



## کاربرد روش تبدیل دیفرانسیلی در تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر اولر-برنولی با پهنای متغیر و شرایط تکیه‌گاهی مختلف

روح‌الله درزی نفت‌چالی<sup>۱\*</sup> و سبحان مسیبهی درچه<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائم‌شهر

<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نجف آباد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۸/۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۴/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۶/۲۰

### چکیده

در این مقاله روش تبدیل دیفرانسیلی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات تیر ایزوتروپ اولر-برنولی با پهنای متغیر به کار گرفته شده است. پهنای تیر بصورت تابع نمایی با ضرایب رشد دلخواه تغییر می‌کند. پس از استخراج و بی‌بعدسازی معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم، بر مبنای روش تفکیک متغیرها، حل تحلیلی مسئله و معادله فرکانسی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف تعیین شده است. سپس با حل معادله تابع مکان به کمک روش تبدیل دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم برای ضرایب رشد متفاوت و شرایط مرزی مختلف بدست آمده است. شرایط مرزی بصورت ساده- ساده (SS)، دوسرگیردار (CC)، گیردار- ساده (CS)، آزاد- آزاد (FF)، گیردار- آزاد (CF) و ساده- آزاد (SF)، در نظر گرفته شده است. مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیلی با حل تحلیلی، بیانگر دقت بالای روش تبدیل دیفرانسیلی در تخمین فرکانس‌های طبیعی سیستم ارتعاشی، بخصوص در مدهای پایین، می‌باشد. از آنجائیکه این روش بر مبنای بسط سری تیلور پاسخ است، برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی دقیق‌تر و همچنین فرکانس مدهای بالاتر، تعداد جملات بیشتری از سری مورد نیاز می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که به ازای یک مقدار ثابت  $N$ ، درحالت کلی، قدر مطلق اختلاف فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش تبدیل دیفرانسیلی با مقدار حل دقیق، با افزایش شماره مد، افزایش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات آزاد تیر؛ تغییر پهنای نمایی؛ روش تبدیل دیفرانسیلی؛ حل تحلیلی؛ فرکانس طبیعی.

### Application of differential transform method to determine natural frequencies of variable width Euler-Bernoulli beam with various support conditions

R. Darzi-Naftchali<sup>1\*</sup> and S. Mosayebi-Dorcheh<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dept. of Mech. Eng., Faculty of Engineering, Islamic Azad University, Qaemshar branch, Mazandaran, Iran

<sup>2</sup> Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad University, Najafabad branch, Esfahan, Iran

### Abstract

In this paper, differential transform method (DTM) has been used to determine natural frequencies of free vibration of variable width Euler-Bernoulli isotropic beam. The width of beam varies exponentially with arbitrary non-uniformity parameter. After extracting and nondimensionalization, the governing partial differential equation discretized to two ordinary differential equations in terms of both spatial coordinate and time based on the separation of variables method. Then, for different non-uniformity parameters and boundary conditions, natural frequencies of system have been obtained by using analytical methods and DTM. Boundary conditions are considered as: simple- simple (SS), clamped- clamped (CC), clamped- Simple (CS), free- free (FF), clamped- free (CF) and simple- free (SF). Comparison of natural frequencies obtained from DTM with analytical solution shows that DTM has a good accuracy in determination of natural frequencies, especially in the lower modes. Since that this method is based on Taylor's series expansion, more accurate natural frequencies and also natural frequencies of higher modes can be obtain by increasing series size. Results show that for a constant series size, difference between the natural frequencies obtained from DTM with the exact solution increase totally by increasing of mode number.

**Keywords:** Free vibration of beam; Exponentially width change; Differential transform method; Analytical solution; Natural frequencies.

## ۱- مقدمه

تیرها، سازه‌هایی هستند که بطور گسترده‌ای در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله: ساختمان‌های مرتفع، پل‌های طولی، وسایل نقلیه هوایی و ابزارهای صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تاکنون مطالعات فراوانی در زمینه‌ی ارتعاشات عرضی تیرهای ایزوتروپ یکنواخت انجام شده است [۱]. اما در بسیاری از نیازهای کاربردی در معماری، رباتیک، دانش هوانوردی و ...، تیرهای غیریکنواخت در مقابل تیرهای یکنواخت، توزیع مناسب‌تری از جرم و مقاومت را ارائه می‌دهند. با توجه به حساسیت کاربردهای مذکور، تحلیل ارتعاشی چنین تیرهایی مسئله مهمی تلقی می‌گردد. از آنجا که این تحلیل، در اطراف فرکانس‌های طبیعی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند، ارائه یک روش دقیق و سریع در یافتن فرکانس‌های طبیعی حائز اهمیت می‌باشد.

در سال ۱۹۵۶، کرنج<sup>۱</sup> و آدلر<sup>۲</sup> [۲] یک حل تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تیر غیریکنواخت با چهار نوع مقطع مستطیلی ارائه دادند. کاری مشابه برای تیر مخروطی ناقص و تیر لبه‌ی ناقص توسط کانوی<sup>۳</sup> و دیوبیل<sup>۴</sup> انجام شد [۳]. هیدبرنچت<sup>۵</sup> [۴] با استفاده از سری فوریه‌ی سینوسی در معادله‌ی فرکانسی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تقریبی را برای تیر غیریکنواخت روی تکیه‌گاه ساده بدست آورد. میبی<sup>۶</sup> و راگرز<sup>۷</sup> [۵] تغییرات به شکل چندجمله‌ای را برای سطح مقطع و ممان اینرسی یک تیر دو لایه در نظر گرفتند. بیلی<sup>۸</sup> [۶] جهت یافتن فرکانس طبیعی، معادله‌ی فرکانسی یک تیر یکسرآزاد غیریکنواخت را که از اصل هامیلتون<sup>۹</sup> بدست آمده، بصورت عددی حل کرد. آل‌هاف<sup>۱۰</sup> و پاربری<sup>۱۱</sup> [۷] از تابع سطح مقطع، بعنوان یک متغیر طراحی جهت ماکزیمم کردن اختلاف بین دو فرکانس طبیعی مجاور

استفاده کردند. نگیولس‌وارن<sup>۱۲</sup> [۸ و ۹] از روش مستقیم حل معادله‌ی شکل مد بر اساس سری فریبینیوس، جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی تقریبی استفاده کرد. کرانتی‌یو<sup>۱۳</sup> [۱۰] ارتعاشات غیرخطی تیر با مقطع مستطیلی، با تغییرات سهمی ضخامت را آزمود. همچنین مسئله‌ی ارتعاشی تیر با تغییر خصوصیات ماده در جهت محوری توسط الیشاکوف<sup>۱۴</sup> و جانسون<sup>۱۵</sup> [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. تیرهای پله‌ای نیز توسط جنگ<sup>۱۶</sup> و برت<sup>۱۷</sup> [۱۲] بررسی شد. ممت<sup>۱۸</sup> و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد تیر ایزوتروپ با پهنای متغیر بصورت نمایی، را تحلیل کردند.

روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)<sup>۱۹</sup> که بر مبنای بسط سری تیلور می‌باشد، یک روش تکرار برای به دست آوردن سری تیلور پاسخ مسئله است. این روش اولین بار در سال ۱۹۸۶، توسط زو<sup>۲۰</sup> [۱۴] جهت حل مسائل مقدار اولیه‌ی خطی و غیرخطی در تحلیل جریان‌های الکتریکی، مطرح شد. در سال ۱۹۹۸، شینگ‌هوئی<sup>۲۱</sup> و چاو‌کوانگ<sup>۲۲</sup> [۱۵] روش DTM را برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک تیر غیریکنواخت با حالت انتهایی کلی بر روی پی غیرهمگن، که تحت بار محوری کششی و بار عرضی قرار دارد، استفاده کردند. ایشان همچنین در سال ۲۰۰۶، معادله ارتعاش آزاد یک تیر تیموشنکوی پیچیده شده‌ی چرخان که تحت بار محوری قرار گرفته شده را ابتدا با استفاده از اصل هامیلتون استخراج کرده و سپس به کمک روش DTM حل نمودند [۱۶]. این روش برای تحلیل ارتعاشی تیر مخروطی نیز به کار گرفته شد [۱۷]. اوزدمیر<sup>۲۳</sup> و کایا<sup>۲۴</sup> [۱۸] رفتار ارتعاشی تیر اولر-برنولی طره‌ای مخروطی دوار، با سطح مقطع مستطیلی متغیر بصورت خطی را به کمک روش DTM تحلیل کردند. ایشان مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد را برای نسبت‌های

<sup>12</sup> Naguleswaran

<sup>13</sup> Caruntu

<sup>14</sup> Elishakoff

<sup>15</sup> Johnson

<sup>16</sup> Jang

<sup>17</sup> Bert

<sup>18</sup> Mehmet Cem Ece

<sup>19</sup> Differential Transform Method

<sup>20</sup> Zhou

<sup>21</sup> Shing Huei Ho

<sup>22</sup> Cha'o Kuang Chen

<sup>23</sup> Ozdemir

<sup>24</sup> M.O. Kaya

<sup>1</sup> Cranch

<sup>2</sup> Adler

<sup>3</sup> Conway

<sup>4</sup> Dubil

<sup>5</sup> Heidebrecht

<sup>6</sup> Mabie

<sup>7</sup> Rogers

<sup>8</sup> Bailey

<sup>9</sup> Hamilton Principle

<sup>10</sup> Olhoff

<sup>11</sup> Parbery

شده، محدودیت روش DTM در تعیین فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های ارتعاشی این است که به ازای تعداد جملات ثابت سری، تعداد مشخصی از مودهای سیستم را ارائه می‌دهد. تعیین مودهای بالاتر، مستلزم افزایش تعداد جملات سری تیلور می‌باشد. مزیت بزرگ روش DTM سادگی و دقت آن در مقایسه با حل‌های دیگر موجود می‌باشد. از دیگر مزیت‌های با ارزش روش مذکور قابلیت اعمال بر روی سیستم‌های غیرخطی است که با استفاده از خواص آن می‌توان ترم‌های غیرخطی را ساده نمود. نتایج حل DTM با حل تحلیلی (بعنوان مطمئن‌ترین روش ارزیابی روش حل) با استفاده از جدول و گراف در بخش نتایج و بحث مورد مقایسه قرار گرفته است که نشان می‌دهد که این روش در محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیرهای با پهنای متغیر (بخصوص در مدهای پایین‌تر) دارای دقت قابل قبولی می‌باشد.

## ۲- معادلات حرکت

در تیرهای اولر- برنولی فرض می‌شود، خطوط صاف و عمود بر تار میانی، پس از تغییر شکل همچنان صاف و عمود باقی بمانند. بر این اساس، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی آن، به کمک اصل هامیلتون، بصورت زیر استخراج می‌گردد [۲۴]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

با فرض اینکه جنس تیر یکنواخت (مدول الاستیسیته ثابت) باشد، برای تیر با سطح مقطع متغیر داریم:

$$EI(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2EI'(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI''(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

جهت بی‌بعدسازی معادله فوق، پارامترهای بی‌بعدی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, I^* = \frac{I}{I_0}, w^* = \frac{w}{h_0}, A^* = \frac{A}{A_0}, \quad (3)$$

$$t^* = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}} t$$

که در آن  $t^*$  زمان بی‌بعد،  $x^*$  مختصه محوری بی‌بعد،  $A^*$  و  $I^*$  مساحت و ممان اینرسی بی‌بعد سطح مقطع،  $w^*$  جابجایی عرضی بی‌بعد،  $\rho$  دانسیته جرمی تیر،  $L$  طول تیر،  $w$

باریک‌شوندگی و سرعت‌های زاویه‌ای مختلف بدست آوردند. سوال کاتل<sup>۱</sup> [۱۹] معادله ارتعاشات آزاد یک تیر را که در یک یک انتها ثابت و در انتهای دیگر روی تکیه‌گاه ساده و کل تیر روی بستر الاستیک خاک قرار داشته و تحت بار محوری می‌باشد، با روش DTM حل نمود. میوج بالکایا<sup>۲</sup> [۲۰] و همکاران همکاران نیز روش DTM را در ارتعاشات تیر تیموشنکو و اولر- برنولی روی بستر الاستیک اعمال کردند. آی‌تک<sup>۳</sup> و آبراهیم<sup>۴</sup> [۲۱] ابتدا با استفاده از اصل هامیلتون معادله‌ی حاکم بر تیر سه لایه‌ای کامپوزیتی که لایه میانی آن از جنس ویسکوالاستیک می‌باشد را استخراج کردند و سپس برای اولین بار به کمک روش تبدیل دیفرانسیلی معادله حاکم را در حوزه‌ی فرکانسی حل نمودند. یوسف یسیلس<sup>۵</sup> و هیگمت<sup>۶</sup> [۲۲] ارتعاشات آزاد یک تیر ردی- بیکفورد<sup>۷</sup> با سطح مقطع متغیر بصورت پله‌ای روی بستر الاستیک خاک را به کمک روش DTM تحلیل کردند. در سال اخیر، غفوری و همکاران [۲۳] روش مذکور را برای بررسی نوسانات غیرخطی استفاده کردند.

در این مقاله با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات تیر اولر- برنولی با پهنای متغیر بدست آمده است. با تفکیک معادله مشتق جزئی حاکم بر سیستم، به دو معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان و مکان و حل معادله تابع مکان به کمک روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم برای ضرایب رشد مختلف تابع نمایی بدست آمده است. برای تیر مورد بررسی شرایط مرزی مختلفی بصورت ساده- ساده (SS)، دوسرگیردار (CC)، گیردار- ساده (CS)، آزاد- آزاد (FF)، گیردار- آزاد (CF) و ساده- آزاد (SF)، در نظر گرفته شده و فرکانس‌های طبیعی پنج مود اول برای هر کدام بدست آمده است. به کمک افزایش اندازه سری، مزایا و معایب استفاده از DTM در تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی شده است. با توجه به مطالعه پارامتریک انجام

<sup>1</sup> Seval Catal

<sup>2</sup> Müge Balkaya

<sup>3</sup> Aytac Arikoglu

<sup>4</sup> Ibrahim Ozkol

<sup>5</sup> Yusuf Yesilce

<sup>6</sup> Hikmet H. Catal

<sup>7</sup> Reddy-Bickford beam

$$F(x^*) = e^{-\frac{\delta x^*}{2}} (C_1 \cos(\mu_1 x^*) + C_2 \sin(\mu_1 x^*) + C_3 \cosh(\mu_2 x^*) + C_4 \sinh(\mu_2 x^*)) \quad (10)$$

که در آن:

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega - \delta^2}; \mu_2 = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega + \delta^2} \quad (11)$$

ضرایب  $C_i$  نیز با اعمال شرایط مرزی تعیین می‌شوند. شرایط مرزی و معادله فرکانس طبیعی برای هر حالت بصورت زیر بدست می‌آید:

الف- تیر با تکیه‌گاه‌های ساده (SS)

$$F(0) = 0, F''(0) = 0, F(1) = 0, F''(1) = 0 \quad (12)$$

$$4\delta^2 \mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) - 4\delta^2 \mu_1 \mu_2 + (8 - \omega^2) s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) = 0 \quad (13)$$

ب- تیر دوسرگیردار (CC)

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F(1) = 0, F'(1) = 0 \quad (14)$$

$$\delta^2 s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) - 4\mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) + 4\mu_1 \mu_2 = 0 \quad (15)$$

ج- تیر گیردار - ساده (CS)

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F(1) = 0, F''(1) = 0 \quad (16)$$

$$-4\delta \mu_1 \mu_2 - \delta^3 s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) - 4\omega \mu_1 c(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) + 4\omega \mu_2 s(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) + 4\delta \mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) = 0 \quad (17)$$

د- حالت دو سر آزاد (FF)

$$F''(0) = 0, F'''(0) = 0, F''(1) = 0, F'''(1) = 0 \quad (18)$$

$$\delta^2 s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) - 4\mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) + 4\mu_1 \mu_2 = 0 \quad (19)$$

ه- حالت یک‌سرگیردار (CF)

$$F(0) = 0, F'(0) = 0, F''(1) = 0, F'''(1) = 0. \quad (20)$$

$$4\delta \mu_2 s(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) + 4\delta \mu_1 c(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) - 4\mu_1 \mu_2 - 4\mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) - 3\delta^2 s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) = 0 \quad (21)$$

و- حالت ساده - آزاد (SF)

$$F(0) = 0, F''(0) = 0, F''(1) = 0, F'''(1) = 0 \quad (22)$$

$$-4\delta \mu_1 \mu_2 - \delta^3 s(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) - 4\omega \mu_1 c(\mu_1) \text{sh}(\mu_2) + 4\delta \mu_1 \mu_2 c(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) + 4\omega \mu_2 s(\mu_1) \text{ch}(\mu_2) = 0 \quad (23)$$

در معادلات فوق،  $s = \sin, c = \cos, \text{sh} = \sinh, \text{ch} = \cosh$ .

با حل معادله‌های فرکانسی فوق، فرکانس‌های طبیعی که همان ریشه‌های مثبت و حقیقی معادلات می‌باشند، بدست

جایابی عرضی،  $h_0$  پارامتر اختیاری و  $A_0$  و  $I_0$  مساحت و ممان اینرسی سطح مقطع در  $x=0$  می‌باشند.

بدین ترتیب معادله حاکم، در حالت بی‌بعد بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + 2 \frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} + \frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad (4)$$

علامت (') نشانه‌ی مشتق‌گیری نسبت به  $x$  می‌باشد.

### ۳- حل تحلیلی مسئله

برای حل معادله (۴)، با توجه به روش تفکیک متغیرها، پاسخ معادله بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w^*(x^*, t^*) = F(x^*)G(t^*) \quad (5)$$

در اینصورت معادله (۴)، به دو معادله‌ی - برحسب زمان و مکان- زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} F^{(4)} + 2 \frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} F''' + \frac{I^*(x^*)}{A^*(x^*)} F'' - \omega^2 F = 0 \quad (6)$$

$$G + \omega^2 G = 0 \quad (7)$$

که در آن  $\omega$  مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل یا همان فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد که با توجه به در نظر گرفتن پاسخ معروف  $G(t) = Ce^{i\omega t}$  برای معادله تابع زمان (۷) وارد معادلات می‌شود. برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی باید معادله تابع مکان (۶) را حل کرد. با فرض اینکه ضخامت ثابت و پهنای آن بصورت تابع نمایی با پارامتر غیریکنواختی (ضریب رشد)  $\delta$ ، در راستای طول تیر تغییر کند، برای مساحت و ممان اینرسی بی‌بعد سطح مقطع داریم:

$$A(x) = A_0 e^{\delta x} \Rightarrow A^*(x^*) = e^{\delta x^*} \quad (8)$$

$$I(x) = I_0 e^{\delta x} \Rightarrow I^*(x^*) = e^{\delta x^*}$$

با توجه به رابطه‌ی (۸)، معادله‌ی (۶) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$F^{(4)} + 2\delta F''' + \delta^2 F'' - \omega^2 F = 0 \quad (9)$$

هدف این مقاله بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم، به کمک حل معادله فوق به روش‌های DTM و تحلیلی است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

پاسخ تحلیلی معادله (۹) بصورت زیر می‌باشد [۱۳]:

$$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n} \rightarrow F(h) = \frac{(h+n)!}{h!} G(h+n) \quad (30)$$

$$f(x) = g(x)k(x) \rightarrow F(h) = \sum_{r=0}^h G(r)K(h-r) \quad (31)$$

$$f(x) = x^n \rightarrow F(h) = \delta(h-n) = \begin{cases} 1 & h=n \\ 0 & h \neq n \end{cases} \quad (32)$$

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x) \rightarrow F(h) = \sum_{h_1=0}^h \sum_{h_2=0}^{h_1} \dots \sum_{h_{n-1}=0}^{h_{n-2}} G_2(h_1) \times G_1(h_2-h_1) \dots \dots G_{n-1}(h_{n-1}-h_{n-2})G_n(h-h_{n-1}) \quad (33)$$

۵- حل مسئله به روش تبدیل ديفرانسیلی

با اعمال روابط تبدیل ديفرانسیلی بر معادله‌ی (۹):

$$(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)\bar{F}(h+4) + 2\delta(h+1)(h+2)(h+3)\bar{F}(h+3) + \delta^2(h+1)(h+2)\bar{F}(h+2) - \omega^2\bar{F}(h) = 0 \quad (34)$$

$\bar{F}(h)$  تابع تبدیل ديفرانسیلی تابع پاسخ مکانی  $F(x)$  می‌باشد.

با استفاده از رابطه (۳۴)، رابطه‌ی بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{F}(h+4) = \frac{1}{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)} \quad (35)$$

$$[\omega^2\bar{F}(h) - \delta^2(h+1)(h+2)\bar{F}(h+2) - 2\delta(h+1)(h+2)(h+3)\bar{F}(h+3)]$$

حال، رابطه بازگشتی فوق برای شرایط مرزی مختلف مطرح شده در بخش ۳، بصورت زیر تعیین می‌شوند:

الف- تیر با دو تکیه‌گاه ساده (SS): با توجه به اینکه در روش تبدیل ديفرانسیلی، فقط از شرایط اولیه در حل مسئله استفاده می‌شود، شرایط مرزی در نقطه‌ی  $x=1$  باید به شرایط اولیه متناظر شوند. یعنی  $F(1)=0$  و  $F(0)=a$  به  $\bar{F}(1)=0$  و  $\bar{F}(0)=b$  تبدیل می‌شوند. به عبارت دیگر، شرایط مرزی معلوم در نقطه  $x=1$  به شرایط اولیه مجهول در  $x=0$  تبدیل می‌شوند. بنابراین شرایط مرزی حالت SS، در فرم تبدیل ديفرانسیلی بصورت زیر در می‌آیند:

می‌آیند. حل این معادلات و استخراج فرکانس‌های طبیعی با استفاده از نرم‌افزار Maple به سادگی امکان پذیر است.

۴- روش تبدیل ديفرانسیلی [۱۴]

روش تبدیل ديفرانسیلی که یک روش نیمه تحلیلی می‌باشد، یک روش تکرار برای بدست آوردن ضرایب سری تیلور جواب می‌باشد و به سادگی در مسایل خطی و غیرخطی اعمال می‌شود و حجم محاسبات را به طرز قابل توجهی کاهش می‌دهد. با استفاده از این روش می‌توان، بدون نیاز به محاسبات اضافی، حل دقیقی از مسئله ارائه داد. همچنین روش تبدیل ديفرانسیلی ابزار مفیدی برای حل تحلیلی و عددی می‌باشد. در ادامه روابط مربوط به روش تبدیل ديفرانسیلی ارائه شده است.

$$F(h) = \frac{1}{h!} \left[ \frac{d^h f(x)}{dx^h} \right]_{x=0} \quad (24)$$

که در آن  $f(x)$  تابع اصلی،  $F(h)$  تبدیل ديفرانسیلی تابع و  $x=0$  نقطه‌ای که بسط سری تیلور تابع  $f(x)$  حول آن به دست آمده است. تبدیل معکوس ديفرانسیلی  $F(h)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} F(h)x^h \quad (25)$$

از (۲۴) و (۲۵) می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h!} \left[ \frac{d^h f(x)}{dx^h} \right]_{x=0} \quad (26)$$

برای استفاده از این روش، تعداد جملات سری تابع  $f(x)$  باید محدود شود. بنابراین:

$$f(x) \cong \sum_{h=0}^N F(h)x^h \quad (27)$$

که در آن  $N$  مشخص کننده‌ی تعداد جملات سری تیلور تابع  $f(x)$  است. با تغییر  $N$  دقت جواب مسئله قابل کنترل می‌باشد.

روابط تبدیل ديفرانسیلی به صورت زیر می‌باشند:

$$f(x) = g(x) \pm k(x) \rightarrow F(h) = G(h) \pm K(h) \quad (28)$$

$$f(x) = cg(x) \rightarrow F(h) = cG(h) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(0) = 0 \\ F'(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(1) = 0 \\ F(1) = 0 &\rightarrow F''(0) = a \rightarrow \bar{F}(2) = a \\ F''(1) = 0 &\rightarrow F'''(0) = b \rightarrow \bar{F}(3) = b \end{aligned} \quad (۴۰)$$

د- حالت دو سر آزاد (FF)

$$\begin{aligned} F''(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(2) = 0 \\ F'''(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(3) = 0 \\ F''(1) = 0 &\rightarrow F(0) = a \rightarrow \bar{F}(0) = a \\ F'''(1) = 0 &\rightarrow F'(0) = b \rightarrow \bar{F}(1) = b \end{aligned} \quad (۴۱)$$

ه- حالت گیردار-آزاد (CF)

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(0) = 0 \\ F'(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(1) = 0 \\ F''(1) = 0 &\rightarrow F''(0) = a \rightarrow \bar{F}(2) = a \\ F'''(1) = 0 &\rightarrow F'''(0) = b \rightarrow \bar{F}(3) = b \end{aligned} \quad (۴۲)$$

و- حالت ساده-آزاد (SF)

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(0) = 0 \\ F''(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(2) = 0 \\ F''(1) = 0 &\rightarrow F'(0) = a \rightarrow \bar{F}(1) = a \\ F'''(1) = 0 &\rightarrow F'''(0) = b \rightarrow \bar{F}(3) = b \end{aligned} \quad (۴۳)$$

مانند حالت (الف)، با استفاده از روابط (۳۹) تا (۴۳)، رابطه بازگشتی (۳۵) برای حالات (ب) تا (و) نیز بدست می‌آید. ادامه کار برای حالات فوق، دقیقاً مشابه حالت SS می‌باشد.

## ۶- نتایج و بحث

مقدار  $N$  بر دقت روش تبدیل دیفرانسیلی و زمان لازم جهت اجرای کد در محیط Matlab تأثیر به سزایی دارد. فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از محاسبات در حالت SS، برای شش مد فرکانسی اول مربوط به سه ضریب رشد مختلف  $\delta = 0, 1, 2$ ، در جدول (۱) آمده است. با توجه به این جدول، به ازای مقادیر مختلف  $\delta$ :

۱- با افزایش تعداد جملات سری تیلور انتخاب شده ( $N$ )، اولاً، مقادیر فرکانس‌های طبیعی به مقدار حل دقیق نزدیکتر می‌شود (البته اگر به ازای  $N$ های کوچکتر به مقدار دقیق نرسیده باشد)؛ ثانیاً، فرکانس طبیعی مربوط به مدهای بالاتر سیستم به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(0) = 0 \\ F(1) = 0 &\rightarrow F'(0) = a \rightarrow \bar{F}(1) = a \\ F''(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(2) = 0 \\ F''(1) = 0 &\rightarrow F'''(0) = 6b \rightarrow \bar{F}(3) = b \end{aligned} \quad (۳۶)$$

که در آن،  $a$  و  $b$  مجهول می‌باشند. با استفاده از روابط (۳۶) و معادله‌ی بازگشتی (۳۵)، می‌توان ضرایب  $\bar{F}(h)$  را تعیین کرد. با توجه به رابطه‌ی (۲۵) و شرایط مرزی معادله‌ی (۱۲)، دو معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F(1) = 0 \rightarrow \sum_{h=0}^N \bar{F}(h) = 0 \quad (۳۷-الف)$$

$$F''(1) = 0 \rightarrow \sum_{h=2}^N h(h-1)\bar{F}(h) = 0 \quad (۳۷-ب)$$

جهت تعیین مقادیر فرکانس طبیعی باید دو معادله فوق را بصورت همزمان حل کرد. این دو معادله را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳۸)$$

که در آن  $A$  و  $B$  به ترتیب ضرایب  $a$  و  $b$  در معادله (۳۷-الف) و  $C$  و  $D$  ضرایب متناظر در (۳۷-ب) می‌باشند. ذکر این نکته ضروری است که هر چهار عنصر ماتریس فوق ( $A, B, C, D$ )، تابعی از فرکانس طبیعی سیستم ( $\omega$ ) می‌باشند. این درایه‌ها با نوشتن کد در محیط Matlab بدست آمده‌اند. از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس، می‌توان فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرد. برای حل دترمینان و یافتن فرکانس‌های طبیعی نیز از نرم‌افزار Maple استفاده شده است.

مشابه حالت (الف)، شرایط مرزی در فرم تبدیل دیفرانسیلی برای حالات دیگر بصورت زیر به دست می‌آیند:

ب- حالت دوسرگیردار (CC)

$$\begin{aligned} F(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(0) = 0 \\ F'(0) = 0 &\rightarrow \bar{F}(1) = 0 \\ F(1) = 0 &\rightarrow F''(0) = a \rightarrow \bar{F}(2) = a \\ F'(1) = 0 &\rightarrow F'''(0) = b \rightarrow \bar{F}(3) = b \end{aligned} \quad (۳۹)$$

ج- تیر گیردار- ساده (CS)

جدول ۱- مقادیر فرکانس طبیعی مدهای مختلف برای تیر غیریکنواخت با تغییرات پهنای سطح مقطع بصورت نمایی، روی تکیه-

شماره مد $\delta$	فرکانس طبیعی	گاه ساده			
		DTM N=40 حل دقیق (Exact)	DTM N=30	DTM N=20	DTM N=10
۱	۹/۸۶۸۲۷	۹/۸۶۹۶۰	۹/۸۶۹۶۰	۹/۸۶۹۶۰	۹/۸۶۹۶۰
۲	-	۳۹/۴۷۸۴۲	۳۹/۴۷۸۴۱	۳۹/۴۷۸۴۱	۳۹/۴۷۷۹۳
۳	-	۸۸/۸۲۶۴۴	۸۸/۸۲۶۴۳	۸۸/۸۲۶۳۰	-
۴	-	۱۵۷/۹۱۳۶۷	۱۵۷/۹۱۳۶۳	۱۶۰/۶۸۱۵۲	-
۵	-	۲۴۶/۱۴۰۱۱	۲۴۷/۳۱۵۵۹	۱۸۱/۴۸۸۸۴	-
۶	-	۳۵۵/۳۰۵۷۶	۲۹۸/۶۴۱۳۳	-	-
۱	۹/۷۷۱۶۹	۹/۷۷۲۹۱	۹/۷۷۲۹۱	۹/۷۷۲۹۱	۹/۷۷۲۹۱
۲	-	۳۹/۵۷۰۳۷	۳۹/۵۷۰۳۶	۳۹/۵۷۰۳۶	۳۹/۵۷۱۲۷
۳	-	۸۸/۹۷۰۵۲	۸۸/۹۷۰۵۲	۸۸/۹۷۰۵۷	۸۶/۶۲۹۷۱
۴	-	۱۵۸/۰۸۴۱۹	۱۵۸/۰۸۴۲۲	۱۵۸/۰۱۴۹۳	۱۴۰/۶۴۵۰۳
۵	-	۲۴۶/۹۲۶۵۰	۲۴۶/۶۵۷۷۲	۲۰۷/۹۲۶۲۷	-
۶	-	۳۵۵/۵۰۲۷۴	۴۱۱/۹۶۰۷۱	-	-
۱	۹/۳۹۱۰۰	۹/۴۸۷۲۵	۹/۴۸۷۲۵	۹/۴۸۷۲۵	۹/۳۹۱۰۰
۲	۴۵/۲۱۸۴۷	۳۹/۸۵۲۳۲	۳۹/۸۵۲۳۱	۳۹/۸۵۲۳۱	۳۹/۸۶۳۲۵
۳	-	۸۹/۴۰۵۲۰	۸۹/۴۰۵۲۰	۸۸/۴۰۴۱۳	۷۷/۵۹۲۶۱
۴	-	۱۵۸/۵۹۶۸۹	۱۵۸/۵۹۷۲۰	۱۵۸/۰۷۰۰۶	-
۵	-	۲۴۷/۴۸۶۲۹	۲۴۴/۸۷۵۴۲	-	-
۶	-	۳۵۶/۰۹۴۰۵	-	-	-

غیریکنواختی مقایسه شده است. در این نمودارها،  $n$  شماره فرکانس مربوط به مدار تعاشی  $n$ ام می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، مدت زمان لازم جهت اجرای کد نوشته شده در محیط نرم‌افزار Matlab به شدت به تعداد جملات در نظر گرفته شده در بسط تیلور ( $N$ ) وابسته می‌باشد؛ از این رو، برای محاسبه مقادیر فرکانس طبیعی به کمک روش DTM در اکثر حالات، مقدار  $N=40$  فرض شده است. به جزء در مواردی که با در نظر گرفتن این تعداد جمله از بسط تیلور، فرکانس طبیعی برخی از مدها بدست نمی‌آمده است که برای آنها محاسبات با مقدار  $N=41,42$  انجام شد.

با توجه به شکل‌های ۱ تا ۶ نتایج زیر دریافت می‌شود:

۱- در هر شش حالت تکیه‌گاهی، برای مدهای ارتعاشی اول تا چهارم، فرکانس‌های طبیعی روش DTM تقریباً منطبق بر حل دقیق می‌باشد. با افزایش شماره مد، اختلاف بین دو حل بیشتر می‌شود، بطوریکه برای مد پنجم اختلاف محسوسی وجود دارد که این اختلاف در حالت‌های CC، CS،

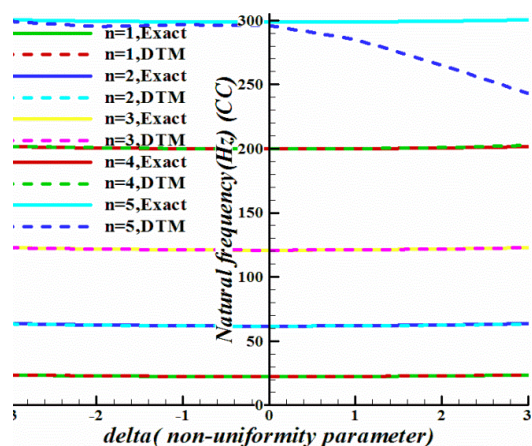
۲- برای هر مقدار خاص  $N$ ، فرکانس تعداد مد خاصی از سیستم را می‌توان به‌دست آورد، که این از محدودیت‌های روش DTM محسوب می‌شود. برای بدست آوردن فرکانس مدهای بالاتر، در بسط تیلور باید تعداد جملات بیشتری را در نظر گرفت.

۳- به ازای یک مقدار ثابت  $N$ ، در حالت کلی، قدر مطلق اختلاف فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش DTM با مقدار حل دقیق، با افزایش شماره مد، افزایش می‌یابد. برای بقیه حالات تکیه‌گاهی و ضرایب رشد دیگر، نتایج مشابه نتایج فوق به‌دست می‌آیند که به علت حجم بالای مطالب، از آوردن آن‌ها در این مقاله صرف‌نظر شده است.

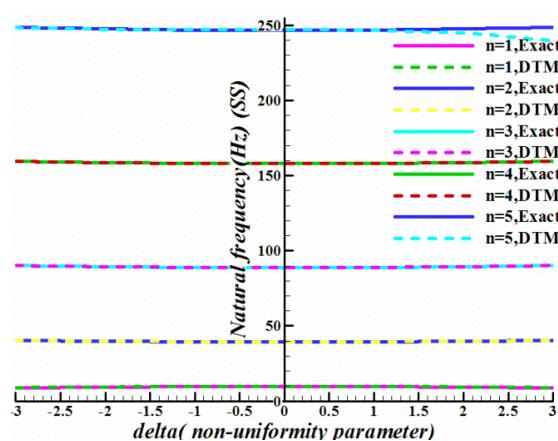
جهت نشان دادن دقت روش تبدیل دیفرانسیلی در محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر اولر- برنولی با پهنای متغیر، در شکل‌های ۱ تا ۶، فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده برای پنج مد اول فرکانسی در هر شش حالت تکیه‌گاهی، با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی، بر حسب مقادیر مختلف پارامتر

۳- فرکانس‌های طبیعی در حالت‌های CS و SF با هم برابر می‌باشند. (این مطلب با توجه به برابری معادلات فرکانسی مربوط به این دو حالت، قابل توجیه می‌باشد).  
 ۴- در حالت‌های CS، SF و CF، با افزایش مقدار جبری  $\delta$ ، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

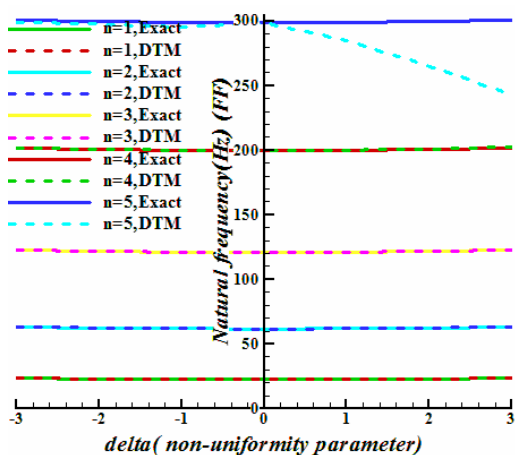
FF و SF بیشتر و در حالت‌های دیگر کمتر می‌باشد.  
 ۲- در مواردی که دو سر تیر شرایط تکیه‌گاهی مشابهی دارند (یعنی حالت‌های SS، CC و FF) فرکانس طبیعی مستقل از علامت  $\delta$  بوده و با افزایش قدرمطلق  $\delta$ ، مقدار آن افزایش می‌یابد.



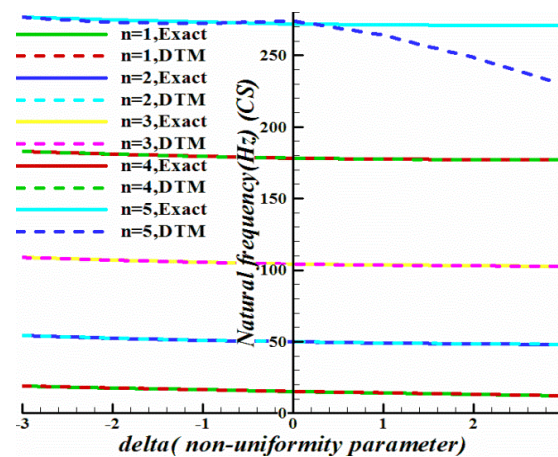
شکل ۲- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی برای حالت CC



شکل ۱- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی در حالت SS

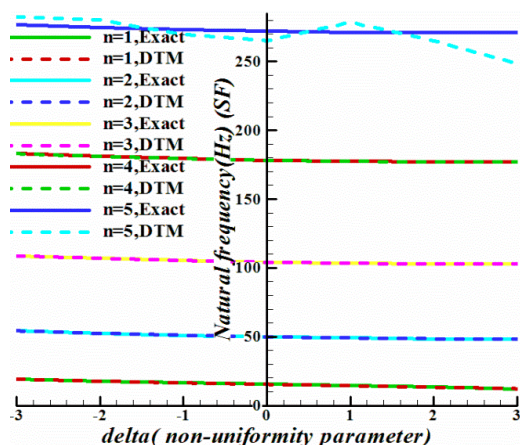


شکل ۴- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی برای حالت FF

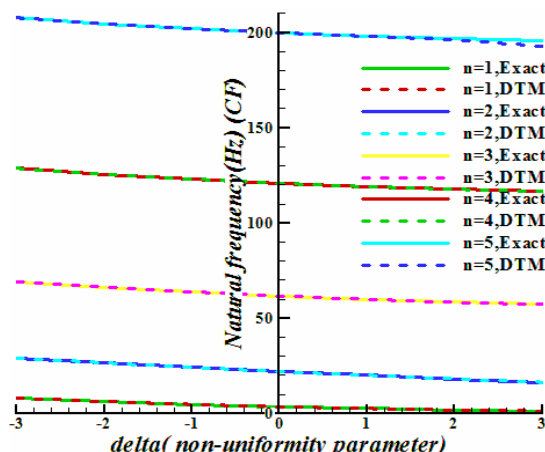


شکل ۳- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی برای حالت CS





شکل ۶- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی برای حالت SF



شکل ۵- مقایسه فرکانس طبیعی روش DTM و تحلیلی برای حالت CF

- [3] Conway HD, Dubil JF (1965) Vibration frequencies of truncated-cone and wedge beams. ASME J Appl Mech 32(4): 932-934.
- [4] Heidebrecht AC (1967) Vibration of non-uniform simply supported beams. J Eng Mech Division, Proc of the Am Soc of Civil Eng 93 (EM2): 1-15.
- [5] Mabie HH, Rogers CB (1972) Transverse vibration of double-tapered cantilever beams. J of the Acoust Soc of Am 51: 1771-1775.
- [6] Bailey CD (1978) Direct analytical solution to non-uniform beam problems. J Sound Vib 56 (4): 501-507.
- [7] Olhoff N, Parbery R (1984) Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies. Int J Sol and Str 20: 63-75.
- [8] Naguleswaran S (1992) Vibration of an Euler-Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth. J Sound Vib 153(3): 509-522.
- [9] Naguleswaran S (1994a) A direct solution for the transverse vibration of Euler-Bernoulli wedge and cone beams. J Sound Vib 172(3): 289-304.
- [10] Caruntu D (2000) On nonlinear vibration of non-uniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation. Sol Mech and its Appl 73. Kluwer Academic Pub, Dordrecht, Boston, London.
- [11] Elishakoff I, Johnson V (2005) Apparently the first closed-form solution of vibrating inhomogeneous beam with a tip mass. J Sound Vib 286(4-5): 1057-1066.
- [12] Jang SK, Bert CW (1989a) Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions. J Sound Vib 130: 342-346.

#### ۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

مقاله حاضر به تعیین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات تیر اولر-برنولی با پهنای متغیر بصورت نمایی با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی پرداخته است. پس از تفکیک معادله مشتق جزئی حاکم بر سیستم، با حل معادله مکانی سیستم به کمک روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم برای ضرایب رشد متفاوت تابع نمایی و شش شرط تکیه‌گاهی مختلف بدست آمده است. در نهایت، نتایج بدست آمده از دو روش، به کمک نمودارهای فرکانس طبیعی- پارامتر غیریکنواختی مورد مقایسه قرار گرفته است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد، روش تبدیل دیفرانسیلی در تخمین فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های ارتعاشی، بخصوص در مدهای ارتعاشی پایین، با حل تحلیلی انطباق تقریباً کاملی دارد. همچنین، برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی دقیق‌تر و همچنین فرکانس مدهای بالاتر، تعداد جملات بیشتری از سری مورد نیاز می‌باشد.

#### مراجع

- [1] Gorman DJ (1975) Free vibration analysis of beams and shafts. first edn. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Cranch ET, Adler AA (1956) Bending vibration of variable section beams. ASME J Appl Mech 23(1): 103-108.

- transform method. *Appl Math Model* 32: 1744–1757.
- [20] Balkaya M, Kaya MO, Ahmet S (2009) Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method. *Arch Appl Mech* 79: 135–146.
- [21] Aytac A, Ibrahim O (2010) Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method. *Composite Str* 92: 3031–3039.
- [22] Yesilce Y, Hikmet HC (2011) Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy–Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method. *Arch Appl Mech* 81(2): 199–213.
- [23] Ghafoori S, Motevalli M, Nejad MG, Shakeri F, Ganji DD, Jalaal M (2011) Efficiency of differential transformation method for nonlinear oscillation: Comparison with HPM and VIM. *Current Appl Physics* 11: 965–971.
- [24] Hagedorn P, DasGupta A (2007) *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. John Wiley & Sons, England.
- [13] Mehmet C E, Metin A, Vedat T (2007) Vibration of a variable cross-section beam. *Mech Research Communications* 34: 78–84.
- [14] Zhou JK (1986) *Differential transformation and its applications for Electrical Circuits*. Huazhong Uni Press, Wuhan, China.
- [15] Ho SH, Chen CK (1998) Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform. *Appl Math Model* 22: 219–234.
- [16] Ho SH, Chen CK (2006) Free transverse vibration of an axially loaded non-uniform spinning twisted Timoshenko beam using differential transform. *Int J Mech Sci* 48: 1323–1331.
- [17] Zeng H, Bert CW (2001) Vibration analysis of a tapered bar by differential transformation, *J Sound Vib* 242: 737–739.
- [18] Ozdemir O, Kaya MO (2006) Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli–Euler beam by differential transform method. *Journal of Sound and Vibration* 289: 661–670.
- [19] Catal S (2008) Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential