مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۲/ دوره ۳/ شماره ۳/ صفحه ۵۳-۶۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

تحلیل خمش نانو صفحهٔ گرافن تک لایه در محیط الاستیک، براساس مدل‌های غیرموضعی محیط پیوسته

محمد اسماعیل گلمکانی[۱،*] و جواد رضا طلب[۲]

[۱] استادیار، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۲/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۴/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۷/۲۸

چکیده

در این مقاله رفتار خمشی صفحات مستطیلی گرافن با فرض خواص ارتوتروپیک و بر روی زمینهٔ الاستیک بررسی شده است. بدین منظور معادلات کرنش-جابجایی با فرض تغییر شکل‌های کوچک و بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ اول صفحات بدست آمده و برای در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک، روابط غیرموضعی ارینگن در آنها اعمال شده است. سپس معادلات تعادل بدست آمده، برحسب متغییرهای جابجایی بازنویسی شده و بعد از بی بعد سازی، توسط دو روش عددی تفاضلات محدود و روش عددی دیفرانسیل مربعات گسسته سازی و حل شده‌اند. در پایان نیز اثر پارامترهای مقیاس کوچک، نسبت طول به عرض، ضخامت صفحه، مقدار بار، خواص زمینهٔ الاستیک و تعداد نقاط در مش بندی بر روی خیز بیشینه و نسبت خیز دو مدل صفحات غیرموضعی کیرشهف و میندلین بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن اثر غیرموضعی در تحلیل نانو صفحات از اهمیت بالایی برخوردار است؛ همچنین استفاده از مدل صفحات غیرموضعی میندلین در مقایسه با مدل صفحات غیرموضعی کیرشهف باعث افزایش دقت نتایج مخصوصاً در صفحات نسبتاً ضخیم می‌شود.

کلمات کلیدی: خمش؛ صفحات گرافن؛ خواص ارتوتروپیک؛ الاستیسیته غیرموضعی؛ روش دیفرانسیل مربعات.

Bending analysis of single layerd graphene nanoplate embedded in elastic medium, based on nonlocal continuum model

M.E. Golmakani[1,*] and J. Rezatalab[2]

[1] Assist. Prof., Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad Branch, Mashhad, Iran

[2] M.Sc. Student, Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad Branch, Mashhad, Iran

Abstract

In this paper bending behavior of rectangular graphene nanoplate with orthotropic properties and resting on elastic foundation is investigated. The nanoplate equilibrium equations are derived in terms of the generalized displacements based on first-order shear deformation theory (FSDT) using the nonlocal differential constitutive relations of Eringen and the small deflection assumption. Then the normalized equilibrium equations based on displacement field are discretized and solved using two numerical methods of finite difference and differential quadrature. Finally, the effect of small scale parameter, length to wide ratio, plate thickness, load value, elastic foundation properties and number of mesh points on the maximum deflection value and deflection ratio are investigated based on nonlocal Kirchhoff and Mindlin plate theories. Results show that considering the nonlocal effect has high importance in nanoplates analysis; also using the nonlocal Mindlin plate model in comparison with nonlocal Kirchhoff plate model leads to more precision of results especially for moderately thick plates.

Keywords: Bending; Nanoplate; Orthotropic properties; Nonlocal elasticity; Differential quadrature method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۵۵۰۹۰۵۵۲

آدرس پست الکترونیک: m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

۱- مقدمه

ویژگی‌های منحصر به فرد مواد نانو، چه از لحاظ مکانیکی، الکتریکی یا شیمیایی باعث رشد سریع این علم شد. صفحات گرافن که جزء دسته نانو لایه‌ها هستند، از کنار هم قرار گرفتن اتم‌های کربن در یک صفحه و در یک شبکه کریستالی با ساختاری ۶ وجهی به وجود می‌آیند. این ساختار ۶ وجهی باعث می‌شود تا زاویۀ پیوندهای کربن-کربن با بارهای درون صفحه‌ای در راستاهای مختلف متفاوت بوده و لذا خواص غیر ایزوتروپیک داشته باشند [۱و ۲]. این صفحات تک لایه در موارد و کاربردهای بسیاری نسبت به چند لایه‌های گرافن برتری دارند ولی در مواردی که هدف افزایش استحکام خمشی باشد می‌توان از چند لایه‌های گرافن استفاده کرد.

روش‌های متعددی برای تولید صفحات تک لایه و چند لایۀ گرافن وجود دارد که هر کدام مزایایی دارد. از آن جمله می‌توان به روش‌های رسوب بخار شیمیایی، ورقه‌ای نمودن یک حجم گرافیتی به صورت مکانیکی، ورقه‌ای نمودن گرافیت با روش‌های حرارتی، کاهش مشتقات گرافن مثل اکسید گرافن، تفکیک مولکول‌های کافور روی زیر لایۀ نیکل، تبخیر قوس الکتریکی گرافیت در حضور مخلوط هلیوم و هیدروژن، رشد همبافتۀ فیلم‌های گرافن روی صفحات عایق و دیگر روش‌ها نام برد [۳-۷].

از موارد استفادۀ صفحات گرافن می‌توان به کاربرد آنها در انواع نانو محرک‌ها، نانو سنسورها، باطری‌های االکتریکی و به طور کلی قطعات به کار رفته در سیستم‌های نانو- میکرو الکترومکانیک، میکروسکوپ‌های نیروی اتمی و نیزاستفادۀ آنها در افزایش استحکام کامپوزیت‌ها اشاره کرد [۸-۱۱].

به منظور بررسی خواص مکانیکی صفحات گرافن و به طور کلی بررسی مواد در مقیاس کوچک، تئوری محیط‌های پیوسته دارای یک نقص بزرگ است و آن اینکه در این مقیاس، نمی‌توان از فضای خالی بین اتمها و نیروهای اتمی بین ذرات در مقابل ابعاد و فیزیک اصلی مساله چشم پوشی کرد. لذا روش‌های دیگری باید به کارگیری می‌شد. از آن جمله می‌توان به مشاهدات آزمایشگاهی و روش دینامیک مولکولی اشاره کرد. اما این روش‌ها، بسیار پرهزینه، زمان بر، و محدود به تعداد اتم‌های کم در ساختار می‌باشند. در سال‌های اخیر، به منظور بررسی اثر مقیاس کوچک، تئوری الاستیک غیرموضعی ارینگن[1] به طور گسترده‌ای به کار گیری شده است که نتایج قابل قبول و نزدیکی با روش دینامیک مولکولی داشته است [۱۲-۱۵].

از میان ویژگی‌های مختلف صفحات گرافن رفتارهای مکانیکی آنها مثل ارتعاشات، خمش، کمانش و پس کمانش، بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

بهفر و نقد آبادی [۱۶]، ورقه گرافن را به عنوان یک صفحه نازک و پیوسته ارتوتروپیک[2] در نظر گرفته و فرکانس-های طبیعی آنرا حساب کردند. همچنین در کاری دیگر، بهفر و همکاران [۱۷] با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و محاسبه مدول خمشی ورقه گرافن دو لایه پرداختند. سخایی‌پور [۱۸] به بررسی خواص الاستیک ورقۀ تک لایۀ گرافن پرداخت. او با روش‌های تحلیلی توانست مدول یانگ، مدول برشی و نسبت پواسون را برای انواع آرایش اتم‌های کربن در این صفحات بدست آورد.

پرادهان و فادیکار[3] [۱۹]، اثر مقیاس کوچک را برای ارتعاشات صفحات دو لایۀ گرافن که در زمینه پلیمری قرار گرفته‌اند با اعمال روابط غیرموضعی بر تئوری کلاسیک صفحات، بررسی کردند. آنها نشان دادند که اثر مقیاس کوچک کاملاً علمی بوده و باید در نظر گرفته شود.

آقا بابائی و ردی [۲۰] خمش و ارتعاشات آزاد را برای صفحات نانو با استفاده از تئوری برشی مرتبۀ سوم و اثر غیرموضعی بررسی کرده و نتایج را برای صفحۀ ایزوتروپیک مستطیلی با شرایط مرزی ساده به طور تحلیلی بدست آوردند. در کار دیگری، ردی[4] [۲۱]، خمش غیرخطی را برای نانو لوله‌ها با استفاده از روابط تیرها و همچنین برای صفحات ارتوتروپیک با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبۀ اول برشی و با در نظر گرفتن اثر غیرموضعی بدست آورد.

انصاری و همکاران [۲۲]، از تئوری غیرموضعی برای بررسی ارتعاشات صفحات چند لایۀ گرافن که در محیط پلیمری قرار گرفته‌اند استفاده کرده و معادلات را با روش المان محدود حل کردند. انصاری و همکارانش [۲۳]

[1] Nonlocal Theory Of Eringen
[2] Orthotropic
[3] Pradhan and Phadikar
[4] Reddy

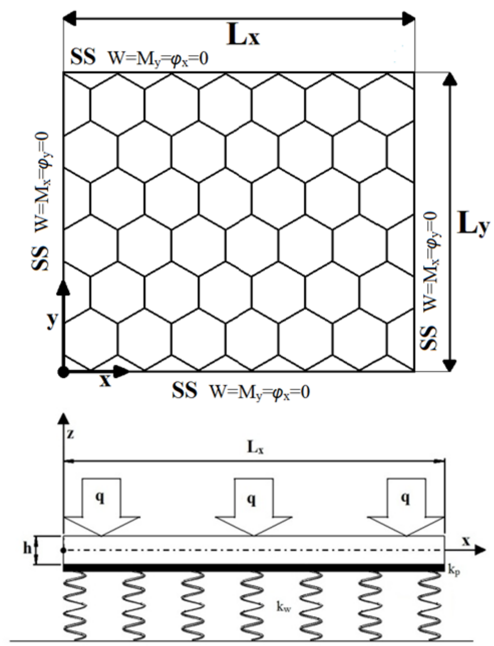
ارتعاشات آزاد صفحات تک لایهٔ گرافن را بررسی کردند و معادلات حاکم را بر اساس مدل غیرموضعی کیرشهف و برای صفحات مستطیلی استخراج کرده و با استفاده از روش دیفرانسل مربعات حل کردند. شن[1] و همکارانش [۲۴]، ارتعاشات غیرخطی تک لایهٔ گرافن قرار گرفته در محیط حرارتی را برای صفحات مستطیلی ارتوتروپیک و با شرایط مرزی ساده بررسی کردند. شن [۲۵] در کاری دیگر، به بررسی و تحلیل غیرخطی نوارهای نازک قرار گرفته بر روی پایه الاستیک و در محیط حرارتی، با مدل غیرموضعی صفحات پرداخت. سماعی و همکاران [۲۶]، کمانش ورقهٔ تک لایهٔ گرافن را که بر روی زمینهٔ الاستیک قرار گرفته است، با تئوری غیرموضعی صفحات میندلین تحلیل کردند.

پوراسماعیلی و همکاران [۲۷] به بررسی ارتعاشات آزاد نانو صفحات مستطیلی دو لایهٔ قرار گرفته در محیط پلیمری پرداختند. وانگ و لی [۲۸] خمش نانو صفحات ایزوتروپیک قرار گرفته در زمینه الاستیک را با روش ناویر بررسی کردند. نتایج نشان دادند که تعداد جملات به کار رفته در سری فوریه، نسبت ابعاد صفحه و خواص زمینهٔ الاستیک تأثیر زیادی بر رفتارهای خمشی دارند. فرج پور و همکارانش [۲۹]، کمانش صفحات تک لایهٔ گرافن را تحت انواع بارهای خطی درون صفحه‌ای توسط تئوری غیرموضعی و با روش دیفرانسیل مربعات بررسی کردند. آنها برای اعتبار سنجی نتایج، معادلات را با روش سری‌های توانی نیز حل کرده و نشان دادند که نتایج بدست آمده از دو روش به یکدیگر نزدیکند.

در این مقاله برای اولین بار، خمش صفحهٔ مستطیلی گرافن با فرض خواص ارتوتروپیک که بر روی زمینهٔ الاستیک قرار گرفته است، با اعمال روابط الاستیسیته غیرموضعی برتئوری برشی مرتبهٔ اول و توسط روش دیفرانسیل مربعات تحلیل شده است. شرایط مرزی در هر چهار لبه از نوع ساده و غیر متحرک و بار عرضی به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده‌اند. به منظور تائید روش حل، نتایج در شرایط مختلف با نتایج روش تفاضلات محدود و نیز در حالت ساده‌تر با دیگر نتایج در دسترس مقایسه شده است. در پایان هم اثر پارامترهای مقیاس کوچک، نسبت طول به عرض، ضخامت صفحه، مقدار بار، خواص زمینهٔ الاستیک و تعداد نقاط در مش‌بندی بر روی حداکثر خیز بیشینه و نسبت خیز دو مدل صفحات غیرموضعی کیرشهف و میندلین بررسی شده است.

۲ – فرمول بندی مساله

برای مدل سازی صفحهٔ گرافن، مطابق شکل ۱، یک نانو صفحه مستطیلی ارتوتروپیک که دارای طول L_x، عرض L_y و ضخامت h است را بر روی زمینهٔ الاستیک دو پارامتری در نظر بگیرید. موقعیت دستگاه مختصات کارتزین بدین نحو است که مرکز آن در گوشهٔ سمت چپ و پایین در لایهٔ میانی صفحه قرار گرفته است. محور مختصات y در راستای عرض و محور x در راستای طول قرار گرفته‌اند.



شکل ۱– صفحهٔ مستطیلی گرافن بر روی زمینهٔ پلیمری

برخلاف حالت محیط‌های پیوسته کلاسیک که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در همان نقطه است، براساس تئوری غیرموضعی ارینگن، تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط بدنه است. معادلات تشکیل دهنده به شکل زیر آماده شده‌اند [۲و ۱۴].

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (۱)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V \alpha(x, x') \; \tau_{ij}(x') dV(x') \qquad (۲)$$

[1] Shen

در روابط فوق σ_{ij} تانسور تنش غیرموضعی، τ_{ij} تانسورتنش موضعی، ρ چگالی جرمی، f نیروی حجمی، $\alpha(x,x')$ تابع خطای کرنل و V حجم ورودی در نظر گرفته شده‌اند. تابع خطای کرنل تابعی است که اثر کرنش را در محل x' برای تنش داده شده در محل x توصیف می‌کند. با توجه به فرم انتگرالی که در رابطهٔ (۲) آمده است، حل مسائل بدین ترتیب دشوار خواهد بود. لذا از شکل دیفرانسیلی آن استفاده می‌کنیم [۱۲و ۱۴].

$$\sigma^{nl}(1-\mu\nabla^2)=\sigma^L=C:\varepsilon$$
$$\mu=(e_0a)^2\,,\ \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{۳}$$

در روابط فوق، σ^{nl} تنش غیرموضعی، σ^L تنش موضعی، C ماتریس سفتی و ε ماتریس کرنش هستند. همچنین e_0 ثابت مخصوص برای هر ماده است که از شبیه سازی دینامیک مولکولی به دست می‌آید. a شاخص طول داخلی است و از فاصله بین اتم‌ها مثل طول پیوند اتم‌های کربن-کربن در گرافن‌ها بدست می‌آید. e_0a یک ضریب مقیاس است که اثر مقیاس کوچک را برای شاخصه‌های مکانیکی مشخص می‌کند. بنابراین معادلات تنش-کرنش برای نانوصفحهٔ ارتوتروپیک به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{bmatrix}^{(nl)}-\mu\nabla^2\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{bmatrix}^{(nl)}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & kC_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & kC_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}^{(l)} \tag{۴}$$

$$\begin{cases}Q_{11}=\frac{E_1}{1-v_{12}v_{21}}\ ,\ Q_{12}=\frac{v_{12}E_2}{1-v_{12}v_{21}}\\ Q_{22}=\frac{E_2}{1-v_{12}v_{21}}\ ,\ Q_{66}=G_{12}\\ C_{44}=G_{23}\ ,\ C_{55}=G_{13}\ ,\ \ k=\frac{5}{6}\end{cases} \tag{۵}$$

در معادلات فوق، E مدول یانگ، υ ضریب پواسون و G مدول برشی هستند. مقصود از علامت nl در بالای ماتریس تنش‌ها نیز این است که تنش‌ها، غیرموضعی می‌باشند. توجه شود که، مقدار σ_{zz} و ε_{zz} تقریباً صفر است و در تحلیل تنش صفحه‌ای وارد محاسبات نمی‌شوند. روابط جابجایی بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ اول بصورت ذیل می‌باشند:

$$\begin{cases}u=(x,y,z,t)=\ u_0(x,y,t)+z\varphi_x(x,y,t)\\ v=(x,y,z,t)=\ v_0(x,y,t)+z\varphi_y(x,y,t)\\ w=(x,y,z,t)=\ w_0(x,y,t)\end{cases} \tag{۶}$$

در این روابط u_0, v_0, w_0 مولفه‌های جابجایی در لایهٔ میانی و φ_x و φ_y زاویه‌های پیچش در راستای x و y هستند. روابط کرنش جابجایی با صرف نظر از اثر تغییر شکل‌های بزرگ به شکل زیر خواهند بود:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{۷}$$

با قرار دادن روابط (۶) در روابط (۷) به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x}+z\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\\ \frac{\partial v_0}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}z\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial w_0}{\partial y}+\varphi_y\\ \frac{\partial w_0}{\partial x}+\varphi_x\end{bmatrix} \tag{۸}$$

روابط منتجه‌های تنش بر حسب تنش‌ها عبارتند از:

$$\begin{cases}(N_x, N_y, N_{xy})=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})\,dz\\ (Q_x, Q_y)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})\,dz\\ (M_x, M_y, M_{xy})=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})z\,dz\end{cases} \tag{۹}$$

در رابطهٔ فوق اگر σ تنش موضعی باشد، منتجه‌های تنش نیز موضعی بوده و اگر σ غیرموضعی باشد، منتجه‌های تنش نیز غیرموضعی خواهند بود.

باتوجه به روابط (۴)، (۸) و (۹) رابطهٔ بین منتجه‌های تنش غیرموضعی با جابجایی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ Q_y\\ Q_x\end{bmatrix}-\mu\nabla^2\begin{bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ Q_y\\ Q_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\ \frac{\partial v_0}{\partial y}\\ \frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial u_0}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\\ \frac{\partial w_0}{\partial y}+\varphi_y\\ \frac{\partial w_0}{\partial x}+\varphi_x\end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

که درآن ضرایب A , D , H عبارتند از:

$$\left(A_{ij}\,,D_{ij}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1,z^{2})Q_{ij}dz=\left(h\,,\frac{h^{3}}{12}\right)Q_{ij}\quad {}_{i,j=1,2,6}$$

$$H_{44}=k\times C_{44}h\quad,\quad H_{55}=k\times C_{55}h$$ (۱۱)

معادلات تعادل پس از یک سری ساده سازی عبارتند از:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+f_x=\rho_s\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$ (۱۲)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{y}}{\partial y}+f_y=\rho_s\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$$ (۱۳)

$$\frac{\partial Q_{x}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{y}}{\partial y}+f_z+q+N_{(u,v,w)}=\rho_s\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$ (۱۴)

$$\frac{\partial M_{x}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_{xy}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$ (۱۵)

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{y}}{\partial y}-Q_y=I_{xy}\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$ (۱۶)

که در آن داریم:

$$\rho_s=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho dz=\rho h\ ,I_{xy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho z^2dz=\frac{\rho h^{3}}{12}$$ (۱۷)

$$N_{(u,v,w)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_y\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$ (۱۸)

از آنجایی که صفحهٔ گرافنی بر روی زمینهٔ الاستیک قرار گرفته، لذا اثر بر همکنش صفحه با این زمینه را نیز باید به بار خارجی q اضافه کرد. بنابراین برای q_{eff} داریم [۱۹و ۲۸]:

$$q_{eff}=q-k_w\,w_0+K_p\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$ (۱۹)

در معادلهٔ بالا، k_w مدول ویلنکر زمینه پلیمری، و k_p مدول برشی زمینه پلیمری هستند.

با توجه به اینکه محاسبات در حالت استاتیکی و تغییر شکل‌های کوچک انجام شده است، لذا داریم:

$$N_{(u,v,w)}\cong 0\quad,\quad\frac{\partial}{\partial t}=0$$ (۲۰)

چنانچه نیروهای داخلی برابر صفر بوده و اپراتور L به شکل زیر تعریف شود:

$$L=(1-\mu\nabla^2)\,,\ f_x=f_y=f_z=0$$ (۲۱)

معادلات تعادل در حالت استاتیکی و برای لایهٔ میانی صفحه، به شکل زیر خواهد بود:

$$H_{55}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+H_{44}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+L\left(N_{(u,v,w)}\right)+L(q_{eff})=0$$ (۲۲)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right)+D_{66}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)-H_{55}\left(\varphi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)=0$$ (۲۳)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{12}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right)+D_{66}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)-H_{44}\left(\varphi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)=0$$ (۲۴)

همانطور که قبلا اشاره شد در روابط بالا از $L\left(N_{(u,v,w)}\right)$ که همان اثر تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد، صرف نظر شده است و لذا در معادلهٔ (۲۲) مقدار آن برابر صفر می‌شود. معادلات حاکم بعد از بی بعد سازی عبارتند از:

$$\lambda_5\frac{\partial\varphi_x}{\partial\bar{x}}+\lambda_4\beta\frac{\partial\varphi_y}{\partial\bar{y}}+[\lambda_5+\eta\,\gamma_1+\gamma_2]\times\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}+[\lambda_4+\eta\,\gamma_1+\gamma_2]\times\beta^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}-\gamma_1\bar{w}-\eta\,\gamma_2\left[\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}+2\,\beta^2\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}^2}+\beta^4\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{y}^4}\right]=\eta\frac{\partial^2 Q}{\partial\bar{x}^2}+\eta\,\beta^2\frac{\partial^2 Q}{\partial\bar{y}^2}-Q$$ (۲۵)

$$\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\bar{x}^2}+(\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}+\lambda_3\beta^2\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\bar{y}^2}-12\times\lambda_5\alpha^2\varphi_x=12\times\lambda_5\alpha^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}$$ (۲۶)

$$\lambda_3\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial\bar{x}^2}+(\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}+\lambda_2\beta^2\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial\bar{y}^2}-12\times\lambda_4\alpha^2\varphi_y=12\times\lambda_4\beta\alpha^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}$$ (۲۷)

در این معادلات ضرائب ثابت بکار رفته عبارتند از:

$$\left|\begin{array}{l}\bar{w}=\frac{w_0}{L_x}\ ,\ \bar{x}=\frac{x}{L_x}\ ,\ \bar{y}=\frac{y}{L_x}\\ \alpha=\frac{L_x}{h}\ ,\ \beta=\frac{L_x}{L_y}\ ,\ \eta=\left(\frac{e_0a}{L_x}\right)^2\\ \Delta=1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}\ ,\ A_{11}=\frac{E_{11}h}{\Delta}\\ \lambda_1=\frac{\upsilon_{12}E_{22}}{E_{11}}\ ,\ \lambda_2=\frac{E_{22}}{E_{11}}\ ,\ \lambda_3=\frac{G_{12}}{E_{11}}\times\Delta\\ \lambda_4=k\frac{G_{23}}{E_{11}}\times\Delta\ ,\ \lambda_5=k\frac{G_{13}}{E_{11}}\times\Delta\\ \gamma_1=\frac{k_wL_x^2}{A_{11}}\ ,\ \gamma_2=\frac{k_p}{A_{11}}\ ,\ Q=\frac{qL_x}{A_{11}}\end{array}\right.$$ (۲۸)

شرایط مرزی از نوع تکیه گاه سادهٔ ثابت برای هر ۴ لبه در نظر گرفته شده است؛ لذا داریم:

$$\begin{cases}x=0,L_x:\ \ w=u=v=\varphi_y=M_x=0\\ \varphi_y=M_x=0\rightarrow\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}=0,\varphi_y=0\end{cases}$$ (۲۹)

$$\begin{cases}y=0,L_y:\ \ w=u=v=\varphi_x=M_y=0\\ \varphi_x=M_y=0\rightarrow\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}=0,\varphi_x=0\end{cases}$$ (۳۰)

۳ - روش حل

لازم به ذکر است، در برخی از مراجعی که از تئوری غیرموضعی برای بررسی رفتارهای خمشی صفحات مستطیلی گرافن استفاده کرده‌اند، معادلات با روش ناویر حل شده‌اند. در این رابطه دو موضوع قابل بررسی است. اولاً این که کارایی روش ناویر در حل این معادلات تائید نشده است و بدون مطالعهٔ مناسب در این زمینه، کارایی این روش از محیط موضعی به محیط غیرموضعی تعمیم داده شده است. این در

حالی است که بررسی مراجع [۲۰ و ۲۸] که معادلات خمش را براساس مدل صفحات غیرموضعی میندلین و با روش ناویر حل کرده‌اند، نشان می‌دهد که روش حل ناویر صرفاً یک حل بسته و غیر دقیق را ارائه می‌دهد که نتایج خوبی ندارد.

در واقع این روش حل به دو دلیل برای بررسی خمش نانوصفحات (برای دیگر رفتارها بررسی نشده است)، چندان مناسب نیست. اولاً این که برخلاف حل موضعی، در حل غیرموضعی صفحات، تعداد جملات بسیار بیشتری در بسط-های مثلثاتی ناویر لازم است تا حل همگرا شود. دوماً این که این روش نمی‌تواند تقریب مناسبی برای مشتقات بار (که در اثر بکارگیری روابط غیرموضعی حاصل شده‌اند) فراهم کند. بطوری که برای بار عرضی یکنواخت در کل صفحه، مقدار این مشتقات و در نتیجه اثر غیرموضعی بر بار باید صفر شود ولی طبق حل ناویر این مقدار غیر صفر خواهد بود که منجرب نتایج نامناسب می‌شود.

۳-۱- روش عددی دیفرانسیل مربعات

روش دیفرانسیل مربعات[1] نخستین بار توسط بلمن و همکارانش [۳۰و ۳۱] ارائه شد. این روش، در دامنه‌های منظم با تعداد گره‌های کم و حجم محاسبات پایین قادر به یافتن جواب‌های عددی با دقت بسیار زیاد است[۳۲]. سادگی، محاسبات کم حجم، توانایی حل انواع مسائل و دقت بالای این روش، علت انتخاب آن در این مقاله بوده است.

روش دیفرانسیل مربعات بر پایهٔ این اصل ریاضی استوار است که مشتقات یک تابع را می‌توان به صورت مجموع مقادیر آن تابع از تمام نقاط موجود در شبکه مش‌بندی که در ضرائب وزنی مناسب ضرب شده‌اند، تخمین زد. در واقع معادلات اصلی در کل مش با توابع دیگری تقریب زده می-شوند، و از آنجایی که این توابع، کل نقاط موجود در شبکه را درگیر می‌کنند، با تعداد نقاط کم هم جواب‌های مناسبی می-دهند.

در این مقاله از توابع چند جمله‌ای برای تخمین تابع اصلی و از روش جایگزینی مستقیم[2] برای اعمال شرایط مرزی استفاده شده است. بدین ترتیب می‌توان این دستگاه معادلهٔ دیفرانسیلی را به یک دستگاه معادلهٔ جبری خطی تبدیل کرده و با روش‌های مختلفی آنرا حل کرد.

مشتقات مرتبهٔ اول برای یک صفحه مستطیلی با تابع فرضی $F(x,y)$ به شکل زیر به دست می‌آیند [۳۲]:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{x} F(x_k, y_j) \quad , i = 1,2,\dots,N \qquad (۳۱)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_j) = \sum_{r=1}^{M} a_{jr}^{x} F(x_i, y_r) \quad , j = 1,2,\dots,M \qquad (۳۲)$$

N و M بترتیب تعداد گره‌ها در راستای x و y می‌باشند.

$$\left| \begin{array}{ll} a_{ij}^{x} = \dfrac{R(x_i)}{(x_i - x_j) R(x_j)} & \text{for } i \neq j \\ a_{ii}^{x} = -\sum_{j=1,\neq i}^{N} a_{ij}^{x} & i,j = 1,2,\dots,N \end{array} \right. \qquad (۳۳)$$

$$\left| \begin{array}{ll} a_{ij}^{y} = \dfrac{P(y_i)}{(y_i - y_j) P(y_j)} & \text{for } i \neq j \\ a_{ii}^{y} = -\sum_{j=1,\neq i}^{M} a_{ij}^{y} & i,j = 1,2,\dots,M \end{array} \right. \qquad (۳۴)$$

$$\left| \begin{array}{l} R(x_i) = \prod_{j=1,\neq i}^{N} (x_i - x_j) \\ P(y_i) = \prod_{j=1,\neq i}^{M} (y_i - y_j) \end{array} \right. \qquad (۳۵)$$

در این روابط منظور ازنماد $\prod$ عمل ضرب است. ضرائب a^x و a^y نیز بترتیب ضرائب وزنی در راستای x و y هستند.

برای مشتقات مراتب بالاتر نیز داریم:

$$\frac{\partial^{(n)} F_{(x_i, y_j)}}{\partial x^{(n)}} = \sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(n)} F(x_k, y_j) \qquad (۳۶)$$

$$\frac{\partial^{(m)} F_{(x_i, y_j)}}{\partial y^{(m)}} = \sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(m)} F(x_i, y_r) \qquad (۳۷)$$

$$\frac{\partial^{(a+b)} F_{(x_i, y_j)}}{\partial x^{(a)} \partial y^{(b)}} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} c_{ik}^{(a)} \bar{c}_{jr}^{(b)} F(x_k, y_r) \qquad (۳۸)$$

که ضرائب وزنی C و $\bar{C}$ به این ترتیب به دست می‌آیند:

$$c^{(1)} = a^{x}, \quad \bar{c}^{(1)} = a^{y} \qquad (۳۹)$$

$$\left| \begin{array}{ll} C_{ij}^{(n)} = n \left[a_{ij}^{x} c_{ii}^{(n-1)} - \dfrac{c_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right] & \text{for } i \neq j \\ C_{ii}^{(n)} = -\sum_{j=1,\neq i}^{N} c_{ij}^{(n)} & i,j = 1,2,\dots\dots,N \end{array} \right. \qquad (۴۰)$$

$$\left| \begin{array}{ll} \bar{C}_{ij}^{(m)} = m \left[a_{ij}^{y} \bar{c}_{ii}^{(m-1)} - \dfrac{\bar{c}_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j} \right] & \text{for } i \neq j \\ \bar{C}_{ii}^{(m)} = -\sum_{j=1,\neq i}^{m} \bar{c}_{ij}^{(m)} & i,j = 1,2,\dots\dots,M \end{array} \right. \qquad (۴۱)$$

در روابط بالا c و $\bar{c}$ به ترتیب ضرائب وزنی در راستای x و y هستند. بنابراین معادلات تعادل برای نقطهٔ $(\bar{x}_k, \bar{y}_j)$ به شکل زیرخواهد بود:

$$\begin{aligned} &\lambda_5 \times \sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(1)} \varphi_x(\bar{x}_k, \bar{y}_j) + \lambda_4 \beta \times \\ &\sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(1)} \varphi_y(\bar{x}_i, \bar{y}_r) + [\lambda_5 + \eta \gamma_1 + \gamma_2] \times \\ &\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(2)} \bar{w}(\bar{x}_k, \bar{y}_j) + [\lambda_4 + \eta \gamma_1 + \gamma_2] \times \\ &\beta^2 \times \sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(2)} \bar{w}(\bar{x}_i, \bar{y}_r) - \gamma_1 \bar{w}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - \\ &\eta \gamma_2 \Big[\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(4)} \bar{w}(\bar{x}_k, \bar{y}_j) + 2\beta^2 \times \\ &\sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{M} c_{ik}^{(2)} \bar{c}_{jr}^{(2)} \bar{w}(\bar{x}_k, \bar{y}_r) + \beta^4 \times \\ &\sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(4)} \bar{w}(\bar{x}_i, \bar{y}_r) \Big] = \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \eta \beta^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} - Q \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

---
[1] Differential Quadrature Method
[2] Direct Substitution

$$\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(2)}\, \varphi_x(\bar{x}_k,\bar{y}_j) + (\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\times \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M} c_{ik}^{(1)}\, \bar{c}_{jr}^{(1)}\, \varphi_y(\bar{x}_k,\bar{y}_r) + \lambda_3\beta^2\times \sum_{r=1}^{M}\bar{c}_{jr}^{(2)}\, \varphi_x(\bar{x}_i,\bar{y}_r) - 12\times\lambda_5\alpha^2\varphi_x = 12\times\lambda_5\alpha^2\times\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(2)}\, \bar{w}(\bar{x}_k,\bar{y}_j) \qquad (۴۳)$$

$$\lambda_3\times\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(2)}\, \varphi_y(\bar{x}_k,\bar{y}_j) + (\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\times \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M} c_{ik}^{(1)}\, \bar{c}_{jr}^{(1)}\, \varphi_x(\bar{x}_k,\bar{y}_r) + \lambda_2\beta^2\times \sum_{r=1}^{M}\bar{c}_{jr}^{(2)}\, \varphi_y(\bar{x}_i,\bar{y}_r) - 12\times\lambda_4\alpha^2\varphi_y = 12\times\lambda_4\beta\alpha^2\times\sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(1)}\, \bar{w}(\bar{x}_i,\bar{y}_r) \qquad (۴۴)$$

در رابطهٔ (۴۲) نیازی به گسسته سازی سمت راست تساوی نداریم، چون مقدار و نوع بار بی بعد Q به عنوان یک پارامتر خارجی معلوم است، لذا می‌توان مستقیماً از آن مشتق گرفت و در روابط قرار داد.

شرایط مرزی برای ۳ معادلهٔ فوق نیز بدین شکل خواهند بود:

$$\begin{cases} \bar{x}=0,1:\ \bar{w}=\varphi_y=\sum_{k=1}^{N} c_{ik}^{(1)}\, \varphi_x(\bar{x}_k,\bar{y}_j)=0 \\ \bar{y}=0,1:\ \bar{w}=\varphi_x=\sum_{r=1}^{M} \bar{c}_{jr}^{(2)}\, \varphi_y(\bar{x}_k,\bar{y}_j)=0 \end{cases} \qquad (۴۵)$$

برای مش‌بندی بهتر صفحهٔ مستطیلی از رابطه زیر که موسوم به توزیع بندی گوس، چبیشف، لباتو[1] است استفاده می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} x_i=\frac{L_x}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right) & i=1,2,\dots,N \\ y_j=\frac{L_y}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{M-1}\pi\right)\right) & j=1,2,\dots,M \end{vmatrix} \qquad (۴۶)$$

در واقع این نوع مش‌بندی باعث پایداری بیشتر دستگاه معادلات می‌شود و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد.

۳-۲-روش عددی تفاضلات محدود

روش تفاضلات محدود[2] یکی از روش‌های پر سابقه و قدیمی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی محسوب می‌شود. این روش جزء روش‌های مرتبهٔ پایین بوده و برای بدست آوردن دقت کافی به تعداد مش‌های زیاد در شبکه نیاز دارد.

روش تفاضلات محدود برای تقریب مشتقات توابع از تفاضلات معادل آنها متناسب با بسط تیلورشان استفاده می‌کند. بدین منظور می‌توان از تقریب‌های مرتبهٔ بالاتر و یا مرتبهٔ پایین‌تر استفاده کرد. بدین ترتیب که از جملات بیشتر و یا کمتری در بسط تیلور در تقریب استفاده می‌شود. همچنین بسته به شرایط و نوع مساله می‌توان از تفاضلات مرکزی، پیشرو و یا پسرو استفاده کرد. بنابر آنچه گفته شد مشتقات مراتب مختلف تابع فرضی $F(x,y)$ بر اساس تفاضلات مرکزی می‌توانند به شکل زیر گسسته سازی شوند:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{2\times\Delta x} \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{F_{i,j+1}-F_{i,j-1}}{2\times\Delta y} \qquad (۴۸)$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}=\frac{F_{i+1,j}-2\times F_{i,j}+F_{i-1,j}}{\Delta x^2} \qquad (۴۹)$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=\frac{F_{i,j+1}-2\times F_{i,j}+F_{i,j-1}}{\Delta y^2} \qquad (۵۰)$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{F_{i+1,j+1}-F_{i+1,j-1}-F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1}}{4\times\Delta x\times\Delta y} \qquad (۵۱)$$

$$\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^4}=\frac{F_{i+2,j}-4\times F_{i+1,j}+6\times F_{i,j}-4\times F_{i-1,j}+F_{i-2,j}}{\Delta x^4} \qquad (۵۲)$$

$$\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial y^4}=\frac{F_{i,j+2}-4\times F_{i,j+1}+6\times F_{i,j}-4\times F_{i,j-1}+F_{i,j-2}}{\Delta y^4} \qquad (۵۳)$$

$$\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\,\partial y^2}=\frac{F_{i+1,j+1}-2F_{i+1,j}+F_{i+1,j-1}-2F_{i,j+1}}{\Delta x^2\Delta y^2}+\frac{4F_{i,j}-2F_{i,j-1}+F_{i-1,j+1}-2F_{i-1,j}+F_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\Delta y^2} \qquad (۵۴)$$

بدین ترتیب تمام مشتقات بکار رفته در معادلات نرمالسازی شده را می‌توان جایگزین کرده و یک دستگاه معادلهٔ جبری تشکیل داد.

$$\lambda_5\frac{\varphi_{x\,i+1,j}-\varphi_{x\,i-1,j}}{2\times\Delta\bar{x}}+\lambda_4\,\beta\,\frac{\varphi_{y\,i,j+1}-\varphi_{y\,i,j-1}}{2\times\Delta\bar{y}}-\gamma_1\bar{w}_{i,j}+\left[\lambda_5+\eta\,\gamma_1+\gamma_2\right]\times\frac{\bar{w}_{i+1,j}-2\times\bar{w}_{i,j}+\bar{w}_{i-1,j}}{\Delta\bar{x}^2}+\left[\lambda_4+\eta\,\gamma_1+\gamma_2\right]\times\beta^2\,\frac{\bar{w}_{i,j+1}-2\times\bar{w}_{i,j}+\bar{w}_{i,j-1}}{\Delta\bar{y}^2}-\eta\,\gamma_2\left[\frac{\bar{w}_{i+2,j}-4\times\bar{w}_{i+1,j}+6\times\bar{w}_{i,j}-4\times\bar{w}_{i-1,j}+\bar{w}_{i-2,j}}{\Delta\bar{x}^4}+2\,\beta^2\left(\frac{\bar{w}_{i+1,j+1}-2\bar{w}_{i+1,j}+\bar{w}_{i+1,j-1}-2\bar{w}_{i,j+1}}{\Delta\bar{x}^2\Delta\bar{y}^2}+\frac{4\bar{w}_{i,j}-2\bar{w}_{i,j-1}+\bar{w}_{i-1,j+1}-2\bar{w}_{i-1,j}+\bar{w}_{i-1,j-1}}{\Delta\bar{x}^2\Delta\bar{y}^2}\right)+\beta^4\,\frac{\bar{w}_{i,j+2}-4\times\bar{w}_{i,j+1}+6\times\bar{w}_{i,j}-4\times\bar{w}_{i,j-1}+\bar{w}_{i,j-2}}{\Delta\bar{y}^4}\right]=\eta\,\frac{\partial^2 Q}{\partial\bar{x}^2}+\eta\,\beta^2\,\frac{\partial^2 Q}{\partial\bar{y}^2}-Q \qquad (۵۵)$$

$$\frac{\varphi_{x\,i+1,j}-2\times\varphi_{x\,i,j}+\varphi_{x\,i-1,j}}{\Delta\bar{x}^2}+(\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\,\frac{\varphi_{y\,i+1,j+1}-\varphi_{y\,i+1,j-1}-\varphi_{y\,i-1,j+1}+\varphi_{y\,i-1,j-1}}{4\times\Delta\bar{x}\times\Delta\bar{y}}+\lambda_3\beta^2\,\frac{\varphi_{x\,i,j+1}-2\times\varphi_{x\,i,j}+\varphi_{x\,i,j-1}}{\Delta\bar{y}^2}-12\times\lambda_5\alpha^2\varphi_{x\,i,j}=12\times\lambda_5\alpha^2\,\frac{\bar{w}_{i+1,j}-\bar{w}_{i-1,j}}{2\times\Delta\bar{x}} \qquad (۵۶)$$

$$\lambda_3\,\frac{\varphi_{y\,i+1,j}-2\times\varphi_{y\,i,j}+\varphi_{y\,i-1,j}}{\Delta\bar{x}^2}+(\lambda_1+\lambda_3)\times\beta\,\frac{\varphi_{x\,i+1,j+1}-\varphi_{x\,i+1,j-1}-\varphi_{x\,i-1,j+1}+\varphi_{x\,i-1,j-1}}{4\times\Delta\bar{x}\times\Delta\bar{y}}+\lambda_2\beta^2\,\frac{\varphi_{y\,i,j+1}-2\times\varphi_{y\,i,j}+\varphi_{y\,i,j-1}}{\Delta\bar{y}^2}-12\times\lambda_4\alpha^2\varphi_{y\,i,j}=12\times\lambda_4\beta\alpha^2\,\frac{\bar{w}_{i,j+1}-\bar{w}_{i,j-1}}{2\times\Delta\bar{y}} \qquad (۵۷)$$

[1] Gauss–Chebyshev–Lobatto
[2] Finite Difference Method

۴- نتایج و بحث

در این قسمت رفتار خمشی صفحهٔ گرافن با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک مورد بررسی قرار گرفته است. لذا صفحه مستطیلی گرافنی با خواص ارتوتروپیک و شرایط مرزی ساده به عنوان فیزیک مساله در نظر گرفته شده است. خواص این صفحات بر اساس عواملی مثل کیفیت و درجه خلوص گرافن، دمای محیط، ساختار و چیدمان اتم‌ها در صفحه و ضخامت صفحه می‌تواند متفاوت باشد. در این مقاله، مشخصات مساله عبارتند از [۱۹]:

$$E_1 = 1765\ \text{Gpa} \qquad E_2 = 1588\ \text{Gpa} \qquad \nu_{12} = 0.3$$
$$h = 0.34\ \text{nm} \qquad l_x = l_y = 10.2\ \text{nm} \qquad \nu_{21} = 0.27$$
$$k_w = 1.13\frac{\text{Gpa}}{\text{nm}} \qquad k_p = 1.13\ (\text{pa.m}) \qquad e_0a = 2\text{nm}$$

مقدار ضریب مقیاس کوچک، هنوز به طور دقیق مشخص نشده است و این مقدار را توسط دینامیک مولکولی تعیین می‌کنند. بررسی‌ها نشان می‌دهد که مقدار این ضریب کمتر از ۲ نانومتر است [۳۳]. در این مقاله نیز مقدار کلی آن ۲ نانومتر در نظر گرفته شده است.

در جدول ۱ خیز بیشینهٔ بی بعد شده برای انواع مش‌بندی، براساس تئوری‌های برشی مرتبهٔ اول و کلاسیک با در نظر گرفتن اثر غیرموضعی، توسط روش‌های عددی دیفرانسیل مربعات و تفاضلات محدود بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود جواب‌های هر دو روش همگرا است و با ریز شدن شبکهٔ مش بندی به یک مقدار میل می‌کنند. نتایج دو تئوری نیز یکدیگر را تائید می‌کنند. از طرفی در حالی که برای تئوری کلاسیک نتایج هر دو روش حل، در مش‌های کم به سرعت همگرا می‌شود، در تئوری برشی مرتبهٔ اول که از معادلات بیشتری برخوردار است، روش دیفرانسیل مربعات نیز به سرعت همگرا شده ولی روش تفاضلات محدود به تعداد مش‌های زیادی نیاز داشته است.

در ارتباط با خالی بودن ردیف‌های آخر ستون دوم و چهارم جدول ۱، باید توجه داشت که ریز کردن بیش از اندازهٔ مش‌بندی باعث افزایش چشمگیر محاسبات و حتی ناپایداری دستگاه و جواب‌های نادرست می‌شود. این موضوع در روش عددی دیفرانسیل مربعات، بدلیل پر بودن ماتریس‌های ضرائب و در تئوری برشی مرتبهٔ اول به علت بیشتر بودن تعداد معادلات شدید تر است و لذا انجام محاسبات در تعداد مش‌های زیاد نیازمند سخت افزارهای قویتری است.

جدول ۱- خیز بیشینهٔ بی بعد برای مش‌های مختلف و بار عرضی یکنواخت یک گیگا پاسکال

تعداد گره‌ها	تئوری کلاسیک: دیفرانسیل مربعات	تئوری کلاسیک: تفاضلات محدود	تئوری برشی مرتبهٔ اول: دیفرانسیل مربعات	تئوری برشی مرتبهٔ اول: تفاضلات محدود
۶	۰/۰۴۷۱	۰/۰۴۹۷	۰/۰۴۶۰	۰/۰۱۶۲
۷	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۴۰	۰/۰۵۵۶	۰/۰۲۳۴
۹	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۴۸	۰/۰۵۶۰	۰/۰۳۲۷
۱۱	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۵۲	۰/۰۵۶۰	۰/۰۳۹۱
۱۵	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۵۵	۰/۰۵۶۰	۰/۰۴۶۵
۲۱	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۶۰	۰/۰۵۱۱
۴۱	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۵۸	۰/۰۵۶۰	۰/۰۵۴۶
۶۱	۰/۰۵۵۹	۰/۰۵۵۹	....	۰/۰۵۵۳
۸۱	....	۰/۰۵۵۹	....	۰/۰۵۵۸
۹۱	....	۰/۰۵۵۹	....	۰/۰۵۶۰

جدول ۲ نیز نتایج حاصل از دو روش را براساس تئوری برشی مرتبهٔ اول غیرموضعی، برای مقادیر مختلف ضخامت و بار با توزیع یکنواخت و شرایط مرزی ساده مقایسه کرده است. تعداد مش‌ها برای روش تفاضلات محدود ۸۱ در نظر گرفته شده است (در روش دیفرانسیل مربعات تعداد مش‌ها چندان مهم نبوده و فقط باید دقت کرد که تعداد مش‌ها فرد باشد تا مرکز صفحه را شامل شود). همانطور که مشاهده می‌شود در شرایط مختلف نیز نتایج هر دو روش نزدیک به یکدیگر بوده و درستی حل معادلات را تضمین می‌کند.

جدول ۲- مقایسهٔ خیز بیشینهٔ بی‌بعد روش‌های دیفرانسیل مربعات و تفاضلات محدود برای مقادیر مختلف بار و ضخامت

بار عرضی یکنواخت (Gpa)	دیفرانسیل مربعات h=0.34 (nm)	دیفرانسیل مربعات h=0.68 (nm)	تفاضلات محدود h=0.34 (nm)	تفاضلات محدود h=0.68 (nm)
۰/۰۱	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۴
۰/۰۵	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۸
۰/۱۰	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۳۷
۰/۵۰	۰/۰۲۸۰	۰/۰۱۸۶	۰/۰۲۷۹	۰/۰۱۸۳
۱/۰۰	۰/۰۵۶۰	۰/۰۳۷۳	۰/۰۵۵۸	۰/۰۳۶۶

در جدول ۳، خیز بیشینهٔ بی بعد صفحهٔ مستطیلی بر روی زمینهٔ الاستیک دو پارامتری، بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ اول با فرض تغییر شکل‌های کوچک بدست آمده است. به منظور امکان مقایسهٔ جواب‌های حاضر با نتایج دیفرانسیل مربعات مرجع [۳۴]، مقدار ضریب مقیاس کوچک e_0a برابر

صفر تعیین شده است. نزدیکی بسیار عالی نتایج به هم دلیل بر درستی روند حل می‌باشد. خواص و پارامترهای بی‌بعد استفاده شده در این مرجع در زیر آمده است.

$$k_f=\frac{L_x^{4}k_w}{D}=200\ ,\ \nu=0.25\ ,\ e_0a=0$$
$$G_f=\frac{L_x^{2}k_p}{D}\ ,\ W^*=\frac{wD}{qL_x^{4}}\times 10^3\ ,\ Q=\frac{qL_x}{kGh} \qquad (۵۸)$$

جدول ۳- مقایسهٔ خیز W^* برای صفحهٔ مربعی بر روی زمینهٔ الاستیک

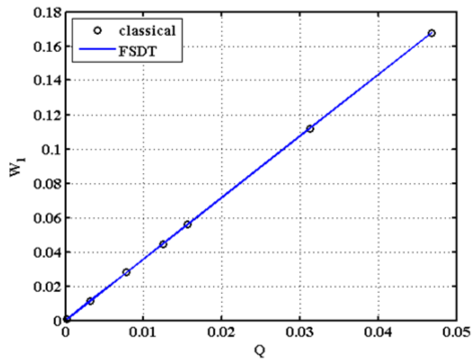
$\frac{h}{L_x}$	$G_f=5$ نتایج حاضر	$G_f=5$ [۳۴]	$G_f=20$ نتایج حاضر	$G_f=20$ [۳۴]
۰/۰۰۵	۲/۲۶۴	۲/۲۶۴	۱/۵۶۷	۱/۵۶۷
۰/۱	۲/۳۱۳	۲/۳۱۳	۱/۵۸۷	۱/۵۸۷
۰/۲	۲/۴۴۹	۲/۴۴۹	۱/۶۴۱	۱/۶۴۱

در ادامه اثر پارامترهای مختلفی بر روی نتایج بررسی شده است. در این نمودارها منظور از نسبت خیز Ratio همان نسبت خیز بیشینهٔ بین تئوری برشی مرتبهٔ اول و کلاسیک بوده (که اثر غیرموضعی در روابط آنها وارد شده است) و منظور از خیز بیشینه همان خیز بی بعد شدهٔ بیشینه است.

$$w_1=\frac{w_{max}}{L_x}\qquad ,\qquad w_2=\frac{w_{max}}{h}$$
$$\text{Ratio}=\left(\frac{W_{FSDT}}{W_{classic}}\right)_{max} \qquad (۵۹)$$

شکل ۲، تغییرات خیز بیشینه را نسبت به بار بی‌بعد نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود (با توجه به این که محاسبات برای تغییر شکل‌های کوچک انجام شده است)، افزایش بار باعث افزایش خیز به طور یکنواخت و با شیب ثابت شده است. در نتیجه به راحتی می‌توان با بدست آوردن شیب این نمودار، مقدار خیز را از ضرب بار بی‌بعد در شیب نمودار بدست آورد. این موضوع در انجام محاسبات بعدی به دلیل سادگی محاسبات از اهمیت خاصی می‌تواند برخوردار باشد. البته باید توجه داشت که به طور کلی در تغییر شکل-های بزرگ در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی ون‌کارمن اثر مهمی در نتایج دارد و باید اعمال شود. شیب نمودار برای مدل صفحات غیرموضعی میندلین ۳/۵۸۲۵ و برای مدل صفحات غیرموضعی کیرشهف ۳/۵۷۷۰ بدست آمده است.

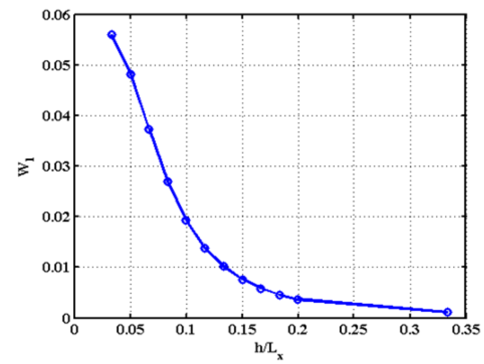
شکل ۳- الف و ب، اثر تغییرات ضخامت بی‌بعد صفحه را به ترتیب بر خیز و نسبت خیز برای بار عرضی یکنواخت یک



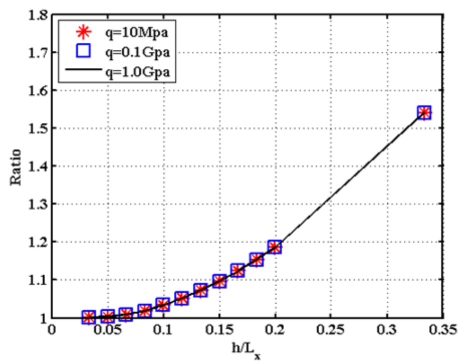
شکل ۲- نمودار خیز بیشینهٔ بی بعد – بار بی‌بعد

گیگا پاسکال نشان می‌دهد. همانطور که در نمودار ۳ الف مشاهده می‌شود، خیز بیشینه با افزایش نسبت ضخامت به طول تا ۰/۱ تقریباً با شیب ثابتی کاهش می‌یابد و بعد از این مقدار، اندازهٔ شیب نمودار به تدریج کم می‌شود و با شیب کمی به سمت صفر میل می‌کند. همچنین از نمودار ۳ ب، می‌توان فهمید، در حالی که تغییرات بار تاثیری در نسبت خیز بین دو تئوری نداشته است ولی با افزایش نسبت ضخامت به طول، مقدار نسبت خیز با به مقدار قابل توجه‌ای افزایش یافته است؛ به طوری که شیب نمودار تا مقدار نسبت ضخامت به طول ۰/۱۵ افزایش یافته و بعد از آن تقریباً ثابت مانده است. طبق این نمودار نتایج دو تئوری برای نسبت‌های ضخامت به طول کمتر از ۰/۱ نزدیک به هم است.

شکل ۴- الف و ب، تغییرات خیز بیشینه و نسبت خیز را نسبت به پارامتر مقیاس کوچک نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۴ الف دیده می‌شود، خیز بیشینه با افزایش پارامتر مقیاس کوچک، کاهش یافته است. شیب این کاهش تا مقدار ۰/۵ نانومتر برای پارامتر مقیاس کوچک نسبت به قبل آن افزایش یافته و سپس تغییر چندانی نکرده است. این خطی شدن بعد از ۰/۵ نانومتر را در نمودار ۴ ب نیز می‌توان مشاهده کرد. با این تفاوت که در آنجا با افزایش پارامتر مقیاس کوچک نسبت خیز بین دو تئوری افزایش یافته است و این بدان معنی است که در حالت غیرموضعی اختلاف بین دو تئوری کلاسیک و برشی مرتبهٔ اول بیشتر از حالت موضعی است. البته کاملاً واضح است که این تغییرات با وجود رشد صعودیی که داشته، اما ناچیز و قابل صرف نظر است.

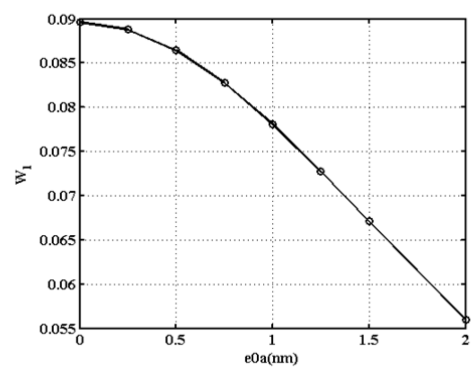


(الف)

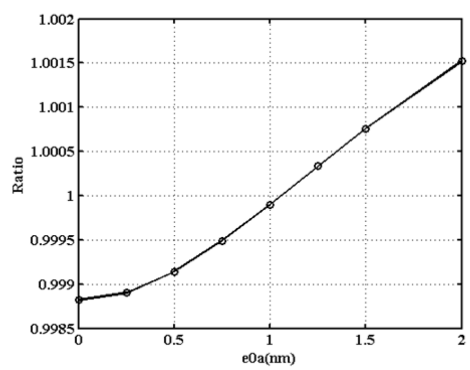


(ب)

شکل -۳ الف) تغییرات خیز بی‌بعد - ضخامت بی‌بعد ب) تغییرات نسبت خیز - ضخامت (نانومتر)، برای بارهای مختلف (پاسکال)



(الف)



(ب)

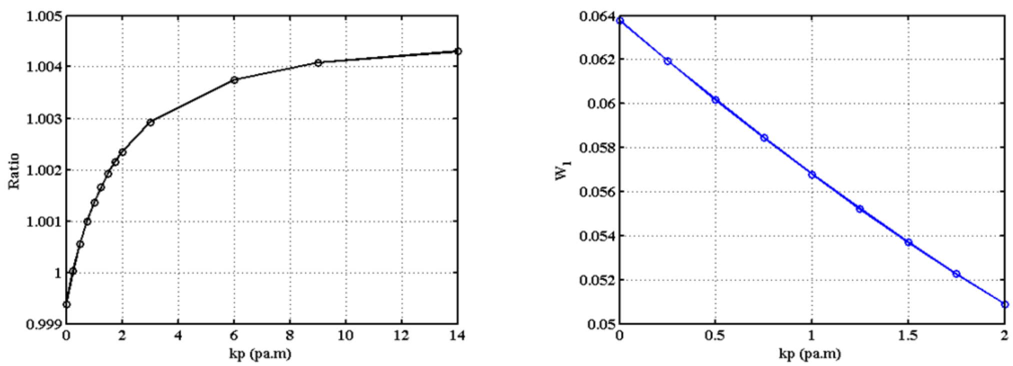
شکل ۴- الف) نمودار خیز بیشینهٔ بی‌بعد- پارامتر مقیاس کوچک (نانومتر) برای بار یکنواخت ۱ گیگاپاسکال
ب) نمودار نسبت خیز - پارامتر مقیاس کوچک (نانومتر)

از روی شکل ۵- الف و ب، می‌توان اثر مدول برشی زمینهٔ پلیمری را بر خیز و نسبت خیز برای بار عرضی یکنواخت با مقدار یک گیگا پاسکال بررسی کرد. شکل ۵ الف نشان می‌دهد که با افزایش این مدول برشی، خیز بیشینه با شیب تقریباً ثابتی (اندازهٔ شیب میانگین نمودار ۰/۰۰۶۵ بدست آمده است) کاهش می‌یابد. از طرفی در شکل ۵ ب، دیده می‌شود که افزایش مدول برشی، منجربه افزایش نسبت خیز با شیب خیلی کم می‌شود. هر چند که در این نمودار شیب منحنی خطی نبوده است، ولی به طور کلی شیب منحنی کم است؛ از طرفی مشاهده می‌شود که با افزایش مدول برشی زمینهٔ پلیمری، شیب منحنی نمودار ۵ ب، به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین می‌توان فرض کرد که انتخاب تئوری حل، وابسته به مقدار پارامتر مدول برشی زمینهٔ پلیمری نمی‌باشد.

شکل ۶ الف و ب، اثر مدول وینکلر زمینهٔ پلیمری را به ترتیب بر خیز و نسبت خیز برای بار عرضی یکنواخت یک گیگا پاسکالی نشان می‌دهند. همانطور که در شکل ۶ الف دیده می‌شود، مقدار خیز و اندازهٔ شیب منحنی با افزایش مدول وینکلر به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد. واضح است که اثر این تغییرات در مقادیر بالاتر مدول وینکلر کاهش یافته و به سمت صفر میل می‌کند. البته این موضوع کاملاً مورد انتظار بود، چرا که با افزایش این پارامتر، زمینهٔ

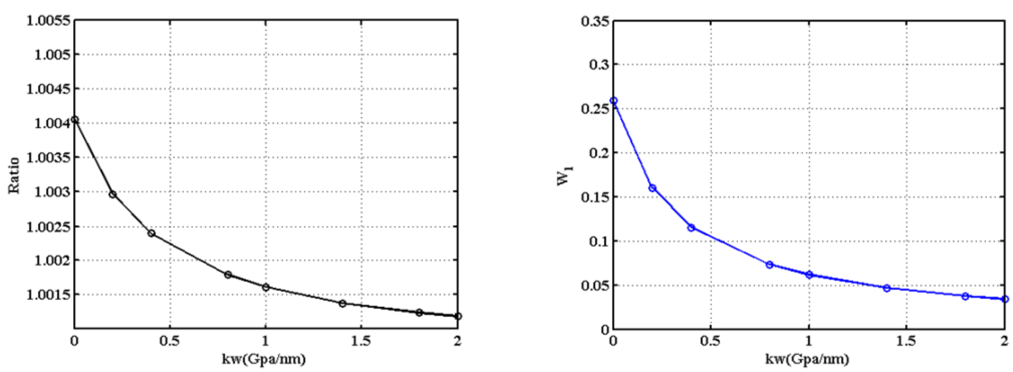
الاستیک به سمت یک جسم صلب میل کرده و مانع تغییر شکل صفحه می‌شود. در شکل ۶ ب نیز، هر چند مقدار نسبت خیز و اندازهٔ شیب منحنی آن با افزایش مدول وینکلر کاهش یافته‌اند، ولی این اثر نیز مانند اثر مدول برشی زمینهٔ الاستیک قابل صرف نظر است و می‌توان انتخاب تئوری حل را مستقل از مقدار این پارامتر انجام داد.

شکل ۷ الف اثر پارامتر نسبت عرضی (نسبت طول به عرض) را برای بار عرضی یکنواخت یک گیگا پاسکالی بر روی خیز بیشینه می‌دهد. از آنجایی که افزایش نسبت عرضی می‌تواند در اثر افزایش طول یا کاهش عرض ایجاد شود، بنابراین هر دو حالت در نمودارها در نظر گرفته شده‌اند. طبق این نمودار همان طور که انتظار می‌رفت، اگر افزایش نسبت عرضی در اثر افزایش طول ایجاد شود، خیز افزایش می‌یابد و اگر در اثر کاهش عرض رخ دهد خیز نیز کاهش می‌یابد. اما در هر دو حالت شیب نمودار به سمت صفر میل کرده است و این یعنی مقدار خیز نهایی صفحات بلند در مقابل صفحات مربعی، اثر پذیری کمتری نسبت به تغییر ابعاد صفحه دارند.



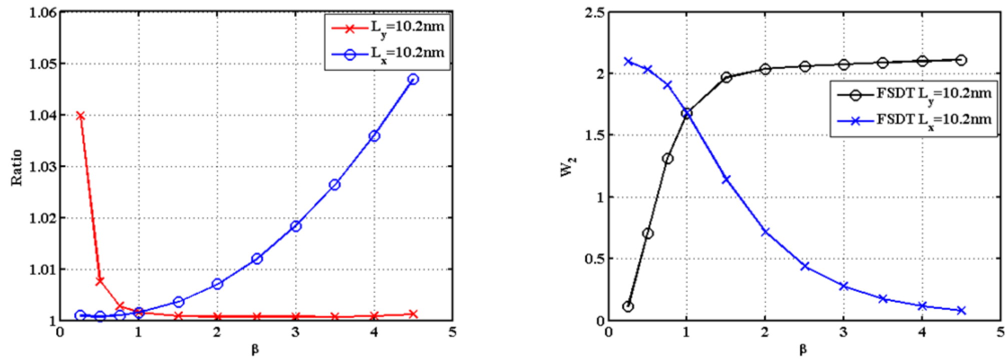
(ب) (الف)

شکل ۵- الف) خیز بی‌بعد - مدول برشی زمینهٔ پلیمری ب) نسبت خیز - مدول برشی زمینهٔ پلیمری



(ب) (الف)

شکل ۶- الف) خیز بیشینهٔ بی بعد - مدول وینکلر زمینهٔ پلیمری ب) نسبت خیز - مدول وینکلر زمینهٔ پلیمری



(الف) (ب)

شکل ۷- الف) خیز بیشینهٔ بی بعد - نسبت طول به عرض ب) نسبت خیز - نسبت طول به عرض

شکل ۷ ب، اثر نسبت عرضی را بر نسبت خیز برای بار یکنواخت یک گیگا پاسکالی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، اگر افزایش نسبت عرضی در اثر افزایش طول رخ دهد، مقدار نسبت خیز و شیب منحنی کاهش می-یابد و اگر در اثر کاهش عرض رخ دهد، مقدار نسبت خیز و شیب منحنی افزایش می‌یابد. در واقع می‌توان گفت، هر گاه که محیط صفحه افزایش یافته است، ضخامت صفحه در مقابل دیگر ابعاد بسیار کوچک بوده و صفحه نازک داریم. بنابراین می‌توان از تئوری ساده‌تر کلاسیک (با در نظر گرفتن اثر غیرموضعی) استفاده کرد. اما هر گاه که محیط صفحه کاهش یافته است، صفحه به یک صفحهٔ نسبتاً ضخیم نزدیک شده است و لذا نیاز به استفاده از تئوری مرتبهٔ بالاتر بوده است.

۵ - نتیجه گیری

در این مقاله رفتار خمشی صفحهٔ مستطیلی گرافن با فرض خواص ارتوتروپیک که بر روی زمینهٔ الاستیک قرار گرفته، تحت بار عرضی یکنواخت بررسی شده است. معادلات با اعمال روابط غیرموضعی ارینگن بر تئوری برشی مرتبهٔ اول بدست آمده و توسط روش دیفرانسیل مربعات برای شرایط مرزی ساده حل شده‌اند و اثر پارامترهای مختلفی بر نتایج بررسی گردیده است.

مقالهٔ حاضر به دو جهت دارای اهمیت می‌باشد. اولاً این که در دیگر مقالاتی که رفتار مکانیکی صفحات گرافن را با مدل صفحات غیرموضعی میندلین بررسی کرده‌اند، روابط را با فرض خواص ایزوتروپیک بدست آورده و حل کرده‌اند در حالی که خواص این صفحات غیر ایزوتروپیک است. دوماً این که در این مقاله برای اولین بار خمش این صفحات با روش دیفرانسیل مربعات حل شده است که منجرب نتایج مناسب و قابل اطمینانی شده است.

نتایج و محاسبات این مقاله می‌تواند به منظور مطالعهٔ رفتار خمشی صفحهٔ گرافن بر روی زمینهٔ الاستیک مورد استفاده قرار گیرد. مقایسهٔ خوبی که بین مدل‌های غیرموضعی کیرشهف و میندلین در این مقاله صورت گرفته نیز می‌تواند نتایج مفیدی فراهم کند. برخی از مهمترین نتایج حاصل شده، به شرح زیر است.

۱) افزایش بار عرضی یکنواخت ، اثر خطی (بر اساس حل کرنش‌های خطی) بر مقدار خیز صفحه داشته است که برای خواص مورد بحث در این مقاله شیب خیز بی‌بعد بر حسب بار یکنواخت بی‌بعد برابر ۳/۵۸۲۵ شده است. بنابراین می‌توان به تنهایی با ضرب این مقدار در بار بی‌بعد و بدون انجام محاسبات پیچیده، مقدار خیز را بدست آورد.

۲) افزایش پارامتر مقیاس کوچک، خیز را به شدت کاهش می‌دهد، بطوری که هر چه این پارامتر بزرگتر باشد، نه تنها خیز کم می‌شود بلکه اثر آن در کاهش خیز هم بیشتر می‌شود.

۳) خیز صفحات بلند با نسبت عرضی بیشتر در مقایسه با صفحات مربعی، از اثرپذیری کمتری در برابر تغییر ابعاد صفحه برخوردار هستند. بنابراین در اندازه‌گیری ابعاد نانو صفحات مستطیلی بلند می‌توان از ابزار ساده‌تری استفاده کرد

و برای سادگی حل از برخی پارامترهای محیطی که باعث تغییر ناچیز ابعاد می‌شوند، صرف نظر کرد.

۴) بررسی ها نشان می‌دهد که نسبت ابعاد صفحه به هم، تنها عوامل اصلی در تفاوت بین دو تئوری می‌باشند. بنابراین هر مقدار که اندازهٔ طول و عرض صفحه کم شود یا به ضخامت آن افزوده شود، اهمیت استفاده از تئوری‌های مرتبهٔ بالاتر بیشتر می‌شود.

۵) روش دیفرانسیل مربعات در مقایسه با روش ناویر و بسیاری از روش‌های عددی، یک روش بسیار مناسب و قوی است که نتایج مناسب‌تری برای حل غیرموضعی معادلات خمش بدست می‌دهد.

مراجع

[1] Wang L, Zhang Q (2012) Elastic behavior of bilayer graphene under in-plane loadings. Current Applied Physics 12(4): 1173–1177.

[2] Satish N, Narendar S, Gopalakrishnan S (2012) Thermal vibration analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal continuum mechanics. Physica E 44(9): 1950–1962.

[3] Pu NW, Wang CA, Sung Y, Liu YM, Ger MD (2009) Production of few-layer graphene by supercritical CO2 exfoliation of graphite. Materials Letters 63(23): 1987–1989.

[4] Wu C, Dong G, Guan L (2010) Production of graphene sheets by a simple helium arc-discharge. Physica E 42(5): 1267–1271.

[5] Terrones M, Botello-Méndez AR, Campos-Delgado J, López-Urías F, Vega-Cantú YI, Rodríguez-Macías FJ, Elías AL, Mu˜noz-Sandoval E, Cano-Márquez AG, Charlier JC, Terrones H (2010) Graphene and graphite nanoribbons: Morphology, properties, synthesis, defects and applications. Nano Today 5(4): 351–372.

[6] Ravani F, Papagelis K, Dracopoulos V, Parthenios J, Dassios KG, Siokou A, Galiotis C (2013) Graphene production by dissociation of camphor molecules on nickel substrate. Thin Solid Films 527: 31–37.

[7] Kakaei K, Zhiani M (2013) A new method for manufacturing graphene and electrochemical characteristic of graphene-supported Pt nanoparticles in methanol oxidation. Journal of Power Sources 225: 356–363.

[8] Craighead HG (2000) Nanoelectromechanical systems. Science 209(5496): 1532–1536.

[9] Li M, Tang HX, Roukes ML (2007) Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. Nat Nanotechnol 2(2): 114–133.

[10] Murmu T, Adhikari S (2010) Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems. Physica E 43(1): 415–436.

[11] Zhou SJ, Li ZQ (2001) Length scales in the static, dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar. J Shandong Univ Technol 31(5): 401–407.

[12] Eringen AC, (1972) Nonlocal polar elastic continua. Int J Eng Sci 10(1): 1–16.

[13] Eringen AC (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J Appl Phys 54(9): 4703–4710.

[14] Eringen AC (2002) Nonlocal Continuum Field Theories. Springer-Verlag, New York.

[15] Eringen AC, Edelen DGB (1972) On nonlocal elasticity. Int J Eng Sci 10(3): 233–248.

[16] Behfar K, Naghdabadi R (2005) Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium. Composites Sci and Technology 65(7-8): 1159–1164.

[17] Behfar K, Seifi P, Naghdabadi R, Ghanbari J (2006) An analytical approach to determination of bending modulus of a multi-layered graphene sheet. Thin Solid Films 496(2): 475–480.

[18] Sakhaee-Pour A (2009) Elastic properties of single-layered graphene sheet. Solid State Communications 149(1-2): 91–95.

[19] Pradhan SC, Phadikar JK (2009) Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models. Phys Lett A 373(11): 1062–1069.

[20] Aghababaei R, Reddy JN (2009) Nonlocal third-order shear deformation plate theorymwith application to bending, vibration of plates. J of Sound and Vibration 326(1-2): 277–289.

[21] Reddy JN (2010) Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates. Int J Eng Sci 48(11): 1507–1518.

[22] Ansari R, Rajabiehfard R, Arash B (2010) Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets. Computational Materials Science 49(4): 831–838.

[23] Ansari R, Sahmani S, Arash B (2010) Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. Physics Letters A 375(1): 53–62.

[24] Shen L, Shen HS, Zhang CL (2010) Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments. Computational Materials Science 48(3): 680–685.

[25] Shen HS (2011) Nonlocal plate model for nonlinear analysis of thin films on elastic

[30] Bellman RE, Casti J (1971) Differential Quadrature and Long-Term Integration. J of Mat Analysis & Applications 34(2): 235–238.

[31] Bellman RE, Kashef BG, Casti J (1993) Differential Quadrature : A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation. Journal of Computational Physics 10(1): 40–52.

[32] Shu C (2000) Differential Quadrature and Its Application in Engineering. Springer, London.

[33] Wang Q, Wang CM (2007) The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modeling carbon nanotubes. Nanotechnology 18(7): 075702.

[34] Han JB, Liew KM (1997) Numerical Differential Quadrature Method For Reissner/Mindlin Plates On Two-Parameter Foundations. Int. J. Mech. Sci. 39(9): 977–989.

foundations in thermal environments. Composite Structures 93(3): 1143–1152.

[26] Samaei AT, Abbasion S, Mirsayar MM (2011) Buckling analysis of a single-layer graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory. Mechanics Research Communications 38(7): 481–485.

[27] Pouresmaeeli S, Fazelzadeh SA, Ghavanloo E (2012) Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium. Composites: Part B 43(8): 3384–3390.

[28] Wang Yi-Ze, Li Feng-Ming (2012) Static bending behaviors of nanoplate embedded in elastic matrix with small scale effects. Mechanics Research Communications 41: 44–48.

[29] Farajpour A, Shahidi AR, Mohammadi M, Mahzoon M (2012) Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics. Composite Structures 94(5): 1605–1615.