



## بررسی رفتار دینامیکی و پایداری میکروتیرهای متحرک با خواص مدرج تابعی در جهت طولی

علی فروغی<sup>۱</sup>، مهران صفرپور<sup>۱</sup> و اکبر علی بیگلر<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

<sup>۲</sup> استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

### چکیده

بهدف بهبود کارایی سامانه‌های متحرک محوری، ارتعاشات و پایداری میکروتیرهای رایلی مدرج محوری با حرکت طولی در این مقاله مطالعه شده است؛ همچنین، یک مطالعه پارامتریک مفصل برای توضیح اثر پارامترهای مختلف مانند، درجه‌بندی محوری مواد، طول مشخصه ماده و اینرسی دورانی بر مرزهای پایداری تیرهای رایلی و اویلر-برنولی انجام شده است. فرض شده است که مشخصات مادی سیستم به‌طور پیوسته در راستای طولی به‌صورت خطی یا نمایی تغییر می‌کنند. با به‌کارگیری تئوری گرادین کرنش و روش گسسته‌سازی گالرکین، مسئله مقدار ویژه برای سیستم حل شده است تا فرکانس‌های طبیعی، پیکربندی دینامیکی، آستانه‌های ناپایداری فلاتر و دایورژنس سیستم محاسبه شوند؛ همچنین روابط تحلیلی برای سرعت بحرانی سیستم به‌دست‌آمده‌اند. نقشه‌های پایداری و کانتورهای سرعت بحرانی برحسب توزیع‌های مختلف، مورد آزمون قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند، در حالت چگالی و مدول الاستیک متغیر، به ترتیب تغییرات نمایی و خطی منجر به سیستم پایدارتر می‌شوند؛ همچنین کاهش پارامتر گرادین چگالی و یا افزایش پارامتر گرادین مدول الاستیک، فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد و محدوده‌های پایداری را گسترش می‌دهد، بنابراین تغییرات پارامترهای گرادین چگالی و مدول الاستیک، نقش‌های متضاد در رفتار دینامیکی سیستم دارند.

**کلمات کلیدی:** مواد مدرج محوری؛ پارامتر گرادین؛ تیر متحرک؛ سرعت بحرانی؛ ناپایداری.

## Investigation of Dynamics and Stability Behavior of Axially Moving Micro-Beams with Functionally Graded Property in the Longitudinal Direction

A. Forooghi<sup>1</sup>, M. Safarpour<sup>1</sup>, A. Alibeigloo<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares University., Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares University., Tehran, Iran.

### Abstract

In this paper, in order to improve the efficiency of the moving systems, vibrations and stability of axially functionally graded Rayleigh moving micro-beams are studied. Also, to clarify the influences of various parameters such as axially functionally graded, the length of the material characteristics, and the whirling inertia on the stability boundaries of Rayleigh and Euler-Bernoulli beams, a detailed parametric study is done. It is assumed that the material characteristics of the system change linearly or exponentially in longitudinal direction continuously. To calculate the natural frequencies, dynamics configuration, and divergence and flutter instability thresholds of the system, the strain gradient theory, Galerkin discretization method, and an eigenvalue problem are utilized. In addition, the analytical relations are extracted for the critical velocity of the system. Critical velocity contours and stability maps are examined for different distributions. It is demonstrated that the exponential and linear changes lead to a more stable system in the variable state of density and elastic modulus, respectively. Also, the results indicated that increasing the elastic modulus gradient parameter or decreasing the density gradient parameter results in an increase in the natural frequency of the system and a development in the stability regions. Hence, the alteration in the density and elastic modulus gradient parameters has an opposite role in the dynamic behavior of the system.

**Keywords:** Axial graded materials; Gradient parameter; Moving beam; critical velocity; Instability.

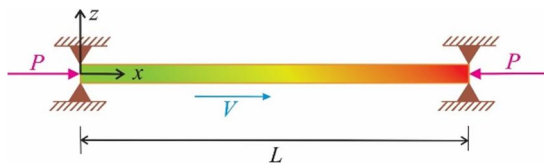
## ۱- مقدمه

تیرهای متحرک محوری به صورت گسترده در صنایع مهندسی مختلف کاربرد دارند. از این رو محققان بی شماری به مدل سازی دینامیکی و مشخصه سازی ارتعاشاتی این سازه ها پرداخته اند و رفتار دینامیکی این سازه ها را از جنبه های گوناگون، مورد بحث قرار داده اند [۸-۱]. در این راستا ویکرت [۹]، براساس تئوری تیر اویلر-برنولی، ارتعاشات غیرخطی تیرهای متحرک تحت فشار را با به کارگیری تئوری اغتشاشات تحلیل کرد؛ همچنین او اثرات کشش اولیه و سختی خمشی را بر ارتعاشات آزاد این سازه ها بررسی کرد. قایش و امابیلی [۱۰]، ارتعاشات غیرخطی اجباری تیرهای متحرک محوری را به صورت عددی مطالعه کردند و پاسخ حالت ماندگار و نقاط انشعاب سیستم را استخراج کردند. آن ها نشان دادند که رفتار نرم شوندگی در دینامیک غیرخطی سیستم، به دلیل ترم های غیرخطی درجه دوم در معادلات حرکت سیستم است. چن و یانگ [۱۱]، پایداری پارامتریک تیرهای ویسکو الاستیک متحرک محوری با سرعت محوری نوسانی را مطالعه کردند. در مقاله ذکر شده، فرکانس های طبیعی، توابع مودال و سرعت بحرانی سیستم به ازای پارامترهای مختلف تعیین شده اند. آن ها نشان دادند که محدوده های ناپایداری در اولین رزونانس پارامتریک اصلی سیستم، بزرگ تر از محدوده های ناپایداری در رزونانس پارامتریک دوم هستند. از و پاکدمیرلی [۱۲]، رفتار دینامیکی تیرهای متحرک محوری با سرعت وابسته به زمان را با استفاده از تئوری اغتشاشات مطالعه کردند. آن ها نشان دادند که نواحی پایداری سیستم با تغییرات دامنه سرعت گسترش می یابند. رفتار ارتعاشاتی و شرایط پایداری تیرهای ویسکو الاستیک تحت شتاب محوری، توسط چن و همکاران [۱۳] بررسی شد. آن ها خصوصیات مواد به کاررفته در سیستم را با تئوری کلونین مدل کردند و اثبات کردند که در رزونانس زیرهارمونیک اول، کاهش تنش و افزایش سرعت متوسط محوری اثرات یکسانی بر آستانه ناپایداری سیستم دارند. در این زمینه مطالعات محدودی نیز، براساس تئوری تیر رایلی و تیموشنکو انجام شده است. به عنوان مثال، ژو و چانگ [۱۴]، ارتعاشات و پایداری تیرهای رایلی چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. با توجه به ویژگی های ژيروسکوپی سیستم آن ها متوجه شدند که با افزایش اینرسی دورانی تیر، پایداری سیستم کاهش می یابد.

دهروه-سمنانی و همکاران [۱۵]، مشخصات ارتعاشی میکروتیرهای متحرک محوری را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند. از نتایج آن ها می توان به فرکانس های وابسته به اندازه و سرعت های بحرانی سیستم به ازای شرایط مرزی دوسر مفصل و دوسر گیردار رسید. جلوگیری از ناپایداری، رزونانس و ارتعاشات ناخواسته، از ملزومات اساسی در طراحی های مهندسی سیستم های متحرک محوری است. تاکنون مهندسان برای کاهش ارتعاشات اضافی سیستم های متحرک محوری، روش های کنترل ارتعاشاتی فعال و غیرفعال مختلفی پیشنهاد داده اند. به عنوان مثال لی و همکاران [۱۶]، کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی نوارهای متحرک محوری را با به کارگیری بازخورد سرعت مرزی در نظر گرفتند. آن ها نشان دادند که با به کارگیری بازخورد خطی منفی سرعت در بالادست یا پایین دست نوار، می توان ارتعاشات سیستم را به خوبی کاهش داد. ژانگ و همکاران [۱۷]، کاهش تطابقی و غیرفعال ارتعاشات یک تیر متحرک محوری متصل به جاذب های غیرخطی را بررسی کردند. آن ها نشان دادند که با تنظیم پارامتر جرم، کارایی جاذب غیرخطی را می توان به خوبی افزایش داد. در تمام مقالات مرور شده بالا، مواد به کار برده شده در سازه از جنس مواد همگن بوده است. در سال های اخیر، مهندسان با تقویت خواص مواد، رفتار مکانیکی سیستم های دینامیکی متحرک را بهبود بخشیده اند. با هدف جلوگیری از محدودیت های سازه ای ممکن، محققان مواد مدرج تابعی را معرفی کردند که یک نوع جدید از مواد مرکب هستند و با تغییرات پیوسته و نرم دو یا چند ماده تشکیل دهنده، از سطحی به سطحی دیگر ساخته شده اند. مواد مدرج محوری نسبت به مواد همگن و لایه ای مرسوم، با ارائه مزایای عالی و برجسته ای همچون، مقاومت خوردگی بهتر، تمرکز تنش کمتر و سختی شکست کمتر، در صنایع پیچیده مهندسی کاربردهای گسترده ای دارند [۱۸-۲۳]. گرچه مواد مدرج محوری در طراحی و ساخت سامانه های متحرک محوری پیشرفته آینده، پتانسیل به کارگیری بالایی فراهم می کنند، با این وجود تحقیقات محدودی در این زمینه انجام شده است. پیووان و سامپایو [۲۴]، ارتعاشات تیرهای لغزان منبسط شونده یا جمع شونده را بررسی کردند که از مواد مدرج محوری تشکیل شده اند. آن ها فرض کردند که

## ۲- مدل سازی ریاضی

در شکل ۱، شماتیک یک تیر متحرک محوری متشکل از مواد مدرج محوری نمایش داده شده است. فرض می‌شود که تیر با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده با سرعت محوری ثابت  $V$  در راستای طولی حرکت می‌کند و تحت بار فشاری محوری  $P$  است. طول، مساحت سطح مقطع و ممان اینرسی تیر به ترتیب با  $L$ ،  $A$  و  $I$  نشان داده می‌شود. چگالی  $(\rho(x))$  و مدول الاستیک تیر  $(E(x))$ ، طبق فرمول‌های (۱-۲) در راستای طول تیر به صورت خطی یا نمایی درجه‌بندی شده‌اند:



شکل ۱- شماتیک میکروتیر مدرج محوری متحرک

$$\rho(x) = \rho_0 g(x) \quad (۱)$$

$$E(x) = E_0 f(x) \quad (۲)$$

که

$$g(x) = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_\rho - 1) \quad (۳-الف)$$

$$g(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_\rho)}{L}} \quad (۳-ب)$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_E - 1) \quad (۴-الف)$$

$$f(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_E)}{L}} \quad (۴-ب)$$

که پارامتر گرادبان چگالی  $(\alpha_\rho)$  و مدول الاستیک  $(\alpha_E)$  به ترتیب بیانگر نسبت چگالی و مدول الاستیک انتهای تیر  $(x=L)$  به ابتدای تیر  $(x=0)$  می‌باشند.

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_L}{\rho_0} \quad (۵)$$

$$\alpha_E = \frac{E_L}{E_0} \quad (۶)$$

همان‌طور که در ادبیات فنی نشان داده شده است، رفتار مکانیکی سازه‌ها در ابعاد میکرو و نانو با ابعاد ماکرو فرق می‌کند و دیگر تئوری کلاسیک برای پیش‌بینی و مدل‌سازی رفتار مکانیکی سازه‌های با ابعاد کوچک صادق نیست. به همین دلیل، تئوری‌های مرتبه بالایی مانند تئوری گرادبان

مشخصات مواد سیستم طبق قانون توانی درجه‌بندی شده‌اند؛ همچنین آن‌ها اثرات مواد تشکیل‌دهنده و شتاب سیستم بر پاسخ دینامیکی را بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که اگر تیر عمدتاً از سرامیک تشکیل شده باشد، میرایی ساختاری اثر کمتری بر ارتعاشات سیستم دارد. سویی و همکاران [۲۵]، ارتعاشات عرضی تیرهای تیموشنکو متحرک محوری ساخته شده از مواد مدرج محوری را در نظر گرفتند. تأثیر پارامترهای مختلفی همچون توان مدرج محوری و نسبت طول به ضخامت بر فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی سیستم توسط آن‌ها، مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج آن‌ها می‌توان دریافت که افزایش نسبت طول به ضخامت، منجر به کاهش سرعت بحرانی می‌شود. کیانی [۲۶]، ارتعاشات طولی و عرضی نانوتیرهای مدرج محوری را بر اساس تئوری غیرمحلی رایلی مطالعه کرد. او اثر پارامتر اندازه و شاخص قانون توانی را بر ناپایداری‌های سیستم بررسی کرد. او نشان داد که تأثیر پارامتر اندازه بر فرکانس سیستم، علاوه بر مرتبه مود، به سرعت سیستم نیز وابستگی دارد. اخیراً، یان و همکاران [۲۷]، ارتعاشات غیرخطی تیرهای مدرج محوری متحرک را با در نظرگیری اثرات غیرخطی هندسی و نیروی محوری مطالعه کردند. آن‌ها با به کار بردن روش چند مقیاسی مستقیم، شرایط رخداد رزونانس زیرهارمونیک را در سیستم را به دست آوردند. نتایج آن‌ها به‌خوبی نشان داد، افزایش قابل توجه در سرعت بحرانی سیستم در اثر افزایش پارامتر سختی تکیه‌گاهی است. براساس اطلاعات نویسندگان، در تمام مطالعات انجام شده روی تیرهای مدرج متحرک محوری، فرض شده است که پیکربندی مواد سیستم در راستای ضخامت تغییر می‌کنند، درحالی‌که علیرغم اهمیت درجه‌بندی خواص مواد در راستای محوری، مطالعه رفتار دینامیکی تیرهای مدرج محوری متحرک تا به حال در ادبیات فنی گزارش نشده است. با توجه به این مطلب، تحلیل دینامیکی و بهبود پایداری تیرهای متحرک محوری دوسرمفصل رایلی با به‌کارگیری مواد مدرج محوری عددی و تحلیلی، مورد مطالعه قرار گرفته است. اثر پارامترهای کلیدی مانند، درجه‌بندی محوری، اینرسی دورانی و سرعت تیر بر مشخصات دینامیکی سیستم‌های متحرک محوری به‌علاوه تعابیر فیزیکی‌شان توضیح داده شده است.

$$v = V \sqrt{\frac{\rho_0 A}{P}}, \beta = \frac{l}{AL^2}, k_f = \sqrt{\frac{E_0 l}{PL^2}}$$

$$f(\xi) = f(x), \lambda(\xi) = g'(x)L, \gamma(\xi) = f'(x)L$$

$$\mu(\xi) = g''(x)L^2, \chi(\xi) = f''(x)L^2 \quad (14)$$

با جایگذاری این پارامترها در معادله (۱۳) به دست می‌آید:

$$g(\xi)(\ddot{\eta} + 2v\dot{\eta}' + v^2\eta'') + \lambda(\xi)(v\dot{\eta} + v^2\eta')$$

$$-g(\xi)\beta(\ddot{\eta}'' + v\dot{\eta}''') - \lambda(\xi)\beta(\dot{\eta}' + v\eta'')$$

$$-g(\xi)v\beta(\dot{\eta}''' + v\eta''''') - \mu(\xi)v\beta(\dot{\eta}' + v\eta'')$$

$$-2\lambda(\xi)v\beta(\eta'' + v\eta''') - \eta'' + k_f^2(f(\xi)\eta'')''$$

$$-\eta^2(f(\xi)\eta''''')'' = 0 \quad (15)$$

پارامترهای  $\beta$ ،  $k_f$  و  $\eta$  به ترتیب فاکتور اینرسی دورانی، سختی خمشی و طول مشخصه ماده نام دارند. این نکته باید بیان شود که معادلات سیستم به ازای  $\beta=0$  به معادلات میکروتیر اولبر-برنولی مدرج محوری متحرک کاهش پیدا می‌کند.

### ۳- روش گسسته سازی

برای گسسته سازی معادله سیستم، جابجایی عرضی تیر طبق معادله (۱۶) در نظر گرفته می‌شود [۳۸-۳۴]:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^n \varphi_r(\xi) q_r(\tau) \quad (16)$$

که در آن  $q_r$  مختصات بی‌بعد تعمیم‌یافته،  $n$  تعداد توابع پایه،  $\varphi_r$  شکل مود قابل قبول برای جابجایی عرضی تیر دو سرمفصل است. با ضرب  $\varphi_s$  در معادله (۱۵)، انتگرال‌گیری بر بازه  $[0, 1]$  و بهره‌گیری از خاصیت تعامد مودها، به دست خواهد آمد [۳۹]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{q}(\tau) = 0 \quad (16)$$

که در آن  $q$  بردار مختصات تعمیم‌یافته،  $M$  ماتریس جرم،  $C$  ماتریس دمپینگ و  $K$  ماتریس سختی سیستم هستند و طبق روابط (۱۷-۲۰) بیان می‌شوند:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_{sr} = \int_0^1 \begin{pmatrix} g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r(\xi) - \\ \beta \left( g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \right) \\ \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad (18)$$

کرنش برای تسخیر اثرات اندازه در ابعاد میکرو معرفی شدند. براساس تئوری گرادبان کرنش، معادله ساختاری وابسته به اندازه تنش برای میکروتیر به شکل مقابل نوشته می‌شود [۳۲-۲۸]:

$$\sigma_x = E(x)\varepsilon_{xx} - l^2 \nabla \cdot (E(x)\nabla \varepsilon_{xx}) \quad (7)$$

که در آن  $l$  پارامتر گرادبان کرنش است و  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ . با در نظرگیری رابطه خطی کرنش-جابجایی برای سیستم موردنظر، کرنش طولی سیستم این‌چنین نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\varepsilon_{xx} = -zw'' \quad (8)$$

که  $w$  جابجایی عرضی سیستم در راستای  $z$  است. ممان خمشی سیستم به صورت مقابل در نظر گرفته می‌شود [۲۸]:

$$M = \int_A y \sigma_x dA_p \quad (9)$$

انرژی کرنشی سیستم را به شکل مقابل می‌توان بازنویسی کرد:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (P(w')^2 - Mw'') dx \quad (10)$$

انرژی جنبشی سیستم این‌چنین بیان می‌شود [۳۳]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A (\dot{w} + Vw')^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) I (\dot{w}' + Vw'')^2 dx \quad (11)$$

طبق اصل همپلتون می‌توان نوشت [۲۰]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۱۰-۱۱) در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$\rho(x)A(\ddot{w} + 2V\dot{w}' + V^2w'') + \rho'(x)A(V\dot{w} + V^2w')$$

$$- \rho(x)I(\ddot{w}'' + V\dot{w}''') - \rho'(x)I(\dot{w}' + Vw'')$$

$$- \rho(x)IV(\dot{w}''' + Vw''''') - 2\rho'(x)IV(\dot{w}'' - Vw''')$$

$$- \rho''(x)IV(\dot{w}' - Vw'') - Pw'' + (E(x)Iw'')''$$

$$- l^2(E(x)Iw''''')'' = 0 \quad (13)$$

برای استخراج معادلات بی‌بعد، پارامترهای زیر معرفی می‌شوند:

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{L}, \tau = \frac{t\sqrt{P}}{L\sqrt{\rho_0 A}}, \eta = \frac{l}{L}$$

### ۵- بحث و نتایج

در جدول ۱ نیز آزمون همگرایی برای روش گالرکین نیز ارائه شده است. در شکل ۲ و ۳، به ترتیب فرکانس‌های طبیعی تیرهای مدرج محوری اویلر-برنولی و رایلی برحسب پارامتر گرادیان ( $\alpha_E = \alpha_p = \alpha$ ) با نادیده‌گیری حرکت طولی نمایش داده شده است. نتایج پژوهش حاضر با مراجع [۴۰-۴۱] همخوانی خوبی دارند. در شکل ۴، قسمت حقیقی سه فرکانس اول تیر متحرک رایلی همگن تحت نیروی کششی با نادیده‌گیری گرادیان طولی مواد نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر با نتایج ارائه شده توسط ژو و چانگ [۱۴] مطابقت خوبی دارد. لازم به ذکر است که برای به‌کارگیری روش گالرکین، در معادله (۱۶) نه مود در نظر گرفته شده است؛ در نتیجه با توجه به دقت نتایج، استفاده از نه مود خمشی منطقی است.

جدول ۱- آزمون همگرایی برای روش گالرکین

( $\beta=0.001, k_f=0.8, u=1, \eta=0$ )

تعداد مود (n)	فرکانس بی‌بعد		
	اول	دوم	سوم
۱	۶/۲۸۱	-	-
۲	۶/۳۰۷	۲۹/۷۹۱	-
۳	۶/۳۲۳	۲۹/۷۹۲	۶۶/۸۸۱
۴	۶/۳۳۵	۲۹/۷۹۳	۶۶/۷۳۲
۵	۶/۳۴۷	۲۹/۷۹۶	۶۶/۹۴۵
۶	۶/۳۵۸	۲۹/۷۹۹	۶۶/۹۵۱
۷	۶/۳۸۲	۲۹/۸۰۶	۶۶/۹۶۲
۸	۶/۳۸۶	۲۹/۸۱۱	۶۶/۹۷۵
۹	۶/۳۸۶	۲۹/۸۱۱	۶۶/۹۷۵

### ۵-۱- اثر پارامتر طول مشخصه ماده

در شکل ۵، فرکانس پایه‌ای سیستم به ازای مقادیر مختلف سختی خمشی و طول مشخصه ماده رسم شده است. همان‌طور که مشخص است، در حالت ماکرو ( $\tau=0$ )، نتایج

$$C_{sr} = \nu \int_0^1 \begin{pmatrix} 2g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) + \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r(\xi) \\ 2g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) \\ -\beta \\ +3\lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) \\ +\mu(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad (19)$$

$$K_{sr} = \nu^2 \int_0^1 \begin{pmatrix} g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r(\xi) \\ g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + 2\lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) \\ -\beta \\ +\mu(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) \end{pmatrix} d\xi + k_f^2 \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''''(\xi) + 2\gamma(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \\ \chi(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) - \eta^2(f(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r^{(6)}(\xi) + \\ 3f'(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r^{(5)}(\xi) + 3f''(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''''(\xi) \\ + f'''(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi)) \end{pmatrix} d\xi \quad (20)$$

### ۴- تحلیل پایداری

معادلات مرتبه دوم به دست آمده را می‌توان به معادلات مرتبه اول زیر کاهش داد:

$$B\dot{Z}(\tau) + EZ(\tau) = 0 \quad (21)$$

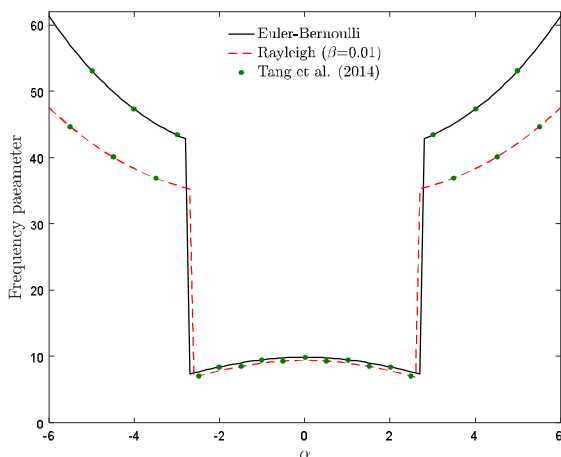
که در آن:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}, Z(\tau) = \begin{bmatrix} q(\tau) \\ \dot{q}(\tau) \end{bmatrix} \quad (22)$$

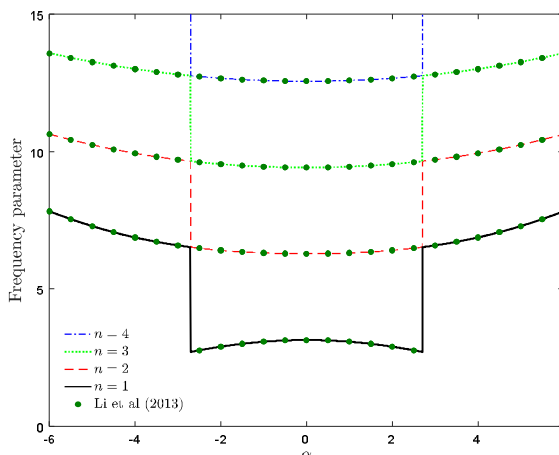
با فرض  $Z(\tau) = Ae^{i\omega\tau}$  می‌توان نوشت:

$$YA - i\omega I = 0 \quad (23)$$

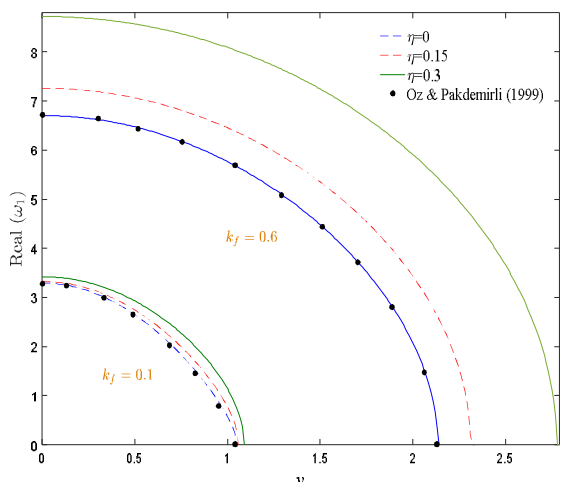
که  $I$  ماتریس همانی و  $Y = -B^{-1}E$  است؛ همچنین  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم است که می‌توان برحسب پارامترهای کلیدی به دست آورد. پایداری سیستم متحرک، تحت اثر علامت قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس است. قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس سیستم، به ترتیب به فرکانس ارتعاشات و ضریب دمپینگ سیستم مربوط است. هنگامی که قسمت حقیقی حداقل یکی از شاخه‌های فرکانس طبیعی سیستم برابر صفر شود، درحالی که قسمت موهومی آن منفی است (یعنی  $\text{Real}(\omega)=0, \text{Image}(\omega)<0$ )، ناپایداری دایورژنس از طریق یک انشعاب چنگالی در سیستم رخ می‌دهد. سرعت مربوط به رخداد دایورژنس به صورت سرعت بحرانی دایورژنس شناخته می‌شود؛ همچنین زمانی که قسمت موهومی حداقل یکی از شاخه‌های فرکانس منفی شود، درحالی که قسمت حقیقی آن مثبت است (یعنی  $\text{Real}(\omega)>0, \text{Image}(\omega)<0$ )، سیستم از طریق انشعاب هاپف، ناپایداری فلا ترا تجربه می‌کند [۱۲].



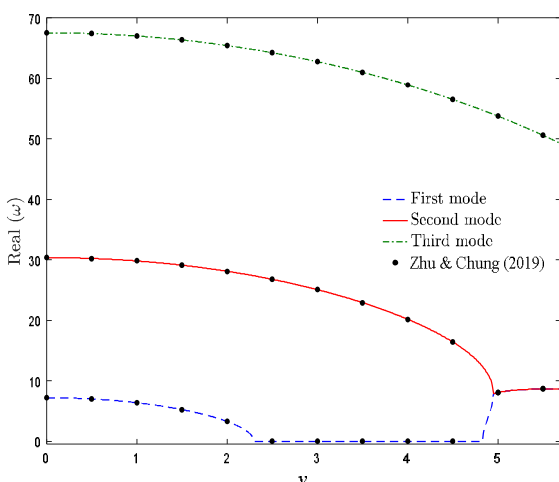
شکل ۳- مقایسه فرکانس‌های پژوهش حاضر با مرجع [۴۱] در نبود اثرات اندازه و حرکت محوری



شکل ۲- مقایسه فرکانس‌های پژوهش حاضر با [۴۰] با حذف اثرات اندازه، حرکت محوری و اینرسی دورانی



شکل ۵- فرکانس اول تیر رایلی متحرک همگن برحسب سرعت و طول‌های مشخصه ماده مختلف و  $\beta=0$



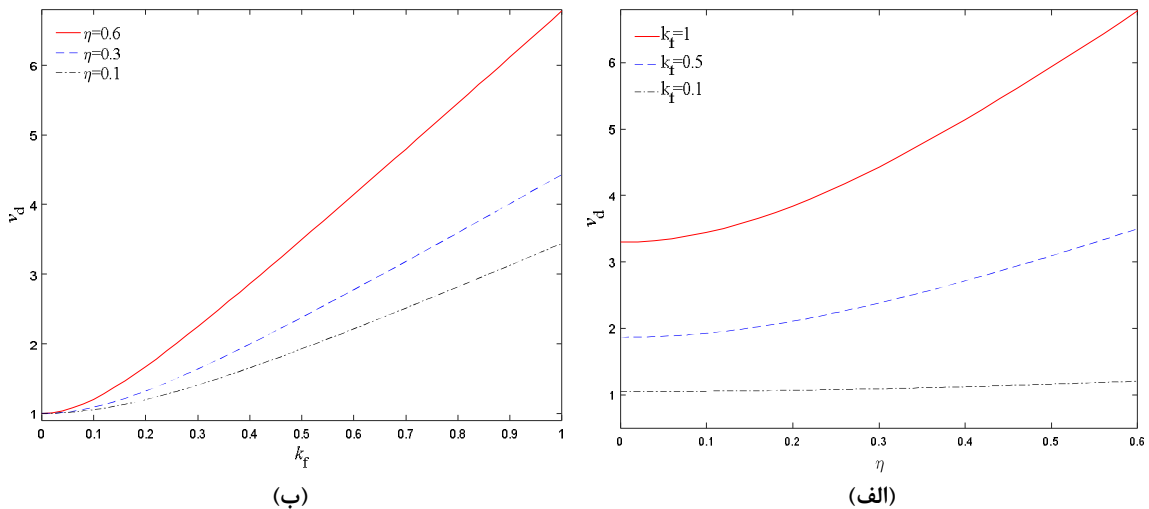
شکل ۴- مقایسه فرکانس‌های پژوهش حاضر در صورت حذف اثرات اندازه و گرادیان مواد  $\beta=0.001, k_f=0.8$

بالاتری مشاهده می‌شود که نشان از پایداری بیشتر شدن سیستم است.

### ۵-۲- اثر پارامتر گرادیان مدول الاستیک

در شکل ۷ (الف و ب)، قسمت حقیقی و موهومی دو فرکانس طبیعی اول سیستم برحسب سرعت تیر متحرک به ازای تغییرات خطی و نمایی مدول الاستیک رسم شده‌اند، هنگامی که  $k_f=0.5$  است. هنگامی که سرعت صفر است، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاملاً حقیقی هستند. با افزایش

استخراجی با مرجع [۱۲] همخوانی دارد. ضمناً از آنجاکه پارامتر طول مشخصه ماده اثر سخت‌شوندگی بر سیستم دارد، لذا هرچه طول مشخصه افزایش یابد، فرکانس سیستم افزایش و سرعت بحرانی سیستم افزایش می‌یابد؛ همچنین اثر پارامتر طول مشخصه بر مودهای بالاتر سیستم مشهودتر است. ضمناً به ترتیب در شکل‌های ۶ (الف-ب)، سرعت بحرانی سیستم برحسب پارامتر طول مشخصه و سختی خمشی رسم شده است. مشاهده می‌شود که هرچه پارامتر طول مشخصه و سختی خمشی بزرگ‌تر باشد، سرعت بحرانی

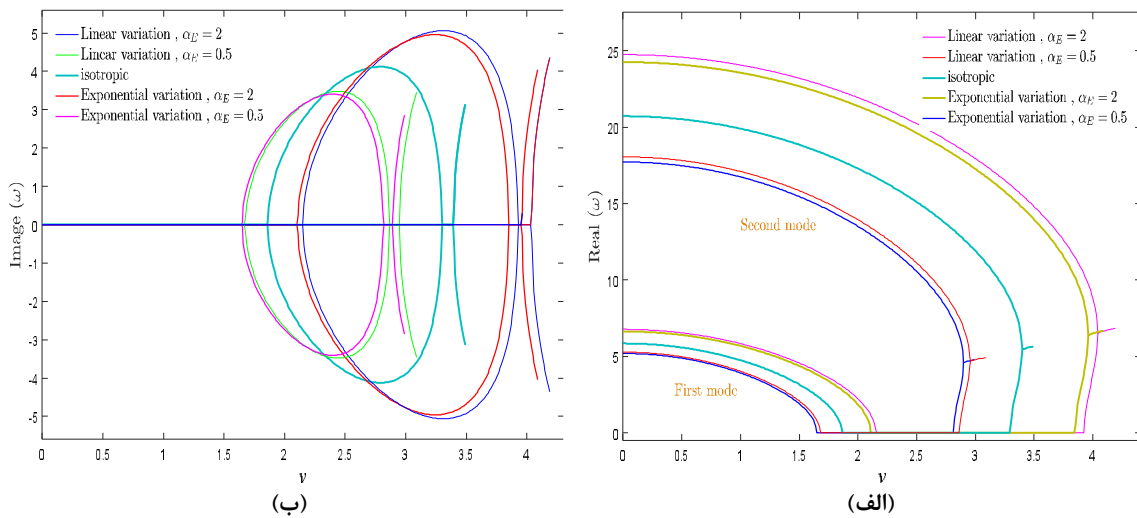


شکل ۶- سرعت بحرانی سیستم متحرک همگن بر حسب الف) طول‌های مشخصه ماده و ب) سختی خمشی  $\beta=0$

عبور از سرعت بحرانی فلاتر، سیستم دیگر پایدار نخواهد شد. نتیجه می‌شود که تیر متحرک، روند تکامل پایداری "پایدار-دایورژنس مود اول-پایدار-پیوستگی-مود فلاتر" را تجربه می‌کند. از شکل ۷-الف می‌توان فهمید، این است که قسمت حقیقی فرکانس‌های سیستم بخصوص مقادیر متناظر در موده‌های بالاتر، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، افزایش می‌یابند. با افزایش  $\alpha_E$ ، سرعت آغاز ناپایداری‌های تیر مدرج محوری متحرک افزایش می‌یابد و رفتار دایورژنس و فلاتر در سرعت‌های بالاتر مشاهده می‌شود. رخداد پدیده دایورژنس که یک پدیده نامطلوب در سازه‌های متحرک محوری است را می‌توان با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک به تعویق انداخت. چون پارامتر گرادیان مدول الاستیک در ماتریس سختی نقش دارد، لذا هر افزایشی در پارامتر گرادیان مدول الاستیک به یک سیستم سخت‌تر و گسترش مناطق پایداری می‌شود. مقادیر بزرگ‌تر  $\alpha_E$  افزایش سختی را القا می‌کند. پهنای باند سرعت‌های مربوط به ناپایداری سیستم، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک منبسط می‌شود. سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک، پایداری بیشتری نسبت به حالت تغییرات نمایی دارد. براساس شکل ۷-ب، نسبت میرایی به ازای  $\alpha_E > 1$  بیشتر است. تغییرات خطی مدول الاستیک در مقایسه با تغییرات نمایی آن، میرایی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. با تنظیم

سرعت سیستم، قسمت حقیقی فرکانس‌های طبیعی سیستم به آرامی کاهش می‌یابند، درحالی‌که قسمت موهومی‌شان صفر باقی می‌ماند و تغییری نمی‌کند. هنگامی‌که قسمت حقیقی فرکانس پایه‌ای صفر می‌شود، سرعت سیستم متناظر با سرعت بحرانی است که در این نقطه سیستم ناپایدار می‌شود و پدیده کماتش در سیستم رخ می‌دهد. ناپایداری القا شده دایورژنس در سیستم‌های متحرک محوری، مشابه کماتش در تیرهای تحت فشار کلاسیک است، به طوری‌که افزایش سرعت محوری، همان تعبیر نیروی فشاری ستون است.

با افزایش بیشتر سرعت، فرکانس پایه‌ای سیستم کاملاً موهومی می‌شود، درحالی‌که فرکانس طبیعی دوم به طور یکنواخت کاهش می‌یابد. به دلیل اثرات ژيروسکوپی، سیستم پایداری خود را مجدداً به دست می‌آورد. نقطه شروع و پایان ناپایداری دایورژنس، به ترتیب با ناپدید شدن قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس پایه‌ای مرتبط است. درنهایت قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های اول و دوم از طریق یک انشعاب کوپل-مود فلاتر، باهم یکی می‌شوند، درحالی‌که قسمت‌های موهومی‌شان، به دو شاخه با مقادیر مثبت و منفی تقسیم می‌شوند و سیستم ناپایداری فلاتر را تجربه می‌کند. علاوه بر سرعت‌های کمتر از سرعت بحرانی، یک محدوده باریک سرعت در محدوده کاری سیستم (بین نقطه پایان ناحیه دایورژنس و شروع ناحیه فلاتر) وجود دارد که سیستم در آن محدوده نیز پایدار است. لازم به ذکر است که بعد از

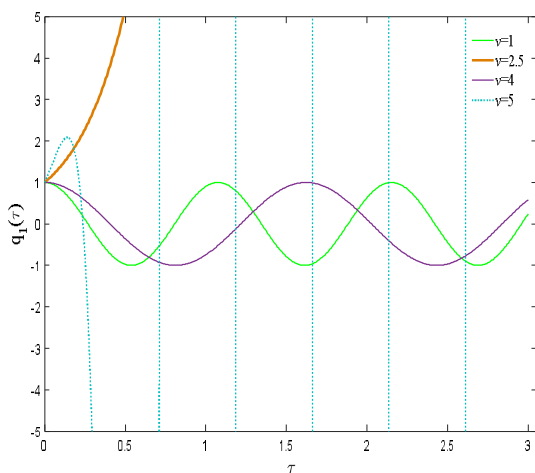


شکل ۷- الف) قسمت حقیقی و ب) قسمت موهومی دو فرکانس اول ماکروتیر مدرج محوری متحرک بر حسب سرعت  $\beta=0, \alpha_p=1, k_f=0.5$

دایورژنس هیچ نوسانی وجود ندارد؛ بنابراین دامنه سیستم به‌طور قابل توجهی با زمان افزایش می‌یابد؛ در نتیجه، ناپایداری فلاتر نسبت به ناپایداری دایورژنس برای تیرهای متحرک محوری خطرناک‌تر است. در عمل، در سرعت‌های فلاتر، هرگونه حرکت عرضی منجر به خیزهای دینامیکی و تنش‌های بزرگ در سیستم می‌شود. براساس شکل ۷ (الف-ب)، محدوده‌های هر دو ناپایداری دایورژنس و فلاتر در سیستم را می‌توان با تنظیم مناسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک تعیین کرد.

دقیق پارامتر گرادیان مدول الاستیک، می‌توان رفتار دینامیکی و آستانه ناپایداری را تعیین کرد.

برای فهم بهتر رفتار دینامیکی سیستم، پاسخ زمانی مختصه عمومی اول سیستم در سرعت‌های مختلف در شکل ۸ نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم، جابجایی استاتیکی واحد برای مود اول با سرعت اولیه صفر در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل ۷-الف، به ازای  $\nu=1$ ، از آنجاکه  $\text{Image}(\omega)=0$  و  $\text{Real}(\omega)>0$ ، به‌صورت دینامیکی پایدار است و نوسانات هارمونیک پایدار تولید می‌کند. با افزایش سرعت، سختی عرضی سیستم به دلیل اثرات گریز از مرکز کاهش می‌یابد. در  $\nu=2.5$ ، قسمت حقیقی فرکانس پایه صفر می‌شود، در نتیجه سیستم متحمل کماتش می‌شود. در این حالت پاسخ دینامیکی سیستم بدون نوسان با زمان به‌شدت بزرگ می‌شود و سیستم دچار ناپایداری استاتیکی می‌شود. با افزایش بیشتر سرعت در  $\nu=4$  قسمت موهومی فرکانس صفر می‌شود و تیر پایداری خود را به دست می‌آورد. همچنان که سرعت افزایش می‌یابد در  $\nu=5$ ، قسمت حقیقی فرکانس افزایش می‌یابد، در حالی که قسمت آن منفی شده و در نتیجه دامنه ارتعاشات سیستم به‌صورت نمایی با زمان تقویت می‌شود. در چنین سطحی از سرعت، تیر مدرج ناپایداری فلاتر را که همراه با نوسان است تجربه می‌کند. این در حالی است که برخلاف فلاتر، در ناپایداری



شکل ۸- پاسخ جابجایی بی‌بعد ماکروسیستم متحرک به ازای  $\beta=0, \alpha_E=2, \alpha_p=1, k_f=0.5$



همان‌طور که مشاهده می‌شود، تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم در حالت‌های چگالی و مدول الاستیک متغیر، عکس یکدیگر می‌باشند، به صورتی که افزایش پارامتر گرادیان چگالی، فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی دایورژنس و فلاتر سیستم را کاهش می‌دهد. در ضمن، برعکس حالت مدول الاستیک متغیر، در حالت چگالی متغیر، محدوده پایداری تغییرات نمایی نسبت به تغییرات خطی بزرگ‌تر است. افزایش پارامتر گرادیان چگالی، محدوده ناپایداری سیستم را کوچک می‌کند. پارامتر گرادیان چگالی، در ماتریس‌های جرم، دمپینگ و سختی نقش دارد که به ترتیب اثرات افزودگی جرم، ژيروسکوپی و افزایش سختی دارند. براساس شکل ۱۰، می‌توان نتیجه گرفت که اثرات افزودگی جرم در سیستم غالب است.

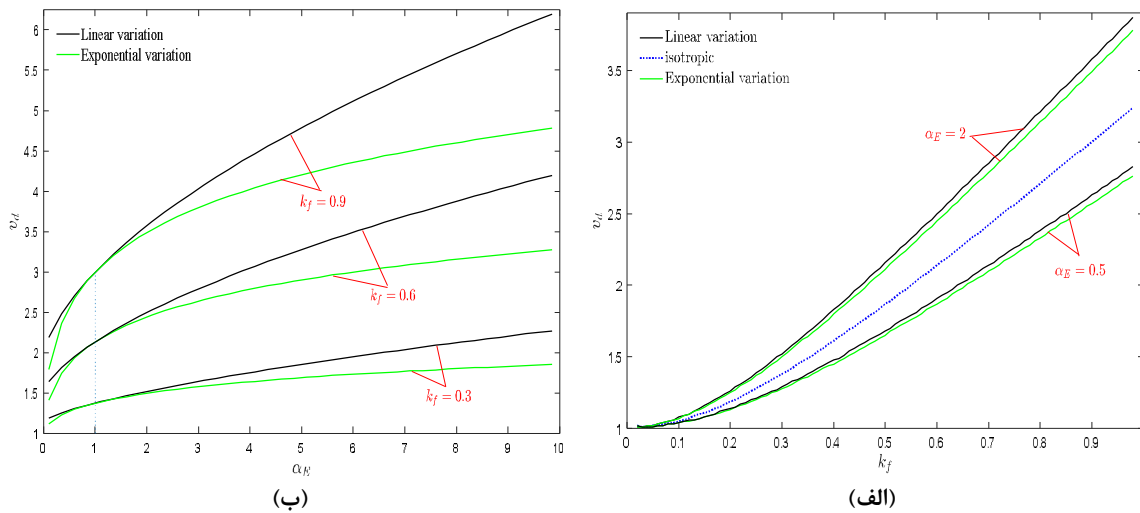
یک نکته مهم در نقشه پایداری تیرهای مدرج متحرک این است که در مقایسه با حالت مدول الاستیک متغیر، هنگامی که چگالی در طول سیستم تغییر می‌کند، سیستم محدوده گسترده‌تری از فرکانس‌ها را تجربه می‌کند. از دیدگاه طراحی، حالت چگالی متغیر عملکرد بهتر و مؤثرتری در جلوگیری از پدیده رزونانس دارا است. در شکل‌های ۷ و ۱۰ مشهود است که درجه‌بندی محوری مواد سرعت بحرانی سیستم را تغییر می‌دهد، اما ترتیب و نوع سری انشعابات سیستم را تغییر نمی‌دهد؛ در نتیجه مقادیر کمی فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های پایداری سیستم وابستگی شدیدی به تغییرات محوری مواد دارد، اما پایداری کیفی با درجه‌بندی محوری مواد تغییر نمی‌کند.

نقشه پایداری در صفحات  $v_d-\alpha_p$  و  $v_d-\beta$  به ترتیب در شکل‌های ۱۱ (الف-ب) رسم شده‌اند. براساس شکل ۱۱-الف، تیر مدرج محوری متحرک هنگامی که  $\alpha_p < 1$  است، در مقایسه با حالت همگن پایدارتر است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که در پارامترهای گرادیان نزدیک به یک (حالت همگن)، مرزهای پایداری مربوط به تغییرات خطی و نمایی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. ضمناً سرعت بحرانی سیستم، در حالت تغییرات نمایی چگالی نسبت به تغییرات خطی چگالی مقدار بیشتری دارد، مخصوصاً در مقادیر کوچک و بزرگ پارامتر گرادیان چگالی. به‌بیان دیگر، به‌منظور تقویت مرزهای پایداری حالت خطی و نمایی چگالی، باید مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از گرادیان چگالی انتخاب شود. بر اساس شکل ۱۱ (الف-ب)،

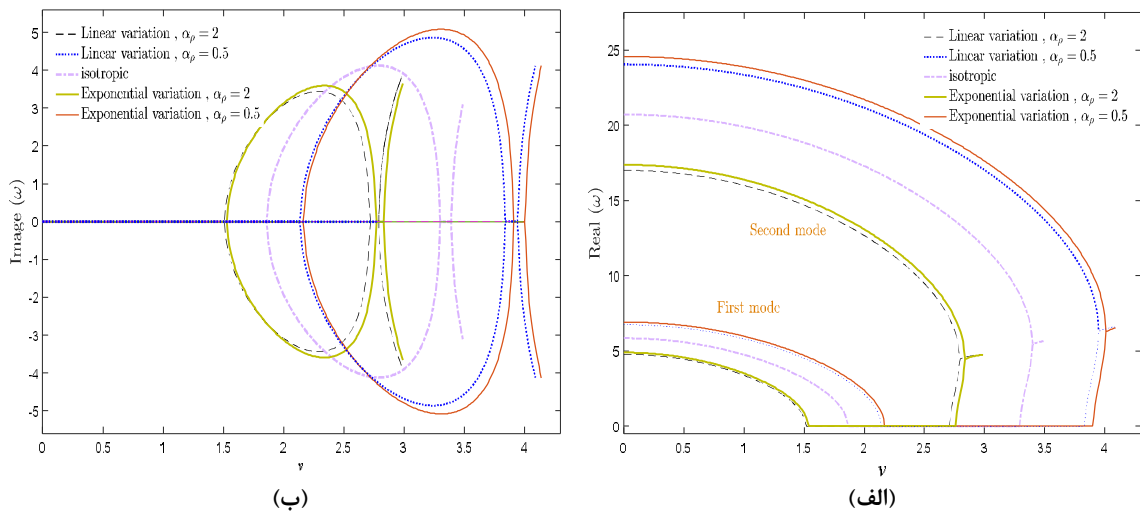
برای فهم بهتر پیکربندی دینامیکی، نقشه پایداری سیستم در صفحات  $v_d-\alpha_E$  و  $v_d-k_f$  در شکل ۹ (الف-ب) رسم شده‌اند. در نقشه‌های پایداری، منحنی‌های نشان داده شده مناطق پایدار و ناپایدار را جدا می‌کنند که سیستم در بالای آن‌ها در شرایط ناپایداری دایورژنس قرار دارد. همان‌طور که در شکل ۹-الف مشاهده می‌شود، هرچه  $k_f$  بیشتر، سیستم پایدارتر است؛ در نتیجه می‌توان گفت، افزایش پارامتر  $k_f$  اثر پایدارکننده بر سیستم‌های متحرک محوری دارد؛ همچنین همان‌طور که مشخص است، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، مرزهای پایداری سیستم گسترش می‌یابند. طبق شکل ۹-الف، در مقایسه با حالت تغییرات نمایی، تغییرات خطی مدول الاستیک مرزهای پایداری را بیشتر گسترش می‌دهد. ضمناً در  $k_f$  های کوچک و بزرگ، اثر پارامتر گرادیان مدول الاستیک مشهودتر است و مرزهای پایداری از هم دور می‌شوند. مرزهای پایداری نشان داده شده در شکل‌های ۷ و ۹، باهم در تطابق هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مقایسه با تیر معمولی همگن متحرک محوری ( $\alpha_E=1$ )، هنگامی که  $\alpha_E > 1$  است، سیستم پایدارتر است و با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، پایداری سیستم بیشتر می‌شود؛ همچنین، برای  $k_f$  های بزرگ‌تر، تغییرات گرادیان چگالی، اثر محسوس‌تری در آستانه‌های ناپایداری دارد. براساس شکل ۹ (الف-ب)، کاملاً مشخص است که با افزایش  $k_f$ ، سرعت بحرانی سیستم افزایش می‌یابد که می‌توان این ویژگی را به اثرات پایدارکننده سختی خمشی بی‌بعد نسبت داد؛ همچنین به غیر از  $\alpha_E=1$ ، سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک نسبت به حالت نمایی پایدارتر است. به بیان دیگر، با نزدیک شدن پارامتر گرادیان به مقدار یک (حالت همگن) مرزهای پایداری تغییرات خطی و نمایی به یکدیگر نزدیک می‌شوند و با افزایش و یا کاهش پارامتر گرادیان، این مرزها از هم فاصله می‌گیرند.

#### ۵-۴- اثر پارامتر گرادیان چگالی

به‌منظور بررسی اثر پارامتر گرادیان چگالی، روند تکامل قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس‌های اول و دوم برحسب سرعت سیستم به ترتیب در شکل ۱۰ (الف-ب) رسم شده‌اند. قابل مشاهده است که تغییرات گرادیان چگالی بر فرکانس‌های طبیعی مودهای بالاتر اثر بیشتری دارد.



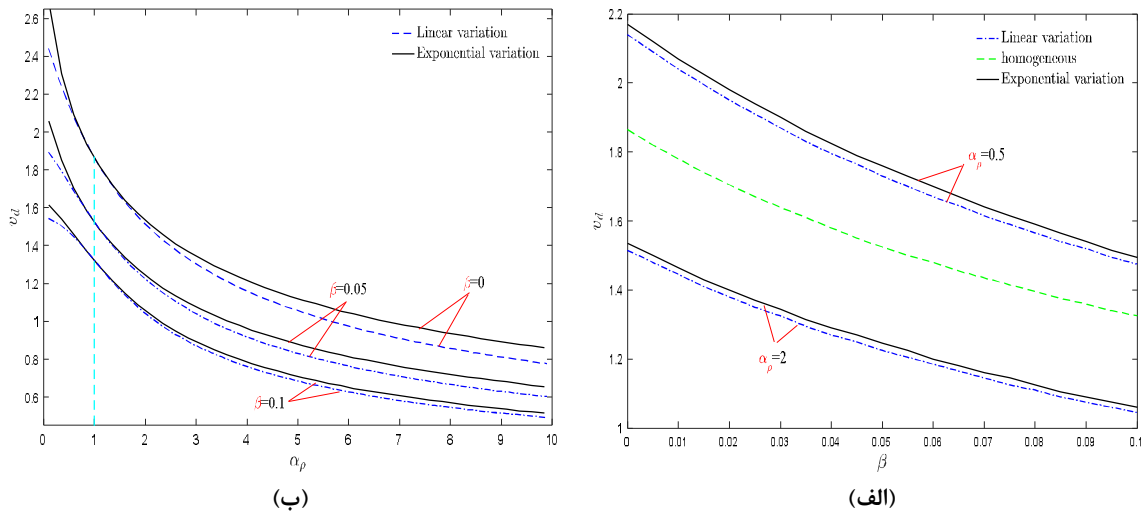
شکل ۹- سرعت بحرانی بی بعد ماکروتیر مدرج محوری متحرک برحسب الف) نسبت سختی بی بعد و ب) پارامتر گرادیان مدول الاستیک  $\beta=0, \alpha_p=1$



شکل ۱۰- الف) قسمت حقیقی و ب) قسمت موهومی دو فرکانس اول ماکروتیر مدرج محوری متحرک برحسب سرعت  $\beta=0, \alpha_E=1, k_f=0.5$

و  $v_d-\alpha_E$  که در بخش قبل تحلیل شد، نقشه‌های پایداری در صفحات  $v_d-\alpha_p$  و  $v_d-\beta$  در کل با افزایش  $\beta$  و  $\alpha_p$  کاهش می‌یابند که به این موضوع اشاره می‌کند که افزایش فاکتور اینرسی دورانی و پارامتر گرادیان چگالی می‌تواند پایداری سیستم را ناپایدار کند. لازم به ذکر است که مرزهای پایداری نشان داده شده در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ باهم در تطابق هستند. براساس شکل‌های ۱۰ و ۱۱، سرعت بحرانی وابستگی

از آنجایی که افزایش در فاکتور اینرسی دورانی، مرزهای پایداری را به سمت سرعت‌های کوچک‌تر جابجا می‌کند، لذا تئوری تیر متحرک اوایل برنولی، پایداری کمتری نسبت به تئوری تیر متحرک رایلی پیش‌بینی می‌کند؛ همچنین، برای هر  $\beta$  ثابت، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی، محدوده‌های پایداری سیستم کوچک می‌شوند. در مجموع می‌توان گفت که در مقایسه با نقشه‌های پایداری سیستم در صفحات  $v_d-k_f$



شکل ۱۱- سرعت بحرانی ماکروتیر مدرج محوری متحرک بر حسب الف) فاکتور اینرسی دورانی و ب) پارامتر گرادیان چگالی  $k_f=0.5, \alpha_E=1$

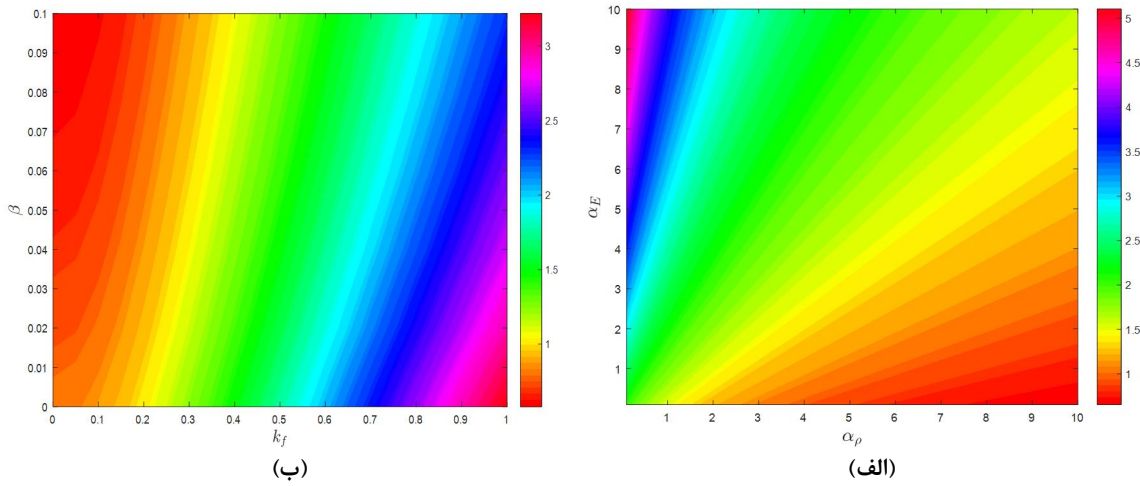
همچنین مشخصه‌های پایداری سیستم مورد نظر به ازای تغییرات کوپل چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی (با در نظرگیری افزودگی جرمی و افزودگی سختی هم‌زمان) مطالعه می‌شود؛ همچنین برای سرعت بحرانی به ازای تغییرات مشخصات مواد، عبارت‌های تحلیلی ارائه می‌شود و مقایسه بین روش‌های حل مختلف انجام می‌شود. در شکل ۱۳ الف-د)، آستانه‌های ناپایداری سیستم هنگامی که پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک باهم برابر هستند، نمایش داده شده است و صحت روابط تحلیلی بخش ۵-۵، سنجیده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند، سرعت‌های بحرانی که از روش تحلیلی، به دست آمده‌اند با نتایج روش عددی تطابق خوبی دارند. همان‌طور که شکل ۱۳-الف نشان می‌دهد، سرعت بحرانی سیستم با افزایش پارامتر گرادیان ماده، روند کاهشی دارد؛ در نتیجه در مقایسه با نقشه‌های پایداری در بخش‌های قبل، می‌توان گفت که گرادیان چگالی (افزودگی جرم) نقش غالبی در پایداری سیستم ایفا می‌کند و گرادیان مدول الاستیک تأثیر کمتری بر رفتار دینامیکی سیستم نسبت به گرادیان چگالی دارد. البته لازم به ذکر است که در مقایسه با بخش قبلی، همچنان که چگالی و مدول الاستیک به‌طور هم‌زمان در راستای طولی تغییر می‌کنند، هنگامی که اثر سختی خمشی بی‌بعد برجسته می‌شود، مرزهای پایداری به هم نزدیک‌تر هستند و حساسیت

قابل توجهی به پارامتر گرادیان چگالی دارد و به ازای  $\beta$  های بزرگ یا پارامترهای گرادیان چگالی کوچک و بزرگ، این وابستگی مشهودتر است.

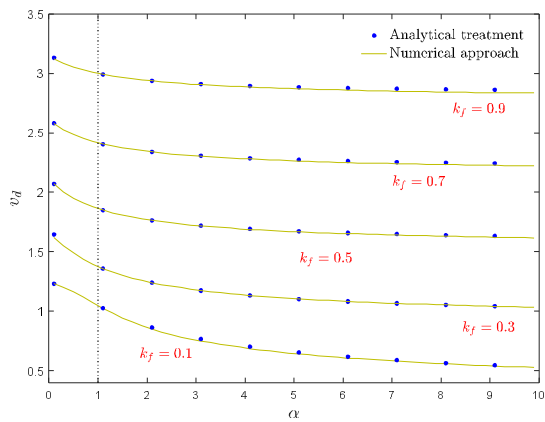
### ۵-۵- اثرات هم‌زمان تغییرات پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک

بر اساس بخش قبل، تغییرات چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی اثر چشمگیری بر دینامیک تیرهای متحرک محوری دارند. همچنین نشان داده شد که با تنظیم پارامترهای  $\alpha_p$  و  $\alpha_E$  به‌طور جداگانه، می‌توان ارتعاشات اضافی سیستم را کاهش داد. بر اساس شکل‌های ۷ الی ۱۱، تغییرات چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی سیستم، به‌طور جداگانه اثرات معکوس بر پایداری سیستم دارند؛ در نتیجه، این پارامترها می‌توانند درجات آزادی اضافی برای تنظیم مشخصات دینامیکی سیستم‌های متحرک محوری فراهم کنند. به بیان دیگر، با تنظیم هم‌زمان  $\alpha_p$  و  $\alpha_E$  می‌توان کارایی تیر متحرک محوری را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بهبود بخشید. تعیین نقش تغییرات هم‌زمان مشخصات مواد تیر متحرک که از مواد مدرج تابعی ساخته شده، در پایداری سیستم نیز اهمیت بالایی دارد.

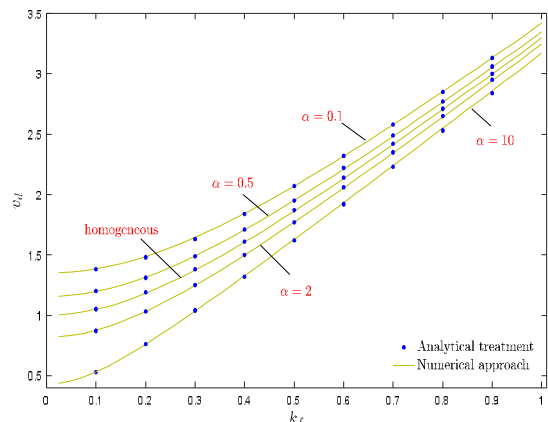
در این بخش، بر اثرات تغییرات هم‌زمان مدول الاستیک و چگالی در راستای طولی تیر متحرک تأکید شده است؛



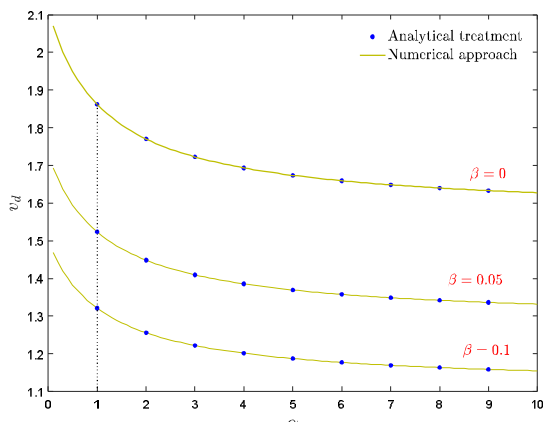
شکل ۱۲- اثر الف) پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک و ب) پارامتر سختی خمشی و فاکتور اینرسی دورانی بر سرعت بحرانی ماکروتیر مدرج محوری متحرک



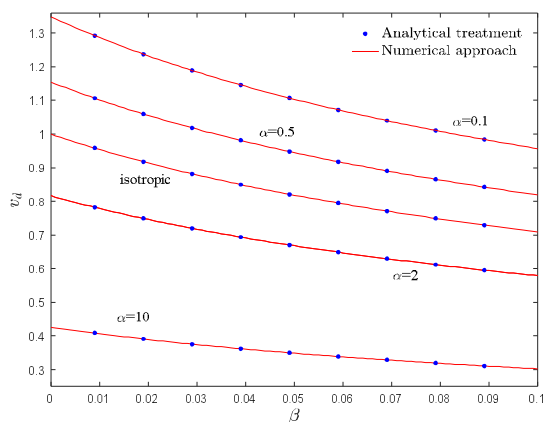
(ب)



(ف)



(د)



(ج)

شکل ۱۳- سرعت بحرانی ماکروتیر مدرج محوری متحرک برحسب الف) سختی خمشی، ب) پارامتر گرادیان، ج) فاکتور اینرسی دورانی و د) پارامتر گرادیان

بر اساس شکل ۱۳-ب، با افزایش پارامتر گرادیان، نواحی پایدار کوچک شده‌اند و نمودار روند کاهشی دارد. یک نکته حائز اهمیت در طراحی این است که در سختی‌های خمشی بزرگ، تغییر پارامتر گرادیان، اثر بسیار کمی بر آستانه ناپایداری سیستم اعمال می‌کند. در شکل ۱۳ (ج-د)، محدوده‌های پایداری با افزایش پارامتر گرادیان و فاکتور اینرسی دورانی، کوچک می‌شوند. در مقایسه با حالت همگن، هنگامی که  $\alpha < 1$  است، تیر متحرک محوری پایدار است. وقتی پارامتر گرادیان بزرگ باشد، سرعت‌های بحرانی تغییرات کمی خواهند داشت. در شکل ۱۴ کانتور درجه‌بندی شده سرعت بحرانی در فضای دوبعدی  $\alpha-k_f$  رسم شده است. با افزایش سختی خمشی پایداری بهبود می‌یابد، درحالی‌که با افزایش پارامتر گرادیان، پایداری کاهش می‌یابد.

در نهایت، سرعت بحرانی در فضای  $\alpha, \beta$  و  $k_f$  در شکل ۱۵ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پارامتر گرادیان ماده و اینرسی دورانی اثرات مشابهی بر مرزهای پایداری دارند و مقاومت سیستم به دایورژنس را کاهش می‌دهند، درحالی‌که بالا بردن سختی خمشی بی‌بعد، موجب افزایش پایداری سیستم می‌شود. در حضور هم‌زمان پارامترهای سختی خمشی بی‌بعد بزرگ‌تر و گرادیان ماده و فاکتور اینرسی دورانی کوچک‌تر عملکرد سیستم‌های متحرک محوری بهبود می‌یابد. مشاهده می‌شود که آستانه ناپایداری تیرهای متحرک محوری، وابستگی بالایی به پارامترهای گرادیان ماده، سختی خمشی بی‌بعد و اینرسی دورانی دارند، درنتیجه می‌توان آن‌ها را به‌عنوان فاکتورهای کنترل ارتعاشات سیستم‌های متحرک محوری معرفی کرد. در مقایسه با تیرهای متحرک محوری همگن، تیرهای مدرج متحرک محوری در تنظیم رفتار ارتعاشاتی‌شان، انعطاف بیشتری دارند؛ درنتیجه در مقایسه با مواد همگن، مواد مدرج محوری عملکرد سازه‌ای بهتری در سامانه‌های متحرک دارند.

## ۶- نتیجه‌گیری

دینامیک سازه‌ای میکروتیرهای رایلی مدرج محوری متحرک، عددی و تحلیلی مطالعه شده است. فرض شده است، سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. توزیع مشخصات مادی سیستم نیز در راستای طولی، به‌صورت خطی و نمایی در نظر گرفته شده است. با به‌کارگیری تئوری گرادیان کرنش و روش

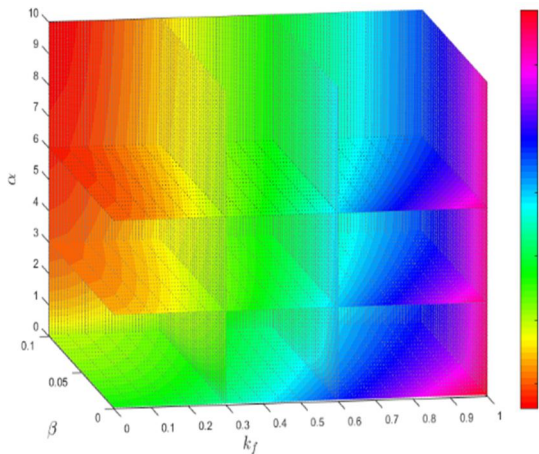
کمتری به تغییرات مشخصات مادی در راستای طولی دارند. هنگامی‌که پدیده کمانش در سیستم رخ می‌دهد، فرکانس پایه‌ای سیستم صفر می‌شود و یا به‌عبارت دیگر سختی سیستم به ازای مود اصلی صفر می‌شود؛ درنتیجه سرعت بحرانی سیستم مربوط به مود اول طبیعی است و برای استخراج آن، معادله (۱۶) را با در نظر گرفتن یک مود  $(r=s=1)$ ، به معادله (۲۴) کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{q}_1(\tau) + \mathbf{C}_{11}\dot{q}_1(\tau) + \mathbf{K}_{11}q_1(\tau) = 0 \quad (24)$$

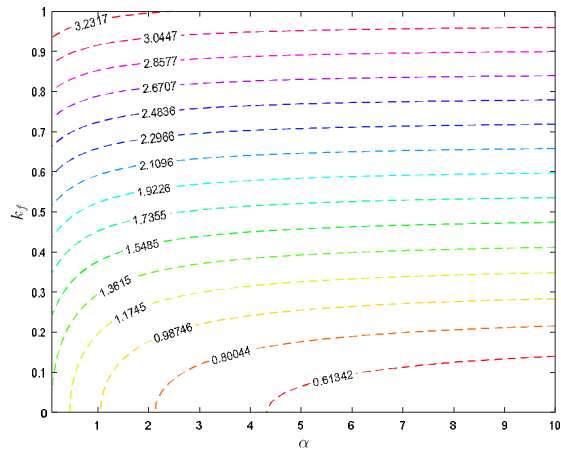
که اندیس ۱ برای مود اول است. با در نظر گرفتن تغییرات خطی مشخصات مادی سیستم می‌توان نوشت:

$$\mathbf{K}_{11} = \pi^2(\beta(\alpha_\rho + 1)v_d^2 - (\alpha_E + 1)k_f^2) + v_d^2(\alpha_\rho + 1) - 2 \quad (25)$$

رابطه (۲۵) تائید می‌کند که سرعت بحرانی تیر مدرج متحرک محوری، به تغییرات پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک به‌علاوه سختی خمشی بی‌بعد سیستم وابسته است. باهدف بررسی دقیق‌تر پایداری سیستم، نمودارهای کانتور دوبعدی سرعت بحرانی در صفحات  $\alpha_E - \alpha_\rho$  و  $k_f - \beta$  به ترتیب در شکل‌های ۱۱ (الف-ب) رسم شده‌اند. براساس شکل ۱۱-الف، سرعت بحرانی سیستم با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک و کاهش پارامتر گرادیان چگالی افزایش می‌یابد؛ درنتیجه می‌توان گفت که اثر پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و چگالی بر مرزهای پایداری سیستم معکوس یکدیگر هستند. همان‌طور که در شکل ۱۱-ب مشاهده می‌شود، سرعت بحرانی سیستم با کاهش فاکتور اینرسی دورانی و افزایش پارامتر سختی خمشی بی‌بعد افزایش خمشی بی‌بعد نیز اثرات معکوس بر پایداری سیستم دارند. به عبارت دیگر، برعکس پارامتر گرادیان چگالی و فاکتور اینرسی دورانی، مقاومت سیستم به دایورژنس با افزایش پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و سختی خمشی بی‌بعد، افزایش می‌یابد؛ درنتیجه، انتخاب هم‌زمان پارامترهای گرادیان الاستیک و سختی خمشی بی‌بعد بزرگ‌تر (انتخاب ماده با مدول الاستیک بزرگ‌تر در انتهای تیر) و پارامتر گرادیان و ممان اینرسی کوچک‌تر (انتخاب ماده با چگالی کوچک‌تر در ابتدای تیر) منجر به یک سیستم پایدارتر و بهبود عملکرد سیستم‌های متحرک محوری می‌شود.



شکل ۱۵- سرعت بحرانی سیستم در فضای پارامتر گرادیان-  
سختی خمشی- اینرسی دورانی به ازای  $\beta=\tau=0$



شکل ۱۴- سرعت بحرانی سیستم در صفحه پارامتر گرادیان-  
سختی خمشی به ازای  $\beta=\tau=0$

در سختی‌های خمشی بی‌بعد و فاکتورهای اینرسی دورانی بی‌بعد کوچک و بزرگ، ملموس‌تر است.

## ۷- مراجع

- [1] Ebrahimi-Mamaghani A, Sarparast H, Rezaei M (2020) On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. Appl Math Model 84: 554-570.
- [2] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads. Compos Struct 226: 111262.
- [3] Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) On the dynamics of microtubes conveying fluid on various foundations. SN Appl Sci 1(6): 547.
- [4] Safarpour M, Rahimi A, Alibeigloo A, Bisheh H, Forooghi A (2019) Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions. Mech Based Des Struc 1-31.
- [5] Abdelmalek Z, Karbon M, Eyvazian A, Forooghi A, Safarpour H, Tlili I (2020) On the dynamics of a curved microtubule-associated proteins by considering viscoelastic properties of the living biological cells. J Biomol Struct Dyn 1-15.
- [6] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. J Fluids Struct 87: 150-173.
- [7] Mamaghani AE, Zohoor H, Firoozbakhsh K, Hosseini R (2013) Dynamics of a running below-knee prosthesis compared to those of a normal subject. Journal of Solid Mechanics 5: 152-160.

گالریکن، مسئله مقدار ویژه حل شده است. فرکانس‌های طبیعی، پاسخ دینامیکی و محدوده‌های ناپایداری فلاتر و دایورژنس سیستم برحسب اثرات گرادیان کرنش، سرعت تیر، سختی خمشی و پارامترهای گرادیان محاسبه شدند. نتایج مهم را می‌توان این‌چنین خلاصه نمود:

۱- در مقایسه با تیبرهای متحرک محوری همگن، هنگامی‌که چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی، به ترتیب کاهش ( $\alpha_p < 1$ ) و افزایش ( $\alpha_E > 1$ ) می‌یابند، سیستم پایدارتر خواهد بود. افزایش پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و چگالی به ترتیب اثر پایدارکننده و ناپایدارکننده بر سیستم دارند.

۳- در حالت چگالی و مدول الاستیک متغیر (به ترتیب متناظر با سطح مقطع و ممان اینرسی متغیر در سیستم)، تغییرات نمایی و خطی منجر به پایداری بیشتر سیستم می‌شوند.

۴- با یکسان در نظر گرفتن پارامترهای گرادیان، اثر گرادیان چگالی بر پیکربندی ارتعاشاتی سیستم غالب است.

۵- هر چه سختی خمشی بزرگ‌تر، سیستم پایدارتر است، درحالی‌که هرچه فاکتور اینرسی دورانی کوچک‌تر باشد، سیستم ناپایدارتر است. اثر تغییرات محوری مواد بر مرزهای پایداری سیستم،

- frequency characteristics of a thermally affected GPL reinforced composite microdisk covered with piezoelectric actuator. *Mech Based Des Struc* 1-23.
- [22] Ebrahimi Mamaghani A, Hosseini R, Shahgholi M, Sarparast H (2018) Free lateral vibration analysis of inhomogeneous beams under various boundary conditions. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(3): 123-135.
- [23] Ebrahimi Mamaghani A, Sarparast H (2018) Target energy transfer from a doubly clamped beam subjected to the harmonic external load using nonlinear energy sink. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(4): 165-177.
- [24] Sarparast H, Esmailzade Khadem S, Ebrahimi Mamaghani A (2019) Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads. *Moades Mechanical Engineering* 18(9): 69-80.
- [25] Piovan MT, Sampaio R (2008) Vibrations of axially moving flexible beams made of graded materials. *Thin Wall Struct* 46(2): 112-121.
- [26] Sui S, Chen L, Li C, Liu X (2015) Transverse vibration of axially moving graded materials based on Timoshenko theory. *Math Probl Eng* 58(2): 96-115.
- [27] Kiani K (2004) Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials. *Compos Struct* 107: 610-619.
- [28] Yan T, Yang T, Chen L (2019) Direct multiscale analysis of stability of an axially moving functionally graded beam with time-dependent velocity. *ACTA Mech Solida Sin* 33: 150-163.
- [29] Li X, Li L, Hu Y, Ding Z, Deng W (2017) Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Compos Struct* 165: 250-265.
- [30] Hosseini R, Hamed M, Ebrahimi Mamaghani A, Kim HC, Kim J, Dayou J (2017) Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution. *Int J Smart Nano Mater* 8(2-3): 110-124
- [31] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn* 86(3): 1761-1795.
- [32] Ebrahimi Mamaghani A, Esmailzadeh Khadem S (2016) Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Moades Mechanical Engineering* 16(9): 186-194.
- [33] Ebrahimi Mamaghani A, Sarparast H (2018) Lateral vibration control of a beam subjected to the
- [8] Hosseini R, Ebrahimi MA, Nouri M (2017) An experimental investigation into width reduction effect on the efficiency of piezopolymer vibration energy harvester. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 41-51.
- [9] Wickert J (1992) Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *Int J Non Linear Mech* 27(3): 503-517.
- [10] Ghayesh MH, Amabili M (2013) Post-buckling bifurcations and stability of high-speed axially moving beams. *Int J Mech Sci* 68: 76-91.
- [11] Chen LQ, Yang XD (2006) Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports. *Eur J Mech A Solids* 25(6): 996-1008.
- [12] Öz H, Pakdemirli M (1999) Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity. *J Sound Vib* 227(2): 239-257.
- [13] Chen LQ, Yang XD, Cheng CJ (2004) Dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam. *Eur J Mech A Solids* 23(4): 659-666.
- [14] Zhu, K., Chung, J (2019) Vibration and stability analysis of a simply-supported Rayleigh beam with spinning and axial motions. *Applied Mathematical Modelling* 66, 362-382.
- [15] Dehrouyeh-Semnani AM, Dehrouyeh M, Zafari-Koloukhi H, Ghamami M (2005) Size-dependent frequency and stability characteristics of axially moving microbeams based on modified couple stress theory. *Int J Eng Sci* 97: 98-112.
- [16] Li TC, Hou ZC, Li JF (2008) Stabilization analysis of a generalized nonlinear axially moving string by boundary velocity feedback. *Automatica* 44(2): 498-503.
- [17] Zhang YW, Zhang Z, Chen LQ, Yang TZ, Fang B, Zang J (2015) Impulse-induced vibration of an axially moving beam with parallel nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dyn* 82(1): 61-71.
- [18] Esfahani S, Khadem SE, Mamaghani AE (2019) Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory. *Int J Mech Sci* 151: 508-522
- [19] Esfahani S, Khadem SE, Mamaghani AE (2019) Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions. *Int J Mech Mater Des* 15(3): 489-505.
- [20] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee SM (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. *Int J Mech Sci* 138: 427-447.
- [21] Jermisittiparsert K, Ghabussi A, Forooghi A, Shavalipour A, Habibi M, Won Jung D, Safa M (2020) Critical voltage, thermal buckling and

- mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Based Des Struc*.
- [38] Mirtalebi SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT (2019) Vibration control and manufacturing of intelligibly designed axially functionally graded cantilevered macro/micro-tubes. *IFAC-PapersOnLine* 52(10): 382-387.
- [39] Zhou XW, Dai HL, Wang L (2018) Dynamics of axially graded cantilevered pipes conveying fluid. *Compos Struct* 190: 112-118
- [40] Li XF, Kang YA, Wu JX (2013) Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams. *Appl Acoust* 74(3): 413-420.
- [41] Tang AY, Wu JX, Li XF, Lee K (2015) Exact frequency equations of free vibration of exponentially nonuniform graded Timoshenko beams. *Int J Mech Sci* 89: 1-11.
- harmonic external load using a nonlinear energy sink. *Journal of Modeling in Engineering* 16(55): 375-390.
- [34] Rezaee M, Lotfan S (2015) Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of moving nanoscale beams with time-dependent velocity. *Int J Mech Sci* 96: 36-46.
- [35] Ebrahimi Mamaghani A, Hosseini R (2019) Mathematical modelling and resonance analysis in impact oscillators. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering* 51(1): 157-168.
- [36] Ebrahimi-Mamaghani A, Mirtalebi SH, Ahmadian MT (2020) Magneto-mechanical stability of axially graded supported nanotubes. *Mater Res Express* 6(12): 1250-1255.
- [37] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2020) Thermo-