



مطالعه تشدیدهای غیرخطی اولیه و ثانویه نانوتیر بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی

حسین کارامد^۱، عطیه اندکشیده^{۲*} و ستار مالکی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

^۲ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۴

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیر غیرموضعی اوپلر-برنولی که دارای کاربرد در سیستم‌های نانو الکترومکانیکی است، با استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های زمانی چندگانه مطالعه می‌شود. معادله حاکم بر نانوتیر اوپلر-برنولی، با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی فون کارمن و براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش غیرموضعی با استفاده از اصل همپلنوتون استخراج می‌شود. در گام بعد با بکاربردن روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با شرایط مرزی دو انتها تکیه‌گاه ساده، به معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی با متغیر زمان کاهش پیدا می‌کند. در ادامه، معادله ارتعاشات غیرخطی واداشته، با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل می‌شود. پس از حل معادله غیرخطی اجباری، تشدیدهای اولیه و ثانویه نانوتیر غیرموضعی، مطالعه می‌شود. ناحیه جواب‌های قابل قبول برای تشدید ساب هارمونیک مشخص شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی و دامنه پاسخ برحسب دامنه تحریک، برای تشدیدهای اولیه، سوپر هارمونیک و ساب هارمونیک، به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلّی رسم می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانوتیر، یک ضرورت اساسی است. نتایج این مقاله می‌تواند جهت بهبود طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های نانو الکترو مکانیکی، مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی؛ نانوتیر؛ سیستم‌های نانو الکترو مکانیکی؛ ارتعاشات غیرخطی.

Study of Primary and Secondary Nonlinear Resonances of Nanobeam Based on Nonlocal Strain Gradient Theory

H. Karamad¹, A. Andakhshideh^{2*}, S. Maleki²

¹ M. Sc. Student, Mech Eng, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

² Assis Prof, Mech Eng, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

Abstract

In this paper, the nonlinear forced vibrations of nonlocal Euler-Bernoulli nanobeam that is utilized in nanoelectromechanical systems are studied using the analytical method of multiple time scales. Based on non-linear strain gradient elasticity theory, governing equation of Euler-Bernoulli nanobeam with von-karman geometric nonlinearity is derived using Hamilton principle. In the next step, using the Galerkin method, the partial differential governing equations for simply supported boundary conditions are reduced to time variable ordinary nonlinear differential equation. Subsequently, the nonlinear forced vibration equation is solved using a multiple time scalar method. After solving the nonlinear excited equation, primary and secondary resonances of nonlocal nanobeam are studied. The region of acceptable sub-harmonic responses is identified and for different values of nonlocal parameter, the frequency response curves and response amplitudes versus excitation amplitude is plotted in all resonances as primary, super-harmonic and sub-harmonic. These results show that using nonlocal strain gradient theory is a fundamental necessity for analyzing nonlinear vibration of nanobeams. The results of this paper can be used to improve the design and optimization of nanoelectromechanical systems.

Keywords: Nonlocal Strain Gradient Theory; Nanobeam; Nanoelectromechanical Systems; Nonlinear Vibrations.

۱- مقدمه

مدلسازی ریاضی و تحلیل رفتار دینامیکی سیستم‌های میکرو/نانوالکترومکانیکی که در مقیاس میکرون و نانو هستند، از مباحث پر اهمیت در پژوهش‌های مهندسی است. این سیستم‌ها در کاربردهای وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند که می‌توان به عملگرها با تحریک الکترواستاتیکی [۱-۳]، شتاب سنج‌ها [۴]، میکروسکوپ اتمی [۵] و سنسورها [۶] اشاره نمود.

یکی از اجزای کلیدی سیستم‌های نانووالکترومکانیکی، نانوتیرها هستند. نانوتیرها در حوزه‌هایی مانند علم مواد [۷]، الکترونیک [۸] و تصویربرداری پرتو ایکس [۹]، دارای کاربردهای ویژه‌ای هستند. نانوتیر سیلیکونی (شکل ۱)، یکی از نانوسازه‌ها پر کاربرد است که در پژوهش‌های بسیاری مطالعه شده است [۸، ۱۰، ۱۱]. لیو و همکاران [۸]، تکنولوژی ساخت و کاربرد نانوتیر سیلیکونی در الکترونیک را بررسی نمودند. پیترز و تیچم [۱۰]، فرایند تولید و کاربرد نانوتیر سیلیکون دی‌اکسید در سیستم‌های نانووالکترومکانیکی نوری را مطالعه کردند (شکل ۱). آشاک و همکاران [۱۱]، ارتعاشات نانوتیر سیلیکون دی‌اکسید را به صورت آزمایشگاهی مطالعه و پاسخ فرکانسی و ضریب کیفیت این نانوتیر را بدست آوردند. در پژوهش حاضر نیز، به شناسایی ارتعاشات غیرخطی نانوتیر سیلیکون دی‌اکسید پرداخته می‌شود که یکی از نیازهای بنیادی پیش از طراحی و تولید آن‌ها است.

با توجه به دشواری انجام آزمایش و اندازه‌گیری دقیق آزمایشگاهی در ابعاد میکرو و نانو و همچنین، هزینه محاسباتی بسیار بالای شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، مدل‌سازی محیط پیوسته نانوسازه‌ها، مورد علاقه محققان است [۱۲]. با عنایت به اینکه در ابعاد میکرو و نانو، اثرات غیرمحمولی و تغییر شکل‌های مرتبه بالا متناسب با کوچک شدن ابعاد اهمیت بیشتری می‌یابد، لذا ابعاد در رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها بسیار مهم است. به این جهت، تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته مورد بازنگری قرار گرفته و تاثیر ویژه ابعاد میکرو و نانو نیز مدل‌سازی می‌شود. تئوری‌های غیرکلاسیک متعددی تاکنون ارائه شده است و هر کدام از این تئوری‌ها، ویژگی‌ها و مؤلفه‌های تغییر شکل مختلفی دارند که نیاز به معرفی و ارائه دارد.

از جمله تئوری‌های پرکاربرد الاستیسیته غیرکلاسیک برای مطالعه رفتار نانوتیرها، تئوری غیرموضعی ارینگن [۱۳] است. در تئوری غیرموضعی ارینگن بر خلاف الاستیسیته کلاسیک، تنش در هر نقطه از محیط پیوسته، وابسته به کرنش در تمامی نقاط محیط است [۱۳]. این تئوری در مقالات متعددی جهت تحلیل نانوتیرها استفاده شده است که در ادامه به بخشی از این مقالات اشاره می‌شود.

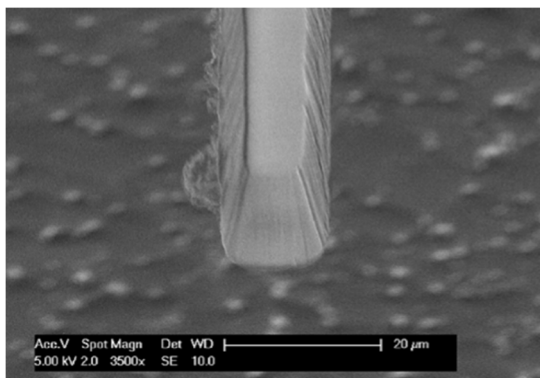
ردی [۱۴] مدل‌های مختلف تیر شامل، اوپلر-برنولی، ردی و تیموشنکو را براساس الاستیسیته غیرموضعی ارینگن فرمول‌بندی نمود و با حل تحلیلی معادلات حاصل، تاثیر قابل توجه پارامتر غیرموضعی در خمش کمانش و ارتعاشات تیرها در ابعاد نانو را نشان داد [۱۴]. وانگ و لوی [۱۵]، تاثیر ابعاد در مقیاس نانو را در تغییر شکل استاتیکی نانوتیر غیرموضعی اوپلر-برنولی مطالعه کردند. وانگ و لی [۱۶]، تشدید اولیه نانوتیر غیرموضعی تحت نیروی محوری را بررسی کردند. گلمکانی و رضاطلب [۱۷]، رفتار خمشی صفحات مستطیلی را بر پایه تئوری غیرموضعی مطالعه کردند. در این پژوهش از دو رهیافت عددی شامل، تفاضلات محدود و دیفرانسیل مربعات گسسته سازی استفاده شد و نتیجه‌گیری نمودند که اثر غیرموضعی در خمش نانوصفحات اهمیت بالایی دارد [۱۷]. ملکی و همکاران [۲]، نانوتشدیدگر را براساس تئوری غیرموضعی مدل‌سازی کرده است و پاسخ فرکانسی آن را برای ابعاد مختلف نانوتیر رسم نموده و اثر اندازه را مورد مطالعه قرار دادند [۲].

در کنار تئوری غیرموضعی، تئوری‌های غیرکلاسیک مرتبه بالا^۱ مانند تئوری تنش کوپل [۱۸] و تئوری گرادیان کرنش [۱۹] نیز برای مطالعه نانوسازه‌ها به کار می‌روند [۲۰-۲۲]. اندخشیده و همکاران [۲۰]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری میکروتیر با مقطع غیریکنواخت را براساس تئوری تنش کوپل تحلیل نمودند. قربانپور و همکاران [۲۱]، کمانش نانوتیر ردی از جنس پیزوالکتریک را بر پایه تئوری مرتبه بالا گرادیان کرنش مطالعه کردند. علی نقی زاده و همکاران [۲۲]، خمش میکرو صفحه قطاعی در بارگذاری گسترده عرضی را بر اساس تئوری مرتبه بالا تنش کوپل اصلاح شده مطالعه و اثر چشمگیر پارامتر مقیاس اندازه در خمش میکرو

^۱ Higher-Order Theories

گرادیان کرنش غیرموضعی تا کنون بررسی نشده است؛ لذا با عنایت به خلأ موجود در پژوهش‌های اخیر، در این مقاله، دینامیک اجباری نانوتیر غیرخطی براساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی تحلیل می‌شود.

در مقاله حاضر، معادلات حاکم بر نانوتیر سیلیکونی در الاستیسیته گرادیان کرنش غیرموضعی، با استفاده از اصل همیلتون و برپایه تئوری تیر اویلر-برنولی همراه با غیرخطی هندسی فون کارمن استخراج می‌شود. جهت مدل‌سازی تغییر شکل‌های مرتبه بالا از دو تابع کرنل^۱ در مدل غیرموضعی استفاده می‌شود و مدل غیرموضعی برای میدان کرنش غیرکلاسیک مرتبه بالا بدست می‌آید. در این مدل-سازی میدان تنش نه تنها به صورت میدان تنش غیرموضعی است، بلکه یک میدان تنش ناشی از گرادیان کرنش نیز محسوب می‌شود. در ادامه، با بکارگیری روش مقیاس‌های زمانی چندگانه [۲۸]، معادله غیرخطی اجباری حاکم حل شده و اثر کوچک شدن ابعاد در مقیاس نانو را در منحنی‌های پاسخ فرکانسی و دامنه پاسخ برحسب دامنه تحریک، برای تشدیدهای اولیه، سوپر هارمونیک و ساب هارمونیک نانوتیر سیلیکونی مطالعه و تحلیل می‌شود. با توجه به در نظر گرفتن تغییر شکل‌های مرتبه بالا و اثرات غیرموضعی به طور همزمان، نتایج بدست آمده با دقتی مطلوب‌تر نسبت به نتایج هرکدام از تئوری‌های غیرمحلی [۱۳] و گرادیان کرنش [۱۹] به صورت منفرد خواهد بود.



شکل ۱- تصویر میکروسکوپ الکترونی از نانوتیر سیلیکون دی اکسید ارائه شده در مرجع [۱۰]

صفحه قطاعی از جنس مواد تابعی مدرج را نشان دادند. حسینی هاشمی و همکاران، [۲۳] ارتعاشات آزاد نانو پوسته کروی را برپایه تئوری تنش کوپل اصلاح شده مورد مطالعه عددی قرار دادند و اثر قابل توجه پارامتر مقیاس اندازه در فرکانس طبیعی نانو پوسته کروی را مشاهده و نتایج عددی بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند.

ترکیب تئوری غیرموضعی و تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش، توسط لیم و همکاران ارائه شد [۲۴]. این تئوری که با عنوان تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی شناخته می‌شود، در مقالات متعددی مورد استفاده قرار گرفته است [۲۵-۲۷]. لو و ژائو [۲۵]، تئوری‌های مختلف تیر را بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی مدل‌سازی نمودند و با استفاده از حل ناویر، اثر ابعاد در ارتعاشات نانوتیرهای مختلف را براساس مدل گرادیان کرنش غیرموضعی مطالعه نمودند. در پژوهشی دیگر، لیم و همکاران، ارتعاشات غیرخطی نانوتیر ساندویچ و ناکامل هندسی را براساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی مطالعه کردند [۲۶]. شایان به ذکر است که این نانوتیر را از جنس مواد تابعی مدرج مدل‌سازی نمودند. ابراهیمی و براتی [۲۷]، اثر دما و رطوبت را بر خصوصیات دینامیکی نانوتیر تابعی مدرج قرار گرفته بر بستر ویسکو الاستیک وینکلر-پسترناک مطالعه و اثر چشمگیر پارامتر مقیاس طول در تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی بر ضریب میرایی بحرانی را مشاهده نمودند.

همانطور که پیش‌تر اشاره گردید، در رفتار دینامیکی تیرها با ابعاد نانو، اثرات غیرموضعی و همچنین تغییر شکل‌های مرتبه بالا، هر دو اهمیت ویژه‌ای دارد. این درحالی است که در پژوهش‌های انجام شده بر پایه تئوری غیرمحلی، تنها اثرات غیرموضعی [۲، ۱۴-۱۶] و در پژوهش‌های انجام شده بر پایه تئوری تنش کوپل و تئوری گرادیان کرنش [۲۰-۲۲]، تنها تغییر شکل‌های مرتبه بالا مدل‌سازی شده است؛ ولی در تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی، اثرات غیرموضعی و تغییر شکل‌های مرتبه بالا به طور همزمان مدل‌سازی شده و نسبت به سایر تئوری‌ها، بیشترین همخوانی را با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد [۲۴]. به همین جهت، این تئوری در مقالات اخیر مورد توجه محققان است [۱۲، ۲۵-۲۷]؛ اما در تحقیقاتی که تاکنون انجام شده است، مطالعه ارتعاشات اجباری نانوتیر غیرخطی برپایه تئوری

^۱ Nonlocal Kernel Function

۲- معادلات حاکم

در مقابل تئوری الاستیسیته کلاسیک، در تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی، تنش در هر نقطه مرجع مانند x ، تنها وابسته به کرنش در همان نقطه نیست، بلکه وابسته به کرنش در تمام نقاط جسم است [۱۳]، بنابراین تنش در نقطه x می‌تواند به صورت رابطه (۱) نوشته شود [۸]:

$$U_0(\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \alpha_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \int_V \alpha_0(|x-x'|, e_0 a) \varepsilon'_{kl}(x') dx' dV'(x') \quad (1)$$

در این رابطه x نقطه مرجع در دامنه V ، ε_{ij} و ε'_{ij} به ترتیب تانسورهای مرتبه دوم کرنش در نقطه x و کرنش در نقطه x' هستند.

C_{ijkl} ، تانسور ثابت‌های الاستیسیته، $\alpha_0(|x-x'|, \gamma)$ مدول غیرموضعی یا تابع کرنل که وابسته به نانو پارامتر $e_0 a$ و فاصله اقلیدسی $|x-x'|$ است. نانو پارامتر $e_0 a$ معمولاً به صورت $e_0 a/L$ در نظر گرفته می‌شود که در آن a ، طول پیوند بین دو اتم است که مشخصه داخلی نامگذاری می‌شود، L طول مشخصه خارجی (طول کل میدان) و e_0 یک ثابت غیرکلاسیک مشخص برای هر ماده است. پارامتر غیرموضعی $e_0 a/L$ اثر کوچک بودن ابعاد در رفتار نانوسازه را مشخص می‌کند.

مدل غیرموضعی ارائه شده در رابطه (۱)، مدل غیرموضعی برای میدان کرنش کلاسیک ε_{ij} است. در این پژوهش، مدل غیرموضعی برای میدان کرنش غیرکلاسیک مرتبه بالا $\varepsilon_{ij,m}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع چگالی انرژی پتانسیل تغییر شکل مرتبط با این تئوری به فرم رابطه (۲) خواهد بود [۲۴].

$$U_0(\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \alpha_0; \varepsilon_{ij,m}, \varepsilon'_{ij,m}, \alpha_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \int_V \alpha_0(|x-x'|, e_0 a) \varepsilon'_{kl}(x') dV'(x') + \frac{l^2}{2} \varepsilon_{ij,m} C_{ijkl} \int_V \alpha_1(|x-x'|, e_1 a) \varepsilon'_{kl,m}(x') dV'(x') \quad (2)$$

در این رابطه، پارامتر مقیاس اندازه، l یک ثابت غیرکلاسیک ماده است و اهمیت تغییر شکل مرتبه بالا در میدان گرادیان

کرنش را تعیین می‌کند؛ همچنین، $\alpha_1(|x-x'|, e_1 a)$ ، مدول غیرموضعی یا تابع کرنل افزوده است که برای توصیف اثر غیرموضعی در میدان گرادیان کرنش، معرفی گردیده است و e_1 ثابت مشخص مربوطه برای هر ماده است.

رابطه ساختاری در تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی را می‌توان با تقریب به صورت معادله دیفرانسیل نوشت، این معادله دیفرانسیل با فرض $e_0 = e_1 = e$ ، به فرم رابطه (۳) است:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) t_{xx} = E(1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xx} \quad (3)$$

بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی، میدان تنش، t_{xx} ، به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$t_{xx} = \sigma_{xx} - \nabla \sigma_{xx}^h \quad (4)$$

در این رابطه، σ_{xx} تنش غیرموضعی کلاسیک و σ_{xx}^h تنش غیرموضعی مرتبه بالا است، این تنش‌ها را می‌توان به صورت روابط (۵-۶) نوشت [۲۴]:

$$\sigma_{xx} = \int_A E \alpha_0(x, x', e_0 a) \varepsilon'_{xx}(x') dx' \quad (5)$$

$$\sigma_{xx}^h = l^2 \int_A E \alpha_1(x, x', e_1 a) \varepsilon'_{xx,x}(x') dx' \quad (6)$$

انرژی تغییر شکل بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^h \nabla \delta \varepsilon_{xx}) dV \\ &= \int_V (\sigma_{xx} - \nabla \sigma_{xx}^h) \delta \varepsilon_{xx} dV \\ &+ \left[\int_A (\sigma_{xx}^h \delta \varepsilon_{xx}) dA \right]_0^L = \int_V t_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV \\ &+ \left[\int_A (\sigma_{xx}^h \delta \varepsilon_{xx}) dA \right]_0^L \quad (7) \end{aligned}$$

در ادامه، با استفاده از اصل همیلتون، به استخراج معادلات سیستم مفروض، براساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی خواهیم پرداخت. سیستم مورد نظر در این پژوهش، مطابق با شکل ۲، یک نانوتیر به طول L و مقطع عرضی مستطیلی به ارتفاع h و ضخامت b است؛ همچنین، دارای چگالی جرم ρ ، پارامتر مقیاس اندازه l ، ثابت غیرموضعی $e_1 = e_0 = e$ و مدول یانگ E است.

میدان جابجایی و چرخش مقطع براساس تئوری تیر اوپلر برنولی را می‌توان به صورت روابط (۸) و (۹) نوشت:

$$\delta U_m = \int_0^L M_x \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx - \left[M_x^h \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_0^L \quad (17)$$

$$M_x^h = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (18)$$

انرژی ذخیره شده در نانوتیر ناشی از نیروهای محوری نیز از رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

$$U_s = \int_0^L N_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx - \left[N_x^h \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right]_0^L \quad (19)$$

در این رابطه، N_x منتجه مرتبه بالا نیرومحوری است که معادل با رابطه (۲۰) است.

$$N_x^h = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (20)$$

منتجه نیرو محوری N_x ناشی از نیروهای محوری N_0 و N_a است. نیروی محوری N_0 می‌تواند بار اعمال شده خارجی یا ناشی از تنش پسماند باشد. هنگامی که نانوتیر تحت تنش کششی است، طول واقعی نانوتیر، \bar{L} ، بلندتر از طول اولیه تیر، L ، خواهد بود. افزایش طول ناشی از خمش، عامل ایجاد نیروی محوری N_a در نانوتیر به صورت رابطه (۲۱) خواهد شد.

$$N_a = \frac{E}{L} (\bar{L} - L) \approx \frac{E}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (21)$$

با صرف‌نظر نمودن از نیروهای جسمی، کار انجام شده توسط نیروهای عرضی خارجی را می‌توان به صورت (۲۲) نوشت:

$$\delta W = \int_0^L F(x,t) \delta w(x) dx \quad (22)$$

انرژی جنبشی نانوتیر نیز از رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \delta \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (23)$$

براساس اصل همپلتون، معادلات دینامیکی حاکم بر نانوتیر و شرایط مرزی معادل با آن، از رابطه (۲۴) استخراج خواهد شد:

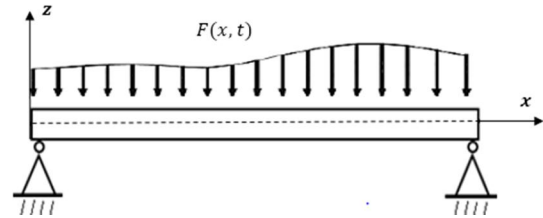
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U_m - U_s - W) dt = 0 \quad (24)$$

پس از به‌کارگیری اصل همپلتون و حل نمودن مسئله حساب تغییرات (۲۴)، معادلات حرکت و شرایط مرزی نانوتیر به صورت روابط (۳۱-۲۵) بدست می‌آیند:

$$u = -z\psi_x(x,t), v = 0, w = w(x,t) \quad (8)$$

$$\psi_x(x,t) \approx \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (9)$$

در روابط فوق، u و v و w به ترتیب جابجایی در جهت x ، y و z و ψ_x چرخش مقطع می‌باشند.



شکل ۲- نانوتیر با شرایط مرزی دو انتها تکیه‌گاه ساده

مولفه‌های تانسور کرنش ϵ_{ij} برای تیر اویلر برنولی همراه با غیرخطی هندسی فون کارمن، با روابط (۱۰-۱۳) بدست می‌آیند:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}^0 - z\kappa_x \quad (10)$$

$$\epsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (11)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{yy} = 0 \quad (12)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

در این روابط ϵ_{xx}^0 کرنش سطح میانی نانوتیر غیرخطی و κ_x انحنای نانوتیر است. مولفه‌های تنش σ_{ij} متناظر با کرنش ϵ_{ij} نیز در رابطه (۱۴) ارائه شده است:

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \quad (14)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy} = 0$$

با انتگرال‌گیری از تنش بر روی مقطع عرضی نانوتیر، منتجه نیرو محوری N_x و منتجه ممان M_x به صورت روابط (۱۵-۱۶) بدست می‌آیند.

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (15)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (16)$$

انرژی تغییرشکل خمشی U_m ، در نانوتیر از رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود. در این رابطه M_x^h منتجه ممان مرتبه بالا است که از رابطه (۱۸) بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -EI \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right) \quad (36)$$

نهایتاً، با جای‌گذاری مجدد رابطه (۲۶) در رابطه (۳۶)، معادلات حاکم بر حرکت نانوتیر گرادیان کرنشی غیرموضعی به صورت رابطه (۳۷) بدست می‌آید.

$$EI \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_0 a)^2 \right) \left(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - F(x,t) \right) - \frac{EA}{2L} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = EA \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_0 a)^2 \right) \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (37)$$

فرم بی بعد معادله حرکت در رابطه (۳۸) ارائه شده است که در این رابطه متغیرهای بی‌بعد از رابطه (۳۹) بدست می‌آیند.

$$\left(1 - \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^2 \partial X^2} - 6 \left(\frac{W_{\max}}{r} \right)^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 dX \right] \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \gamma^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} \right) = \hat{F}(X, \tau) \quad (38)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad W = \frac{w}{w_{\max}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}}, \quad \gamma = \frac{e_0 a}{L}, \quad \xi = \frac{l}{L}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \hat{F} = F \frac{EI}{L^4} \quad (39)$$

در رابطه (۳۹)، γ پارامتر بی‌بعد غیرموضعی و r شعاع ژیراسیون است؛ همچنین معادله حاکم بر شرایط مرزی دو انتها ساده نانوتیر غیر کلاسیک به صورت رابطه (۴۰) است.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (26)$$

$$u = 0 \text{ یا } N = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ یا } N^h = 0 \quad (28)$$

$$w = 0 \text{ یا } \frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ یا } M = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ یا } M^h = 0 \quad (31)$$

با توجه به رابطه (۳)، معادله ساختاری نانوتیر در الاستیسته گرادیان کرنش غیرموضعی به صورت رابطه (۳۲) است:

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) t_{xx} = E (1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} - \nabla \sigma_{xx}^h \quad (32)$$

همچنین، به‌طریق مشابه، می‌توان روابط ساختاری را برای منتجه نیرو N_x و منتجه ممان M_x بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی بیان نمود. با توجه به رابطه (۱۸) و (۲۰) و با استفاده از رابطه (۳۲)، روابط ساختاری برای منتجه نیرو و منتجه ممان نانوتیر به فرم روابط (۳۳) و (۳۴) است:

$$M_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -EI \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (33)$$

$$N_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = EA \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (34)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۳۳)، می‌توان رابطه (۳۵) را بدست آورد. با دو بار دیفرانسیل‌گیری از این رابطه در جهت x به رابطه (۳۶) خواهیم رسید.

$$M_x = -EI \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \left(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right) \quad (35)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \hat{\beta} = \frac{K_{nl}}{M}, \hat{f} = \frac{f}{2M}, \hat{\mu} = \frac{\mu}{M} \quad (45)$$

در رابطه (۴۴) ضریب غیرخطی $\hat{\beta}$ ناشی از کشش تاریخی در نانوتیر است؛ همچنین، ω_0 فرکانس طبیعی نانوتیر و $\hat{\mu}$ ضریب میرایی سیستم است که با در نظر گرفتن ضریب میرایی ریلی^۲ که مرسوم‌ترین شیوه برای مدل‌سازی میرایی نیرو در سیستم‌های غیرخطی است، به فرم $\hat{\mu} = \omega_0/Q$ فرض می‌شود. در اینجا، فاکتور میرایی مودال یا ضریب کیفیت، Q ، یک مقدار ثابت است و بیانگر نرخ زوال انرژی در هر پریود از ارتعاش سیستم است. ضریب کیفیت در نانوتیرها، در پژوهش‌های مختلفی به صورت آزمایشگاهی [۱۱] و تئوری [۳۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. می‌توان نرخ کلی زوال انرژی در نانوتیر را به صورت رابطه (۴۶) تجزیه نمود [۳۰].

$$Q^{-1} = Q_{Bulk}^{-1} + Q_{Surface}^{-1} + Q_{Design}^{-1} + Q_{Interaction}^{-1} \quad (46)$$

در رابطه (۴۶)، Q_{Bulk}^{-1} یک عامل ذاتی در نانوتیر و ناشی از تغییرشکل‌های غیرالاستیک مواد سازنده نانوتیر است، Q_{Design}^{-1} مرتبط با طراحی ناکامل هندسه و شرایط مرزی نانوتیر، $Q_{Surface}^{-1}$ مرتبط با فرآیندهای غیرالاستیک در سطح نانوتیر و $Q_{Interaction}^{-1}$ ناشی از عوامل محیطی است [۳۰]. ثابت ضریب کیفیت در نانوتیر با جنس سیلیکون اکسید در پژوهش حاضر با صرف‌نظر از عوامل مرتبط با شرایط مرزی نانوتیر، با توجه به نتایج آزمایشگاهی [۱۱] در شرایط محیطی (فشار 1.01325 bar) به صورت $Q = 30$ مقدار دهی می‌شود [۱۱].

برای مطالعه غیرموضعی تشدیدهای اولیه و ثانویه نانوتیر غیرکلاسیک، روش تحلیلی مقیاس‌های زمانی چندگانه [۲۸] برای حل معادله حاکم بکار می‌رود. به این منظور، زمان‌های مقیاس بندی شده T_n با رابطه (۴۷) معرفی می‌شود.

$$T_n = \varepsilon^n \tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

همچنین، دیفرانسیل مرتبه اول و دوم نسبت به زمان‌های بی‌بعد و مقیاس‌بندی شده $T_n = \varepsilon^n \tau$ را می‌توان به صورت روابط (۴۸) و (۴۹) نوشت.

$$W(0) = 0, \quad W''(0) = 0, \quad W''''(0) = 0$$

$$W(1) = 0, \quad W''(1) = 0, \quad W''''(1) = 0 \quad (40)$$

با فرض تفکیک متغیرها، معادله ارتعاش نانوتیر، طبق رابطه (۴۱) در نظر گرفته می‌شود که در این رابطه، شکل مود ارتعاش $\varphi(X)$ و $q(\tau)$ بخش وابسته به زمان را بیان می‌کنند.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(x) q_i(\tau) \quad (41)$$

شکل مود ارتعاش $\varphi(X)$ برای نانوتیر با شرایط مرزی دو انتها تکیه‌گاه ساده به صورت رابطه (۴۲) است.

$$\varphi(X) = \sin(n\pi X) \quad (42)$$

در ادامه، به منظور تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانوتیر گردادیان کرنشی غیرموضعی، روش گالرکین برای اولین مود ارتعاش بکار می‌رود. براساس مرجع [۲۹]، رفتار غیرخطی ناشی از کشش تاریخی^۱ در تیر، زمانی که خیز ماکزیمم برابر با شعاع ژیراسیون مقطع شود، چشمگیر خواهد بود، لذا پس از استفاده از روش گالرکین می‌توان $w_{max}/r = 1$ در نظر گرفت. نهایتاً، معادله دیفرانسیل با متغیر زمان به صورت رابطه (۴۳) بدست می‌آید.

$$M\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + Kq + K_{nl}q^3 = f \cos(\Omega\tau)$$

$$M = \int_0^1 (\varphi^2 - \gamma^2 \varphi \varphi'') dX$$

$$K_l = \int_0^1 (\varphi \varphi'''' - \xi^2 \varphi \varphi''''') dX$$

$$K_{nl} = -6 \left(\int_0^1 (\varphi')^2 dX \right) \left(\int_0^1 \varphi \varphi'' dX - \gamma^2 \int_0^1 \varphi \varphi'''' dX \right) \quad (43)$$

پارامترهای رابطه (43)، با استفاده از روش گالرکین بدست آمده است. معادله حاصل از روش گالرکین در رابطه (43) به فرم رابطه (۴۴) بی‌بعد سازی می‌شود که در اینجا ε پارامتر بی‌بعد مقیاس کوچک است.

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\hat{\mu}\dot{q} + \omega_0^2 q + \varepsilon\hat{\beta}q^3 = 2\varepsilon\hat{f}\cos(\Omega\tau) \quad (44)$$

پارامترهای بی‌بعد موجود (۴۴) از رابطه (۴۵) به‌دست می‌آید.

² Rayleigh

¹ Mid-Plane Stretching

جای‌گذاری در رابطه (۵۶) و بخش‌های موهومی و حقیقی معادله تفکیک شده و رابطه (۵۷) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{da}{dT_2} = -\hat{\mu}\hat{a} + \frac{\hat{f}}{2\omega_0} \sin(\phi) \\ \frac{d\phi}{dT_2} = \sigma - \frac{3\hat{\beta}\hat{a}^2}{8\omega_0} - \frac{\hat{f}}{2\hat{a}\omega_0} \cos(\phi) \end{cases} \quad (57)$$

در شرایط پاسخ ماندگار ($\frac{da}{dT_1} = \frac{d\phi}{dT_1} = 0$)، با بکارگیری رابطه $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ از رابطه (۵۷) حذف و پاسخ فرکانسی نانوتیر از رابطه (۵۸) بدست می‌آید.

$$\left[\hat{\mu}^2 + \left(\sigma - \frac{3\hat{\beta}}{8\omega_0} \hat{a}^2 \right)^2 \right] \hat{a}^2 = \left(\frac{\hat{f}}{2\omega_0} \right)^2 \quad (58)$$

در ادامه، جهت مطالعه پاسخ سوپر هارمونیک نانوتیر، فرکانس تحریک را مطابق با رابطه (۶۸) در نظر می‌گیریم.

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (59)$$

همچنین، دامنه تحریک بصورت رابطه (۶۰) مفروض است.

$$\Lambda = \frac{\hat{f}}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (60)$$

با بکار بردن روش مقیاس‌های زمانی چندگانه، پاسخ زمانی و فرکانسی سوپر هارمونیک نانوتیر به ترتیب از روابط (۶۱) و (۶۲) بدست می‌آیند [۲۸].

$$q = \hat{a} \cos(3\Omega\tau - \varphi) + 2\Lambda \cos(\Omega\tau) \quad (61)$$

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\hat{\beta}\hat{a}^2 - 3\hat{\beta}\Lambda^2 \right)^2 \right] \hat{a}^2 = \frac{\hat{\beta}^2\Lambda^6}{\omega_0^2} \quad (62)$$

در این روابط پارامتر \hat{a} دامنه پاسخ و Λ دامنه تحریک در تشدیدهای ثانویه نانوتیر است.

به منظور تحلیل پاسخ‌های ساب هارمونیک نانوتیر، فرکانس تحریک نانوتیر به صورت رابطه (۶۳) مفروض است.

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (63)$$

با در نظر گرفتن فرکانس تحریک نانوتیر به صورت (۶۳)،

پاسخ ساب هارمونیک نانوتیر مطابق با رابطه (۶۴) و (۶۵)

می‌باشد [۲۸].

$$q = \hat{a} \cos\left(\frac{1}{3}\Omega\tau - \varphi\right) + 2\Lambda \cos(\Omega\tau) \quad (64)$$

$$9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\hat{\beta}\hat{a}^2}{8\omega_0} - \frac{9\hat{\beta}\Lambda^2}{\omega_0} \right)^2 = \frac{81\hat{\beta}^2\Lambda^2\hat{a}^2}{16\omega_0^2} \quad (65)$$

با تعریف نمودن h_1 و h_2 به فرم روابط (۶۶) و (۶۷)، رابطه

(۶۵) به صورت رابطه (۶۸) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (48)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (49)$$

در این روابط، D_n با رابطه (۵۰) بیان می‌شود.

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

بر پایه روش اغتشاشات، پاسخ سیستم q نسبت به ε مطابق با رابطه (۵۱) بسط داده می‌شود.

$$q(\tau, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (51)$$

با جای‌گذاری روابط فوق در (۴۴) و مساوی با صفر قرار دادن ضرایب هم توان ε ، روابط (۵۲) و (۵۳) را خواهیم داشت.

$$(D_0^2 + \omega_0^2)q_0 = 0 \quad (52)$$

$$(D_0^2 + \omega_0^2)q_1 = -2D_0 q_0 - 2D_0 D_1 q_0 - \hat{\beta}q_0^3 + \hat{f} \cos(\hat{\Omega}T_0) \quad (53)$$

پس از حل رابطه (۵۲)، پاسخ q_0 به صورت (۵۴) بدست می‌آید.

$$q_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (54)$$

در اینجا A یک تابع مختلط و \bar{A} مزدوج مختلط آن است.

به منظور بدست آوردن پاسخ فرکانسی نانوتیر در تشدید اولیه، فرکانس تحریک خارجی را در نزدیک فرکانس طبیعی نانوتیر و به صورت رابطه (۵۵) در نظر می‌گیریم.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (55)$$

در این رابطه، پارامتر تنظیم σ ، بیانگر اختلاف میان فرکانس تحریک خارجی و فرکانس طبیعی نانوتیر است.

با قرار دادن روابط (۵۴) و (۵۵) در رابطه (۵۳) و حذف

نمودن ترم‌های غیرسکولار، یک معادله دیفرانسیل مختلط

مطابق با رابطه (۵۶) بدست می‌آید.

$$\left\{ 2i\hat{\mu}\omega_0 A + 2i\omega_0 D_1 A + 3\hat{\beta}A^2 \bar{A} - \frac{\hat{f}}{2} e^{i\sigma T_1} \right\} = 0 \quad (56)$$

جهت حل نمودن معادله (۵۶)، تابع مختلط A را به فرم

قطبی $A(T_2) = \frac{1}{2}\hat{a}(T_2)e^{i\psi T_2}$ نوشته که \hat{a} و ψ توابعی

حقیقی از T_2 هستند، با در نظر گرفتن $\phi = T_2\sigma - \psi$ و

¹ Detuning Parameter

می‌شود، نتایج مقاله حاضر با نتایج مقاله لو و ژائو [۲۵] هم‌خوانی مناسبی داشته و صحت این نتایج تایید می‌گردد. در جدول ۲ سه فرکانس طبیعی اول، دوم و سوم نانوتیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی γ ارائه شده است. در این جدول مقدار پارامتر مقیاس اندازه $l/h = 1$ است. همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، افزایش مقادیر پارامتر غیرموضعی باعث کاهش مقادیر فرکانس نانوتیر می‌شود.

در ادامه، نتایج بدست آمده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای تشدیدهای اولیه و ثانویه سوپرهارمونیک و ساب‌هارمونیک نانوتیر غیرموضعی مورد بحث قرار می‌گیرد و با افزایش پارامتر غیرموضعی، اثر اندازه در تئوری غیرکلاسیک بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی مطالعه می‌شود.

در شکل ۳ منحنی پاسخ فرکانسی تشدید اولیه برای مقادیر مختلفی از پارامتر غیرموضعی معادل رسم شده است. در این نمودار دامنه پاسخ برحسب این پارامتر تنظیم و همچنین زاویه فاز پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم رسم شده است. با توجه به شکل ۳ انحنای نمودار پاسخ فرکانسی

جدول ۱- مقایسه نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر و مقاله لو و ژائو [۲۵] برای فرکانس طبیعی اول نانوتیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی (γ)

ea (nm)	γ	پژوهش	$l/h = 0$	$l/h = 1$
0	0	مطالعه حاضر	۹/۸۲۹۷	۱۰/۳۰۳۲
		لو و ژائو [۲۵]	۹/۸۲۹۳	۱۰/۳۰۲۹
0.۵	0.۰۵	درصد خطا	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۲۹
		مطالعه حاضر	۹/۷۱۰۶	۱۰/۱۱۷۸۵
0.۵	0.۰۵	لو و ژائو [۲۵]	۹/۷۱۰۲	۱۰/۱۱۷۸۱
		درصد خطا	۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۰۳۹
۱/۰	0.۱	مطالعه حاضر	۹/۳۷۸۰	۹/۸۲۹۶
		لو و ژائو [۲۵]	۹/۳۷۷۴	۹/۸۲۹۳
۱/۰	0.۱	درصد خطا	۰/۰۰۰۶۴	۰/۰۰۰۳۰
		مطالعه حاضر	۸/۸۹۲۰	۹/۳۲۰۳
۱/۵	0.۱۵	لو و ژائو [۲۵]	۸/۸۹۱۵	۹/۳۱۹۹
		درصد خطا	۰/۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۴۳
۲/۰	0.۲	مطالعه حاضر	۸/۳۲۳۱	۸/۷۲۴۲
		لو و ژائو [۲۵]	۸/۳۲۲۸	۸/۷۲۳۸
۲/۰	0.۲	درصد خطا	۰/۰۰۰۸۴	۰/۰۰۰۶۸

$$h_1 = \frac{8\omega_0\sigma}{9\beta} - 6\Lambda^2 \quad (۶۶)$$

$$h_2 = \frac{64\omega_0^2}{81\beta^2} \left[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (۶۷)$$

$$\hat{a}^2 = h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - h_2} \quad (۶۸)$$

با توجه به رابطه (۶۸)، تنها در صورتیکه $h_1 > 0$ و $h_1^2 \geq h_2$ پاسخ‌های قابل پذیرش در تشدید ساب‌هارمونیک نانوتیر از رابطه (۶۹) بدست می‌آید.

$$\frac{\sigma}{\mu} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63} \leq \frac{63\beta\Lambda^2}{4\mu\omega_0} \leq \frac{\sigma}{\mu} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2} - 63} \quad (۶۹)$$

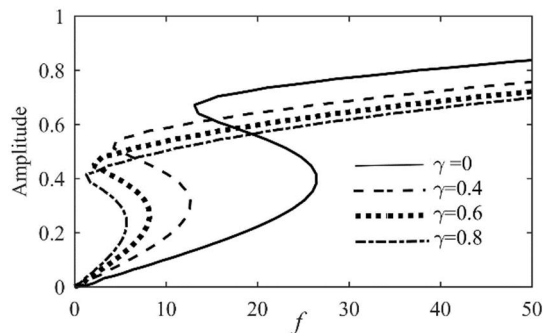
۳- بررسی نتایج

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از مدل‌سازی نانوتیر بر پایه تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی می‌پردازیم. نانوتیر مورد نظر از جنس سیلیکون دی‌اکسید و به طول $L = 10nm$ و مقطع عرضی مستطیلی به ارتفاع $h = 1nm$ و ضخامت $b = 1.5nm$ و چگالی جرم $\rho = 2200kg/m^3$ و مدول یانگ $E = 63.2GPa$ است؛ همچنین فرض می‌شود، ثابت غیرموضعی ea مقادیری بین $0nm$ و $8nm$ باشد.

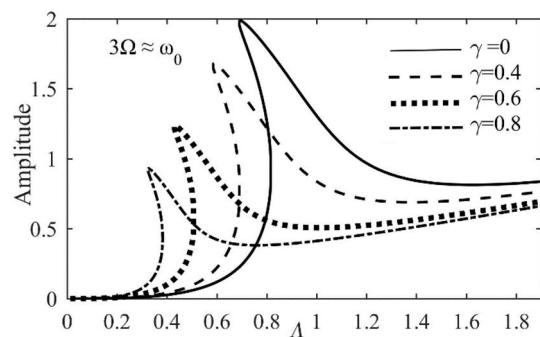
همانطور که در بخش‌های قبل نیز اشاره شد، جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی در نانوتیر غیرکلاسیک، از بردارهای ویژه خطی در روش گالرکین استفاده می‌شود؛ لذا پیش از ارائه نتایج ضروری است که مقادیر ویژه بدست آمده اعتبار سنجی شوند. در این راستا، ابتدا به منظور بررسی دقت نتایج، مقادیر ویژه بدست آمده در این پژوهش برای فرکانس طبیعی اول نانوتیر را با نتایج مقاله لو و ژائو [۲۵] مقایسه می‌کنیم. در جدول ۱، نتایج بدست آمده از حل ناویر در مقاله لو و ژائو [۲۵] و روش گالرکین در پژوهش حاضر (ω_0) در رابطه (۴۵) برای فرکانس طبیعی اول نانوتیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی ارائه شده است. در این جدول فرکانس طبیعی خطی برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی γ و پارامتر مقیاس اندازه l/h مشاهده می‌گردد. با توجه به این جدول با افزایش پارامتر مقیاس اندازه در گرادیان کرنش، فرکانس خطی افزایش می‌یابد و همچنین، به طور معکوس با افزایش پارامتر غیرموضعی فرکانس خطی کاهش پیدا می‌کند. همانطور که در جدول ۱ مشاهده

مختلف پارامتر غیرموضعی 0.6 و 0.4 و 0.2 و $\gamma = 0$ رسم شده است. با توجه به شکل ۴ منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ نانوتیر برای تشدید اولیه به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی تغییرات چشمگیری دارد.

در شکل ۵ منحنی دامنه پاسخ نانوتیر غیرموضعی برحسب دامنه تحریک خارجی نانوتیر برای تشدید ثانویه سوپرهارمونیک $\omega_0 \approx 3\Omega$ برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی معادل با 0.6 و 0.4 و 0.2 و $\gamma = 0$ رسم شده است. در این نمودار، تغییرات قابل توجه منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ سیستم برای تشدید ثانویه سوپرهارمونیک به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی مشاهده می‌شود. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش مقادیر پارامتر غیرموضعی دامنه جهش دینامیکی کاهش پیدا کرده و نقطه پیک پاسخ به سمت چپ منحرف شده است.



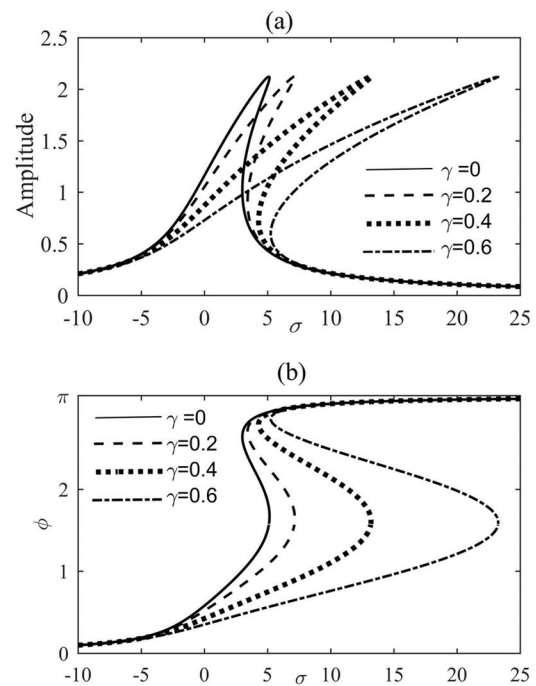
شکل ۴- منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ سیستم برای تشدید اولیه نانوتیر به ازای مقادیر متفاوت پارامتر غیرموضعی (γ)



شکل ۵- منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ نانوتیر غیرکلاسیک برای تشدید ثانویه سوپرهارمونیک $\omega_0 \approx 3\Omega$ به ازای مقادیر متفاوت پارامتر غیرموضعی (γ)

جدول ۲- سه فرکانس طبیعی اول، دوم و سوم معادله خطی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی (γ)

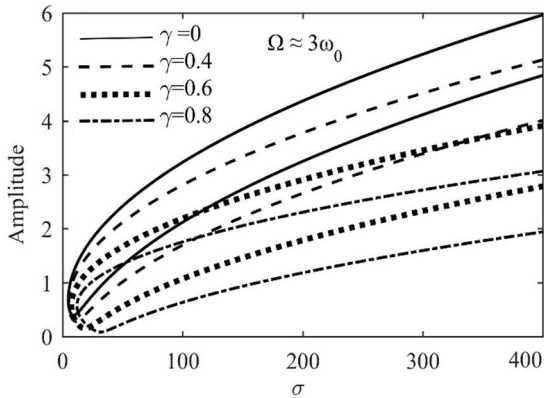
$ea(\text{nm})$	γ	ω_1	ω_2	ω_3
۰	۰	۱۰/۳۰۳	۴۵/۸۷۱	۱۱۷/۸۶۹
۰/۵	۰/۰۵	۱۰/۱۷۸	۴۳/۷۹۰	۱۰۶/۸۱۳
۱/۰	۰/۱	۹/۸۲۹	۳۸/۸۴۵	۸۵/۷۹۲
۱/۵	۰/۱۵	۹/۳۲۰	۳۳/۴۰۱	۶۸/۲۱۵
۲	۰/۲	۸/۷۲۴	۲۸/۵۹۵	۵۵/۲۷۰



شکل ۳- منحنی پاسخ فرکانسی تشدید اولیه نانوتیر به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر غیرموضعی (γ): (a) نمودار دامنه پاسخ برحسب پارامتر تنظیم (b) نمودار زاویه فاز پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم

تشدید اولیه به سمت راست، با افزایش مقادیر پارامتر غیرموضعی، شدیداً افزایش پیدا کرده و ارتفاع جهش ثابت باقی می‌ماند.

در شکل ۴ منحنی دامنه تحریک خارجی برحسب دامنه پاسخ نانوتیر غیرموضعی برای تشدید اولیه برای مقادیر



شکل ۸- منحنی پاسخ فرکانسی تشدید ثانویه ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ نانوتیر غیرکلاسیک به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی (γ)

نانوتیر دارد و استفاده از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش غیرموضعی در تحلیل پاسخ ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ نانوتیر یک ضرورت است.

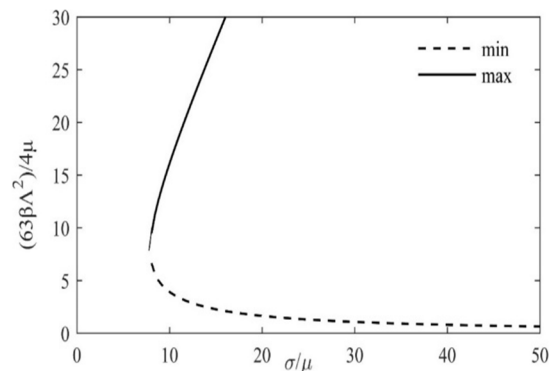
۴- نتیجه گیری

در این پژوهش معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی نانوتیر سیلیکونی براساس تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی استخراج شده و تشدیدهای اولیه، سوپرهارمونیک و ساب هارمونیک نانوتیر با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه مورد تحلیل و مطالعه قرار گرفت. نتایج این مقاله نشان داد که تشدیدهای اولیه و ثانویه سوپرهارمونیک و ساب هارمونیک نانوتیر به طور چشمگیری تحت تاثیر پارامتر غیرموضعی می‌باشند. مهمترین نتایج این مقاله را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

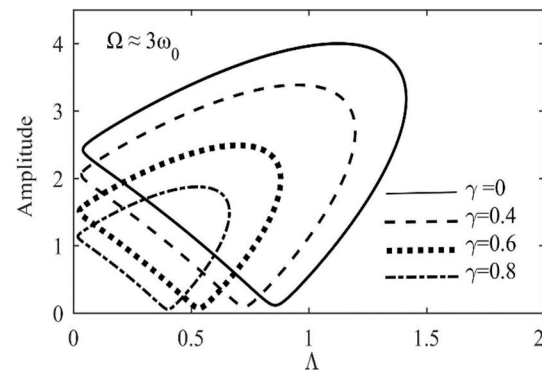
- با افزایش پارامتر مقیاس اندازه در گرادیان کرنش، فرکانس خطی افزایش می‌یابد و این پارامتر اثر سخت شوندگی خطی خواهد داشت؛ همچنین، به طور معکوس با افزایش پارامتر غیرموضعی فرکانس خطی کاهش پیدا می‌کند و این پارامتر اثر نرم شوندگی خطی دارد.
- انحنای نمودار پاسخ فرکانسی نانوتیر در تشدید اولیه به سمت راست، با افزایش مقادیر پارامتر غیرموضعی، شدیداً افزایش می‌یابد و افزایش

بر اساس پاسخ‌های بدست آمده در رابطه (۶۹)، در شکل ۶ ناحیه پاسخ‌های قابل قبول برای تشدید ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ نانوتیر رسم شده است.

پس از بدست آوردن ناحیه جواب‌های غیربدیهی در شکل ۶، می‌توان اثر اندازه را در تشدید ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ مطالعه نمود؛ لذا در شکل ۷، دامنه پاسخ نانوتیر برحسب دامنه تحریک برای تشدید ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ به ازای مقادیری از پارامتر غیرموضعی رسم شده است؛ همچنین، شکل ۸ منحنی پاسخ فرکانسی نانوتیر برای تشدید ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ به ازای مقادیر مختلف از پارامتر غیرموضعی برابر با $\gamma = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های ۷ و ۸ افزایش پارامتر غیرموضعی اثر چشمگیری بر پاسخ ساب‌هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$



شکل ۶- ناحیه پاسخ‌های قابل قبول برای تشدید ثانویه ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ نانوتیر غیرکلاسیک



شکل ۷- منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ نانوتیر غیرکلاسیک برای تشدید ثانویه ساب هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_0$ نانوتیر به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی (γ)

هفتمند تحت بارگذاری الکترواستاتیک. *مجله مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۵۱-۱۳۷: ۸(۳).

[۴] قادری ش، طهماسبی پور م، عباسپور ثانی ا، مدرس م (۲۰۱۸) طراحی و شبیه سازی شتاب سنج حرارتی MEMS با حساسیت بهینه شده و قابلیت اندازه‌گیری شتاب در دو محور. *مجله مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۱۳-۲۴: ۸(۲).

[5] Mahdavi MH, Farshidianfar A, Tahani M, Mahdavi S, Dalir H (2008) A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever. *Ultramicroscopy* 109(1): 54-60.

[6] Currano LJ, Yu M, Balachandran B (2010) Latching in a MEMS shock sensor: Modeling and experiments. *Sensor Actuat A-Phys* 159(1): 41-50.

[7] Martínez-Criado G (2016) Application of micro- and nanobeams for materials science, *Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers: Accelerator Physics, Instrumentation and Science Applications* 1505-1539.

[8] Liu W, Li T, Yang H, Jiao J, Wang Y (2006) Silicon nano beam fabricated by MEMS technology and its electronic properties. in: 2006 1st IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, IEEE 932-935.

[9] Ice GE, Budai JD, Pang JW (2011) The race to x-ray microbeam and nanobeam science. *Science* 334(6060): 1234-1239.

[10] Peters TJ, Tichem M (2015) Fabrication and characterization of suspended beam structures for SiO₂ photonic MEMS. *J Micromech Microeng* 25(10): 105003.

[11] Ashok A, Kumar PM, Singh SS, Raju P, Pal P, Pandey AK (2018) Achieving wideband micromechanical system using coupled non-uniform beams array. *Sensor Actuat A-Phys* 273: 12-18.

[12] Farajpour A, Ghayesh MH, Farokhi H (2018) A review on the mechanics of nanostructures, *International Journal of Engineering Science*, 133 () 231-263.

[13] Eringen AC (1972) Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int J Eng Sci* 10(5): 425-435.

[14] Reddy J (2007) Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *Int J Eng Sci* 45(2-8): 288-307.

[15] Wang Q, Liew K (2007) Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures. *Phys Lett A* 363(3): 236-242.

[16] Wang YZ, Li FM (2014) Nonlinear primary resonance of nano beam with axial initial load by

پارامتر غیرموضعی اثر سخت شوندگی غیرخطی خواهد داشت.

– منحنی دامنه تحریک برحسب دامنه پاسخ نانوتیر برای تشدید اولیه به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی تغییرات چشمگیری دارد و با افزایش پارامتر غیرموضعی ارتفاع پرش دینامیکی در این منحنی کاهش می‌یابد.

– برای تشدید سوپر هارمونیک در همسایگی یک سوم فرکانس طبیعی، تغییرات قابل توجهی در منحنی دامنه پاسخ نانوتیر برحسب دامنه تحریک به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی مشاهده می‌شود. با افزایش مقادیر پارامتر غیرموضعی، دامنه پرش دینامیکی کاهش پیدا کرده و نقطه پیک پاسخ به سمت چپ منحرف شده است.

– ناحیه پاسخ‌های قابل پذیرش ساب هارمونیک رسم گردیده و اثر چشمگیری پارامتر غیرموضعی بر پاسخ ساب هارمونیک در منحنی‌های پاسخ فرکانسی و دامنه پاسخ برحسب دامنه تحریک نمایش داده شد.

براساس نتایج بدست آمده در این پژوهش، استفاده از تئوری غیرکلاسیک گرادیان کرنش غیرموضعی برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر در مقیاس نانو یک ضرورت اساسی است.

نتایج این پژوهش می‌تواند در فرایند تولید سیستم‌های نانوالکترو مکانیکی، مورد استفاده قرار گیرد.

۵- مراجع

[1] Chaterjee G Pohit (2009) A large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams. *J Sound Vib* 322(4): 969-986.

[۲] ملکی م، نحوی ح، غیور م (۲۰۱۷) تحلیل پاسخ فرکانسی نانوتشدیدگرالکترو مکانیکی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی. مدل سازی در مهندسی ۳۱۵-۳۲۲: ۱۵(۵۰).

[۳] اندخشیده ع، مالکی س، مرعشی س ص (۲۰۱۸) بررسی پدیده‌ی غیرخطی ولتاژ کشیدگی در میکروتیرهای

- [23] Hosseini-Hashemi S, Sharifpour F, Ilkhani MR (2016) On the free vibrations of size-dependent closed micro/nano-spherical shell based on the modified couple stress theory. *Int J Mech Sci* 115: 501-515.
- [24] Lim C, Zhang G, Reddy J (2015) A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *J Mech Phys Solids* 78: 298-313.
- [25] Lu L, Guo X, Zhao J (2017) Size-dependent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory. *Int J Eng Sci* 116: 12-24.
- [26] Liu H, Lv Z, Wu H (2019) Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. *Compos Struct* 214: 47-61
- [27] Ebrahimi F, Barati MR (2017) Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. *Compos Struct* 159: 433-444.
- [28] Nayfeh AH, Mook DT (2008) *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons.
- [29] Bauchau O, Bottasso C (1994) Space-time perturbation modes for non-linear dynamic analysis of beams. *Nonlinear Dynam* 6(1): 21-35.
- [30] Imboden M, Mohanty P (2014) Dissipation in nanoelectromechanical systems. *Phys Rep* 534(3): 89-146.
- nonlocal continuum theory. *Int J Nonlinear Mech* 61: 74-79.
- [۱۷] گلمکانی م، رضاطلب ج (۲۰۱۳) خمش استاتیکی نانو صفحات ارتوتروپیک در محیط الاستیک، براساس مدل‌های غیر موضعی محیط پیوسته. *مجله مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۶۶-۵۳: ۳(۳).
- [18] Yang F, Chong A, Lam DCC, Tong P (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct* 39(10): 2731-2743.
- [19] Lam DC, Yang F, Chong A, Wang J, Tong P (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids* 51(8): 1477-1508.
- [20] Andakhshideh A, Maleki S, Karamad H (2019) Size-dependent nonlinear vibration of non-uniform microbeam with various boundary conditions. *Modares Mechanical Engineering* 18(9): 189-198.
- [۲۱] قربانیپور آرانی ع، عبدالهیان م، کلاهی ر (۲۰۱۴) کماتش الکتروترمو مکانیکی نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته گرادیان کرنشی و تیر ردی. *مجله مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها* ۳۳-۲۳: ۴(۳).
- [22] Alinaghizadeh F, Shariati M, Fish J (2017) Bending analysis of size-dependent functionally graded annular sector microplates based on the modified couple stress theory. *Appl Math Model* 44: 540-556.