



## تحلیل غیرخطی میکروتیرهای هدفمند در یک سیستم میکروالکترومکانیکی با هر دو الکتروود متحرک

حسینعلی اعلم حکاکان<sup>۱</sup> و امیر رضا عسکری<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل دوره‌ی کارشناسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

<sup>۲</sup> دکتری تخصصی، استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۹

### چکیده

هدف پژوهش حاضر بررسی پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای غیرخطی هندسی ساخته شده از مواد تابعی مدرج در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (میمز) با هر دو الکتروود متحرک است. بدین منظور، با به خدمت گرفتن رابطه غیرخطی کرنش-جابجایی در این سازه‌ها براساس تئوری غیرخطی فون کارمن، معادله حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و در ادامه با استفاده از روش باقیمانده وزن دار گلرکین حل می‌شود. یافته‌های استاتیکی و دینامیکی پژوهش پیش‌رو با نتایج موجود در ادبیات برای سیستم‌های با یک الکتروود متحرک اعتبارسنجی می‌شوند. نتایج استاتیکی و دینامیکی حاضر برای سیستم‌های با هر دو الکتروود متحرک نیز با آنچه از طریق شبیه‌سازی سه‌بعدی اجزاء محدود در نرم‌افزار تجاری کامسول بدست می‌آید، مقایسه شده و به‌صورت موفقیت آمیزی صحت‌گذاری می‌گردند. در ادامه، اثر متحرک بودن هر دو الکتروود علاوه بر تأثیر تغییر جنس مواد به‌صورت تابعی مدرج و اینرسی بر پاسخ غیرخطی سیستم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاکی از کاهش چشم‌گیر اختلاف پتانسیل کشیدگی در صورت قابلیت حرکت هر دو الکتروود است.

**کلید واژگان:** میمز؛ توانایی حرکت هر دو الکتروود؛ رفتار غیرخطی هندسی؛ مواد تابعی مدرج؛ ناپایداری کشیدگی.

## Non-Linear Analysis of FG Beam-Based Double-Movable-Electrode MEMS

H.A. Aalam-Hakkakan<sup>1</sup>, A.R. Askari<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> B.Sc., Department of Mechanical Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.

<sup>2</sup> Ph.D., Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran.

### Abstract

The objective of the present paper is to investigate the static and dynamic responses of geometric non-linear micro-beams, which are made of functionally graded materials, in double-movable-electrode micro-electro-mechanical systems (MEMS). To do so, employing the non-linear strain-displacement relation in such structures based on the von Kármán theory, the governing equations of motion have been obtained by Hamilton's principle and then solved through the Galerkin weighted residual method. The static and dynamic findings of the present work have been verified by those available in the literature for single-movable-electrode systems. The present static and dynamic results for double-movable-electrode systems have also been compared and successfully validated by those obtained through 3-D finite element simulations carried out in COMSOL commercial software. At the rest of the paper, aside from the influence of the movability of both electrodes, the inertia and material gradation effects on the non-linear response of the system have been investigated. The results reveal that the movability of both electrodes drastically reduces the pull-in voltage of the system.

**Keywords:** MEMS; Movability of Both Electrodes; Geometric Non-Linearity; Functionally Graded Materials, Pull-In Instability.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های میکروالکترومکانیک (ممز)<sup>۱</sup> عمدتاً به عنوان حسگر و یا محرک مورد استفاده قرار می‌گیرند. توانایی یکپارچه‌سازی روی یک تراشه ویژگی مهمی در توسعه تکنولوژی این سیستم‌ها است که بر عملکرد آنها تأثیر بسزایی دارد [۱].

در این ابزارها از جریان الکتریکی به عنوان یک مکانیزم محرک و یا کنترل کننده استفاده می‌شود [۲]. از مهمترین پدیده‌های مرتبط با ممز می‌توان به ناپایداری کشیدگی اشاره کرد. ناپایداری کشیدگی نخستین بار توسط ناتانسون [۳] و تیلور [۴] در سال ۱۹۶۸ گزارش شد. این پدیده هنگامی رخ می‌دهد که اختلاف پتانسیل ورودی به سیستم از یک مقدار بحرانی بیشتر شود. در این حالت نیروی برگرداننده کُشان توان غلبه بر نیروی غیرخطی الکترواستاتیک را نداشته و ناگهان با افزایش ولتاژ ورودی، الکتروودها به یکدیگر می‌چسبند. به کوچکترین مقدار اختلاف پتانسیلی که باعث بوجود آمدن این ناپایداری می‌شود، ولتاژ کشیدگی اطلاق می‌شود [۵]. ناپایداری کشیدگی می‌تواند هم به صورت استاتیکی و هم به صورت دینامیکی رخ دهد. با اعمال تدریجی اختلاف پتانسیل الکتریکی به سیستم می‌توان از اثرات اینرسی صرف نظر کرد [۶]. در این شرایط ناپایداری کشیدگی به صورت استاتیکی رخ می‌دهد. در سایر حالات نیز که نتوان از اثرات اینرسی صرف نظر نمود، این ناپایداری به صورت دینامیکی به وقوع می‌پیوندد [۷].

در یک سازه میکروالکترومکانیکی دستیابی به خصوصیات مکانیکی و الکتریکی مورد نظر، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به دلیل دشواری دستیابی به تمام خصوصیات مورد نظر در یک ماده واحد، استفاده از مواد تابعی مدرج<sup>۲</sup> پیشنهاد می‌شوند که نخستین بار در سال ۱۹۸۴ توسط محققان ژاپنی معرفی شدند [۸]. این مواد نوع خاصی از کامپوزیت‌ها هستند که از ترکیب دو یا چند فاز مختلف ساخته می‌شوند. در این مواد فاز تشکیل دهنده و خصوصیات مکانیکی و الکتریکی، به صورت تابعی مدرج در جهتی خاص (معمولاً در جهت ضخامت سازه)، از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کنند [۹].

تاکنون پژوهشگران بسیاری به بررسی تأثیر تغییر جنس ماده سازنده به صورت تابعی مدرج و جابجایی‌های بزرگ بر پاسخ سیستم‌هایی با یک الکتروود متحرک پرداخته‌اند. این میزان توجه به جنس ماده تشکیل دهنده در اینگونه سیستم‌ها، نشان از اهمیت ویژه آن‌ها چه از لحاظ اقتصادی و چه از لحاظ دستیابی به خصوصیات مکانیکی و الکتریکی مورد نظر دارد. بدین منظور در ادامه پژوهش‌های انجام شده پیرامون سیستم‌های ساخته شده از مواد تابعی مدرج به طور خلاصه بررسی خواهند شد.

قریب و همکارانش [۱۰] به بررسی ساختارهای هوشمند پرداختند. سیستم مورد بررسی آن‌ها میکروتیری ساخته شده از مواد تابعی مدرج همراه با دو لایه پیزوالکتریک بود. آن‌ها توانستند، راه حل تحلیلی برای بررسی رفتار مکانیکی سیستم ارائه کنند؛ همچنین رفتار مکانیکی سیستم براساس تغییر توزیع مواد در راستای ضخامت براساس تغییرات کسر حجمی<sup>۳</sup> در این پژوهش بررسی شد. کان و لی [۱۱] اثر جابجایی‌های بزرگ را بر پاسخ غیرخطی یک میکروتیر بررسی کردند. نتایج این پژوهش حاکی از تفاوت قابل ملاحظه توزیع تنش خمشی در میکروتیرهای ساخته شده از مواد تابعی مدرج و میکروتیرهای ساخته شده از ماده همگن بود. استفاده از یک لایه مدرج پلی کریستالین اس ای جی ای<sup>۴</sup> به منظور دستیابی به خصوصیات مکانیکی و الکتریکی در یک سیستم میکروالکترومکانیکی توسط ویتروو و مهتا [۱۲] پیشنهاد شد. آن‌ها در جهت توصیف و همچنین بهینه‌سازی شیب کرنش لایه‌های مدرج بکار رفته در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نیز مطالعه تجربی انجام داده و نتایج مربوطه را ارائه دادند. حسنیان و همکارانش [۱۳]، ناپایداری کشیدگی را تحت تأثیر گرمای تولید شده توسط جریان الکتریکی در یک سیستم میکروالکترومکانیکی بررسی کردند. در این پژوهش مشاهده شد که میزان ولتاژ کشیدگی با تغییر در نوع توزیع مواد تغییر خواهد کرد. جیا و همکارانش [۱۴]، مدلی تحلیلی را برای میکروتیرهای ساخته شده از مواد تابعی مدرج توسعه دادند. در این پژوهش معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از روش تربیعات تفاضلی<sup>۵</sup> به صورت عددی حل شده‌اند. عباس‌نژاد و رضازاده [۱۵]، ناپایداری کشیدگی

<sup>3</sup> Volume Fraction

<sup>4</sup> Polycrystalline-SiGe

<sup>5</sup> Differential Quadrature Method

<sup>1</sup> MEMS

<sup>2</sup> Functionally Graded Materials

بدست آمده حاکی از کاهش ولتاژ کشیدگی در صورت افزایش طول میکروتیر بودند. در این پژوهش مشاهده شد، ولتاژ کشیدگی در سیستم‌هایی با دو الکتروود متحرک نسبت به سیستم‌های تک الکتروود از مقدار کمتری برخوردار است؛ همچنین آن‌ها پاسخ سیستم مشابهی تحت شتاب ضربه را نیز بررسی کرده و مشاهده نمودند، وجود ضربه آستانه پایداری سیستم را کاهش می‌دهد.

همان‌گونه که از ادبیات مرور شده در بالا دیده می‌شود، اثر وجود جملات غیرخطی هندسی و استفاده از مواد تابعی مدرج در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی با یک الکتروود متحرک، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هرچند براساس بهترین جستجوهای صورت گرفته توسط نویسندگان، تأثیر همزمان جملات غیرخطی هندسی و استفاده از مواد تابعی مدرج در سیستم‌هایی با دو الکتروود متحرک تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است؛ بنابراین هدف پژوهش پیش‌رو، مطالعه تأثیر همزمان عوامل ذکر شده در یک سیستم با هر دو الکتروود متحرک است.

سازمان‌دهی بخش‌های مختلف مقاله پیش‌رو به‌صورت زیر است. ابتدا معادلات حاکم بر سیستم در بخش دوم استخراج و بی‌بعدسازی شده و سپس با استفاده از روش باقی‌مانده وزن‌دار گلرکین، مدل کاهیده شده حاکم بر مسأله ارائه می‌شود. شایان ذکر است، معادلات حاکم بر سازه‌هایی با دو الکتروود متحرک منجر به حل دستگاهی شامل، دو معادله دیفرانسل-انتگرالی با مشتقات جزئی مزدوج می‌شود که پیچیده‌تر از حل تنها یک معادله در حالت تک الکتروود متحرک است. بخش سوم به تشریح روند شبیه‌سازی و تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی مدل اجزاء محدود با استفاده از نرم‌افزار کامسول<sup>۳</sup> اختصاص یافته است. یافته‌های حاصل از مدل کاهیده شده حاضر علاوه بر نتایج گزارش شده در پژوهش‌های پیشین برای سیستم‌های با یک الکتروود متحرک، با آن‌چه از شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار اجزاء محدود کامسول [۲۲] برای سیستم‌هایی با هر دو الکتروود متحرک بدست می‌آید نیز در بخش چهارم مقایسه می‌شوند. در ادامه بخش چهارم، اثرات کشیدگی صفحه میانی، اینرسی، تغییر جنس مواد به‌صورت تابعی مدرج و قابلیت حرکت میکروتیرها بر پاسخ سیستم بررسی می‌شود. یافته‌ها و نتایج

استاتیکی و دینامیکی و همچنین تاثیر توزیع مواد براساس قانون توانی<sup>۱</sup> را در یک سیستم میکروالکترومکانیکی بررسی کردند. آن‌ها به‌منظور یافتن پاسخ میکروتیر تحت ولتاژ مستقیم، معادله غیرخطی حاکم بر حرکت میکروتیر را با استفاده از یک مدل کاهیده شده براساس روش باقیمانده وزن‌دار گلرکین حل نمودند. در این پژوهش نسبت ولتاژ کشیدگی دینامیکی به استاتیکی در حدود ۹۲ درصد گزارش شد. ناپایداری کشیدگی دینامیکی در یک سیستم تحت اعمال ناگهانی ولتاژ مستقیم و در حضور میدان مغناطیسی توسط زارع [۱۶] بررسی شد. در این پژوهش گزارش شد، در حضور میدان مغناطیسی، با افزایش شاخص شیب مواد تابعی مدرج، ولتاژ کشیدگی دینامیکی کاهش می‌یابد.

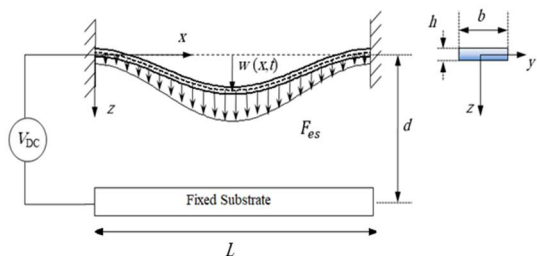
امروزه گسترش و پیشرفت تکنولوژی میکروابزارها، محققان را بر آن داشته تا علاوه بر مطالعه تأثیر ماده سازنده، جایجایی‌های بزرگ و نیروهای مختلف وارد بر آن‌ها، این میکروابزارها را از نظر قابلیت حرکت هر دو الکتروود نیز مورد بررسی قرار دهند. شایان ذکر است، میکروتیرهای مزدوج الکتریکی کاربرد گسترده‌ای در زمینه فیلترهای پهنای باند می‌دارند [۱۷]؛ همچنین این سیستم‌ها می‌توانند بعنوان نمونه ساده شده‌ای از سیستم‌های شامل، آرایه‌ای از میکروتیرهای تحت تحریک الکتریکی در نظر گرفته شوند [۱۸]. در ادامه برخی از پژوهش‌های کلیدی انجام شده در زمینه میکروتیرهای مزدوج الکتریکی مرور می‌شوند.

ناپولی و همکارانش [۱۹] مدلی ریاضی از سیستمی با دو الکتروود متحرک و یک الکتروود ثابت براساس تئوری صفحات موازی ارائه کردند. شرایط مرزی میکروتیرها در این پژوهش به‌صورت یک طرف گیردار بود. کارنتو و همکارانش [۲۰]، پاسخ سیستم را تحت ترکیبی از ولتاژهای مستقیم و متناوب در نزدیکی اولین فرکانس طبیعی آن مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش سیستم دارای دو میکروتیر یک طرف گیردار متحرک و نیز یک الکتروود ثابت بود. پاسخ استاتیکی و دینامیکی سیستم میکروالکترومکانیکی با دو الکتروود متحرک و دو الکتروود ثابت به‌صورت تئوری و تجربی توسط الیاس و همکارانش [۲۱]، مورد بررسی قرار گرفت. در این پژوهش تأثیر ابعاد الکتروودها بر پاسخ سیستم نیز بررسی شد. نتایج

<sup>۱</sup> Power Law

<sup>۲</sup> MEMS Bandpass Filters

<sup>۳</sup> COMSOL Multiphysics



شکل ۱- شماتیک یک میکروتیر خیز برداشته تحت تحریک الکترواستاتیک

صورت گسترده در طول الکتروود اعمال شده و مقدار آن به صورت رابطه (۲) قابل محاسبه است [۲۴].

$$F_{es} = \frac{\epsilon V_{DC}^2}{2(d-w)^2} \quad (2)$$

که در آن،  $\epsilon$  ضریب گذر دهی خلاء است. شایان ذکر است، در میکروتیرهای عرضی اثرات لبه تأثیر قابل توجهی خواهند داشت [۲۵].

اساس پژوهش حاضر بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی بنا شده است. بدلیل ضخامت بسیار کم میکروسازه‌های الکترومکانیکی، با صرف نظر از اثر تنش برشی، براساس تئوری تیر اویلر-برنولی و بر پایه فرضیات کیرشهف<sup>۲</sup> می‌توان میدان جابجایی یک نقطه دلخواه را به صورت رابطه (۳) در نظر گرفت [۲۶].

$$u_1(x, z, t) = u(x, t) - z \left[ \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right], \quad (3)$$

$$u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t)$$

که در آن،  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب جابجایی یک نقطه دلخواه در راستای  $x$  و  $y$  و  $z$  می‌باشند.  $w$  نیز به ترتیب جابجایی‌های محوری و عرضی نقطه‌ای روی صفحه میانی هستند.

در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی که خیز طی شده توسط میکروتیرها از نصف ضخامتشان بیشتر است، رابطه کرنش-جابجایی خطی از دقت پایینی برخوردار است [۲۶]. به همین جهت برای افزایش دقت نتایج باید رابطه کرنش-جابجایی براساس تئوری غیرخطی فون کارمن تقریب زده شود [۲۶]. رابطه کرنش-جابجایی براساس تئوری غیرخطی فون کارمن برحسب میدان جابجایی فوق به صورت زیر است که با توجه به خیلی بزرگ نبودن فاصله بین دو الکتروود، تقریب فون کارمن به اندازه‌ی کافی دقیق خواهد بود [۲۶].

حاصل از پژوهش حاضر نیز به اختصار در بخش پنجم ارائه می‌شود.

## ۲- استخراج معادلات حاکم بر مسأله

### ۱-۲- توزیع کسر حجمی ماده تابعی مدرج

در پژوهش حاضر فرض شده است، خواص مکانیکی و الکتریکی ماده در راستای ضخامت میکروتیر به صورت تابعی مدرج براساس تابع توزیع توانی تغییر می‌کند [۲۳]. بر این اساس برای خاصیت دلخواه  $P$  می‌توان نوشت:

$$P(z) = P_1 + \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n (P_2 - P_1) \quad (1)$$

که در آن  $n$  توان کسر حجمی<sup>۱</sup> بوده و  $h$  ضخامت میکروتیر است؛ همچنین زیرنویس‌های ۱ و ۲ بیانگر خواص مواد دلخواه استفاده شده در میکروتیر است.

### ۲-۲- استخراج معادلات حاکم بر حرکت یک میکروتیر

#### غیرخطی ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت نیروی الکترواستاتیک

شکل ۱ شماتیک یک میکروتیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت نیروی جاذبه‌ی الکترواستاتیک را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، یک سیستم میکروالکترومکانیکی از یک الکتروود متحرک و یک پایه ثابت در زیر آن تشکیل شده است. الکتروود متحرک حاضر به صورت میکروتیری غیرخطی با شرایط مرزی دو طرف گیردار و ساخته شده از مواد تابعی مدرج است. الکتروود ذکر شده با فاصله  $d$  بر بالای الکتروود ثابت قرار دارد. پارامترهای  $h$ ،  $L$ ،  $b$  به ترتیب بیانگر ضخامت، طول و عرض میکروتیر هستند. مبدأ مختصات به گونه‌ای روی صفحه میانی میکروتیر تعریف شده که  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب در راستای طول، عرض و ضخامت میکروتیر بوده و  $w$  که بیانگر خیز میکروتیر است، در راستای محور  $z$  باشد.  $t$  نیز بیانگر زمان است.

جهت برقراری جریان الکتریکی بین الکتروود ثابت و متحرک، از یک منبع ولتاژ DC استفاده می‌شود. با برقراری جریان الکتریکی، نیروی الکترواستاتیک بین دو الکتروود ایجاد می‌شود. این نیرو غیرخطی و تابع خیز میکروتیر است و به

<sup>2</sup> Permittivity of Vacuum

<sup>3</sup> Kirchhoff's Hypothesis

<sup>1</sup> Power Law Index

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} E \varepsilon_x z dz \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} E \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 - z w'' \right) z dz \\
 &= \left( \int_{-h/2}^{h/2} E z dz \right) \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \\
 &\quad - \left( \int_{-h/2}^{h/2} E z^2 dz \right) w'' \quad (ب-۷)
 \end{aligned}$$

که در آن،  $E$  مدول الاستیسیته میکروتیر ساخته شده از ماده تابعی مدرج بوده و مطابق رابطه (۱) تابع  $z$  است.

تغییرات انرژی جنبشی میکروتیر در نوسان تحت اعمال نیروی الکترواستاتیک مابین دو زمان  $t_i$  و  $t_f$  برحسب مؤلفه-های میدان جابجایی با رابطه (۸) بدست خواهد آمد [۲۷].

$$\begin{aligned}
 \int_{t_i}^{t_f} (\delta KE) dt &= \int_{t_i}^{t_f} \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{w} \delta w) dV dt \\
 &= -b \left( \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \right) \int_{t_i}^{t_f} \int_0^L (\dot{u} \delta u + \dot{w} \delta w) dx dt \quad (۸)
 \end{aligned}$$

که در آن، علامت ' نشان دهنده مشتق نسبت به زمان ( $t$ ) و  $\rho$  نیز چگالی میکروتیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج و مطابق رابطه (۱) تابع  $z$  است.

کارمجازی انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیک نیز به صورت رابطه (۹) قابل محاسبه است.

$$\delta W_{ext} = F_{es} \delta w \quad (۹)$$

پس از محاسبه تغییرات انرژی‌های کرنشی و جنبشی علاوه بر کار مجازی انجام شده روی میکروتیر می‌توان معادلات حاکم بر حرکت سیستم را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کرد. مطابق با این اصل می‌توان نوشت [۲۷]:

$$\int_{t_i}^{t_f} (\delta KE - \delta U + \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (۱۰)$$

با جایگذاری از روابط (۵)، (۸) و (۹) در رابطه (۱۰)، طبق لیم اساسی حساب تغییرات [۲۷]، معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر پس از ساده‌سازی به صورت زیر بدست خواهند آمد.

$$\begin{aligned}
 \gamma \ddot{u} - N' &= 0 \quad (۱۱-الف) \\
 \gamma \dot{w} - (Nw')' - M'' &= F_{es} \quad (۱۱-ب)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (۴)
 \end{aligned}$$

اعمال نیروی الکترواستاتیک بین الکترودها سبب خیز میکروتیر متحرک شده و منجر به ذخیره انرژی کرنشی در میکروتیر می‌شود. تغییرات انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروتیر براساس معادلات کرنش-جابجایی داده شده در رابطه (۴) به صورت زیر است [۲۷].

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \\
 &= b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (\delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w} - z \delta w'') dz dx \\
 &= b \int_0^L (N \delta u' + Nw' \delta w' - M \delta w'') dx \\
 &= b \int_0^L \{ -N' \delta u - [(Nw')' + M''] \delta w \} dx \\
 &\quad + N \delta u|_0^L + (Nw' + M') \delta w|_0^L - M \delta w'|_0^L \quad (۵)
 \end{aligned}$$

که در آن،  $V$  حجم میکروتیر بوده و علامت ' ' نشان دهنده مشتق نسبت به مکان ( $x$ ) است؛ همچنین  $N$  و  $M$  به ترتیب نیروی محوری و گشتاور خمشی در هر سطح مقطع از میکروتیر بوده که با رابطه (۶) تعریف می‌شوند [۲۷].

$$(N, M) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(1, z) dz \quad (۶)$$

مقادیر نیروی محوری و گشتاور خمشی اعمال شده به میکروتیر ساخته شده از مواد تابعی مدرج، برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی و با جایگذاری از رابطه (۴)، در رابطه (۶) به صورت رابطه (۷) قابل محاسبه می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} E \varepsilon_x dz \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} E \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 - z w'' \right) dz \\
 &= \left( \int_{-h/2}^{h/2} E dz \right) \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \\
 &\quad - \left( \int_{-h/2}^{h/2} E dz \right) w'' \quad (۷-الف)
 \end{aligned}$$

ماده تابعی مدرج تحت تحریک الکترواستاتیک به صورت رابطه (۱۷) بدست خواهد آمد.

$$\gamma \ddot{w} - \left( \frac{A}{2L} \int_0^L w'^2 dx \right) w'' + \left( D - \frac{B^2}{A} \right) w'''' = \frac{\epsilon V_{DC}^2}{2(d-W)^2} \quad (17)$$

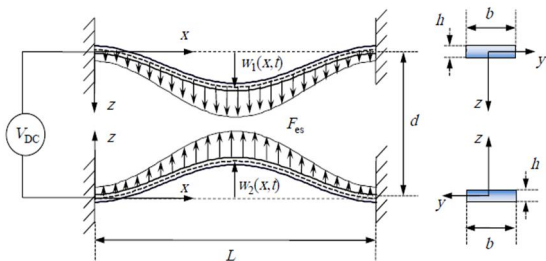
۲-۳- استخراج و بی‌بعدسازی معادلات حاکم بر حرکت یک میکروتیر غیرخطی ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت اعمال ناگهانی ولتاژ در یک سیستم میکروالکترومکانیکی با هر دو الکتروود متحرک

شکل ۲ شماتیک یک سیستم میکروالکترومکانیکی با هر دو الکتروود متحرک را نشان می‌دهد. در این پژوهش فرض بر آن است که ابعاد دو الکتروود یکسان باشد.

با توجه به رابطه (۱۷) که معادله حاکم بر حرکت یک میکروتیر غیرخطی ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت تحریک الکترواستاتیک است، دستگاه معادلات حاکم بر حرکت برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲ که متشکل از دو الکتروود متحرک است، به صورت روابط زیر بدست خواهد آمد.

$$\gamma_1 \ddot{w}_1 - \left( \frac{A_1}{2L} \int_0^L w_1'^2 dx \right) w_1'' + H_1 w_1'''' = \frac{\epsilon V_{DC}^2}{2(d-w_1-w_2)^2} \quad (18-الف)$$

$$\gamma_2 \ddot{w}_2 - \left( \frac{A_2}{2L} \int_0^L w_2'^2 dx \right) w_2'' + H_2 w_2'''' = \frac{\epsilon V_{DC}^2}{2(d-w_1-w_2)^2} \quad (18-ب)$$



شکل ۲- شماتیک میکروتیرهای خیز برداشته تحت تحریک الکترواستاتیک در یک سیستم با هر دو الکتروود متحرک

که در آن،  $\gamma = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$  با جایگذاری نیروی محوری و گشتاور خمشی بدست آمده از روابط (۷) در روابط (۱۱)، معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر برحسب مؤلفه‌های میدان جابجایی به صورت (۱۲) خواهد بود.

$$\gamma \ddot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) - B w'' \right] = 0 \quad (12-الف)$$

$$\gamma \ddot{w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) - B w'' \right] w' - \left[ A \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) - B w'' \right] w'' - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) - D w'' \right] = F_{es} \quad (12-ب)$$

که در آن،  $A$  و  $B$  و  $D$  ضرایب سختی میکروتیر ساخته شده از ماده تابعی مدرج بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۳].

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} E(1, z, z^2) dz \quad (13)$$

شایان ذکر است، با توجه به قابل صرف نظر بودن شتاب درون صفحه‌ای نسبت به شتاب عرضی سازه در روابط (۱۳)، می‌توان از جمله  $\ddot{u}$  در برابر  $\ddot{w}$  صرف نظر نمود [۲۸]. در ادامه با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۲-الف)، می‌توان جابجایی محوری ( $u$ ) را برحسب جابجایی عرضی ( $w$ ) به صورت تحلیلی محاسبه کرده و مطابق رابطه (۱۴) بدست آورد.

$$u' = -\frac{1}{2} w'^2 + \frac{B}{A} w'' + C_1 \quad (14-الف)$$

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x w'^2 dx + \frac{B}{A} w' + C_1 x + C_2 \quad (14-ب)$$

همچنین شرایط مرزی مسئله برای یک میکروتیر دو طرف گیردار، به صورت رابطه (۱۵) خلاصه می‌شوند.

$$u(0) = u(L) = w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0 \quad (15)$$

با اعمال شرایط مرزی مربوط به میکروتیر دو طرف گیردار ارائه شده در رابطه (۱۵)، ثابت انتگرالی  $C_1$  و  $C_2$  به صورت رابطه (۱۶) قابل محاسبه می‌باشند.

$$C_1 = \frac{1}{2L} A \int_0^L w'^2 dx, \quad C_2 = 0 \quad (16)$$

با جایگذاری از رابطه (۱۴-الف) در معادله (۱۲-ب)، معادله حاکم بر حرکت میکروتیر غیرخطی ساخته شده از

$$\hat{w}_1(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(\hat{x}) u_i(\hat{t}) \quad (23\text{-الف})$$

$$\hat{w}_2(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(\hat{x}) v_i(\hat{t}) \quad (23\text{-ب})$$

که در آن،  $u_i(\hat{t})$  و  $v_i(\hat{t})$  به ترتیب مختصات تعمیم یافته متناظر با  $\hat{w}_1$  و  $\hat{w}_2$  بوده و  $\varphi_i(\hat{x})$  نیز توابع پایه تقریب زنده میدان جابجایی می‌باشند. در این راستا شایان ذکر است، به دلیل شباهت وضعیت تغییر شکل یافته میکروتیر به شکل مود اول خطی آن، می‌توان با دقت خوبی از اثر سایر مودها صرف نظر کرده و از تقریب یک جمله‌ای استفاده کرد [۲۷]. بر این اساس خیز میکروتیرها را می‌توان به صورت روابط (۲۴) نوشت.

$$\hat{w}_1(\hat{x}, \hat{t}) = \psi(\hat{x}) \zeta_1(\hat{t}) \quad (24\text{-الف})$$

$$w_2(\hat{x}, \hat{t}) = \psi(\hat{x}) \zeta_2(\hat{t}) \quad (24\text{-ب})$$

که در آن،  $\psi(\hat{x})$  شکل مود خطی و نامیرای اول میکروتیر دو طرف گیردار است که به گونه‌ای نرمال شده است تا  $\zeta_1(\hat{t})$  و  $\zeta_2(\hat{t})$  به ترتیب خیزهای نقاط میانی میکروتیرهای بالایی و پایینی سیستم را توصیف نمایند؛ بنابراین  $\psi(\hat{x})$  به صورت رابطه (۲۵) تعریف می‌شود [۳۰].

$$\psi(\hat{x}) = \Lambda \{ \cosh(\gamma \hat{x}) - \cos(\gamma \hat{x}) - \sigma [\sinh(\gamma \hat{x}) - \sin(\gamma \hat{x})] \} \quad (25)$$

که در آن [۳۰].

$$\Lambda = 0.6297, \quad \gamma = 4.7300, \quad \sigma = 0.9825 \quad (26)$$

مدل کاهیده شده حاکم بر سیستم براساس روش باقی‌مانده وزن دار گلرکین با جایگذاری از روابط (۲۴) در معادلات (۲۱) و ضرب طرفین آن‌ها در  $\psi(\hat{x})$  با انتگرال گیری روی کل دامنه از صفر تا یک، به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_1 + K_{1,1} \zeta_1 + K_{2,1} \zeta_1^3 \\ = \beta \int_0^1 \frac{\psi}{(1 - \zeta_1 \psi - \zeta_2 \psi)^2} d\hat{x} \end{aligned} \quad (27\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_2 + K_{1,2} \zeta_2 + K_{2,2} \zeta_2^3 \\ = \beta \int_0^1 \frac{\psi}{(1 - \zeta_1 \psi - \zeta_2 \psi)^2} d\hat{x} \end{aligned} \quad (27\text{-ب})$$

که در آن‌ها

که در آن‌ها

$$H_1 = D_1 - \frac{B_1^2}{A_1}, \quad H_2 = D_2 - \frac{B_2^2}{A_2} \quad (19)$$

جهت سادگی و جلوگیری از بروز خطاهای محاسباتی در پاسخ سیستم، معادلات حاکم بر حرکت سیستم بی‌بعد می‌شوند. بدین منظور، با توجه به روابط (۱۸)، متغیرهای بی‌بعد زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\hat{x} = \frac{x}{d}, \quad \hat{w} = \frac{w}{d}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (20)$$

با جایگذاری متغیرهای بی‌بعد داده شده در رابطه (۲۰) در معادله حرکت (۱۸)، معادلات بی‌بعد حاکم بر حرکت به صورت روابط (۲۱) بدست خواهند آمد. جزییات روند بی‌بعد سازی در پیوست ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{w}}_1 + \hat{w}_1'''' = \frac{\beta}{(1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2} \\ + \left( \alpha^2 \lambda_1 \int_0^1 \hat{w}_1'^2 d\hat{x} \right) \hat{w}_1'' \end{aligned} \quad (21\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ddot{\hat{w}}_2 + \frac{H_2}{H_1} \hat{w}_2'''' = \frac{\beta}{(1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2} \\ + \left( \alpha^2 \lambda_2 \int_0^1 \hat{w}_2'^2 d\hat{x} \right) \hat{w}_2'' \end{aligned} \quad (21\text{-ب})$$

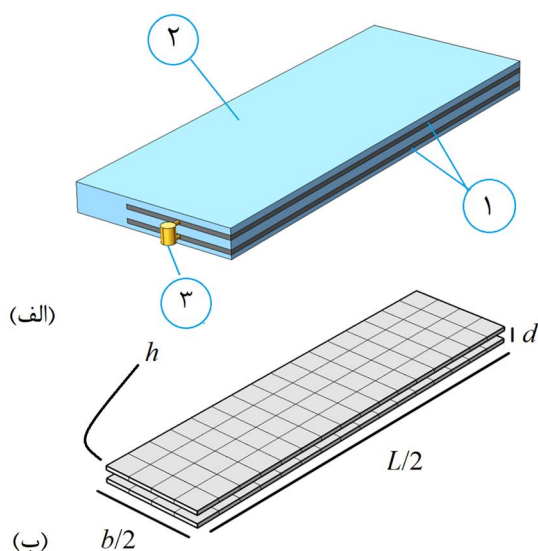
که در آن‌ها پارامترهای بی‌بعد به شرح زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} T = \sqrt{\frac{\gamma_1 L^4}{H_1}}, \quad \beta = \frac{\varepsilon L^4 V^2}{2d^3 H_1}, \quad \alpha = \frac{d}{h} \\ \lambda_1 = \frac{A_1 h^2}{2H_1}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2 h^2}{2H_2} \end{aligned} \quad (22)$$

## ۲-۴- اعمال روش گلرکین و تعیین مدل کاهیده شده حاکم بر حرکت سیستم

با توجه به غیرخطی بودن روابط (۲۱)، این معادلات به صورت دقیق قابل حل نخواهند بود. بر این اساس از روش باقیمانده وزن دار گلرکین به عنوان یک راه حل تقریبی استفاده خواهد شد [۲۹]. در این روش می‌توان خیز میکروتیرها را به صورت ترکیبی از توابع پایه مستقل خطی نوشت، به طوری که شرایط مرزی جابجایی و نیرویی مسأله را اقلان کنند [۲۷]. بدین ترتیب خواهیم داشت:

در پژوهش‌های گذشته مواد تابعی مدرج عموماً به صورت لایه‌ای مدل‌سازی می‌شدند. در این نوع مدل‌سازی، میکروتیر در راستای ضخامت به لایه‌های متعددی تقسیم می‌شود. این تقسیم‌بندی منجر به افزایش حجم محاسبات و همچنین کاهش دقت نتایج بدست آمده می‌شود. جهت رفع این محدودیت باید خواص مواد بصورت تابعی از  $z$  به نرم‌افزار معرفی گردند. نرم‌افزار اجزاء محدود کامسول [۲۲] از قابلیت تعریف خواص مواد به صورت تابعی از  $z$  برخوردار است که مدل‌سازی پژوهش حاضر نیز براساس این قابلیت انجام شده است. بدین ترتیب حجم محاسبات به طرز قابل توجهی کاهش یافته و نتایج بدست آمده از دقت خوبی برخوردار می‌باشند. بدین منظور با تعریف خواص مکانیکی مواد مورد استفاده در ماده تابعی مدرج در بخش پارامترها و سپس تعریف نحوه تغییر جنس مواد در راستای ضخامت براساس رابطه (۱) در بخش متغیرها، ماده تابعی مدرج مدل‌سازی می‌شود. شایان ذکر است، در پژوهش حاضر هر دو الکتروود هم‌جنس و با ابعاد یکسان در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۳- الف) نمای برش خورده از مدل شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار کامسول: ۱- میکروتیرهای متحرک دو طرف گیردار ۲- محیط اطراف و فضای بین دو الکتروود (هوا) ۳- منبع اختلاف پتانسیل الکتریکی و ب) مدل المان بندی شده

$$K_{1,1} = \int_0^1 \psi(x) \psi(x)'''' d\hat{x} \quad (28\text{-الف})$$

$$K_{1,2} = \int_0^1 \psi(x) \psi(x)'''' d\hat{x} \quad (28\text{-ب})$$

$$K_{2,1} = \alpha \left( \int_0^1 \psi(x)'^2 d\hat{x} \right)^2 \quad (28\text{-ج})$$

$$K_{2,2} = \alpha \left( \int_0^1 \psi(x)'^2 d\hat{x} \right)^2 \quad (28\text{-د})$$

روابط (۲۷) معادلات کاهیده شده حاکم بر حرکت میکروتیرهای غیرخطی ساخته شده از مواد تابعی مدرج در حالت دینامیکی می‌باشند که برای حل آن از روش رانج-کوتا (دستور ode45 نرم‌افزار متلب) استفاده خواهد شد [۳۱]. در صورت صرف نظر از اثر اینرسی در روابط (۲۷) نیز، معادلات حاکمه در حالت استاتیکی بدست می‌آید که از روش نیوتن-رافسون (دستور fsolve نرم‌افزار متلب) برای حل آن استفاده می‌شود [۳۱]؛ همچنین ذکر این نکته الزامی است که معادلات بدست آمده از نظر هندسی غیرخطی هستند که با صرف نظر از مقدار ضریب آلفا در این روابط می‌توان به معادلات خطی از نظر هندسی دست یافت.

### ۳- مدل‌سازی المان محدود

بخش حاضر به تشریح روند مدل‌سازی اجزاء محدود مسأله اختصاص یافته است. جهت مدل‌سازی مسأله در نرم‌افزار کامسول [۲۲]، از شرایط کوپل فیزیکی الکترومکانیکی<sup>۱</sup> استفاده شده است. قیود مکانیکی حاکم بر مسأله نیز در بخش فیزیک مکانیک با تعریف نمودن میکروتیرها به عنوان ماده الاستیک خطی و همچنین انتخاب شرط مرزی دو سر گیردار تعیین می‌گردند. در بخش فیزیک الکتروسیسته، با تعریف نمودن جریان الکتروسیسته، اختلاف پتانسیل بین دو الکتروود به صورت پارامتر به سیستم معرفی می‌شود. جهت تحلیل مسأله نیز میکروسازه با استفاده از المان آجری شبکه-بندی می‌شود؛ همچنین به منظور کاهش زمان انجام محاسبات از مدل یک چهارم با شرایط مرزی تقارن استفاده شده است. شکل ۳ مدل اجزاء محدود میکروتیر حاضر به طول  $L$  ضخامت  $h$  و عرض  $b$  را نمایش می‌دهد.

<sup>۱</sup> Electromechanic



ماده همگن، با انتخاب مقدار صفر برای توان کسرحجمی، می‌توان اختلاف پتانسیل کشیدگی استاتیکی و دینامیکی را برای سیستمی از جنس سیلیکون محاسبه کرد.

جدول ۳ اختلاف پتانسیل کشیدگی استاتیکی و دینامیکی محاسبه شده برای میکروتیری از جنس سیلیکون را با نتایج منتشر شده توسط عسکری و طهانی [۲۹] در یک سیستم تک الکتروند متحرک مقایسه می‌کند. همان‌طور که از جدول ۳ دیده می‌شود، نتایج مدل کاهیده شده حاضر با یافته‌های عسکری و طهانی [۲۹] علاوه بر آنچه از طریق شبیه‌سازی اجزاء محدود بدست می‌آید، برای میکروتیری ساخته شده از جنس همگن در سیستمی با یک الکتروند متحرک به خوبی مطابقت می‌کند.

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج حاضر برای سیستم‌های تابعی مدرج، میکروتیری ساخته شده از جنس آلومینا و آلومینیوم به ترتیب با مشخصات مکانیکی و هندسی داده شده در جدول‌های ۴ و ۵ و توان کسر حجمی ۵ در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. اختلاف پتانسیل کشیدگی استاتیکی و دینامیکی این میکروتیر در سیستمی با یک الکتروند متحرک در جدول ۶ با نتایج منتشر شده توسط عباس‌نژاد و رضازاده [۱۵] مقایسه شده است. بر اساس نتایج ارائه شده در جدول ۶، مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از مدل کاهیده شده

**جدول ۳- صحنه‌گذاری ولتاژ کشیدگی استاتیکی و دینامیکی در سیستمی با یک الکتروند متحرک و مشخصات هندسی و مکانیکی مطابق با مقادیر داده شده در جداول ۱ و ۲**

هنگامی که  $n = 0$  است

روش حل	عسکری و طهانی [۲۹]	پژوهش حاضر (گلرکین)	پژوهش حاضر (کامسول)
$V_{SPI} (V)$	۳,۳۸	۳,۳۸	۳,۴۵
$V_{DPI} (V)$	۳,۱۱	۳,۱۱	۳,۱۵

**جدول ۴- مشخصات مکانیکی ماده تابعی مدرج ساخته شده از آلومینا و آلومینیوم**

ماده	$E (Gpa)$	$\rho (kg/m^3)$	$\nu$
آلومینا	۳۹۰	۳۹۶۰	۰,۲۲
آلومینیوم	۷۰	۲۷۰۰	۰,۲۲۸

به‌منظور تحلیل استاتیکی مسأله در نرم افزار کامسول [۲۲]، از حل گر نیوتن رافسون جفت شده در حالت بسیار غیرخطی<sup>۱</sup> استفاده شده است؛ همچنین در تحلیل دینامیکی مسأله نیز حل گر رانج-کوتا<sup>۲</sup> با گام زمانی به اندازه کافی کوچک نسبت به دوره طبیعی سازه، به خدمت گرفته شده است. لازم بذکر است، در تمام تحلیل‌ها با افزایش تعداد المان‌ها به اندازه کافی، از همگرایی نتایج اجزاء محدود اطمینان حاصل گردیده است.

#### ۴- نتایج

##### ۴-۱- مقایسه و صحنه‌گذاری

به‌منظور صحنه‌گذاری نتایج، ابتدا میکروتیری ساخته شده از جنس سیلیکون و طلا به صورت تابعی مدرج به ترتیب با خواص مکانیکی و مشخصات هندسی داده شده در جداول ۱ و ۲ در نظر گرفته می‌شود.

**جدول ۱- مشخصات مکانیکی ماده تابعی مدرج ساخته شده از سیلیکون و طلا**

ماده	$E (Gpa)$	$\rho (kg/m^3)$	$\nu$	$\epsilon_r$
سیلیکون	۱۶۹	۲۳۳۲	۰,۳	۱۱,۶
طلا	۷۰	۱۹۳۰۰	۰,۴۴	۹,۶

**جدول ۲- مشخصات هندسی میکروتیر ساخته شده از ماده تابعی مدرج متشکل از سیلیکون و طلا**

$h (\mu m)$	$d (\mu m)$	$b (\mu m)$	$L (\mu m)$
۱,۵	۲	۱۰۰	۹۰۰

بر اساس رابطه (۱) در صورت میل کردن توان کسر حجمی به سمت بی‌نهایت و یا اتخاذ مقدار صفر، میکروتیر ساخته شده از ماده تابعی مدرج حاضر، به سیستمی با جنس واحد ساده می‌شود. بر این اساس به منظور صحنه‌گذاری نتایج برای یک سیستم میکروالکترومکانیکی تشکیل شده از یک

<sup>۱</sup> Fully Coupled Highly Non-Linear Newton Raphson Procedure

<sup>۲</sup> Runge-Kutta

جدول ۵- مشخصات هندسی میکروتیر ساخته شده از ماده تابعی مدرج متشکل از آلومینا و آلومینیوم

$L(\mu\text{m})$	$b(\mu\text{m})$	$d(\mu\text{m})$	$h(\mu\text{m})$
۵۰۰	۹۰	۲	۶

جدول ۶- صحنه‌گذاری اختلاف پتانسیل کشیدگی استاتیکی و دینامیکی در سیستمی با یک الکتروود متحرک و مشخصات هندسی و مکانیکی مطابق با مقادیر داده شده در جداول ۴ و ۵ هنگامی که  $n = 5$  است

روش حل	عباس‌نژاد و رضازاده [۱۵]	پژوهش حاضر (گلرکین)	پژوهش حاضر (کامسول)
$V_{SPI} (V)$	۱۰۵,۰۸	۱۰۳,۰۰	۱۰۷,۳۰
$V_{DPI} (V)$	۹۳,۷۵	۹۳,۹۶	۹۵,۰۰

حاضر و یافته‌های مستخرج از شبیه‌سازی اجزاء محدود بسیار عالی مطابقت می‌کنند با آنچه توسط عباس‌نژاد و رضازاده [۱۵] گزارش شده است.

جهت صحنه‌گذاری نتایج پژوهش پیش‌رو برای سیستم-های تابعی مدرج با هر دو الکتروود متحرک، شکل ۴ تغییرات خیز نقطه میانی میکروتیر حاضر را برحسب افزایش ولتاژ ورودی برای ریزسازه‌ای ساخته شده از سیلیکون و طلا با توان کسرجمعی ۱ و خواص داده شده در جداول ۱ و ۲ با

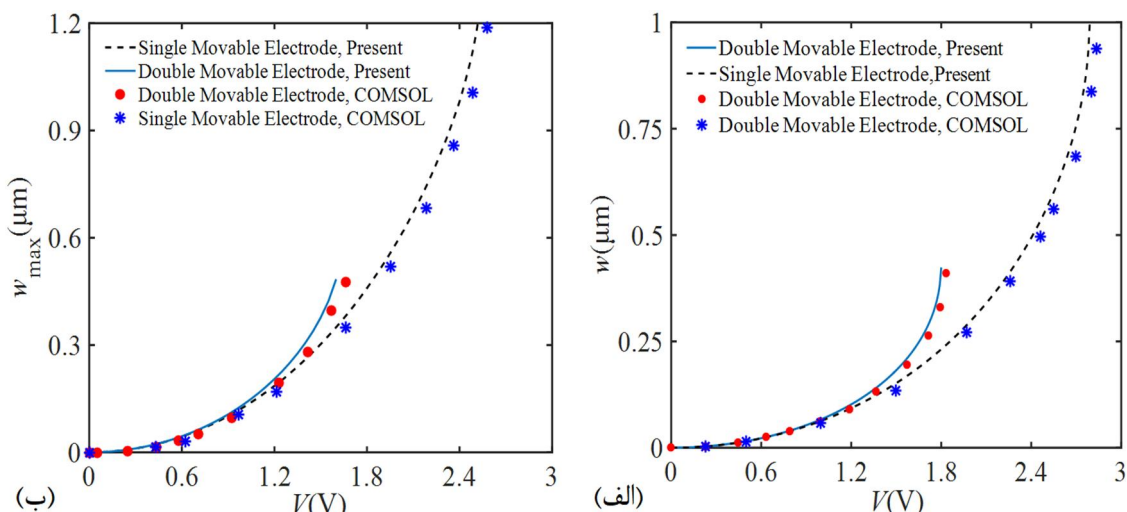
یافته‌های حاصل از شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار اجزاء محدود کامسول [۲۲] مقایسه می‌کند؛ همچنین به‌منظور مقایسه بهتر تأثیر قابلیت حرکت هر دو الکتروود بر مرز ناپایداری سیستم، مقادیر ولتاژهای کشیدگی استاتیکی و دینامیکی سیستم مورد بررسی در شکل ۴، در جدول ۷ نیز گزارش شده است. براساس نتایج ارائه شده در شکل ۴ و جدول ۷ دیده می‌شود، یافته‌های پیش‌رو در تطابق کامل با نتایج شبیه‌سازی سه‌بعدی قرار دارند.

همان‌طور که از نتایج گزارش شده در شکل ۴ و جدول ۷ مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن قابلیت حرکت برای الکتروود ثابت منجر به کاهش شدید ۳۵ درصدی ولتاژ کشیدگی در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی می‌شود؛ چراکه در صورت متحرک بودن هر دو الکتروود، فاصله بین آن‌ها با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی کاهش بیشتری می‌یابد که خود موجب تقویت اثر جاذبه الکترواستاتیک شده و وقوع ناپایداری کشیدگی را تسریع می‌کند.

بر اساس نتایج ارائه شده در جدول ۷ مشاهده می‌شود، نسبت ولتاژ کشیدگی دینامیکی به استاتیکی به ترتیب در سیستم‌های تک و دو الکتروود متحرک برابر ۰,۹۱ و ۰,۹۲ است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، تأثیر اینرسی در سیستم پیش‌رو با اعمال قابلیت حرکت به الکتروود ثابت آن اندکی کاهش می‌یابد. شایان ذکر است، برای تعمیم این نتیجه به سایر سیستم‌های با هر دو الکتروود متحرک نیاز به بررسی جامع‌تری وجود دارد که موضوع قسمت ۴-۲ است.

جدول ۷- مقایسه مقادیر اختلاف پتانسیل کشیدگی استاتیکی و دینامیکی در سیستم‌های با یک و دو الکتروود متحرک (مشخصات هندسی و مکانیکی مطابق است با آنچه در شکل ۴ در نظر گرفته شده است)

سیستم دو الکتروود متحرک (گلرکین)	سیستم دو الکتروود متحرک (کامسول)	سیستم تک الکتروود متحرک (گلرکین)	سیستم تک الکتروود متحرک (کامسول)
$V_{SPI} (V)$	۱,۸۰	۱,۸۴	۲,۸۴
$V_{DPI} (V)$	۱,۶۵	۱,۷۱	۲,۶۰



شکل ۴- تغییرات خیز نقطه میانی میکروتیر بر حسب تغییرات پتانسیل در حالات الف) استاتیکی و ب) دینامیکی، مشخصات هندسی و مکانیکی مطابق با مقادیر داده شده در جداول ۱ و ۲ هنگامی که  $n = I$  است، در نظر گرفته شده است

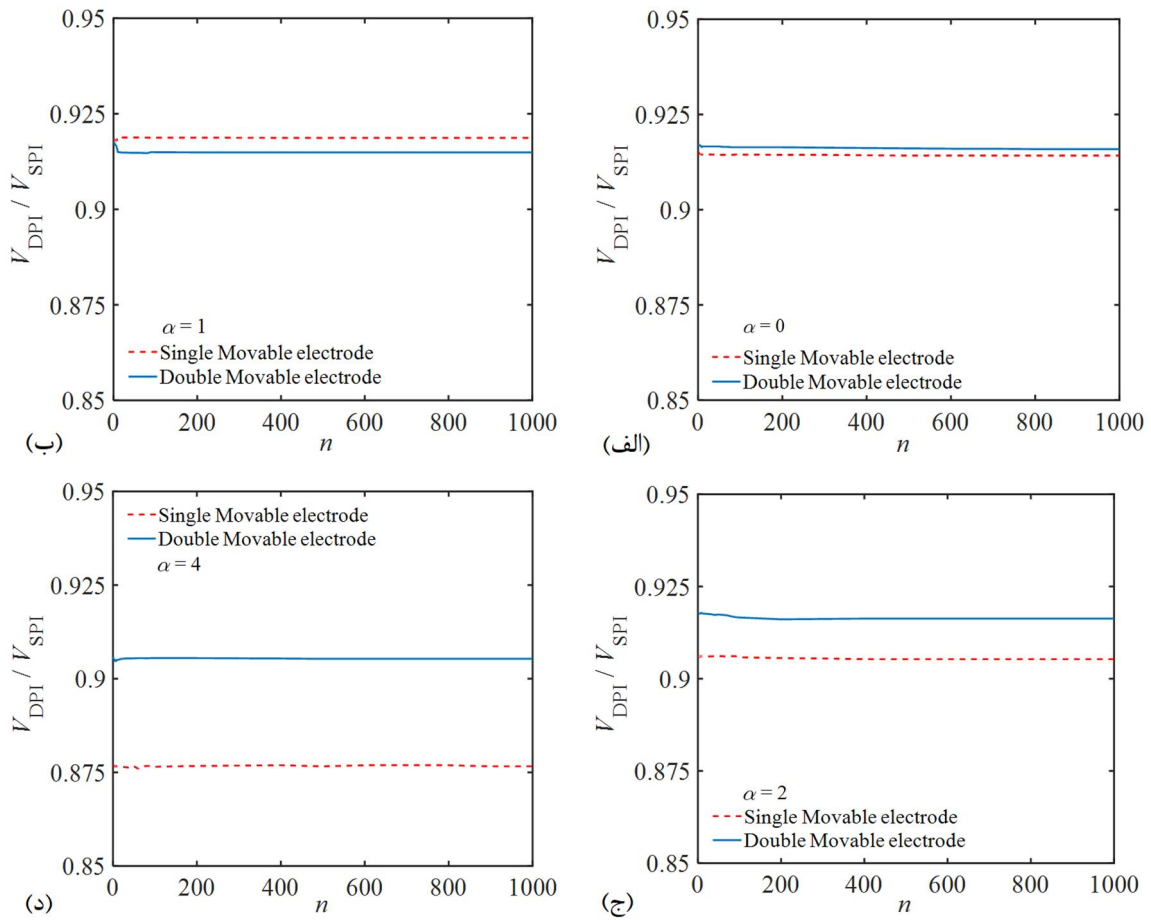
### ۴-۳- مقایسه اثر حالت غیرخطی هندسی و تغییر جنس مواد به صورت تابعی مدرج بر پاسخ سیستم‌های یک و دو الکتروود متحرک

همان‌طور که در ادبیات پیشین نیز اشاره گردید، جهت در نظر گرفتن اثر جملات غیرخطی هندسی بر مرز ناپایداری کشیدگی از تئوری غیرخطی فون کارمن استفاده می‌شود. بر این اساس در سیستم‌هایی که خیز طی شده توسط میکروتیر از نصف ضخامتش بیشتر است، نمی‌توان از اثر جملات غیرخطی هندسی چشم‌پوشی کرد [۲۶].

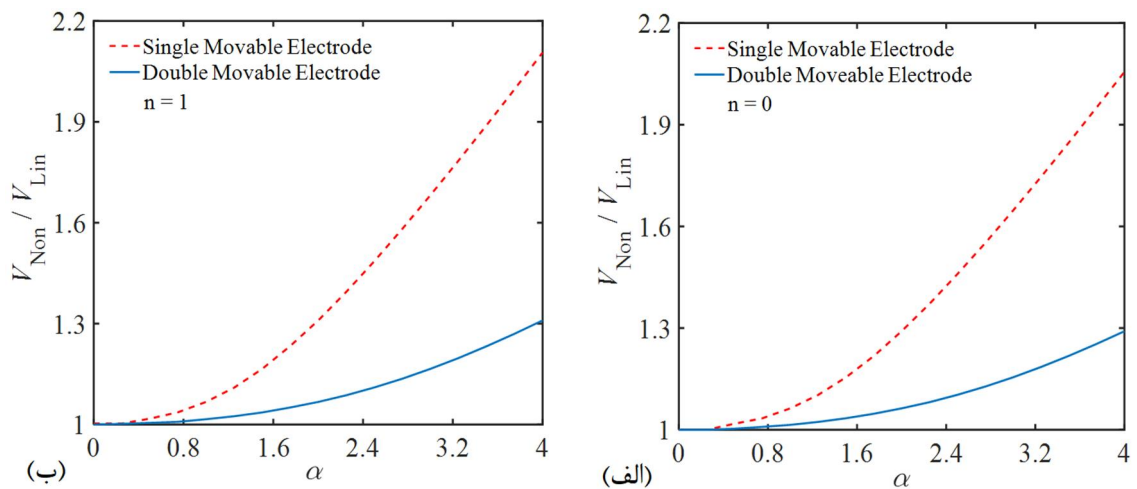
شکل‌های ۶ و ۷ نسبت ولتاژ کشیدگی غیرخطی را به مقدار محاسبه شده از طریق تئوری تیر اویلر-برنولی خطی بر حسب تغییرات پارامتر فاصله اولیه دو الکتروود به ترتیب برای حالات استاتیکی و دینامیکی نشان می‌دهند. براساس نمودارهای ارائه شده در این دو شکل، اثر جملات غیرخطی هندسی در حالات استاتیکی و دینامیکی حدوداً یکسان است؛ همچنین مشاهده می‌شود که تأثیر این جملات به ازای مقادیر کوچک پارامتر فاصله اولیه بین دو الکتروود ( $\alpha < 0.5$ )، در سیستم‌های با یک و یا دو الکتروود متحرک قابل صرف‌نظر خواهد بود. این در حالیست که با افزایش  $\alpha$ ، تأثیر جملات غیرخطی هندسی شدیداً افزایش خواهد یافت. مطابق نتایج رسم شده در شکل‌های ۶ و ۷، تأثیر جملات غیرخطی هندسی بر مرز ناپایداری کشیدگی در سیستم‌های تک

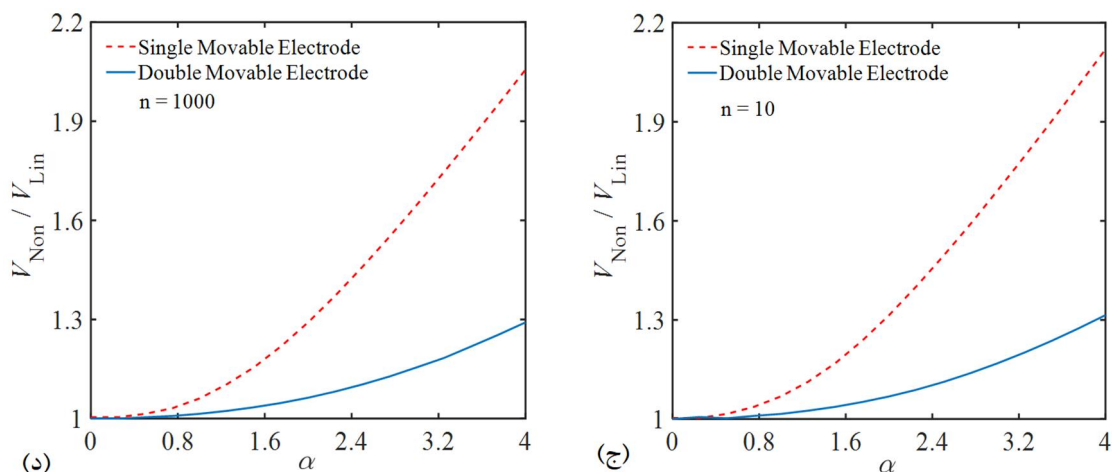
### ۴-۲- مقایسه اثر اینرسی بر پاسخ سیستم تک الکتروود و سیستم با هر دو الکتروود متحرک ساخته شده از مواد تابعی مدرج

به‌منظور مقایسه اثر اینرسی در سیستم‌های تک الکتروود متحرک با سیستم‌هایی که در آن‌ها هر دو الکتروود متحرک هستند، تغییرات نسبت ولتاژ کشیدگی دینامیکی به مقدار استاتیکی آن بر حسب تغییرات توان کسر حجمی به ازای مقادیر مختلف پارامتر فاصله اولیه بین دو الکتروود در این سیستم‌ها در شکل ۵ ترسیم شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که تغییرات توان کسرحجمی اثر چندانی بر نسبت ولتاژ کشیدگی دینامیکی به مقدار استاتیکی آن در یک سیستم میکروالکترومکانیکی ندارد. به همین سبب با تقریب بسیار خوبی می‌توان اثر اینرسی بر سیستم را مستقل از نوع توزیع ماده در جسم دانست. همچنین مشاهده می‌شود که در سیستم‌هایی با مقادیر کوچک  $\alpha$ ، تفاوت چندانی بین اثر اینرسی در سیستم‌های تک و دو الکتروود متحرک نبوده و این مقدار همان ۰/۹۲ گزارش شده در پژوهش‌های پیشین برای سیستم‌های خطی هندسی خواهد بود [۱۵]. این در حالیست که افزایش  $\alpha$  در هر دو سیستم تک و دو الکتروود متحرک موجب افزایش اثر اینرسی می‌شود. هرچند این تأثیر در سیستم‌های تک الکتروود متحرک بیشتر است.

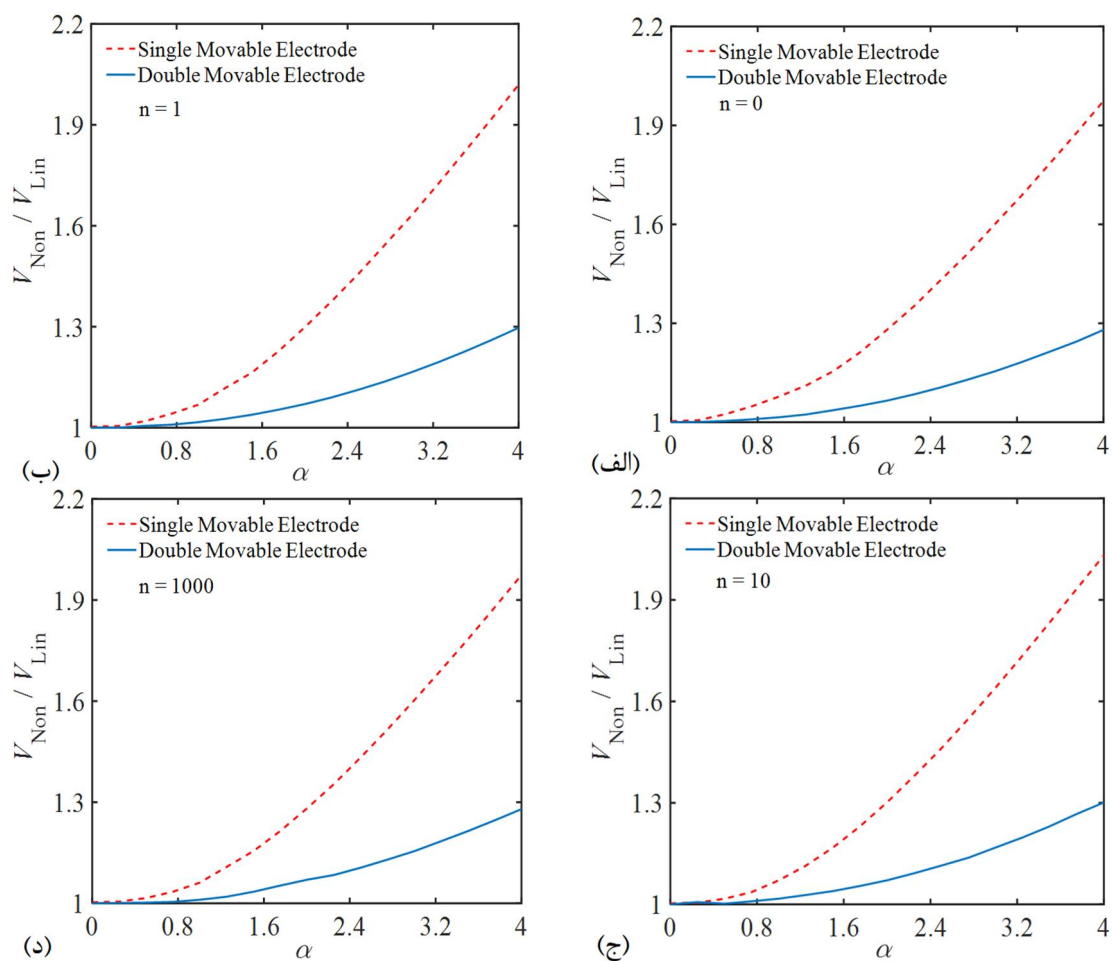


شکل ۵- نمودار تغییرات نسبت ولتاژ کشیدگی دینامیکی به مقدار استاتیکی آن بر حسب تغییرات کسر حجمی





شکل ۶- اثر جملات غیر خطی هندسی بر مرز ناپایداری کشیدگی استاتیکی بر حسب تغییرات پارامتر فاصله اولیه بین دو الکترود



شکل ۷- اثر جملات غیر خطی هندسی بر مرز ناپایداری کشیدگی دینامیکی بر حسب تغییرات پارامتر فاصله اولیه بین دو الکترود

الکترون متحرک، بیشتر از سیستم‌هایی است که در آن‌ها هر دو الکترون قابلیت حرکت دارند؛ چرا که براساس نتایج شکل ۴ میکروتیر در این سازه‌ها، خیزهای بزرگتری را پیش از مواجه شدن با ناپایداری کشیدگی تجربه می‌کند. علاوه بر این نتایج بدست آمده حاکی از آن است که افزایش کسر حجمی تاثیر قابل توجهی بر جملات غیرخطی هندسی در هر دو سیستم یک و دو الکترون متحرک نداشته و می‌توان این مشخصه را تقریباً مستقل از توزیع ماده دانست.

### ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای غیرخطی ساخته شده از مواد تابعی مدرج تحت اعمال ناگهانی اختلاف پتانسیل الکتریکی در یک سیستم میکروالکترومکانیکی با هر دو الکترون متحرک، مورد بررسی قرار گرفته است. جهت استخراج معادله حاکم بر مسأله، ابتدا رابطه کرنش- جابه‌جایی میکروتیر براساس تئوری غیرخطی فون کارمن بدست آمده است. در ادامه معادله حاکم بر حرکت سیستم نیز با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردیده و با استفاده از تقریب تک مودی در روش باقیمانده وزن‌دار گلرکین به یک معادله مقدار اولیه غیرخطی برحسب خیز نقطه میانی میکروتیر کاهیده شده است. برای سیستم‌های با یک الکترون متحرک یافته‌های استاتیکی و دینامیکی با نتایج موجود در ادبیات صحه‌گذاری شدند؛ همچنین نتایج بدست آمده برای سیستم‌های با هر دو الکترون متحرک نیز با یافته‌های حاصل از شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار اجزاء محدود کامسول [۲۲] در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی میان آن‌ها مشاهده گردید. در ادامه اثرات اینرسی، جابجایی‌های بزرگ، تغییر جنس ماده سازنده به‌صورت تابعی مدرج و قابلیت حرکت هر دو الکترون بر مرز ناپایداری کشیدگی سیستم مورد بررسی قرار گرفت. مهم‌ترین نتایج حاصل از این بررسی عبارتند از:

- کاهش بیشتر نسبت به سیستم‌های تک الکترون متحرک می‌یابد که این مسأله موجب تقویت جاذبه بین دو الکترون می‌شود. بدین ترتیب اختلاف پتانسیل کشیدگی سیستم کاهش می‌یابد.
- اثر اینرسی در سیستم‌های تک و دو الکترون متحرک به ازای مقادیر کوچک پارامتر فاصله اولیه بین دو الکترون، تقریباً یکسان است.
- تأثیر اینرسی با ازدیاد فاصله اولیه بین دو الکترون در هر دو سیستم تک و دو الکترون متحرک افزایش می‌یابد. هرچند سیستم‌های تک الکترون متحرک بدلیل امکان تجربه خیز بیشتر در محدوده پایدار، با افزایش بیشتری نسبت به سیستم‌های با هر دو الکترون متحرک مواجه می‌شوند.
- تأثیر جملات غیرخطی هندسی در سیستم‌های با یک و دو الکترون متحرک به ازای مقادیر کوچک پارامتر فاصله اولیه بین دو الکترون ( $\alpha < 0.5$ ) در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی قابل صرف نظر است.
- تأثیر جملات غیرخطی هندسی با افزایش فاصله اولیه بین دو الکترون افزایش می‌یابد. هرچند در سیستم‌های با یک الکترون متحرک این افزایش بیشتر از سیستم‌هایی است که در آن‌ها هر دو الکترون قابلیت حرکت دارند.
- اثر توزیع ماده بر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی بسیار اندک است، به طوری که می‌توان با تقریب خوبی آن‌ها را مستقل از نحوه توزیع ماده دانست.

### ۶- پیوست

جزئیات نحوه بی‌بعدسازی معادلات حاکم بر سیستم در این قسمت ارائه می‌شود. بدین منظور با جایگذاری از متغیرهای بی‌بعد داده شده در رابطه (۲۰)، در معادلات حرکت (۱۸) خواهیم داشت:

$$\gamma_1 \ddot{\hat{w}}_1 \left( \frac{d}{T^2} \right) + H_1 \hat{w}_1'''' \left( \frac{d}{L^4} \right) = \frac{\varepsilon V_{DC}^2}{2d^2 (1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2}$$

- در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی، سیستم‌های با هر دو الکترون متحرک ولتاژ کشیدگی کمتری نسبت به سیستم‌های تک الکترون متحرک دارند؛ چراکه با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی، فاصله بین الکترون‌ها در سیستم‌های با هر دو

[5] Lin SM, Lee SJ, Lin CC (2018) The vibration and pull-in mechanism of two coupled elastically restrained beams assembly subjected to electrostatic force. *Mech Adv Mater Struc* 1-12.

[6] Tajalli SA, Zand MM, Ahmadian MT (2009) Effect of geometric nonlinearity on dynamic pull-in behavior of coupled-domain microstructures based on classical and shear deformation plate theories. *Eur J Mech A-Solid* 28(5): 916-925.

[7] Askari AR, Tahani M (2015) Size-dependent dynamic pull-in analysis of beam-type MEMS under mechanical shock based on the modified couple stress theory. *Appl Math Model* 39(2): 934-946.

[8] Naebe M, Shirvanimoghaddam K (2016) Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Appl Mater Today* 5: 223-245.

[9] Andakhshideh A, Maleki S, Marashi SS (2018) Investigation of nonlinear pull-in phenomena in functionally graded micro-beams under electrostatic excitation. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(3): 137-151. (in Persian)

[10] Gharib A, Salehi M, Fazeli S (2008) Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators. *Mat Sci Eng A -Struct* 498(1-2): 110-114.

[11] Kang YA, Li XF (2009) Bending of functionally graded cantilever beam with power-law nonlinearity subjected to an end force. *Int J Nonlin Mech* 44(6): 696-703.

[12] Witvrouw A, Mehta A (2005) The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications. *Mater Sci Forum* 492-493: 255-260.

[13] Hasanyan DJ, Batra RC, Harutyunyan S (2008) Pull-in instabilities in functionally graded microthermoelectromechanical systems. *J Therm Stresses* 31(10): 1006-1021.

[14] Jia XL, Yang J, Kitipornchai S (2010) Characterization of FGM micro-switches under electrostatic and Casimir forces. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*.

[15] Abbasnejad B, Rezazadeh G (2012) Mechanical behavior of a FGM micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure. *Int J Mech Mater Des* 8(4): 381-392.

[16] Zare J (2014) Pull-in behavior analysis of vibrating functionally graded micro-cantilevers under suddenly DC voltage. *J Appl Comput Mech* 1(1): 17-25.

[17] Pourkamali S, Ayazi F (2005) Electrically coupled MEMS bandpass filters: Part I: With coupling element. *Sensor. Actuat A-Phys* 122(2): 307-316.

[18] Chen CY, Li MH, Chin CH, Li CS, Li SS (2014) Combined electrical and mechanical coupling for

$$+ \left( \frac{A_1}{2L} \int_0^L \hat{w}_1'^2 \left( \frac{d}{L} \right)^2 (L) d\hat{x} \right) \hat{w}_1'' \left( \frac{d}{L^2} \right) \quad (\text{پ-۱ الف})$$

$$\gamma_2 \ddot{\hat{w}}_2 \left( \frac{d}{T^2} \right) + H_2 \hat{w}_2'''' \left( \frac{d}{L^4} \right) = \frac{\varepsilon V_{DC}^2}{2d^2(1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2}$$

$$+ \left( \frac{A_2}{2L} \int_0^L \hat{w}_2'^2 \left( \frac{d}{L} \right)^2 (L) d\hat{x} \right) \hat{w}_2'' \left( \frac{d}{L^2} \right) \quad (\text{پ-۱ ب})$$

با تقسیم طرفین روابط (پ-۱) بر عبارت  $H_1 \frac{d}{L^4}$  می توان نوشت:

$$\frac{\gamma_1 L^4}{T^2 H_1} \ddot{\hat{w}}_1 + \hat{w}_1'''' = \frac{\varepsilon V_{DC}^2 L^4}{2H_1 d^3 (1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2}$$

$$+ \frac{A_1 d^2}{2H_1} \left( \int_0^L \hat{w}_1'^2 d\hat{x} \right) \hat{w}_1'' \quad (\text{پ-۲ الف})$$

$$\frac{\gamma_2 L^4}{T^2 H_1} \ddot{\hat{w}}_2 + \frac{H_2}{H_1} \hat{w}_2'''' = \frac{\varepsilon V_{DC}^2 L^4}{2H_1 d^3 (1 - \hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2}$$

$$+ \frac{A_2 d^2}{2H_1} \left( \int_0^L \hat{w}_2'^2 d\hat{x} \right) \hat{w}_2'' \quad (\text{پ-۲ ب})$$

در ادامه مقیاس زمانی  $T$  به گونه ای انتخاب می شود که ضریب جمله  $\hat{w}_1''$  در رابطه (پ-۲ الف) واحد شود. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$T = \sqrt{\frac{\gamma_1 L^4}{H_1}} \quad (\text{پ-۳})$$

نهایتاً با داشتن مقیاس زمانی  $T$ ، روابط (پ-۲) به صورت روابط (۲۱) ساده می شوند؛ همچنین پارامترهای بی بعد مسأله بدست خواهد آمد، به صورت آن چه در رابطه (۲۲) داده شده است.

## ۷- مراجع

[1] Bell DJ, Lu TJ, Fleck NA, Spearing SM (2005) MEMS actuators and sensors: observations on their performance and selection for purpose. *J Micromech Microeng* 15(7): S153.

[2] Hung ES, Senturia SD (1999) Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *J Microelectromech S* 8(4): 497-505.

[3] Nathanson HC, Newell WE, Wickstrom RA, Davis JR (1967) The resonant gate transistor. *IEEE T Electron Dev* 14(3): 117-133.

[4] Taylor GI (1968) The coalescence of closely spaced drops when they are at different electric potentials. *P Roy Soc A-Math Phy* 306(1487): 423-434.

- [24] Batra RC, Porfiri M, Spinello D (2008) Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field. *J Sound Vib* 309(3-5): 600-612.
- [25] Chao PCP, Chiu CW, Liu TH (2008) DC dynamic pull-in predictions for a generalized clamped-clamped micro-beam based on a continuous model and bifurcation analysis. *J Micromech Microeng* 18(11): 115008.
- [26] Reddy JN (2006) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. Taylor & Francis, Philadelphia.
- [27] Reddy JN (2017) *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, New York.
- [28] Younis M (2011) *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*. Springer, New York.
- [29] Askari AR, Tahani M (2014) An alternative reduced order model for electrically actuated micro-beams under mechanical shock. *Mech Res Commun* 57 34-39.
- [30] Balachandran B, Magrab EB (2008) *Vibrations*. Cengage Learning, Toronto.
- [31] Burden RL, Faires DJ (1985) *Numerical analysis*. mode-reconfigurable CMOS-MEMS filters. in: 2014 IEEE 27th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS).
- [19] Napoli M, Zhang W, Turner K, Bamieh B (2005) Characterization of electrostatically coupled microcantilevers. *J Microelectromech S* 14(2): 295-304.
- [20] Caruntu DI, Taylor KN (2012) Reduced order model of two coupled MEMS parallel cantilever resonators under DC and AC voltage near natural frequency. *Int Mech Eng Congress Expo* 395-400.
- [21] Ilyas S, Chappanda KN, Al Hafiz MA, Ramini A, Younis MI (2016) An experimental and theoretical investigation of electrostatically coupled cantilever microbeams. *Sensor Actuat A-Phys* 247: 368-378.
- [22] COMSOL Multiphysics (2016) Version 5.2a. MA 01803. Burlington. (<http://www.comsol.com>).
- [23] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy JN (2003) A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *Int J Mech Sci* 45(3): 519-539.