



تحلیل ارتعاشات غیر خطی میکروتیرهای اویلر- برنولی چرخان تحت بار با استفاده از نظریه گرادیان کرنش

سجاد اسماعیل پورهمدانی^۱ و مهدی حسینی^{۲*}

^۱ کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۱۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

چکیده

تحقیق روی ارتعاشات ریزفناوری‌ها به منظور بهبود عملکرد یا ساخت میکرو قطعات نوین از نیازهای مهم در صنعت است. در این مقاله تحلیل ارتعاشات غیر خطی میکروتیرهای اویلر-برنولی چرخان تحت بار با استفاده از نظریه گرادیان کرنش بررسی می‌شود. ابتدا با جایگذاری انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروی خارجی در اصل همپلتون، معادلات بی بعد حرکت حاصل می‌شود. سپس با اعمال روش گالرکین فرکانس‌های طبیعی استخراج می‌شود. پس از آن، از طریق مقایسه نتیجه تحلیل حاضر با نتیجه مرجعی دیگر، صحت و دقت تحلیل ارائه شده تایید می‌شود. در ادامه، پس از استخراج شکل مودها، تاثیر برخی پارامترهای مکانیکی و هندسی مهم همچون ضریب پواسون، نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، جنس، سرعت چرخش و پارامترهای اثر اندازه بر روی پاسخ ارتعاشی میکروتیر بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که بر اساس نظریه گرادیان کرنش، افزایش ضریب پواسون باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، در حالی که نظریه کوپل تنش اصلاح شده نمی‌تواند این تغییر را پیش‌بینی کند. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند برای توسعه میکرو فناوری‌ها، ارزشمند باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات؛ میکروتیرهای اویلر- برنولی؛ نظریه گرادیان کرنش.

Nonlinear Vibration Analysis of Micro Rotating Euler- Bernoulli Beams Subjected to Loading Based on the Strain Gradient Theory

S. Esmailpour Hamedani¹, M. Hosseini^{2,*}

¹Master, Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

² Assist. Prof., Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

Abstract

In order to improve the performance or manufacture of new micro-components, research on the vibrations of the micro-technologies is one of the most pressing needs in the industry. In this paper, the nonlinear vibration analysis of rotating Euler-Bernoulli microbeams subjected to loading is investigated using the strain gradient theory. Firstly, the non-dimensional equations of motion are obtained by insertion of the strain energy, the kinetic energy, and the work of the external force in Hamilton's Principle. Then, by applying Galerkin method, the natural frequencies are extracted. Then the validity and accuracy of the presented analysis is confirmed through comparison of the the present analysis result with the result of another reference. Next, after extracting the mode shapes, the effects of some important mechanical and geometrical parameters such as Poisson's ratio, thickness to material length scale parameter ratio, material, rotation speed and size effect parameters on the vibration response of the microbeam are investigated. The results reveal that based on the strain gradient theory, increase of the Poisson's ratio reduces the natural frequencies, while the modified couple stress theory can't do this prediction. The results of the present research can be valuable for development of micro-technologies.

Keywords: Vibrations; Euler-Bernoulli Micro Beams; Strain Gradient Theory.

۱- مقدمه

امروزه تحقیق و پژوهش روی ارتعاشات ایجاد شده در سازه‌ها، بسیار حائز اهمیت است. در سال‌های اخیر جذب انرژی ارتعاشی تیر تحت تحریک هارمونیک، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. به طور کلی محققان برای استحصال انرژی از سیستم‌های مکانیکی از سه شیوه الکترواستاتیک، الکترومگنتیک و پیزوالکتریک استفاده می‌کنند [۱]. عبدالمولا و همکاران [۲]، یک سیستم جدید الاستیک را که شامل یک تیر پیزوالکتریک است، تحت تحریک هارمونیک و نویز قرار دادند. آنها روش‌های مختلفی را برای کاهش ارتعاشات نامطلوب سیستم اصلی و افزایش توان استحصال شده به کار گرفتند. بیشتر این مدل سازی‌های ریاضی و به عبارتی استفاده از زبان ریاضی برای رفتار سیستم واقعی در طبیعت، برای فهم بهتر رفتار و ویژگی‌های سیستم است [۳]. کریمی و همکاران [۴]، به بررسی و تحلیل ارتعاشات و همچنین برداشت انرژی ارتعاشی با استفاده از مواد پیزوالکتریک، از پل تحت عبور جرم‌های مختلف پرداختند. در سال‌های اخیر بسیاری از پژوهشگران با استفاده از تئوری مرتبه بالا به مطالعه میکرو و نانو سازه‌های همراه با پیزوالکتریک پرداختند. نتایج حاصل شده در بسیاری از موارد از جمله فناوری MEMES حائز اهمیت است [۵، ۶].

اولین تحقیق روی میکرو سازه‌ها در اواخر سال ۱۹۵۰ توسط ریچارد فاینمن صورت گرفت و در ادامه اولین موتور الکتریکی با ابعاد کوچکتر از یک شصت و چهارم اینچ توسط ویلیام مک لیان ساخته شد [۷]. از آن پس به تدریج فواید فناوری میکرو در جهان قابل درک‌تر و وسیع‌تر شد. در سال ۱۹۶۱ اولین سنسور فشار سلیکونی به وجود آمد و در سال ۱۹۶۹ شرکت وستینگهاوس یک ترانزیستور اثر میدان تشدیدکننده را به وجود آورد [۸]. در سال ۱۹۷۰ اولین شتاب سنج سلیکونی شکل گرفت و در سال ۱۹۷۹ اولین نازل جوهر افشان میکرو ماشین اختراع شد [۹]. میکروتیرهای رزونانسی از اواسط ۱۹۸۰ میلادی به عنوان ترانسدوسرهای مکانیکی استفاده شدند [۱۰]. در سال ۱۹۹۰-۱۹۹۱ با حمایت آژانس پژوهش‌های تحقیقات پیشرفته دفاعی، دکتر لارسن اولین سوئیچ میکروالکترومکانیکی را ساخت که به طور خاص برای کاربردهای مایکروویو طراحی شده بود [۱۱]. هرچند این طرح قابلیت اطمینان کمی داشت، اما تا بازه

فرکانسی ۵۰ گیگا هرتز عملکرد عالی از خود نشان داد. با افزایش نیاز و تقاضا برای ابزارهای میکروالکترومکانیکی در کاربردهای ارتباط بیسیم، تقاضا برای فاکتورهای فرکانس بالا و معیار کیفی افزایش یافت تا اینکه در اواسط دهه نود رزوناتورهای میکروالکترومکانیکی به عنوان جایگزین‌های برای رزوناتورهای با اندازه بزرگ مطرح شد [۱۲].

برخی از پژوهشگران بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده به مطالعه میکرو و نانو سازه‌ها پرداخته‌اند [۱۳]. سلطان رضایی و همکاران [۱۴]، به مطالعه ناپایداری استاتیکی و دینامیکی کششی یک نانو تیر پرداختند. آنها در این تحقیق با مطالعه روی تاثیر پارامترهای هندسی نتایج مفیدی را ارائه نمودند. کنگ و همکاران [۱۵]، تئوری کوپل تنش اصلاح شده را جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی میکروتیرهای اولپر-برنولی استفاده کردند. ایشان با صرف نظر از اثرات اینرسی جرمی رابطه‌ای تحلیلی جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی میکروتیرها ارائه نمودند. شعبانی و همکاران [۱۶]، با استفاده از نظریه کوپل تنش اصلاح شده به بررسی ارتعاشات میکروتیر تحت نیروی الکترواستاتیک با رفتار تنش-کرنش انالاستیک پرداختند. الشتی و ابوالقاسمی [۱۷]، فرمولاسیونی برای مطالعه ارتعاشات میکروتیرها بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده ارائه نمودند. نتایج ایشان نشان دهنده بالاتر بودن مقدار پیش بینی شده برای فرکانس‌های طبیعی توسط تئوری مورد استفاده نسبت به تئوری کلاسیک بود. کی و وانگ [۱۸]، به مطالعه پایداری دینامیکی میکروتیرهای تیموشنکوی ساخته شده بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده پرداختند. آنها به بررسی تاثیر پارامترهای اثر اندازه ماده و نسبت طول به ضخامت روی ناپایداری دینامیکی این میکروتیرها پرداختند. دهرویه سمنانی و نیکخواه بهرامی [۱۹]، اثر ضریب پواسون بر سفتی خمشی میکروتیر مدل شده بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. قنبری و بابایی [۲۰]، بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده، به بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد تیر اولپر-برنولی یک سر گیردار با جرم انتهایی پرداختند. نتایج ایشان نشان داد که افزایش جرم انتهایی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می شود. سلطان رضایی و افراشی [۲۱]، با استفاده از نظریه کوپل تنش اصلاح شده به مدلسازی رفتار کششی غیر خطی یک نانو

بررسی نمودند. محمدی و محزون [۲۹]، به بررسی اثرات حرارت بر کماتش میکروتیرها بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها روابط فون-کارمن را جهت مرتبط نمودن کرنش و تغییر مکان مورد استفاده قرار داده و نشان دادند که تئوری گرادیان کرنش نسبت به تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک، بار کماتش بزرگتری را پیش بینی می نماید. انصاری و همکاران [۳۰]، به مطالعه ویژگی‌های ارتعاشی میکروتیرهای بر مبنای مدل ردی، از جنس مواد درجه بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها با استفاده از روش ناویر فرکانس‌های طبیعی میکروتیر دو سر ساده را محاسبه نمودند و اثرات ضخامت تیر، پارامتر اثر اندازه بدون بعد و نسبت رعنائی را روی فرکانس‌های طبیعی ارائه نمودند. کارلیچیچ و همکاران [۳۱]، به بررسی ارتعاشات آزاد خمشی و کماتش نانولوله‌های کربنی بر اساس تئوری‌های گرادیان تنش، کرنش و کرنش-اینرسی پرداختند. آنها نشان دادند که افزایش نسبت منطری، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و بار کماتش می‌شود. کریمی پور و همکاران [۳۲]، به بررسی ناپایداری نانوتیر دو سر درگیر مدل شده بر مبنای تئوری گرادیان کرنش پرداختند. ایشان از روابط کرنش-تغییر مکان فون کارمن برای به دست آوردن معادله حاکم بر تیر استفاده کردند و اثر نیروی واندروالس در معادلات حاکم را نیز در نظر گرفتند. نوروزی و همکاران [۳۳]، رفتار ارتعاشی سیستم روتور یاتاقان را تحت عیوب نابالانسی مورد مطالعه قرار دادند. آنها اثر اختلاف فاز جرمهای نابالانس بر دامنه پاسخ را نیز بررسی کردند. برخی دیگر از پژوهشگران نیز به بررسی ارتعاشات نانو سازه‌ها بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند [۳۴، ۳۵].

در پژوهش حاضر، تحلیل ارتعاشات غیر خطی میکروتیرهای اویلر-برنولی چرخان تحت بار با استفاده از نظریه گرادیان کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که سایر پژوهشگران بیشتر تمرکز خود را روی فرکانس طبیعی عرضی گذاشته و کمتر به بررسی فرکانس طبیعی طولی پرداخته‌اند که نقش مهمی در میکرو سازه‌های چرخان دارد، در حالی که در پژوهش حاضر، این مهم بررسی می‌شود؛ همچنین بر خلاف کارهای پیشین، در مدل تحلیلی حاضر، میکروتیر در معرض بارگذاری هارمونیک در نظر گرفته می‌شود. به علاوه، برای اولین بار جنس دو میکروتیر برای

سوئیچ دو طرفه پرداختند. آنها با استفاده از اصل هامیلتون معادلات را استخراج نمودند، سپس به کمک روش گالرکین آنها را حل کرده و تاثیر تغییر پارامترهای هندسی بر نانو سوئیچ را مطالعه کردند. کاظمی و همکاران [۲۲]، به بررسی ارتعاشات آزاد میکروورق همراه با لایه پیزوالکتریک پرداختند. آنها از نظریه غیر کلاسیک کوپل تنش اصلاح شده استفاده کردند.

تئوری گرادیان کرنش یکی دیگر از تئوری‌های مرتبه بالا است که جهت در نظر گرفتن اثرات مربوط به پارامتر اثر اندازه ماده، برای مدل نمودن تیرها در مقیاس میکرو و نانو، مورد استفاده قرار گرفته است. انصاری و همکاران [۲۳]، به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای تیموشنکوی از جنس مواد درجه بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها به بررسی اثرات پارامتر اثر اندازه بدون بعد و نسبت رعنائی روی فرکانس‌های طبیعی پرداختند. طادی و کریمی پور [۲۴]، به مطالعه ناپایداری استاتیکی یک نانوتیر یک سر گیردار و اثر اندازه تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و نیروهای بین مولکولی (نیروی کازمیر و واندروالس) بر مبنای تئوری گرادیان کرنش پرداختند. کنگ و همکاران [۲۵]، به تجزیه و تحلیلی استاتیکی و دینامیکی روی میکروتیرهای اویلر-برنولی بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. ایشان نشان دادند که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه ماده، اثرات اندازه قابل صرف نظر نمودن می‌شود. اصغری و همکاران [۲۶]، معادلات حاکم بر میکروتیرهای تیموشنکو با خیز بزرگ را بر پایه تئوری گرادیان کرنش ارائه نمودند و بر اساس آن به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد تیرهای دو سر ساده پرداختند. قایش و همکاران [۲۷]، به بررسی ارتعاشات اجباری غیر خطی میکروتیرها پرداختند. معادلات بر اساس تئوری گرادیان کرنش، با استفاده از روش گالرکین جداسازی و سپس به بررسی پاسخ فرکانسی سیستم پرداختند.

انصاری و همکاران [۲۸]، به بررسی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای خمیده از جنس مواد درجه بندی شده بر اساس تئوری گرادیان کرنش پرداختند. آنها با استفاده از مدل تغییر شکل برشی مرتبه اول در کنار اصل هامیلتون معادلات حرکت را بدست آورده و سپس اثرات درجه تغییرات ماده، پارامتر اثر اندازه و نسبت منطری را روی فرکانس‌های طبیعی

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 x_{ij}^s \quad (3-الف)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (3-ب)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (3-ج)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} \quad (3-د)$$

که در این روابط μ و λ همان ثوابت لامه و l_0 و l_1 و l_2 به ترتیب پارامترهای مستقل اثر اندازه طول مادی اضافی وابسته به گرادیان اتساع، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش می‌باشند؛ همچنین $x_{ij}^s, \gamma_i, \eta_{ijk}^{(1)}, \varepsilon_{ij}$ هم به ترتیب تانسور گرادیان چرخش متقارن، تانسور گرادیان کشش انحرافی، بردار گرادیان اتساع و تانسور کرنش است که به صورت روابط (۴) تعریف می‌شوند:

$$x_{ij}^s = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (4-الف)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15} [\delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) + \delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \quad (4-ب)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (4-ج)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4-د)$$

که در این روابط δ_{ij} بیانگر تانسور دلتای کرونیکر و در رابطه (۴-الف)، θ بیانگر بردار چرخش که عبارت است از:

$$\theta = \frac{1}{2} \nabla \times F \quad (5)$$

در رابطه (۵) پارامتر F بردار میدان تغییر مکان و اپراتور گرادیان است که در یکدیگر ضرب خارجی شده‌اند. با قرار دادن روابط (۱) در معادله (۴-د)، مولفه‌های تانسور کرنش به دست می‌آید. پس از جایگذاری، تمام مولفه‌های تانسور کرنش بجز ε_{11} برابر صفر می‌شود. در نهایت با در نظر گرفتن اثرات نیروی مرکزگرا از رابطه کرنش- تغییر مکان فون کارمن، ε_{11} به صورت رابطه (۶) بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (6)$$

لازم به ذکر است که به منظور خلاصه نویسی، ترم (x, t) حذف می‌شود. با در نظر گرفتن قانون هوک که به صورت رابطه (۷) است:

ساخت قطعه میکروالکترومکانیکی با حساسیت و بازده عملیاتی بالاتر بررسی و نتایج ارزشمندی ارائه می‌شود.

۲- فرمولاسیون تحلیلی

۱-۲- اصل همیلتون

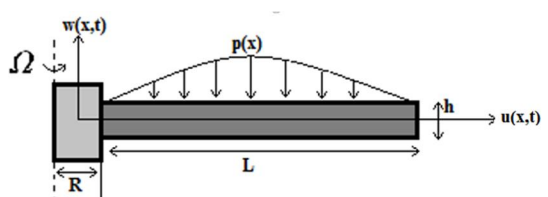
در شکل ۱ شماتیک یک میکروتیر اویلر-برنولی چرخان همراه با بار نشان داده می‌شود. این میکروتیر دارای طول L ، ضخامت h و پهنای b بوده و با سرعت Ω حول محور Z می‌چرخد. شعاع روتور آن نیز برابر R است. این سیستم توسط نیروی خارجی هارمونیک $P(X)$ تحت ارتعاش قرار دارد. محور x در امتداد طول تیر فرضی شود و محور Z هم عمود بر محور x در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای t و x به ترتیب پارامترهای اندازه گیری زمان و متغیر مکانی، نشان دهنده موقعیت مرکز هر سطح مقطع، نسبت به مرکز سطح مقطع متصل به روتور است.

با استفاده از تئوری اویلر-برنولی، میدان جابجایی به صورت روابط (۱) بیان می‌شود:

$$u_1 = u(x, t) - z \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \quad (1-الف)$$

$$u_2 = 0 \quad (1-ب)$$

$$u_3 = w(x, t) \quad (1-ج)$$



شکل ۱- شماتیک میکروتیر چرخان

که در این روابط u_1 و u_2 و u_3 به ترتیب جابجایی در راستای محور x ، y و z است. بر اساس نظریه گرادیان کرنش، انرژی کرنشی میکروتیر به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود [۲۹]:

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s x_{ij}^s) dV, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

که در این رابطه $m_{ij}^s, \tau_{ijk}^{(1)}, p_i, \sigma_{ij}$ به ترتیب تانسورهای تنش مراتب بالاتر و تنش کوشی می‌باشند که به صورت روابط (۳) بیان می‌شود.

$$c_3 = 2\mu I_y \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right)$$

$$c_4 = 2A\mu \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right)$$

$$E = 2\mu + \lambda \quad (۱۱)$$

در این روابط، A سطح مقطع و I_y ممان اینرسی سطح میکروتیر حول محور y است. انرژی جنبشی میکروتیر چرخان نیز به صورت (۱۲) بیان می‌شود [۳۶]:

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 + \Omega^2 (R + x + u_1)^2 \right) dV \quad (۱۲)$$

که در آن چگالی جرمی میکروتیر است. با ساده سازی و انتگرالگیری روی سطح مقطع میکروتیر، انرژی جنبشی به صورت (۱۳) بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left(J \Omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + J \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + m \Omega^2 (R + x + u)^2 \right) dx \quad (۱۳)$$

در آن، $m = \rho A$ جرم بر واحد طول و $J = \rho I_y$ ممان اینرسی جرمی میکروتیر است. کار نیروی خارجی به صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود:

$$W = \int_0^L p(x) w(x) dx \quad (۱۴)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۱۰)، (۱۳) و (۱۴) در اصل همیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (۱۵)$$

معادلات حرکت و شرایط مرزی میکروتیر چرخان به صورت روابط (۱۶) استخراج می‌شود. معادلات حرکت:

$$c_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + p(x) - c_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c_4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - J \Omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (۱۶-الف)$$

$$c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \Omega^2 (R + x + u) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۱۶-ب)$$

$$\sigma = E \varepsilon \quad (۷)$$

قسمت اول انرژی کرنشی محاسبه می‌شود. به همین ترتیب قسمت‌های بعدی انرژی کرنشی نیز قابل محاسبه است. لازم به ذکر است که در مورد قسمت سوم انرژی کرنشی یعنی $\tau_{ijk}^{(1)}$ و $\eta_{ijk}^{(1)}$ به تعداد بیست و هفت رابطه حاصل می‌شود که با روابط (۸) بیان می‌شود:

$$\eta_{112}^{(1)} = \eta_{121}^{(1)} = \eta_{123}^{(1)} = \eta_{132}^{(1)} = \eta_{213}^{(1)} = 0$$

$$\eta_{231}^{(1)} = \eta_{233}^{(1)} = \eta_{312}^{(1)} = \eta_{321}^{(1)} = \eta_{332}^{(1)} = 0$$

$$\eta_{222}^{(1)} = \eta_{211}^{(1)} = \eta_{323}^{(1)} = 0 \quad (۸-الف)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = -\frac{3}{15} \varepsilon_{11,1}$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \frac{4}{15} \varepsilon_{11,3}$$

$$\eta_{232}^{(1)} = \eta_{223}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = -\frac{1}{15} \varepsilon_{11,3}$$

$$\eta_{221}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = -\frac{3}{15} \varepsilon_{11,1}$$

$$\eta_{333}^{(1)} = -\frac{3}{15} \varepsilon_{11,3} \eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5} \varepsilon_{11,1}, \quad (۸-ب)$$

رای بدست آوردن ترم پایانی انرژی کرنشی یعنی m_{ij}^s و x_{ij}^s با جایگذاری مولفه‌های بردار تغییر مکان در رابطه (۵)، مولفه غیر صفر بردار چرخش به صورت رابطه (۹) بدست می‌آید:

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (۹)$$

در ادامه با جایگذاری تمام نتایج بدست آمده، مولفه‌های تانسور تنش کوشی و مولفه‌های مرتبه بالاتر تنش به دست می‌آید؛ بنابراین انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + c_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (۱۰)$$

که در این رابطه تغییر متغیرهای زیر استفاده شده است:

$$c_1 = EA, \quad c_2 = EI_y + A\mu \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right)$$

شرایط مرزی:

Clamped end:

$$w(x, t) = 0 \text{ and } EI \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0$$

Free end:

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \text{ and } EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = 0$$

(۱۶-ج)

لازم به ذکر است که با حذف پارامترهای اثر اندازه $(l_0 = l_1 = l_2 = 0)$ معادلات حاکم بر تیر چرخان اولبر - برنولی بر مبنای تئوری کلاسیک قابل استخراج است. به منظور بی بعد سازی معادلات حرکت، پارامترهای بی بعد زیر تعریف و مورد استفاده واقع می‌شوند:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{w} = \frac{w}{L}$$

$$\hat{u} = \frac{u}{L}, \quad \hat{p} = \frac{p}{\frac{c_1}{L}}$$

$$\lambda_R = \Omega \cdot T, \quad \beta_{210} = \frac{c_2}{L^2 c_1}$$

$$\alpha_{10} = \frac{c_4}{L^2 c_1}, \quad r = \frac{R}{L}, \quad \beta_{10} = \frac{c_3}{L^4 c_1}$$

$$T = L \sqrt{\frac{m}{c_1}}, \quad \eta = L \sqrt{\frac{m}{J}} \quad (17)$$

که در آن T مشخصه زمان جهت بی بعد سازی است. مولفه های جابجایی به صورت ترکیبی از جابجایی های استاتیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز و جابجایی های دینامیکی ناشی از ارتعاش در نظر گرفته می‌شود؛ همچنین شایان ذکر است که در تیرهای ایزوتروپیک با سطح مقطع متقارن، نیروی گریز از مرکز تنها منجر به جابجایی استاتیکی طولی می‌شود؛ بنابراین مولفه های جابجایی به صورت روابط $\hat{u} = \hat{u}_s(x) + \hat{u}_d(x, t)$ و $\hat{w} = \hat{w}_d(x, t)$ بیان می‌شود [۳۶]. با جایگذاری پارامترهای بی بعد، ساده سازی و همچنین حذف علامت (x) و (t) ، زیر نویس d و نماد $(\hat{\quad})$ به منظور خلاصه نویسی، در نهایت معادلات حرکت بی بعد زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} u'_s \right) + \beta_{10} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + LP(x) - \beta_{210} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & - \alpha_{10} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} u'''_s \right) - \frac{\lambda_R^2 \partial^2 w}{\eta^2 \partial x^2} \\ & = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (18-الف)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_{10} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \lambda_R^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (18-ب)$$

۲-۲- اعمال روش گالرکین

روش گالرکین یک روش باقی مانده وزنی خاص است که در آن همان توابع شکل به عنوان تابع وزنی استفاده می‌شود. جهت انجام روند مورد نیاز این روش ابتدا جابجایی ها به صورت معادلات (۱۹) و (۲۰) در نظر گرفته می‌شود. در این روابط ψ_j^w و ψ_j^u به ترتیب j امین مود نرمال خطی طولی میله غیر چرخان و مود نرمال خطی عرضی تیر اولبر-برنولی می‌باشند و q_j^w و q_j^u به ترتیب j امین مختصات عمومی طولی و عرضی می‌باشند:

$$w = \sum_{j=1}^n \psi_j^w(x) q_j^w(t) \quad (19)$$

$$u = \sum_{j=1}^n \psi_j^u(x) q_j^u(t) \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۰) در معادلات (۱۸-الف) و (۱۸-ب) و اعمال روش گالرکین معادلات جداسازی شده حرکت به صورت (۲۱) بدست می‌آید:

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = F \quad (21)$$

مقدار ماتریس سفتی k و ماتریس جرم M به صورت روابط (۲۲) و (۲۳) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} K(k, j) = & \int_0^1 \psi_k^w \left(\beta_{10} \frac{\partial^6 \psi_j^w}{\partial x^6} - \beta_{210} \frac{\partial^4 \psi_j^w}{\partial x^4} \right. \\ & - \alpha_{10} \frac{\partial}{\partial x} \left(u'''_s \frac{\partial \psi_j^w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u'_s \frac{\partial \psi_j^w}{\partial x} \right) \\ & \left. - \frac{\lambda_R^2 \partial^2 \psi_j^w}{\eta^2 \partial x^2} \right) dx, \\ k = & 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (22-الف)$$

$$\begin{aligned} M(k, j) = & - \int_0^1 \psi_k^w \left(\psi_j^w - \frac{1}{\eta^2} \psi_j^{w''} \right) dx, \\ k = & 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (22-ب)$$

$$\begin{aligned} K(k, j) = & \int_0^1 \psi_k^u \left(-\alpha_{10} \frac{\partial^4 \psi_j^u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \psi_j^u}{\partial x^2} + \lambda_R^2 \psi_j^u \right) dx, \\ j = & 1 + n, \dots, 2n, \quad k = 1 + n, \dots, 2n \end{aligned} \quad (23-الف)$$

$$\begin{aligned} M(k, j) = & - \int_0^1 \psi_k^u (\psi_j^u) dx \\ j = & 1 + n, \dots, 2n, \quad k = 1 + n, \dots, 2n \end{aligned} \quad (23-ب)$$

در ضمن، برای کار نیروی خارجی نیز می‌توان نوشت:

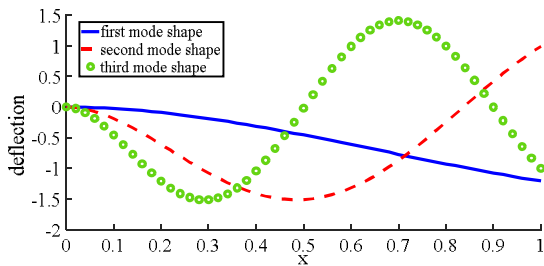
$$F = - \int_0^1 \psi_k^w (L \times p(x)) dx \quad (24)$$

پس از قرار دادن شرایط مرزی تیر یک سرگیردار در رابطه (۲۵) و ساده سازی، شکل مودهای طولی و عرضی به ترتیب به صورت روابط (۲۶) و (۲۷) بدست می آید:

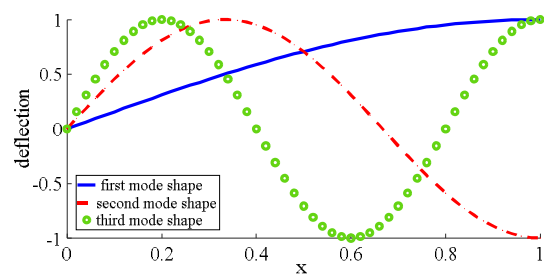
$$\psi_j^u(x) = \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} \quad i = 0, 1, 2 \dots n \quad (26)$$

$$\psi_j^w(x) = (\cos \beta_n x - \cos h\beta_n x) - \frac{\cos \beta_n l + \cos h\beta_n l}{\sin \beta_n l + \sin h\beta_n l} (\sin \beta_n x - \sin h\beta_n x) \quad (27)$$

سه شکل مود اول عرضی و سه شکل مود اول طولی به ترتیب در شکل های ۲ و ۳ نمایش داده می شوند.



شکل ۲- سه شکل مود اول عرضی میکروتیر



شکل ۳- سه شکل مود اول طولی میکروتیر

۳-۳- بررسی اثر ضریب پواسون روی فرکانس های طبیعی طولی

در این قسمت پس از انجام کار تحلیل، فرکانس های طبیعی طولی برای یک نوع میکروتیر چرخان بدست آمد و سپس در هر مرحله تنها با تغییر در مقدار ضریب پواسون، نتایج برای دو تئوری کوپل تنش اصلاح شده و گرادپان کرنش بدست آمدند که در شکل های (۴) و (۵) ارائه می شوند. در ضمن جهت انجام محاسبات مسئله، پارامترها مانند جدول ۳ در نظر گرفته شد.

در ادامه با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس های M و K فرکانس های طبیعی استخراج می شود.

۳- نتایج

۳-۱- صحت سنجی

برای صحت سنجی مسئله، نتایج حاضر با نتیجه مرجع [۳۷] اعتبار سنجی می شود که در آن تحلیل ارتعاشات عرضی یک میکروتیر اولر-برنولی چرخان بر اساس نظریه کوپل تنش اصلاح شده بدست آمده است. در این مسئله با فرض $\frac{l}{h} = 1$ ، $\frac{b}{h} = 2$ نسبت لاغری $L\sqrt{\frac{A}{I_y}} = 20$ و سرعت چرخش بدون بعد $\Omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I_y}} = 4$ مقدار فرکانس طبیعی عرضی اول بی بعد به صورت $\omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I_y}}$ بدست می آید که در آن ω فرکانس طبیعی با بعد است. در ضمن سایر خواص میکروتیر مطابق با جدول ۱ است. در جدول ۲ نتیجه تحلیل حاضر و نتیجه مرجع [۳۷] با هم مقایسه می شود. همانطور که مشاهده می شود، تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد که خود مبین صحت و دقت تحلیل حاضر است.

جدول ۱- خواص مکانیکی و هندسی میکروتیر چرخان [۳۷]

چگالی	$1220 \frac{Kg}{m^3}$
مدول یانگ	۱/۴ GPa
ضریب پواسون	۰/۳
پارامتر اثر اندازه	$17/6 \mu m$

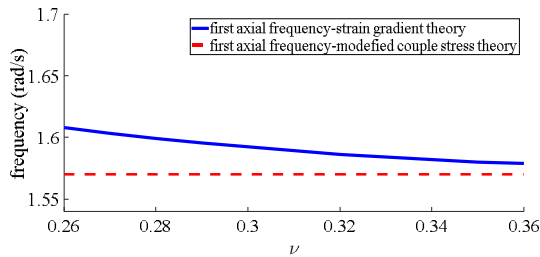
جدول ۲- مقایسه نتیجه حاضر با نتیجه مرجع [۳۷]

نتیجه تحلیل حاضر	نتیجه مرجع [۳۷]	درصد اختلاف	
فرکانس طبیعی عرضی اول بی بعد	۹/۳۷۷	۹/۳۳۱	۰/۴٪

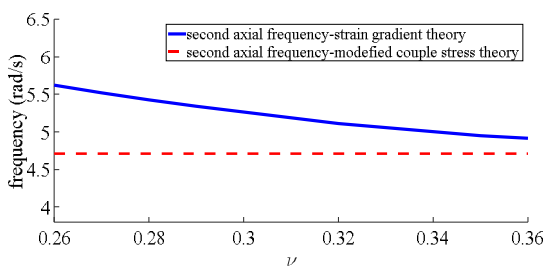
۳-۲- شکل مودهای طولی و عرضی

با در نظر گرفتن حل کلی معادله تیر به صورت رابطه (۲۵) شکل مودهای طولی و عرضی استخراج می شود [۳۸].

$$w(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x \quad (25)$$



شکل ۴- اولین فرکانس طبیعی طولی بر حسب ضریب پواسون



شکل ۵- دومین فرکانس طبیعی طولی بر حسب ضریب پواسون

۳-۴- بررسی تاثیر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه روی فرکانس‌های طبیعی طولی و عرضی

در این قسمت برای میکروتیر یک سرگردار اولبر- برنولی با خواص مندرج در جدول ۳، با تغییر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، فرکانس‌های طبیعی طولی و عرضی اول و دومبر اساس نظریه‌های کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش استخراج می‌شود و روند تغییر آنها با هم مقایسه می‌شود.

نخست نظریه کوپل تنش اصلاح شده با $l_0 = l_1 = 0$ و $l_2 = l$ بررسی می‌شود. در این مطالعه با وارد کردن پارامترها و در هر مرحله تنها با تغییر در نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، فرکانس‌های طبیعی طولی و عرضی اول و دوم تعیین می‌شود. نتایج بدست آمده در جداول ۴ و ۵ ارائه می‌شوند؛ همچنین، تحلیل بر اساس نظریه گرادیان کرنش با $l_0 = l_1 = l_2 = l$ نیز انجام می‌شود. نتایج حاصله در جداول ۶ و ۷ ارائه می‌شوند. با توجه به این جداول مشاهده می‌شود که تغییر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، هیچ گونه تاثیری بر فرکانس‌های طبیعی طولی ندارد، ولی فرکانس‌های طبیعی عرضی برای هر دو نظریه، با تغییر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه تغییر می‌کند. به این صورت که با افزایش

در نظریه کوپل تنش اصلاح شده $l_0 = l_1 = 0$ است و همانطور که مشاهده می‌شود، مطابق این نظریه، تغییر ضریب پواسون تاثیری روی فرکانس طبیعی طولی اول و دوم ندارد. این تئوری به دلیل در نظر گرفتن تنها یک پارامتر اثر اندازه یعنی l_2 ، قادر نیست تاثیر ضریب پواسون روی فرکانس طبیعی طولی میکروتیر را نشان دهد.

در تحلیل مسئله با نظریه گرادیان کرنش، با تغییر ضریب پواسون، فرکانس طبیعی طولی نیز تغییر می‌کند. همانطور که از نمودارها مشخص است، با افزایش مقدار ضریب پواسون، فرکانس طبیعی طولی کاهش می‌یابد که دلیل آن کاهش یافتن سفتی سازه است.

جدول ۳- خواص مکانیکی و هندسی میکروتیر [۳۹]

مقدار	کمیت	مقدار	کمیت
۱۵ μm	پارامتر اثر اندازه	۷۰ GPa	مدول یانگ
۱۰۱ μm	طول	$2700 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$	چگالی
$100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	سرعت چرخش میکروتیر	۰/۳۲	ضریب پواسون
۱۵ μm	ضخامت	۳۵/۲ μm	عرض

پیش بینی روند افزایش یا کاهش فرکانس طبیعی طولی مسئله بسیار مهم در طراحی میکروتیرها است که سازنده قطعه باید به آن دقت لازم را داشته باشد. نظریه گرادیان کرنش بر خلاف نظریه کوپل تنش اصلاح شده که تنها یک پارامتر اثر اندازه را در نظر می‌گیرد، می‌تواند سه پارامتر اثر اندازه را در محاسبات لحاظ می‌کند، به همین خاطر همانطور که نتایج نشان می‌دهند، قادر است که تاثیر ضریب پواسون روی فرکانس طبیعی طولی را آشکار سازد.

همانطور که مشاهده می‌شود، هرچه مقدار ضریب پواسون کمتر باشد، اختلاف فرکانس‌های طبیعی طولی بین دو تئوری گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده، بیشتر است. بیان این موضوع از آن جهت حائز اهمیت است که اگر طراح قصد دارد، میکروتیری با سفتی بیشتر طراحی کند، بهتر است از نظریه گرادیان کرنش استفاده کند؛ چرا که در مقدار ضریب پواسون کمتر، اختلاف نتایج دو تئوری بیشتر است.

جدول ۷- فرکانس‌های طبیعی طولی بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر اساس نظریه گرادیان کرنش

$\frac{h}{l}$	اولین فرکانس طبیعی طولی $\frac{rad}{s}$	دومین فرکانس طبیعی طولی $\frac{rad}{s}$
۰/۰۵, ۰/۵, ۱, ۲, ۳	۱/۵۹۰۲	۵/۲۱۳۴

۳-۵- مقایسه فرکانس‌های طبیعی برای انتخاب جنس میکروتیر

میکروتیرهای چرخان نقش سازه ای مهمی در بسیاری از سیستم های میکروالکترومکانیکی دارند. فرکانس طبیعی این میکروتیرها از آن جهت حائز اهمیت است که فرکانس طبیعی بالاتر، نقش مهمی در افزایش حساسیت و بازده عملیاتی تجهیزات میکروالکترومکانیکی دارد. در این بخش برای ساخت میکروتیر چرخان به مقایسه دو میکروتیر از جنس آلومینیوم و اپوکسی پرداخته شد. خواص این دو میکروتیر در جدول ۸ آمده است. در این مطالعه فرکانس طبیعی عرضی و طولی برای میکروتیر از جنس آلومینیوم و اپوکسی بدست آمده و برای مشاهده بهتر در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شد. نوع تئوری مورد استفاده هم گرادیان کرنش در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه حساسیت بالاتر قطعه یا در واقع فرکانس طبیعی بیشتر مطلوب است. در ضمن این دو میکروتیر با ابعاد هندسی یکسانی در نظر گرفته می‌شد. در شکل ۶، فرکانس طبیعی عرضی میکروتیر از دو جنس با هم مقایسه و به خوبی مشخص شد که اپوکسی فرکانس طبیعی

جدول ۸- خواص مکانیکی و هندسی میکروتیر چرخان [۳۹]

مقدار	کمیت
۱/۴ GPa	مدول ینگ اپوکسی
۰/۳	ضریب پواسون اپوکسی
$2700 \frac{Kg}{m^3}$	چگالی آلومینیوم
$1220 \frac{Kg}{m^3}$	چگالی اپوکسی
۱۷/۶ μm	پارامتر اثر اندازه اپوکسی
$100 \frac{rad}{s}$	سرعت چرخش

نسبت مذکور، فرکانس‌های طبیعی عرضی نیز افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش را می‌توان افزایش سفتی سازه دانست؛ همچنین همانطور که نتایج نشان می‌دهد، نظریه گرادیان کرنش فرکانس‌های طبیعی بزرگتری را نسبت به نظریه کوپل تنش اصلاح شده پیش بینی می‌کند.

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی عرضی بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر اساس نظریه کوپل تنش اصلاح شده

$\frac{h}{l}$	اولین فرکانس طبیعی عرضی $\frac{rad}{s}$	دومین فرکانس طبیعی عرضی $\frac{rad}{s}$
۰/۰۵	۰/۱۶۹۲	۱/۳۴۷۰
۰/۵	۰/۱۷۸۵	۱/۴۳۳۷
۱	۰/۲۰۵۷	۱/۶۷۶۰
۲	۰/۳۱۰۵	۲/۴۸۹۹
۳	۰/۵۲۹۹	۳/۶۰۹۲

جدول ۵- فرکانس‌های طبیعی طولی بر حسب نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر اساس نظریه کوپل تنش اصلاح شده

$\frac{h}{l}$	اولین فرکانس طبیعی طولی $\frac{rad}{s}$	دومین فرکانس طبیعی طولی $\frac{rad}{s}$
۰/۰۵, ۰/۵, ۱, ۲, ۳	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۴

جدول ۶- فرکانس‌های طبیعی عرضی برای تغییر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه بر اساس نظریه گرادیان کرنش

$\frac{h}{l}$	اولین فرکانس طبیعی عرضی $\frac{rad}{s}$	دومین فرکانس طبیعی عرضی $\frac{rad}{s}$
۰/۰۵	۰/۲۸۹۵	۲/۵۱۲۷
۰/۵	۰/۲۹۴۸	۲/۵۵۹۵
۱	۰/۳۱۱۶	۲/۷۰۰۵
۲	۰/۳۸۶۵	۳/۲۶۰۹
۳	۰/۵۶۸۴	۴/۱۶۹۸

هندسی و مکانیکی میکروتیر مطابق جدول ۳ است. نتایج برای فرکانس‌های طبیعی عرضی اول و دوم در جدول ۹ ارائه می‌شوند. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت چرخش میکروتیر، فرکانس‌های طبیعی عرضی اول و دوم افزایش می‌یابد که به دلیل بیشتر شدن سفتی عرضی کلی سازه در اثر افزایش سرعت چرخش است.

جدول ۹- تاثیر سرعت چرخش بر فرکانس‌های طبیعی

سرعت چرخش (rpm)	عرضی اول و دوم	
	فرکانس طبیعی عرضی اول (rad/s)	فرکانس طبیعی عرضی دوم (rad/s)
۱۰۰	۰/۳۱۱۶	۲/۷۰۰۵
۱۵۰	۰/۳۲۴۷	۲/۷۰۹۳
۲۰۰	۰/۳۴۲۲	۲/۷۲۱۴
۲۵۰	۰/۳۶۳۵	۲/۷۳۷۰
۳۰۰	۰/۳۸۸۰	۲/۷۵۵۹

۳-۷- تاثیر پارامترهای اثر اندازه بر فرکانس طبیعی عرضی

در این قسمت تاثیر تغییر پارامترهای غیر کلاسیک اثر اندازه l_2 ، l_1 و l_0 روی فرکانس طبیعی عرضی اول و دوم میکروتیر بررسی می‌شود. خواص میکروتیر مورد مطالعه در جدول ۳ داده شده است. نتایج بدست آمده برای پارامترهای l_2 ، l_1 و l_0 به ترتیب در جدول‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ ارائه می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، با کاهش هر یک از پارامترهای اثر اندازه مذکور، مقدار فرکانس طبیعی عرضی اول و دوم نیز کاهش می‌یابد.

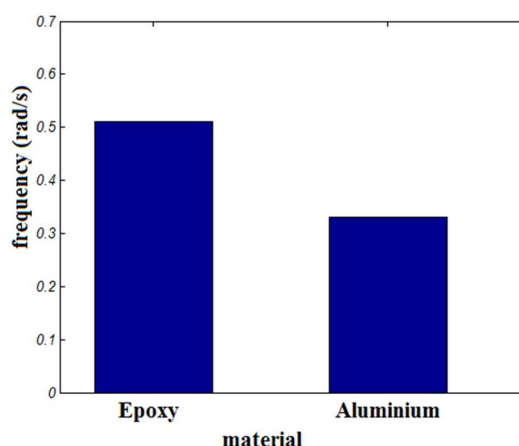
۴- نتیجه گیری

در این مقاله به تحلیل ارتعاشات غیر خطی میکروتیرهای اویلر-برنولی چرخان تحت بار بر اساس نظریه گرادبان کرنش پرداخته شد و به کمک روش گالرکین فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج گردید. سپس با مقایسه نتیجه تحلیل حاضر با نتیجه مرجعی دیگر، تحلیل ارائه شده صحت سنجی شد.

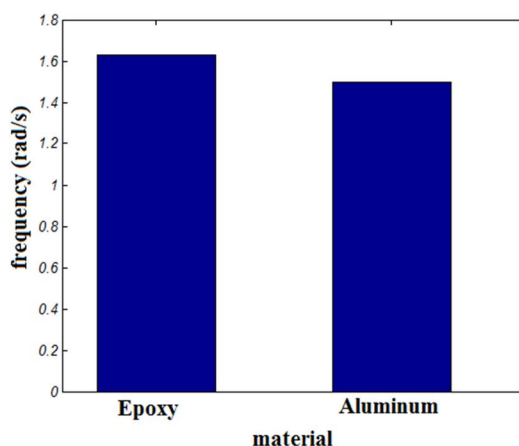
عرضی بیشتری نسبت به آلومینیوم دارد. در شکل ۷ نیز، مقایسه‌ای برای فرکانس طبیعی طولی آلومینیوم و اپوکسی صورت گرفت. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی طولی اپوکسی نیز بیشتر از آلومینیوم است. در تجهیزات پزشکی هم تمایل بر آن است که بیشتر از اپوکسی استفاده شود، چرا که خاصیت زیست سازگاری و قابلیت حرکت داخل مایع را نیز دارد.

۳-۶- تاثیر سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی عرضی

در این قسمت به بررسی تاثیر سرعت چرخش میکروتیر بر فرکانس طبیعی عرضی میکروتیر پرداخته می‌شود. خواص



شکل ۶- اولین فرکانس طبیعی عرضی میکروتیرهای از جنس اپوکسی و آلومینیوم



شکل ۷- اولین فرکانس طبیعی طولی میکروتیرهای از جنس اپوکسی و آلومینیوم

ضریب پواسون روی فرکانس‌های طولی را ارائه دهد. به این صورت که با افزایش ضریب پواسون، مقدار فرکانس‌های طبیعی طولی کاهش می‌یابد. در ضمن، بر اساس هر دو نظریه مورد بررسی، با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه، مقدار فرکانس طبیعی طولی ثابت و مقدار فرکانس طبیعی عرضی افزایش می‌یابد که دلیل آن، افزایش سفتی سازه است؛ همچنین، برای اولین بار به بررسی ارتعاشاتی دو میکروتیر از جنس آلومینیوم و اپوکسی پرداخته شد و مشخص گردید که میکروتیر از جنس اپوکسی جهت ساخت قطعه میکروالکترومکانیکی با حساسیت بالاتر مناسب‌تر است. در ادامه تاثیر سرعت چرخش روی فرکانس طبیعی عرضی میکروتیر بررسی و مشخص شد که با افزایش سرعت چرخش، میزان فرکانس طبیعی عرضی سازه نیز افزایش می‌یابد؛ یعنی افزایش سرعت روی رفتار خمشی سازه اثر سخت‌شوندگی دارد. در نهایت تاثیر پارامترهای اثر اندازه روی فرکانس طبیعی عرضی مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که کاهش پارامتر اثر اندازه، باعث نرم‌شوندگی سازه و در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی عرضی می‌شود.

۵- مراجع

- [1] Afsharfard A (2018) Application of nonlinear magnetic vibro-impact vibration suppressor and energy harvester. Mech Syst Signal Pr 98(Supplement C): 371-381.
- [2] Abdelmoula H, Dai HL, Abdelkefi A, Wang L (2017) Control of base-excited dynamical systems through piezoelectric energy harvesting absorber. Smart Mater STRUCT 26(9): 095013.
- [3] Homayoun Sadeghi SM, Lotfan S (2017) Nonparametric system identification of a cantilever beam model with local nonlinearity in the presence of artificial noise. Modares Mechanical Engineering 16(11): 177-186.
- [4] کریمی م، تیکنی رضا، ضیائی راد س (۱۳۹۵) برداشت انرژی از ارتعاشات پل تحت عبور جرم‌های متوالی با استفاده از مواد پیزوالکتریک. مهندسی مکانیک مدرس ۱۱۸-۱۰۸: ۱۶(۶).
- [5] Nikpourian A, Ghazavi MR, Azizi S (2019) Size-dependent secondary resonance of a piezoelectrically laminated bistable MEMS archResonator. Compos Part B-Eng 173: 106850.
- [6] Nikpourian A, Ghazavi MR, Azizi S (2019) Size-dependent nonlinear behavior of a piezoelectrically actuated capacitive bistable Microstructure. Int J Nonlin Mech 114: 49-61.

جدول ۱۰- فرکانس طبیعی عرضی اول و دوم بر حسب

پارامتر l_2		
l_2	فرکانس طبیعی عرضی اول rad/s	فرکانس طبیعی عرضی دوم rad/s
$16\mu m$	۱/۲۶۶۱	۳/۵۷۴۸
$15\mu m$	۱/۲۶۴۵	۳/۵۲۸۱
$14\mu m$	۱/۲۶۳۰	۳/۴۸۳۹
$13\mu m$	۱/۲۶۱۷	۳/۴۴۲۲

جدول ۱۱- فرکانس طبیعی عرضی اول و دوم بر حسب

پارامتر l_1		
l_1	فرکانس طبیعی عرضی اول rad/s	فرکانس طبیعی عرضی دوم rad/s
$16\mu m$	۱/۲۶۷۸	۳/۶۱۴۹
$15\mu m$	۱/۲۶۷۲	۳/۵۹۱۹
$14\mu m$	۱/۲۶۶۶	۳/۵۷۰۳
$13\mu m$	۱/۲۶۶۱	۳/۵۵۰۰

جدول ۱۲- فرکانس طبیعی عرضی اول و دوم بر حسب

پارامتر l_0		
l_0	فرکانس طبیعی عرضی اول rad/s	فرکانس طبیعی عرضی دوم rad/s
$16\mu m$	۱/۲۶۴۴	۳/۵۰۰۵
$15\mu m$	۱/۲۶۱۸	۳/۴۰۸۵
$14\mu m$	۱/۲۵۹۴	۳/۳۲۰۲
$13\mu m$	۱/۲۵۷۳	۳/۲۳۵۷

در ادامه پس از استخراج شکل مودهای طولی و عرضی، به مطالعه روی تاثیر تغییر ضریب پواسون بر فرکانس‌های طبیعی طولی و تاثیر تغییر نسبت ضخامت به پارامتر اثر اندازه روی فرکانس‌های طبیعی پرداخته شد. نتایج برای نظریه‌های گرادیان کرنش و کوپل تنش اصلاح شده با هم مقایسه گردید. نتایج نشان داد که نظریه گرادیان کرنش بر خلاف نظریه کوپل تنش اصلاح شده، می‌تواند تاثیر تغییر

- [20] Ghanbari A, Babaei A (2015) The new boundary condition effect on the free vibration analysis of micro-beams based on the modified couple stress theory. *International Research Journal of Applied and Basic Sciences* 9(3): 274-279.
- [21] SoltanRezaee M, Afrashi M (2016) Modeling the nonlinear Pull-in behavior of tunable nano-switches. *Int J Eng Sci* 109: 73-87.
- [۲۲] کاظمی آ، وطنخواه ر، فرید م (۱۳۹۶) ارتعاشات آزاد و جابه جایی استاتیکی میکروورق با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۳۴-۲۵: ۷(۴).
- [23] Ansari R, Gholami R, Sahmani S (2011) Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory. *Compos Struct* 94(1): 221-228.
- [۲۴] طادی بنی ی، کریمی پور ا (۱۳۹۱) آنالیز ناپایداری پولین برای نمزهای تیر شکل تحت نیروهای ملکولی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش. *مهندسی مکانیک مدرس* ۱۲(۳): ۳۷-۴۹.
- [25] Kong S, Zhou S, Nie Z, Wang K (2009) Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *Int J Eng Sci* 47(4): 487-498.
- [26] Asghari M, Kahrobaiyan MH, Nikfar M, Ahmadian MT (2012) A sizedependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory. *ACTA Mech* 223(6): 1233-1249.
- [27] Ghayesh M H, Amabili M, Farokhi H (2013) Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory. *INT J ENG SCI* 63(1): 52-60.
- [28] Ansari R, Gholami S (2013) Size-dependent vibration of functionally graded curved microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory. *Arch Appl Mech* 83(10): 1439-1449.
- [29] Mohammadi H, Mahzoon M (2014) Investigating thermal effects in nonlinear buckling analysis of micro beams using modified strain gradient theory. *IJST-T Mech Eng* 38(M2): 303-320.
- [30] Ansari R, Gholami R, Sahmani S (2015) Free vibration of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient reddy beam theory. *Int J Comput Meth Eng Sci Mech*, 15(5): 217-233.
- [31] Karlicic D, Kozic P, Pavlovic R, Mazaheri K (2015) Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and
- [7] Lyshevski SE (2002) MEMS and NEMS: Systems, devices and structures. CRC.Press, Boca Raton.
- [8] No SY, Hashimura A, Pourkamali S, Ayazi F (2002) Single-crystal silicon HARPSS capacitive resonators with submicron gap-spacing. *Solid-State Sensors, Actuator and Microsystems Workshop*, 281-284.
- [9] Piekarski B, DeVoe D, Dubey M, Kaul R, Conrad J (2001) Surface micromachined piezoelectric resonant beam filters. *Sensor Actuat A-Phys* 91(3): 313-320.
- [10] Elwenspoek SM, Wiegerink R, Wiegerink J (2001) Mechanical microsensors. Springer Science & Business Media.
- [11] Larson LE, Hackett RH, Melendes MA, Lohr RF (1991) Micromachined microwave actuator (MIMAC) technology-a new tuning approach for microwave integrated circuits. in *Proceeding of the Microwave and Millimeter-Wave Monolithic Circuits Symposium, Digest, IEEE, Boston, MA*, 27-30.
- [12] Clark JR, Bannon FD, Wong AC, Nguyen CTC (1997) Parallel-resonator HF micromechanical bandpass filters. in *Proceeding of International Solid State Sensors and Actuators Conference, (Transducers '97), IEEE, Chicago*, 1161-1164.
- [13] Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations. *SN Applied Sciences* 1(6): 547.
- [14] SoltanRezaee M, Farrokhabadi A, Ghazavi MR (2016) The influence of dispersion forces on the size-dependent pull-in instability of general cantilever nano-beams containing geometrical non-linearity. *Int J Mech Sci* 119: 114-124.
- [15] Kong S, Zhou S, Nie Z, Wang K (2008) The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams. *Int J Eng Sci* 46(5): 427-437.
- [16] Shabani R, Rezazadeh G, Gorgabad AV (2017) A Study on the nonlinear vibrations of electrostatically actuated micro beams with anelastictstress-strainbehavior. *Modares Mechanical Engineering* 17(6): 197-206.
- [17] Akbar Alashti R, Abolghasemi AH (2014) A size-dependent Bernoulli-Euler beam formulation based on a new model of couple stress theory. *IJE Transactions C: Aspects* 27(6): 951-960.
- [18] Ke LL, Wang YS (2011) Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. *Compos Struct* 93(2): 342-350.
- [19] Dehrouyeh-Semnani AM, Nikkiah-Bahrami M (2015) A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple stress theory. *Int J Eng Sci* 86(1): 20-25.

- [35] Esfahani S, Esmailzadeh Khadem S, Ebrahimi Mamaghani A (2019) Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and intermolecular interactions. *Int J Mech Mater Des* 15: 489-505.
- [36] Arvin H, Bakhtiari-Nejad F (2011) Non-linear modal analysis of a rotating beam. *Int J Nonlin Mech* 46: 877-897.
- [37] Dehrouyeh-Semnani A M (2015) The influence of size effect on flapwise vibration of rotating microbeams. *Int J Eng Sci* 94(1): 150-163.
- [38] Matsuo E, Yoshiki H, Nagashima T, Kato C (2002) Development of ultra micro gas turbines. *Technical Digest of Power MEMS, International Workshop on Power MEMS, Tsukuba, November 12-13, 36-39.*
- [39] Ansari R, Gholami R, Darabi MA (2012) A nonlinear Timoshenko beam formulation based on strain gradient theory. *J Mech Mater Struct* 7(2): 195-211.
- Huu-Tai formulations. *J Theor Appl Mech* 53(1): 217-233.
- [۳۲] کریمی پور ا، کریمی پور ا ر، طادی بنی ی (۱۳۹۴) تعیین ناپایداری کششی غیر خطی وابسته به اندازه برای نانو تیرهای دو سر درگیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش و روش پریشیدگی هوموتوپیی. *مهندسی مکانیک مدرس* ۱۵(۲): ۱۰۱-۱۱۲
- [۳۳] نوروزی ر، رفیعیان م، دلایلی ح (۱۳۹۶) بررسی رفتار ارتعاشی سیستم روتور-یاتاقان پیوسته تحت عیوب مختلف نابالانسی. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۷(۴): ۲۲۳-۲۳۷
- [34] Esfahani S, Esmailzadeh Khadem S, Ebrahimi Mamaghani A (2018) Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory. *Int J Mech Sci* 151: 508-522.