیری دهکردی ب، راسخ م (۱۳۹۴) بررسی آیروترموالاستیسیته پوسته با خمش استوانه‌ای به روش حجم محدود و باقی‌مانده وزنی گلرکین. *مجله مکانیک تربیت مدرس دوره ۳۲۲-۳۱۲*: ۱۵(۸).
- [11] Jiang G, Li F (2018) Aerothermoelastic analysis of composite laminated trapezoidal panels in supersonic airflow. *Comp Stru* 200: 313-327.
- [12] Chen WH, Lin HC (1985) Flutter analysis of thin cracked panels using the finite element method. *AIAA* 23(5): 795-801.

اتفاق می‌افتد؛ بنابراین ناپایداری صفحه بیشتر می‌شود. در شکل ۱۳ پاسخ نوسان‌ها آیروالاستیسیته صفحه‌ای با ترک $\Gamma_2 \neq 0, \Gamma_1 = 0$ در راستای هوا (راستای y) نمایش داده شده است. وجود ترک در راستای y همانند ترک در راستای x باعث تسریع در وقوع فلاتر شده و مرز پایداری را کاهش می‌دهد. با مقایسه شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشخص می‌شود که وجود ترک در راستای هوای ورودی روی صفحه، تأثیر بیشتری روی ناپایداری آیروالاستیک صفحه داشته و فلاتر سریع‌تر حادث می‌شود.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار دو بعدی غیر خطی آیروالاستیسیته صفحه‌ای با ترک‌های مرکزی و شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده، در جریان فراصوت مطالعه شده است. تئوری پیوسته مرتبه اول برای فشار آیرودینامیک، روابط ون-کارمن برای اثرهای غیرخطی صفحه و روش خط-فتر برای عبارات ترک مورد استفاده قرار گرفت. معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی با استفاده از اصل همپلتون استخراج و با کمک روش گلرکین و مودهای فرضی، به معادلات با مشتق‌های معمولی تبدیل و با روش عددی رانج-کوتا محاسبه گردید. نتایج بررسی پارامترهای مختلف به شکل زیر خلاصه می‌شود:

- وجود ترک (در راستای x یا y) باعث وقوع زود هنگام فلاتر، افزایش بیشینه دامنه نوسان‌های چرخه محدود و در نهایت کاهش مرز پایداری صفحه می‌شود. این بدان معناست که در فشارهای آیرودینامیکی بالاتر، سازه ترک‌دار جابه‌جایی‌های بیشتری تجربه کرده و احتمال تخریب زود هنگام آن وجود دارد.
- افزایش طول ترک تأثیر کمی بر افزایش دامنه بیشینه نوسان‌های سیکل محدود دارد؛ لذا وجود ترک، فارغ از ابعاد آن باعث کاهش سفتی سازه و مرز پایداری آیروالاستیک می‌شود.
- وجود ترک در راستای y (جهت هوای ورودی روی صفحه) تأثیر بیشتری در ناپایداری آیروالاستیک صفحه نسبت به ترک در راستای x دارد و باعث وقوع زود هنگام فلاتر می‌شود. این نتیجه نشان می‌دهد که ترک عمود بر راستای جریان هوا، از

- through surface crack of arbitrary orientation and position. *Soun and Vibr* 332(26): 7123-7141.
- [23] Diba F, Esmailzadeh E , Younesian D (2014) Nonlinear vibration analysis of isotropic plate with inclined part-through surface crack. *Nonlin Dyna* 78(4): 2377-2397.
- [24] Joshi PV, Jain NK , Ramtekkar GD (2015) Effect of thermal environment on free vibration of cracked rectangular plate: An analytical approach. *Th-Wal Stru* 91: 38-49.
- [25] Joshi PV, Jain NK , Ramtekkar GD, Viridi GS (2016) Vibration and buckling analysis of partially cracked thin orthotropic rectangular plates in thermal environment. *Th-Wal Stru* 109: 143-158.
- [26] Gupta A, Jaina NK, Salhotra R, Rawani AM, Joshi PV (2016) Effect of fibre orientation on non-linear vibration of partially cracked thin rectangular orthotropic micro plate: An analytical approach. *Mech Scie* 105: 378-397.
- [27] Moazzez K, Saeidi Googarchin H, Sharifi SMH (20118) Natural frequency analysis of a cylindrical shell containing a variably oriented surface crack utilizing Line-Spring model. *Th-Wa Stru* 125: 63-75.
- [28] Reddy JN (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*, Second ed, CRC Press, Florida.
- [29] Leissa W (1969) *Vibration of Plates*. NASA 70N18461, Washington DC, United States.
- [30] Joshi PV, Jain NK, Ramtekkar GD (2014) Analytical modeling and vibration analysis of internally cracked rectangular plates. *Sou and Vibr* 333(22): 5851-5864.
- [31] Kouchakzadeha MA, Rasekh M, Haddadpour H (2010) Panel flutter analysis of general laminated composite plates. *Comp Struc* 92(12): 2906-2915.
- [13] Pidaparti RMK (1997) Free vibration and flutter of damaged composite panels. *Comp Stru* 38(1-4): 477-481.
- [14] Wang K, Inman DJ, Farrar CR (2005) Crack-induced Changes in Divergence and Flutter of Cantilevered Composite Panels. *Stru Hea Moni* 4: 377-392.
- [15] Natarajan S, Ganapathi M, Bordas S (2013) Supersonic flutter analysis of thin cracked functionally graded material plates. *Fron in Aero Eng* 2(2): 91-97.
- [16] AsadiGorgi H, Dardel M, Pashaei MH (2015) Effect of all-over part-through crack on aeroelastic characteristics of rectangular panels. *App Math Mod* 39(23-24): 7513-7536.
- [17] Abdullah NA, Sosaa J LC, Akbar M (2018) Aeroelastic assessment of cracked composite plate by means of fully coupled finite element and Doublet Lattice Method. *Comp Stru* 202: 151-161.
- [18] Rice JR, Levy N (1972) The part through surface crack in an elastic plate. *App Mech* 39(1): 185-194.
- [19] Wu GY, Shih YSH (2005) Dynamic instability of rectangular plate with an edge crack. *Compu and Stru* 84(1-2): 1-10.
- [20] Israr A, Cartmell MP, Manoach E, Trendaf I (2009) Analytical Modeling and Vibration Analysis of Partially Cracked Rectangular Plates With Different Boundary Conditions and Loading. *App Mech* 76: 11005-11013.
- [21] Ismail R, Cartmell MP (2013) An investigation into the vibration analysis of a plate with a surface crack of variable angular orientation. *Sou and Vibr* 331(12): 2929-2948.
- [22] Bose T, Mohanty AR (2013) Vibration analysis of a rectangular thin isotropic plate with a part-