



یادداشت تحقیقاتی:

## تحلیل عددی انتقال حرارت سیال غیر نیوتنی در محیط متخلخل

محسن نظری<sup>۱\*</sup>، رسول محبی<sup>۲</sup> و محمد حسن کیهانی<sup>۳</sup><sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان<sup>۳</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

## چکیده

در این مقاله از روش شبکه بولتزمن در بررسی جریان جابجایی اجباری و انتقال حرارت سیال غیر نیوتنی توانی بین دو صفحه موازی که به صورت جزئی با محیط متخلخل پر شده، استفاده شده است. محیط متخلخل با موانع مربعی، با آرایش منظم ایجاد گردیده است که امکان بررسی جریان‌های پیچیده در مقیاس حفره را فراهم می‌کند. علی‌رغم استفاده زیاد از روش شبکه بولتزمن، بررسی انتقال حرارت با چیدمان موضعی ماده متخلخل و استفاده از مدل شبکه بولتزمن حرارتی از کارهای نو در این زمینه است. دو سیال توانی مختلف نازک شونده و ضخیم شونده، با سه آرایش متفاوت از بلوک‌های مربعی بین دو صفحه بررسی شده است. تاثیر اعداد رینولدز مختلف بر روی پروفیل‌های سرعت و دما و همچنین عدد ناسلت بررسی گردیده است. نتایج به خوبی حرکت جریان سیال و توزیع دمای داخل محیط متخلخل را نشان می‌دهد. همچنین گردابه‌های ایجاد شده در پشت موانع مربعی در داخل محیط متخلخل، بر حسب عدد رینولدز نمایش داده شده و تاثیر آن بر انتقال حرارت مطالعه شده است. وجود موانع ثابت در دامنه محاسباتی به عنوان محیط متخلخل، باعث افزایش عدد ناسلت متوسط گشته و کاهش ضریب توانی و افزایش تعداد موانع باعث بهبود بیشتر انتقال حرارت می‌گردد.

**کلمات کلیدی:** سیال غیر نیوتنی؛ مدل توانی؛ روش شبکه بولتزمن؛ محیط متخلخل.

**Technical Note:****Numerical analysis of heat transfer of non-Newtonian fluids in porous media**M. Nazari<sup>1,\*</sup>, R. Mohebbi<sup>2</sup> and M. H. Kayhani<sup>3</sup><sup>1</sup> Assistant Prof., Department of Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran<sup>2</sup> Assistant Prof., Department of Mech. Eng., Damghan Univ., Damghan, Iran<sup>3</sup> Prof., Department of Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran**Abstract**

In this paper, the lattice Boltzmann method (LBM) has been used to study fluid flow and forced convection heat transfer between two parallel plates partially filled by porous medium. A porous medium with regular arrangement of square obstacles has been used to provide a pore-scale analysis of complex flows. Despite the large use of LBM in the literature, the study of heat transfer with partial arrangement of porous material and employing thermal lattice Boltzmann method are the new contributions of this paper. Two different power-law fluids, shear thinning and shear thickening, with three different porous blocks are investigated. Effects of Reynolds number on the velocity, temperature profiles and Nusselt number are examined. Also, the rotating cells behind the obstacles in the porous medium are shown and the related effects on the heat transfer rate are analysed. The results show that using a porous medium inside the channel leads to an increase in the average Nusselt number. Decreasing the power index and increasing the number of obstacles can also enhance the heat transfer.

**Keywords:** Non-Newtonian fluid; Power-law model; LBM; Porous media.

## ۱- مقدمه

دامنه وسیع و گوناگونی از کاربردهایی که به دنبال علوم طبیعی و مهندسی مطرح می‌شوند، رابطه بسیار تنگاتنگی با حرکت سیال و انتقال حرارت دارند که به عنوان نمونه می‌توان به جریان خون درون شریان‌های پیچیده مویرگی، جریان سیال در اتساع عروقی، جریان هوای عبوری از مبدل‌های حرارتی فشرده و دامنه بسیار وسیعی از مسائل دیگری که با مجموعه‌های صنعتی و آکادمیکی در ارتباط هستند، اشاره نمود. رفتار جریان بسیاری از سیالات تک فازی که صرفاً شامل ترکیباتی با وزن مولکولی پایین هستند با در نظر گرفتن رابطه خطی بین تغییرات تنش برشی و آهنگ کرنش برشی شبیه‌سازی می‌شود. این سیالات به سیالات نیوتنی موسوم هستند. اما موادی همچون سوسپانسیون‌ها، امولوسیون‌ها، چسب‌ها، کلئیدها، جریان خون و غیره رفتار عجیبی از خود نشان می‌دهند چراکه روابط مربوط به سیالات نیوتنی قادر به پیش‌بینی رفتار برشی آنها نبوده و بدین منظور بایستی از مدل‌های غیرنیوتنی استفاده شود. از جمله پرکاربردترین و معروفترین مدل‌ها در تخمین رفتار سیالات غیرنیوتنی، مدل توانی<sup>۱</sup> می‌باشد که هر دو حالت سیالات نازک شونده<sup>۲</sup> (شبه پلاستیک<sup>۳</sup>) و ضخیم شونده<sup>۴</sup> (دایلاتنت<sup>۵</sup>) که مرتبط با رفتار مواد مختلف است را در بر میگیرد [۴-۱].

بررسی جریان سیال غیر نیوتنی عبوری از محیط‌های متخلخل طبیعی و صنعتی همچون بسترهای شاره‌ای، مواد فیبری، تصفیه سازه‌های صنایع شیمیایی و نفتی به علت ساختار منحصر به فرد و اهمیت کاربرد آن برای مهندسی و دانشمندان بسیار قابل توجه بوده است. از آنجائیکه انجام مطالعات تجربی در این باب مستلزم صرف وقت و هزینه قابل توجهی است، لذا مطالعه عددی دقیق و سریع آن دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. روش‌های مختلفی جهت شبیه‌سازی محیط متخلخل وجود دارد که در این بین بکارگیری روش

شبکه بولتزمن<sup>۶</sup> در مقیاس منفذی<sup>۷</sup> ( میکروسکوپی) بسیار مناسب خواهد بود.

روش شبکه بولتزمن در طی سه دهه اخیر به عنوان روشی جدید و کارا در مدل‌سازی و شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده مطرح شده است. در این روش فرض می‌شود که سیال را می‌توان به صورت دسته‌ای از ذرات که در حرکت بوده و با یکدیگر بر روی یک شبکه منظم برخورد می‌نمایند، در نظر گرفت [۵]. نوع ذرات و نحوه برخورد آنها در مقیاس میکروسکوپی دقیقاً منطبق بر روش‌های فیزیکی نیست ولی در مقیاس ماکروسکوپی منجر به ارضای معادلات بقای جرم و مومنتم می‌گردد. این روش که در اوایل سال ۱۹۹۰ گسترش پیدا کرد، تا کنون به عنوان یک روش مناسب توسط بسیاری از محققان مورد استفاده قرار گرفته است. روش شبکه بولتزمن در مقابل روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی مرسوم همچون روش اختلاف محدود<sup>۸</sup>، حجم محدود<sup>۹</sup> و یا المان محدود<sup>۱۰</sup> که بر پایه گسسته‌سازی و حل عددی معادلات ناوبر استوکس استوار است، در شبیه‌سازی جریان‌های تک فازی، دو فازی و چند مولفه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶-۸]. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده تر، سهولت اعمال شرایط مرزی و قابلیت موازی شدن است.

جریان سیال غیرنیوتنی عبوری از داخل محیط توسط پژوهشگران فراوانی بررسی شده است اما از این بین مطالعات بسیار اندکی در زمینه شبیه‌سازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام گرفته است. بوک<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹] جریان سیال تک فازی سیالات غیرنیوتنی را با استفاده از قانون توانی بررسی نمودند. کانال مورد بررسی آنها جهت اندازه‌گیری پروفیل‌های سرعت شبیه‌سازی شده بود و نتایج آنها تطابق خوبی با نتایج تئوری داشت. جریان سیال غیرنیوتنی دو بعدی و سه بعدی عبوری از محیط متخلخل تصادفی در مقیاس حفره با استفاده از روش شبکه بولتزمن

<sup>6</sup> Lattice Boltzmann Method

<sup>7</sup> Pore

<sup>8</sup> Finite Difference

<sup>9</sup> Finite Volume

<sup>10</sup> Finite Element

<sup>11</sup> Boek

<sup>1</sup> Power-law

<sup>2</sup> Shear-thinning

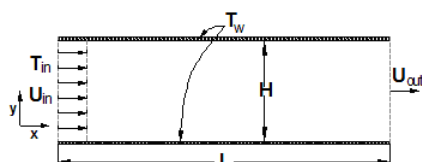
<sup>3</sup> Pseudo-plastic

<sup>4</sup> Shear-thickening

<sup>5</sup> Dilatant

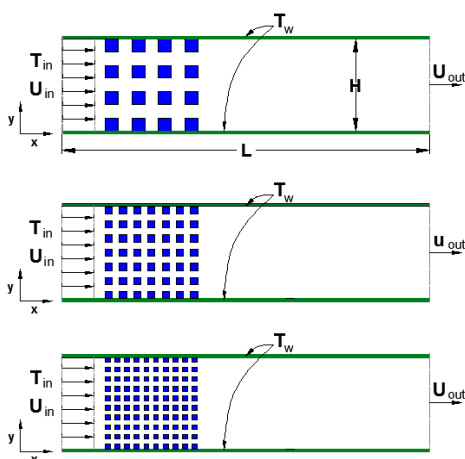
## ۲- هندسه و توصیف مسأله

به منظور بررسی مسأله اشاره شده در بالا، دامنه محاسباتی دو بعدی در جریان سیال تراکم ناپذیر بین دو صفحه موازی مطابق شکل ۱ تعریف شد. در شکل نشان داده شده  $L$  طول و  $H$  فاصله بین صفحات می‌باشد. در ورودی شرط مرزی سرعت یکنواخت و دمای ثابت و در خروجی از شرط مرزی خروجی استفاده شده و در صفحه بالا و پایین نیز از شرط مرزی عدم لغزش و دمای ثابت استفاده گردیده است. در شبیه سازی انجام شده از ضخامت صفحات صرف نظر گردیده و به منظور رسیدن به حالت توسعه یافتگی در هر دو حالت سرعت و دما، طول صفحات به اندازه کافی طویل در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- طرح کلی دامنه محاسباتی و شرایط مرزی

به منظور بررسی محیط متخلخل نیز، موانع مربعی عایق با آرایش  $4 \times 7$ ،  $7 \times 7$  و  $10 \times 10$  در موقعیت  $x/L=0.067$  بین دو صفحه قرار گرفته است. طرح کلی محیط متخلخل مورد استفاده در شکل ۲ نشان داده شده است. با در نظر گرفتن  $h$  طول موانع و  $Y$  فاصله بین آنها میزان  $h/H=0.138$  و  $Y/H=0.148$  می‌باشد.



شکل ۲- طرح کلی محیط متخلخل مورد استفاده

توسط سالیوان<sup>۱</sup> و همکاران [۱۰] بررسی شد. نتایج آنها برای سیالات توانی با ضریب توانی کوچکتر از یک انجام گرفت که تطابق خوبی با حل‌های ماکروسکوپیک داشت. چن<sup>۲</sup> و همکاران [۱۱] روش شبکه بولتزمن خاکستری در جریان سیال عبوری از محیط متخلخل را پیشنهاد نمودند. آنها به معرفی معادلات سیالات توانی و معتبر سازی مدل خود با شبیه سازی سیال پوازی<sup>۳</sup> بین دو صفحه موازی بی‌نهایت پر شده با محیط متخلخل همگن پرداختند. آنها نشان دادند که سرعت لغزشی سیال توانی در سطح محیط متخلخل با افزایش ضریب توانی افزایش می‌یابد همچنین در یک ضریب توانی معلوم با افزایش تخلخل محیط متخلخل نیز افزایش می‌یابد. جهانشاهی [۱۲] به بررسی شبیه سازی جریان سیال آنالیز حرارتی سیستم‌های بازیافت گرمایی دو بعدی با استفاده از روش شبکه بولتزمن در محیط متخلخل پرداختند. در مطالعه آنها یک سیستم با جریان دمای بالا در نظر گرفته شد که فاز گازی با دمای بالای غیرتابشی و مشعشع نشده از داخل یک ماتریس متخلخل تصادفی عبور می‌نمود.

با توجه به مطالعات گذشته، تا کنون در زمینه استفاده از روش شبکه بولتزمن در شبیه سازی میدان جریان و دمای غیرنیوتنی بین دو صفحه موازی بی‌نهایت که به صورت موضعی دارای محیط متخلخل منظم باشد، تحقیقاتی انجام نگرفته است، لذا در این مقاله ابتدا جریان سیال جابجایی اجباری بین دو صفحه با حل هم‌زمان تابع جریان و دمای مربوطه با استفاده از مدل معروف سیال توانی با ضرایب توانی  $0/8$  و  $1/2$  شبیه سازی شده، سپس به منظور بررسی محیط متخلخل، آرایشی از بلوک‌های جامد عایق بین دو صفحه قرار گرفته و میدان جریان و دما در اعداد رینولدز مختلف بررسی گردیده است. قابل ذکر است که این مقاله در راستای مطالعات قبلی انجام گرفته توسط کیهانی و همکاران [۱۳] (برای سیالات نیوتنی) بوده و اثرات ماده متخلخل در سیالات غیر نیوتنی با جزئیات کافی در مقاله حاضر بررسی شده است.

<sup>1</sup> Sullivan

<sup>2</sup> Chen

<sup>3</sup> Poiseuille flow

تنش برشی و نرخ کرنش برشی وجود دارد. مدل‌های متعددی برای سیالات غیرنیوتنی ارائه شده که هر کدام در محدوده خاصی از نرخ برش و تنش اعمال شده اولیه کاربرد دارند. به طور کلی این سیالات به سه گروه بزرگ سیالات مستقل از زمان، سیالات تابع زمان و سیالات ویسکوالاستیک تقسیم می‌شوند [۱۴-۱۷]. مدل توانی که از مدل‌های معروف شبیه سازی سیالات غیرنیوتنی می‌باشد در شبیه سازی سیالات مستقل از زمان به کار می‌رود. معادله ساختاری این سیالات به صورت زیر است [۱۸]:

$$v = v_0(\dot{\gamma})^{n-1} \quad (1)$$

که  $v$  ویسکوزیته سینماتیک  $v_0$  شاخص پایداری و  $n$  ضریب توانی به خواص ماده و به نوع سیال وابسته است که در این مطالعه  $v_0 = U_{in}2H/Re$  در نظر گرفته شد که  $U_{in}$  سرعت ورودی،  $D_h$  قطر هیدرولیکی و برابر  $2H$  و  $Re$  عدد رینولدز جریان می‌باشد. پارامتر بی بعد  $n$  درجه رفتار غیرنیوتنی را بیان می‌کند. هنگامی که  $n=1$  باشد سیال نیوتنی است. اگر  $n < 1$  باشد سیال شبه پلاستیک بوده که با افزایش نرخ برش، ویسکوزیته سینماتیک ظاهری کاهش یافته و سیال رفتار نازک شونده خواهد داشت و اگر  $n > 1$  باشد سیال داپلانت است و ویسکوزیته سینماتیک ظاهری با افزایش نرخ برش افزایش می‌یابد.  $\dot{\gamma}$  اندازه نرخ برش محلی بوده که با اینوریانت دوم تانسور نرخ کرنش  $S_{\alpha\beta}$  به صورت زیر مرتبط است [۱۹]:

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{S_{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

که

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial x_{\beta'}} + \frac{\partial u_{\beta'}}{\partial x_{\alpha'}} \quad (3)$$

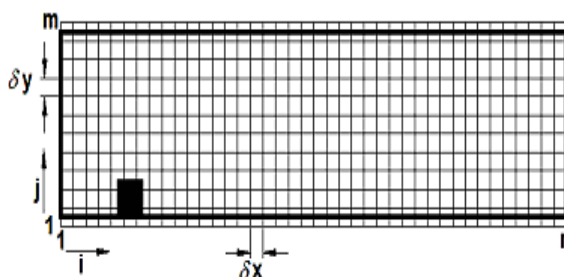
حل تحلیلی این مدل نیز برای سیال توسعه یافته تراکم ناپذیر بین دو صفحه به صورت زیر است [۲۰]:

$$\frac{u(y)}{u_0} = \frac{2n+1}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{2(H/2) - y + 1}{H} \right)^{(1+1/n)} \right] \quad (4)$$

#### ۴- روش شبکه بولتزمن

روش شبکه بولتزمن که از جمله روش‌های جدید در حل‌های عددی می‌باشد، وسیله‌ای در حل مسائل جریان سیال و انتقال حرارت با دربرداشتن پارامترها بر روی یک شبکه منظم می‌باشد.

جهت حل مسأله، دامنه محاسباتی شبکه‌بندی شده است. شبکه‌سازی شامل مراحل تعریف نواحی ورودی و خروجی و دیواره‌ها و ایجاد شماره گره‌ها می‌باشد. شبکه تولید شده و نحوه قرارگیری یک مانع نمونه در آن در شکل ۳ نشان داده شده است. مطابق شکل،  $n, m$  به ترتیب تعداد گره‌ها در راستای  $x$  و  $y$  و  $\delta x, \delta y$  طول شبکه در راستای مذکور می‌باشد که در شبیه سازی انجام گرفته  $\delta y = \delta x$  بوده و اندازه شبکه نهایی برابر با  $n=3001$  و  $m=103$  در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که به منظور ایجاد راحت تر موانع مرئی، شبکه بندی مورد اشاره در دیواره بالایی و پایینی به اندازه  $\delta y/2$  بیرون از صفحات در نظر گرفته شده است.



شکل ۳- طرح کلی شبکه تولید شده

یک شبکه مناسب و تا حد امکان یکنواخت در دقت جواب‌ها و همچنین پایداری حل عددی اهمیت زیادی دارد. عموماً برای حصول جواب دقیق، شبکه را ریز می‌نمایند، از طرف دیگر برای کم کردن حجم محاسبات، شبکه بندی مورد استفاده نباید بیش از حد مورد نیاز ریز باشد. بنابراین در یک حل عددی لازم است بین دو پارامتر دست یابی به نتایج با دقت خوب و سرعت انجام محاسبات، توافق منطقی ایجاد گردد. به منظور بررسی عدم وابستگی نتایج به تعداد و اندازه مش، سه نوع شبکه بندی با اندازه شبکه های مختلف تولید شده و کد نوشته شده به زبان فرترن با آنها اجرا گردید و اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین نتایج به دست آمده مشاهده نشد.

#### ۳- مدل توانی

برخلاف سیال نیوتنی که که ضریب ویسکوزیته در نرخ برش ثابت است، در سیالات غیرنیوتنی یک رابطه غیرخطی بین

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[ 1 + 3 \frac{e_i \cdot u}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(e_i \cdot u)^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c^2} \right], i=0 \dots 8 \quad (۸)$$

در رابطه (۸) تابع وزنی  $w_i$  دارای مقادیر  $w_0 = 4/9$  و  $w_{1,2,3,4} = 1/9$  و  $w_{5,6,7,8} = 1/36$  می باشد. مقادیر محلی همچون چگالی  $\rho$  و سرعت  $u$  نیز از روابط (۹) و (۱۰) به دست می‌آید:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (۹)$$

$$\rho u = \sum_{i=0}^8 f_i e_i \quad (۱۰)$$

#### ۴-۲- معادله شبکه بولتزمن انتقال حرارت

مطابق بخش قبلی می توان معادله حرارتی شبکه بولتزمن را نیز بیان نماییم. طبق هی<sup>۲</sup> و همکاران [۲۴] داریم:

$$g_i(x+e_i \delta t, t+\delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau_g} [g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)] \quad (۱۱)$$

که  $g_i(x, t)$  و  $g_i^{eq}(x, t)$  به ترتیب تابع توزیع دمای تک ذره و تابع توزیع تعادلی آن می باشد.  $\tau_g$  نیز زمان آرامش حرارتی بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau_g = 3 \frac{k}{(\rho c_p) f c^2 \delta t} + 0.5 \quad (۱۲)$$

که  $k$  هدایت گرمایی سیال یا جامد،  $\rho$  و  $c_p$  چگالی و گرمای ویژه در فشار ثابت هستند که در این مقاله با در نظر گرفتن  $Pr = 0.7$  مقدار ضریب پخش حرارتی  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{v}{Pr}$  در نظر گرفته شده است. در رابطه (۱۱)

میزان  $g_i^{eq}(x, t)$  نیز از رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$g_i^{eq} = w_i T \left[ 1 + 3 \frac{e_i \cdot u}{c^2} \right] \quad i=0 \dots 8 \quad (۱۳)$$

دمای محلی نیز از رابطه زیر محاسبه می‌گردد [۲۵]:

$$T = \sum_{i=0}^8 g_i \quad (۱۴)$$

#### ۴-۱- معادله شبکه بولتزمن جریان سیال

یک مدل جنبشی پر کاربرد که به دفعات از آن استفاده شده است، تقریب گسسته شده معادله بولتزمن با زمان آرامش منفرد و از جمله مدل های معروف که در این مطالعه استفاده شده است، مدل شبکه بولتزمن دو بعدی با ۹ مولفه سرعت (D2Q9) جهت حل معادله شبکه بولتزمن در جریان سیال در سطح معادله ناویر استوکس می باشد.  $e_i$  سرعت منفذی تک ذره است که مقدار آن در هر جهت طبق رابطه زیر مشخص می‌گردد [۲۱]:

$$e_i = \begin{cases} (0,0) & i=0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2]) \cdot c & i=1,2,3,4 \\ (\sqrt{2}(\cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4]), \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4]) \cdot c & i=5,6,7,8 \end{cases} \quad (۵)$$

که اندیس  $i$  بیانگر جهت سرعت تک ذره و  $c$  سرعت شبکه می‌باشد که در اینجا برابر یک در نظر گرفته شده است. اگر  $f_i(x, t)$  و  $f_i^{eq}(x, t)$  به ترتیب بیانگر تابع توزیع چگالی تک ذره و تابع توزیع تعادلی آن باشد، معادله تکاملی در میدان سرعت به صورت زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$f_i(x+e_i \delta t, t+\delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau_v} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (۶)$$

این معادله شامل دو بخش است، جاری شدن و برخورد. در مرحله جاری شدن (سمت چپ معادله)، توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاور جاری می‌شوند و بخش برخورد (سمت راست) بیانگر برخورد ذرات به یکدیگر در محل نقاط شبکه می باشد که توسط بتینگر-گراس-کراک<sup>۱</sup> [۲۲] پیشنهاد شده است. معادله (۶) را می توان از معادله پیوسته بولتزمن به دست آورد [۲۳]. در این معادله،  $\delta t$  گام زمانی و  $\tau_v$  زمان آرامش سیال می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau_v = 3v \frac{\delta t}{\delta x^2} + 0.5 \quad (۷)$$

که در این مطالعه  $\delta t = \delta x = 1$  در نظر گرفته شده است. تابع توزیع تعادلی تک ذره به میزان چگالی محلی و سرعت سیال وابسته بوده و توسط پنگ و همکاران [۲۱] بیان شده است:

<sup>۲</sup> He<sup>۱</sup> Bhatnagar-Groos-Krook

### ۵- شرایط مرزی

در ورودی میدان جریان با فرض سرعت یکنواخت هی [۲۶] استفاده گردیده است. در خروجی نیز از طرح برونمایی می<sup>۱</sup> و دیگران [۲۷] برای مقادیر مجهول استفاده شد. برای دیواره های بالا و پایین با فرض عدم لغزش سرعت، از مدل بونس - بک<sup>۲</sup> [۲۶ و ۲۸] استفاده شده است. این مدل، ساده ترین الگویی است که شرط عدم لغزش را بیان می کند و در آن، ذره برخورد کننده به دیواره جامد، در جهت مخالف، به داخل میدان منعکس می شود. میزان سرعت در داخل محیط متخلخل نیز به علت عدم نفوذ جریان، صفر خواهد بود، لذا جهت برقراری این شرط از روش تغییر مقادیر توابع توزیع چگالی در کل محیط جامد استفاده گردیده است. شرط مرزی دما ثابت  $T_w = 1^\circ C$  برای دیواره بالایی و پایینی و  $T_{in} = 0^\circ C$  در ورودی جریان در نظر گرفته شده است. در این مطالعه از روش معرفی شده توسط محمد<sup>۳</sup> [۲۹] جهت اعمال شرط مرزی دما ثابت و شرط مرزی حرارتی خروجی استفاده شد. به منظور محاسبه تابع توزیع دما در محیط متخلخل عایق، فرض می شود که گرادیان تابع توزیع احتمال در جهت عمود بر دیواره برابر صفر است که مشابه اعمال شرط بونس بک برای سرعت است.

### ۶- الگوریتم حل

انتخاب یک الگوریتم مناسب به منظور حل مسأله اشاره شده و دستیابی به نتایج صحیح، بسیار حائز اهمیت است. یک الگوریتم نامطلوب، روند حل مساله را طولانی کرده و ممکن است باعث واگرا شدن نتایج شود. در روش شبکه بولتزمن، الگوریتم حل به گونه های مختلفی بیان می شود، که در اینجا فلوچارت بهترین و مناسب ترین روش، متناسب با هندسه مسأله، در شکل ۴ نشان داده شده است.

در سیال نیوتنی مقدار زمان آرامش در هر نقطه شبکه مقداری ثابت در نظر گرفته می شود ولی در سیال غیرنیوتنی زمان آرامش در هر گره با گره مجاور تفاوت دارد. دلیل آن را

این گونه می توان بیان نمود که در سیال غیرنیوتنی لزجت تابع گرادیان سرعت است و چون گرادیان سرعت در هر نقطه کانال متفاوت از سایر نقاط شبکه است، لزجت نیز در هر نقطه متفاوت از نقطه مجاور است.

به این ترتیب وقتی لزجت در نقاط مختلف مقادیر متفاوت داشته باشد، زمان آرامش نیز در هر گره متفاوت است. در حل عددی لازم است که بعد از راه اندازی اولیه برنامه رایانه ای، در هر تکرار با محاسبه گرادیان سرعت، زمان آرامش جدید محاسبه شود. از این زمان آرامش جدید در گام زمانی بعد استفاده می شود. در گام های زمانی اولیه ممکن است در نقاطی مقدار گرادیان سرعت صفر باشد، همچنین در مدل های غیرنیوتنی امکان اینکه در مرکز کانال، گرادیان سرعت صفر باشد وجود دارد. به همین منظور جهت جلوگیری از تقسیم بر صفر در معادله (۱)، مقدار بسیار کوچک اپسیلون را به گرادیان سرعت در نقاطی که صفر می شود، اضافه می کنیم.

مطابق شکل ۴، ابتدا پارامترهای اولیه همچون  $U_{in}, T_{in}, T_w, Pr, Re, n, v_0$  و توابع توزیع تعادلی اولیه  $f_i = g_i = 0, i = 0 \dots 8$  و ویسکوزیته سینماتیک محلی از رابطه (۱) در نظر گرفته می شوند. سپس، طبق روابط (۸) و (۱۳)، مقادیر توابع توزیع تعادلی در گره های سیال محاسبه می گردند.

در مرحله تصادم<sup>۴</sup>، روابط (۶) و (۱۱) ارضا شده و مقادیر جدید توابع توزیع (پس از تصادم) محاسبه می شوند. پس از آن، مرحله جاری شدن<sup>۵</sup> اجرا می گردد، که مقادیر توابع توزیع تمامی گره ها در راستای خود، بر روی گره های همجوار ریخته می شوند. بعد از اعمال شرایط مرزی، مقادیر چگالی، سرعت و دما در تمامی شبکه طبق روابط (۹)، (۱۰) و (۱۴) محاسبه می شود. مقادیر تانسور نرخ کرنش، اندازه نرخ برش و ویسکوزیته سینماتیک محلی در کل دامنه با روابط (۳)، (۲) و (۱) محاسبه می شود که در اینجا جهت محاسبه اینوریانت دوم تانسور نرخ کرنش از تقریب مرتبه دوم تفاضل

<sup>4</sup> collision  
<sup>5</sup> streaming

<sup>1</sup> Mei  
<sup>2</sup> bounce-back  
<sup>3</sup> Mohamad

محدود استفاده شده است. در صورت همگرا شدن نتایج، با خطای نسبی کمتر از  $1.5 \times 10^{-5}$  محاسبه شده از رابطه (۱۵)، برنامه پایان می‌یابد در غیر این صورت مراحل شرح داده شده، تکرار خواهند شد.

$$\varepsilon' = \sum_x \frac{|u(x,t) - u(x,t-1)|}{|u(x,t)|} \quad (15)$$

**۷- معتبر سازی کد نوشته شده**

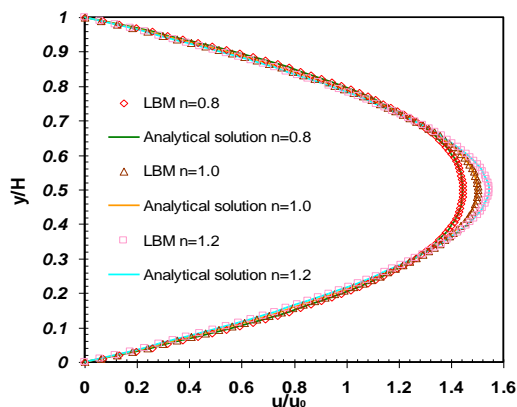
جهت بررسی صحت کد عددی نوشته شده با نتایج موجود، نتایج به دست آمده در کانال بدون مانع با حل تحلیل از رابطه (۴) برای  $n=0.8, 1.0, 1.2$  مقایسه گردید که نتایج مقایسه در شکل ۵ نشان داده شده است. مطابق شکل، نتایج بدست آمده از روش شبکه بولتزمن کاملاً منطبق با حل تحلیلی می‌باشد.

به منظور بررسی صحت مدل حرارتی شبکه بولتزمن، عدد ناسلت در دیواره پایینی با استفاده از رابطه (۱۶) محاسبه گردید.

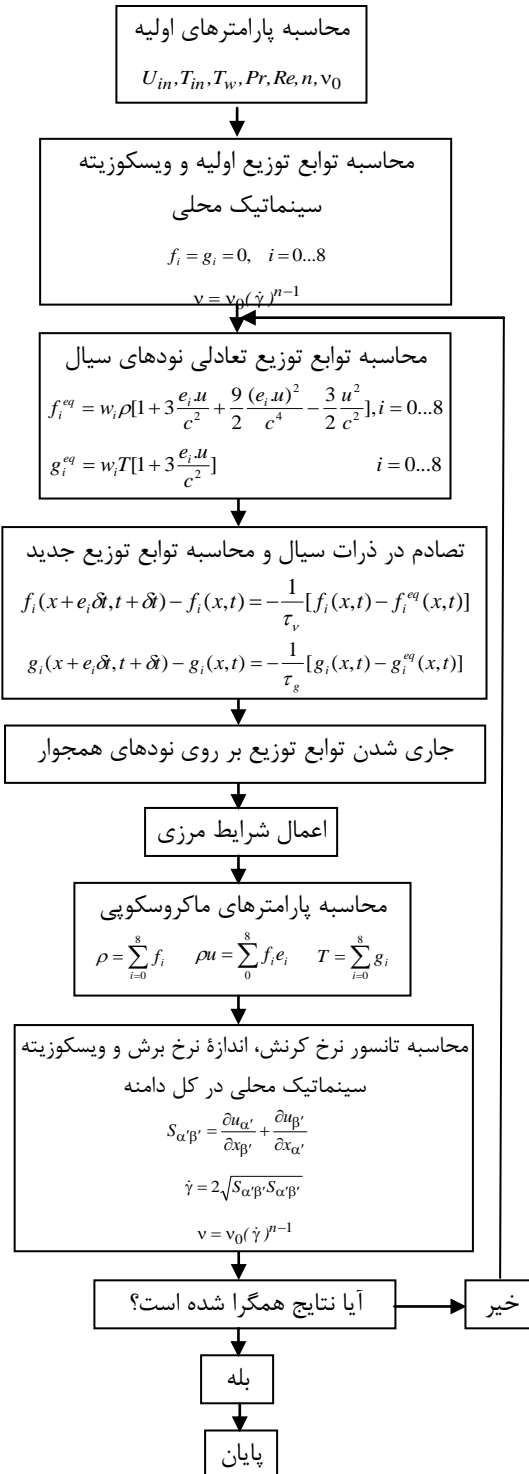
$$Nu = - \frac{D_h \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_w - T_b} \quad (16)$$

که  $T_b$  دمای بالک بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$T_b = \frac{\int_0^H u \cdot T dy}{\int_0^H u dy} \quad (17)$$

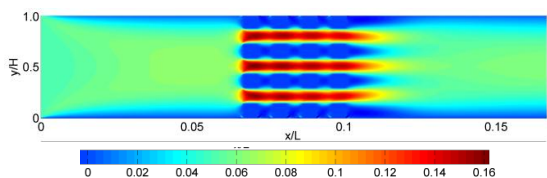


شکل ۵- مقایسه بین نمودار سرعت بی بعد روش شبکه بولتزمن با نتایج تحلیلی در ناحیه توسعه یافته دامنه محاسباتی

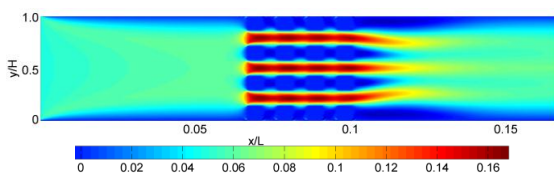


شکل ۴- فلوچارت الگوریتم حل

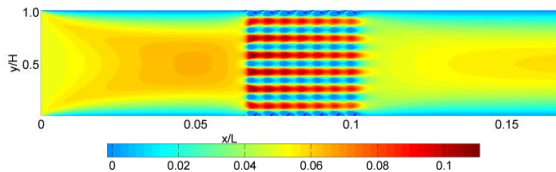
بیشتر شده و در نتیجه سرعت سیال عبوری از داخل محیط متخلخل افزایش می‌یابد که در نهایت سرعت خروجی نیز افزایش می‌یابد.



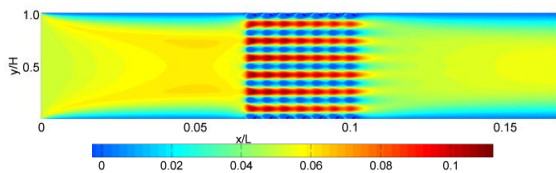
شکل ۷- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4 \times 4$  و  $n=0.8$



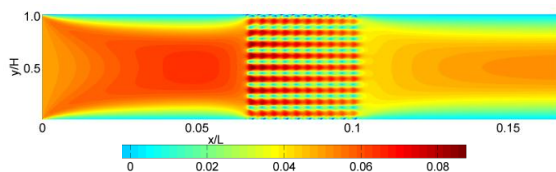
شکل ۸- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4 \times 4$  و  $n=1.2$



شکل ۹- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7 \times 7$  و  $n=0.8$

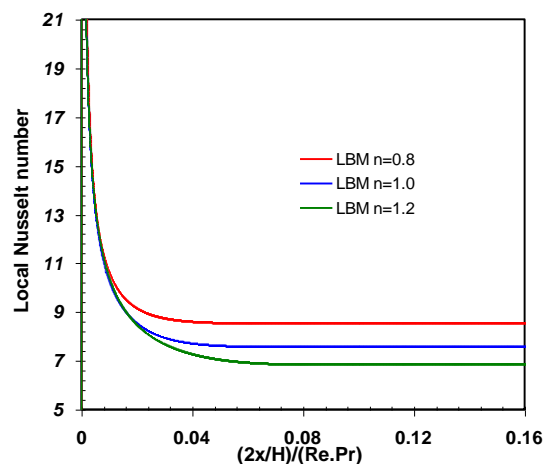


شکل ۱۰- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7 \times 7$  و  $n=1.2$



شکل ۱۱- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10 \times 10$  و  $n=0.8$

نمودار عدد  $Nu$  بر حسب پارامتر بی‌بعد  $(2x/H)/(RePr)$  در عدد رینولدز ۴۰۰ در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶- عدد ناسلت بر حسب مختصات طولی بی‌بعد

مطابق این شکل، عدد ناسلت محاسبه شده در ناحیه توسعه یافته حرارتی برای حالت نیوتنی، برابر  $7/536$  بوده و مقدار گزارش شده از حل دقیق، برابر  $7/54$  [۳۰] می‌باشد که نشان دهنده  $0.53\%$  درصد خطا در محاسبات است. به منظور بررسی بیشتر اعتبار حل عددی، نتایج کانال مورد بررسی با وجود یک بلوک مربعی در وسط کانال با نتایج حاصل از روش المان محدود بررسی شد که در اینجا به دلیل کوتاهی مطلب نیامده است. نتایج مقایسه این دو روش اختلاف بسیار اندکی با یکدیگر داشته و صحت روش شبکه بولتزن را بیان داشت.

## ۸- نتایج بدست آمده

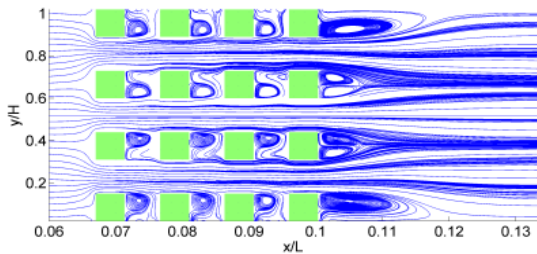
### ۸-۱- جریان سیال در محیط متخلخل

با نصب موانع ذکر شده در بخش ۲ در بین صفحات، روش شبکه بولتزن در اعداد رینولدز ۱۰۰ تا ۳۰۰ اجرا شد. در شکل های ۷ تا ۱۲ خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در عدد رینولدز ۳۰۰ و به ازای  $n=0.8$  و  $n=1.2$  نشان داده شده است. مطابق این شکل ها با افزایش ضریب توانی، میزان سرعت جریان افزایش یافته و الگوی حرکت جریان از داخل محیط متخلخل تغییر می‌کند. آشکار است که در آرایش  $4 \times 4$  به دلیل مسدود شدن قسمت وسیع تری از مسیر جریان و افزایش مقاومت در مسیر حرکت سیال داخل کانال، تمرکز جریان سیال در فضای آزاد بین موانع

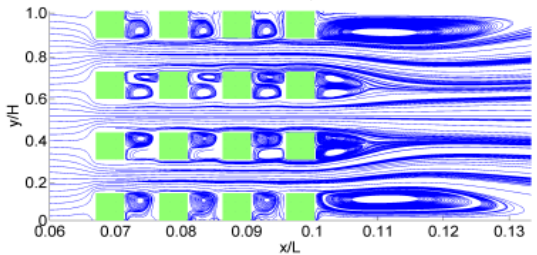


نتایج شبیه سازی در اعداد رینولدز مختلف بررسی شد که در اینجا ارائه نشده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده این مطلب است که با افزایش عدد رینولدز، خطوط سرعت ثابت در ردیف انتهایی موانع طولی تر شده و در امتداد دو صفحه گسترش می‌یابند.

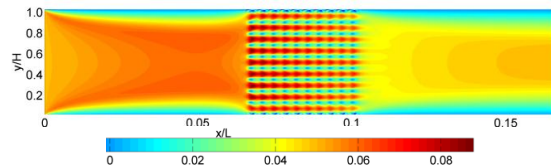
در شکل‌های ۱۵ تا ۲۰ میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re=300$  و به ازای آرایش‌های متفاوت در دو ضریب توانی  $0.8$  و  $1/2$  نشان داده شده است. در اثر تماس بین سیال و موانع، گردابه‌های جریان تشکیل می‌شوند. با بررسی دقیق این اشکال، آشکار می‌شود که افزایش ضریب توانی منجر به بزرگ شدن گردابه‌های ایجاد شده در آخرین ردیف موانع می‌گردد. این پدیده به دلیل تشکیل لایه لزج سیال در اطراف موانع و گرادیان فشار معکوس در سیال دایلاتنت می‌باشد. مطابق این شکل‌ها در آرایش  $4*4$  گردابه‌های بزرگ‌تر و قوی‌تر ایجاد می‌شوند اما در سایر آرایش‌ها به دلیل نفوذ راحت‌تر سیال داخل محیط متخلخل، گردابه‌های کوچک‌تر و ضعیف‌تری ایجاد می‌شوند. قابل ذکر است که قدرت گردابه‌ها به عدد رینولدز نیز وابسته است. در اعداد رینولدز پایین گردابه‌های ضعیف‌تری تشکیل می‌شوند که نتایج شبیه سازی به منظور کاهش حجم مقاله ارائه نشده است.



شکل ۱۵- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4*4$  و  $n=0.8$

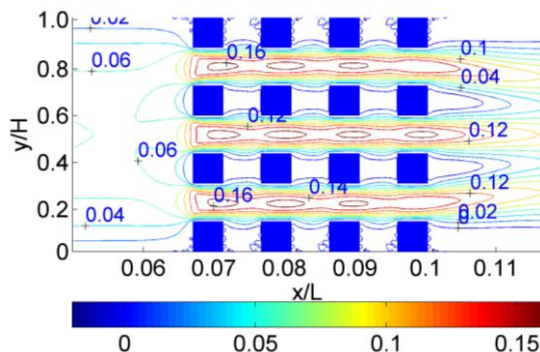


شکل ۱۶- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4*4$  و  $n=1.2$

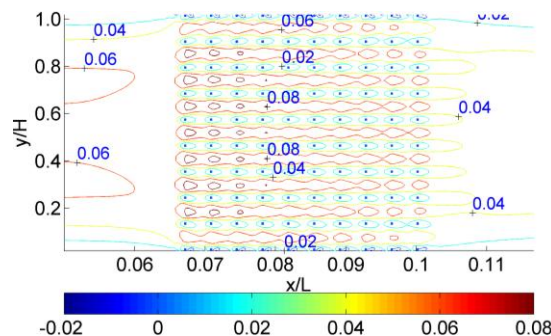


شکل ۱۲- خطوط هم تراز موضعی سرعت در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10*10$  و  $n=1.2$

خطوط سرعت ثابت موضعی در دو آرایش  $4*4$  و  $10*10$  در ضریب توانی متفاوت نیز در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است.



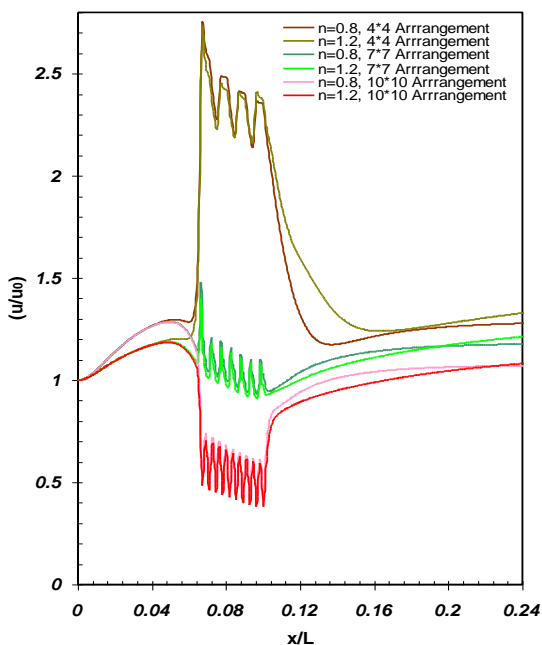
شکل ۱۳- خطوط سرعت ثابت موضعی در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4*4$  و  $n=1.2$



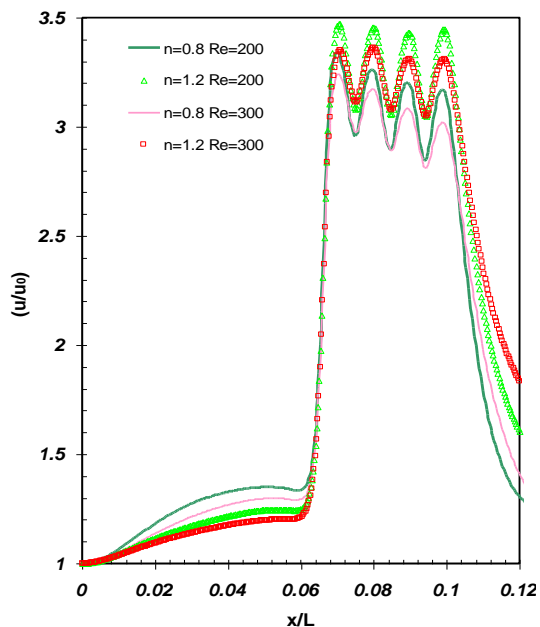
شکل ۱۴- خطوط سرعت ثابت موضعی در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10*10$  و  $n=1.2$

مطابق این شکل‌ها، کاهش سرعت سیال داخل محیط متخلخل به وضوح نمایان است. همچنین آشکار است که روش شبکه بولتزمن به راحتی حرکت سیال از داخل موانع را شبیه سازی می‌کند و در نتیجه کارایی این روش را در شبیه سازی هندسه‌های پیچیده نمایان می‌سازد. قابل ذکر است که

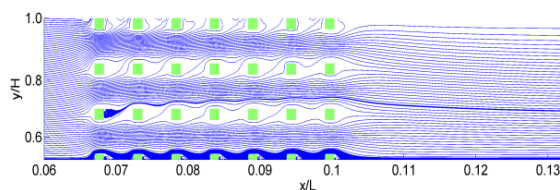
در شکل ۲۳ نشان داده شده است. با افزایش تعداد موانع، سرعت داخل محیط متخلخل کاهش می‌یابد.



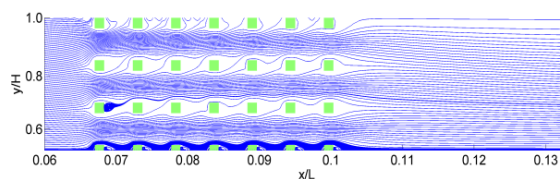
شکل ۲۱- مقایسه بین نمودار سرعت بی‌بعد طولی در آرایش‌ها و ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$  و  $y/H = 0.46078$



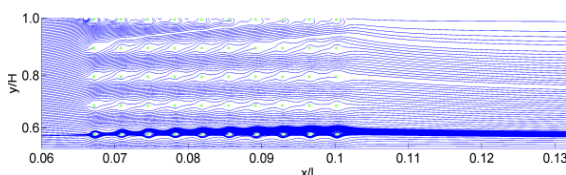
شکل ۲۲- مقایسه بین نمودار سرعت بی‌بعد طولی در رینولدزهای مختلف و آرایش  $4*4$  در موقعیت  $y/H = 0.5$



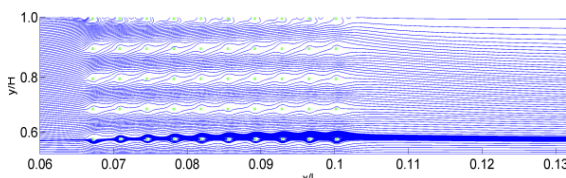
شکل ۱۷- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7*7$  و  $n=0.8$  در نیمه بالایی کانال



شکل ۱۸- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7*7$  و  $n=1.2$  در نیمه بالایی کانال



شکل ۱۹- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10*10$  و  $n=0.8$  در نیمه بالایی کانال



شکل ۲۰- میدان جریان در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10*10$  و  $n=1.2$  در نیمه بالایی کانال

تغییرات سرعت بی‌بعد طولی در موقعیت  $y/H = 0.46078$  در آرایش‌ها و ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$  نیز در شکل ۲۱ نشان داده شده است. مطابق این شکل نمودار سرعت در داخل محیط متخلخل تحت تاثیر موانع مربعی قرار گرفته و با یک جهش کلی، در نهایت کاهش می‌یابد. در شکل ۲۲ سرعت بی‌بعد طولی در موقعیت  $y/H = 0.5$  به ازای رینولدزهای مختلف و در آرایش  $4*4$  ترسیم گردیده است. مطابق شکل با افزایش ضریب توانی، سرعت عبوری از داخل محیط متخلخل افزایش می‌یابد. نمودار سرعت بی‌بعد عرضی در آرایش‌ها و ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$

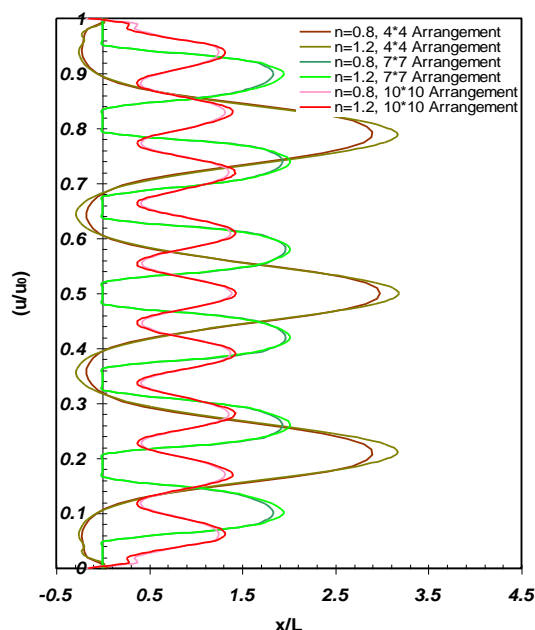
مطابق این شکل، با نزدیک شدن به موانع مربعی، نمودار سرعت از حالت سهموی خود خارج می‌شود. در موقعیت  $x/L=0.084$  که مرتبط با مقطع داخل محیط متخلخل است، نمودار سرعت بی‌بعد به علت تاثیر موانع مربعی و گردابه‌های تشکیلی حالت نوسانی به خود می‌گیرد و به تدریج با دور شدن از محیط متخلخل به حالت اولیه خود باز می‌گردد. قابل ذکر است که روش شبکه بولتزمن به خوبی حرکت سیال در میان محیط متخلخل را نشان می‌دهد.

### ۸-۲- توزیع دما در محیط متخلخل

همان گونه که انتظار می‌رود، تغییر در مسیر حرکت جریان ناشی از حضور محیط متخلخل، بر روی رفتار حرارتی کانال تاثیر می‌گذارد. بدین منظور نمودارهای ۲۵ تا ۳۰ جهت بررسی ترسیم خطوط هم تراز دما در رینولدز ۳۰۰ به ازای آرایش‌ها و ضرایب توانی متفاوت ترسیم گردیده است. آشکار است که افزایش ضریب توانی و کاهش تعداد موانع، رشد لایه مرزی حرارتی را کاهش داده و توسعه یافتگی حرارتی به تعویق می‌افتد. همچنین سرعت انتقال دمای دیواره‌ها به مرکز کانال، با افزایش ضریب توانی، کاهش می‌یابد که به علت افزایش سرعت داخل محیط متخلخل همزمان با افزایش ضریب توانی می‌باشد.

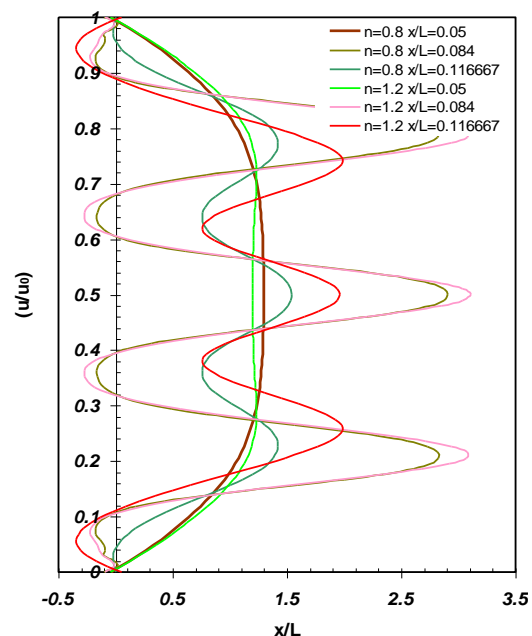
نمودار دمای بی‌بعد عرضی در آرایش  $4*4$  و ضرایب توانی مختلف در  $Re=300$  در موقعیت‌های مختلف در شکل ۳۱ نشان داده شده است. این شکل به خوبی نمودار دمای بی‌بعد را در قبل از محیط متخلخل، داخل آن و همین‌طور در بعد از محیط متخلخل مشخص می‌کند. قابل ذکر است که گردابه‌های تشکیلی شده در پشت موانع باعث چرخش جریان و تغییر جهت جریان می‌شود. این گردابه‌ها با تحت تاثیر قراردادن میدان دما، باعث کاهش انتقال حرارت می‌گردند.

نحوه تاثیر محیط متخلخل و عدد رینولدز بر روی عدد ناسلت متوسط در شکل ۳۲ نشان داده شده است. این شکل با متوسط‌گیری عدد ناسلت محلی در فاصله  $x/L=0.033$  تا  $x/L=0.33$  به دست آمده است. طبق این شکل کاهش ضریب توانی، باعث افزایش عدد ناسلت متوسط می‌شود. افزایش تعداد موانع نیز تاثیر مثبت بر بهبود نرخ انتقال حرارت دارد. همچنین افزایش عدد رینولدز و استفاده از محیط متخلخل باعث افزایش عدد ناسلت متوسط می‌گردد.

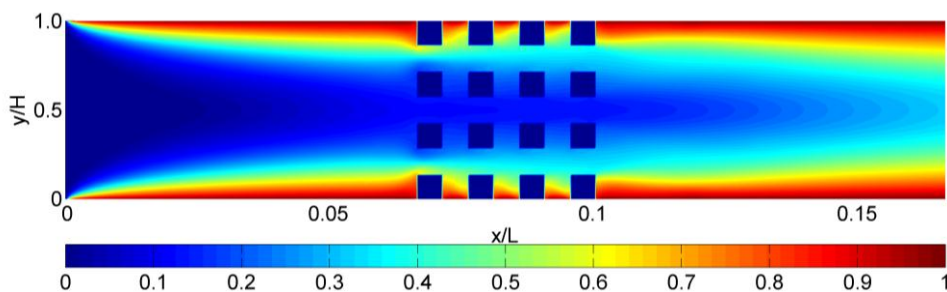


شکل ۲۳- نمودار سرعت بی‌بعد عرضی در آرایش‌ها و ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$  و  $x/L = 0.083$

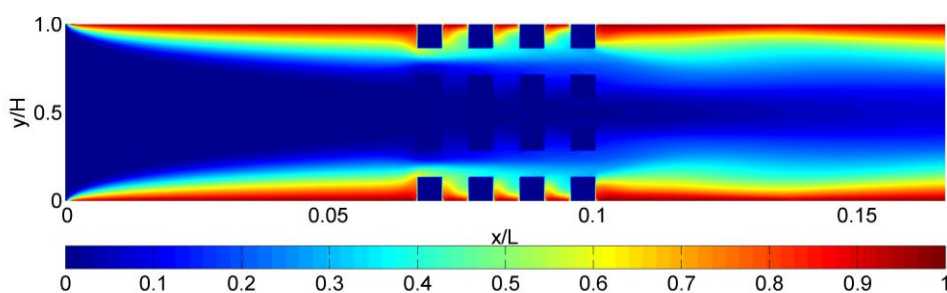
نمودار سرعت بی‌بعد عرضی در آرایش  $4*4$  و ضرایب توانی مختلف در  $Re=300$  در شکل ۲۴ نشان داده شده است.



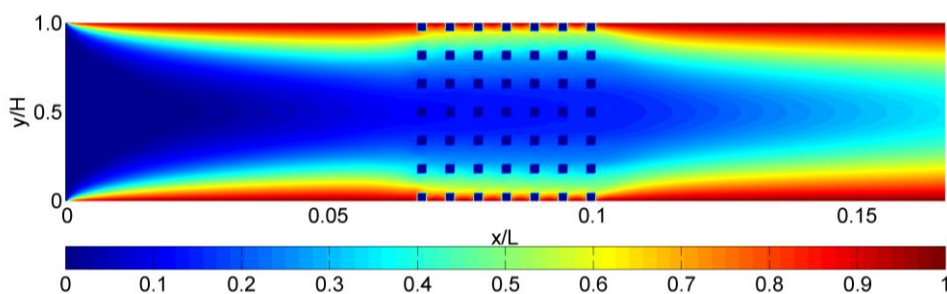
شکل ۲۴- نمودار سرعت بی‌بعد عرضی در آرایش  $4*4$  و ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$  در موقعیت‌های مختلف



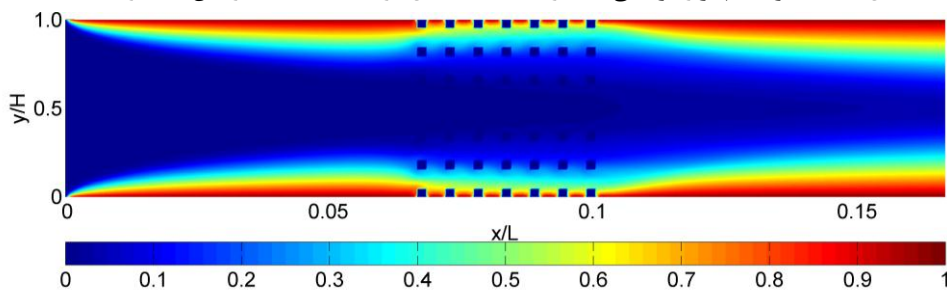
شکل ۲۵- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4 \times 4$  و  $n=0.8$



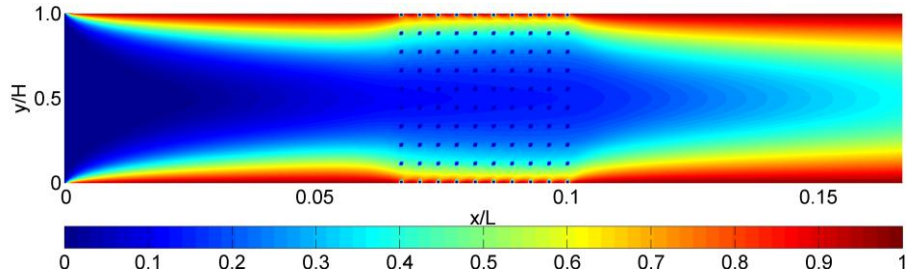
شکل ۲۶- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $4 \times 4$  و  $n=1.2$



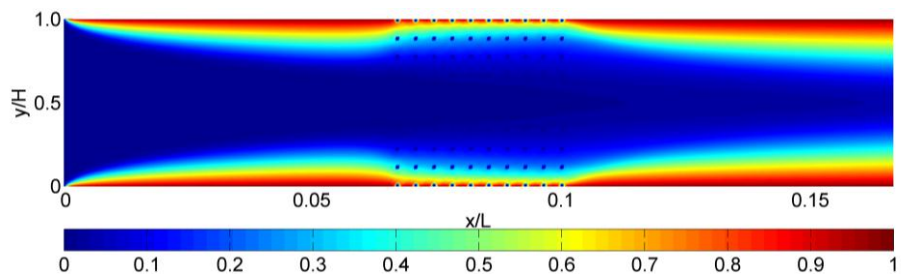
شکل ۲۷- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7 \times 7$  و  $n=0.8$



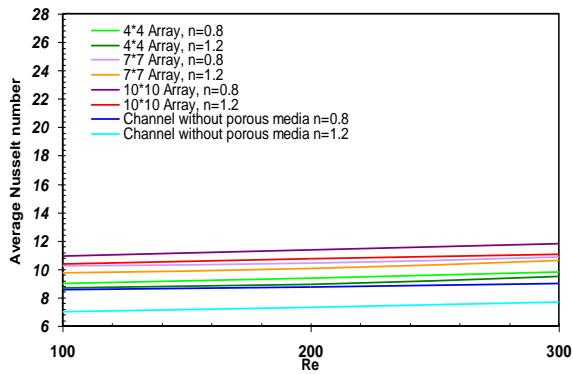
شکل ۲۸- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $7 \times 7$  و  $n=1.2$



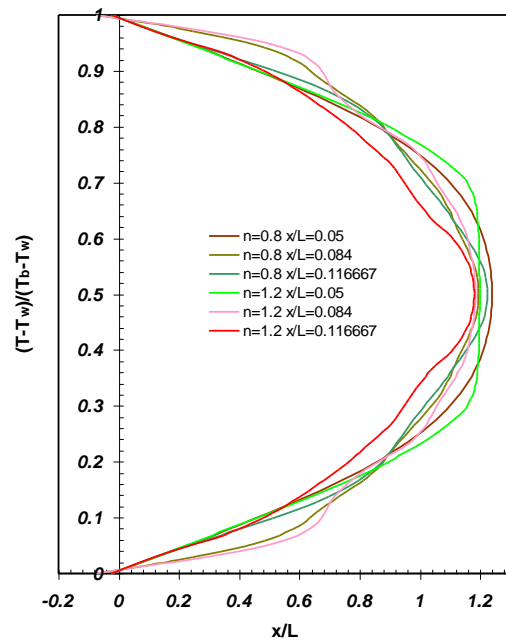
شکل ۲۹- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10 \times 10$  و  $n=0.8$



شکل ۳۰- خطوط هم تراز موضعی دما در محیط متخلخل در  $Re = 300$  با آرایش  $10 \times 10$  و  $n=1.2$



شکل ۳۲- نمودار عدد ناسلت متوسط بر حسب عدد رینولدز در آرایش‌های مختلف



شکل ۳۱- نمودار دمای بی‌بعد عرضی در آرایش  $4 \times 4$  و  $4 \times 4$  ضرایب توانی مختلف در  $Re = 300$  در موقعیت‌های مختلف

- [6] He X, Luo LS (1997) Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys Rev* 56: 6811–6817.
- [7] Chen S, Doolen G (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annu Rev Fluid Mech* 30: 329–364.
- [8] McNamara G, Zanetti G (1988) Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata. *Phys Rev Lett* 61: 2332–2335.
- [9] Boek ES, Chin J, Coveney PV (2003) Lattice-Boltzmann simulation of the flow of non-Newtonian fluids in porous media. *Int J Mod Phys* 17(1-2): 99–102.
- [10] Sullivan SP, Gladden LF, Johns ML (2006) Simulation of power-law fluid flow through porous media using lattice Boltzmann techniques. *J Non-New Fluid Mech* 133(2-3): 91–98.
- [11] Chen YL, Cao XD, Zhu KQ (2009) A gray lattice Boltzmann model for power-law fluid and its application in the study of slip velocity at porous interface. *J Non-New Fluid Mech* 159(1-3): 130–136.
- [12] Jahanshahi Javaran E, Gandjalikhan Nassab SA, Jafari S (2010) Thermal analysis of a 2-D heat recovery system using porous media including lattice Boltzmann simulation of fluid flow. *Int J Therm Sci* 49(6): 1031–1041.
- [13] Kayhani MH, Mohebbi R (2013) Numerical Investigation of Fluid Flow and Heat Transfer on the Porous Media Between Two Parallel Plates Using the Lattice Boltzmann Method. *Aersp Mech* 9(1): 63–76.
- [14] Gabbanelli S, Drazer G, Koplik J (2006) Lattice Boltzmann method for non-Newtonian fluid Flows. *Phy Rev E* 72: 046312.
- [15] Toms BA (1949) Some observation on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers. *Procc Con Rheo* Vol II, North Holland Publishing Co, Amsterdam.
- [16] Emerson A (1965) Model experiments using dilute polymer solutions instead of water. *Trans N.E Coast Inst Eng Shipbuilders* Vol 81.
- [17] Delplace F, Leuliet JC (1995) Generalize Reynolds number for the flow of power law fluid in cylindrical ducts of arbitrary cross-section. *Chem Eng J* 56: 33–37.
- [18] Quarteroni A, Veneziani T M (2000) Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. *Comput. Visual Sci.* 2: 163–97.
- [19] Bird RB (1987) Dynamics of polymeric liquids. 2nd ed., in: *Fluid Mech* Vol 1 Wiley, New York.

## ۹- نتیجه گیری

در این مقاله جریان سیال و انتقال حرارت غیر نیوتنی با مدل توانی با استفاده از روش شبکه بولتزمن ارائه شد. این شبیه سازی در محیط متخلخل متشکل از موانع مربعی بین دو صفحه موازی انجام گرفت. در این بررسی، نمودارهای سرعت توسعه یافته سیالات غیرنیوتنی با مدل توانی با حل تحلیلی داخل کانال و میزان عدد ناسلت در دیواره پایینی نیز با نتایج مراجع مربوطه مقایسه شد. مقایسه نتایج حل عددی با نتایج تحلیلی، صحت کد استفاده شده در این شبیه سازی را نشان داد. نتایج حاکی از قدرت بالای این روش در شبیه سازی محیط‌های پیچیده بود. محیط متخلخل مورد استفاده در این مقاله، با آرایش منظم موانع مربعی به صورت موضعی در دامنه مورد نظر، تشکیل گردید. نتایج به دست آمده در این حالت، بیانگر این بود که توزیع جریان و دما، تحت اثر محیط متخلخل تغییر کرده و وجود موانع ثابت در دامنه محاسباتی به عنوان محیط متخلخل، باعث افزایش عملکرد گرمایی و عدد ناسلت متوسط می‌گردد. همچنین مشاهده شد که سیالات نازک شونده بیشترین تاثیر را در بهبود انتقال حرارت داشته همچنین کاهش ضریب توانی و افزایش عدد رینولدز همراه با افزایش تعداد موانع مربعی باعث افزایش عدد ناسلت متوسط و بهبود انتقال حرارت می‌شوند.

## مراجع

- [1] Gupta AK, Sharma A, Chhabra RP, Eswaran V (2003) Two-dimensional steady flow of a power law fluid past a square cylinder in a plane channel: momentum and heat transfer characteristics. *Ind Eng Chem Res* 42: 5674–5686.
- [2] Nitin S, Chhabra RP (2005) Non-isothermal flow of a power law fluid past a rectangular obstacle (of aspect ratio  $1 \times 2$ ) in a channel: drag and heat transfer. *Int J Eng Sci* 43: 707–720.
- [3] Chhabra RP, Richardson JF (1999) Non-Newtonian flow in the process industries. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [4] Chhabra RP (1996) Hydrodynamics of non-spherical particles in non-Newtonian fluids. in: N.P. Cheremisinoff, P.N. Cheremisinoff (Eds.), *Handbook App Poly Proc Tech*, Marcel Dekker, N.Y.
- [5] Yu D, Mei R, Luo L, Shyy W (2003) Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation. *Prog Aero sci* 39: 329–367.

- [25] Wang JK, Wang MR, Li ZX (2007) A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer. *Int J Therm Sci* 46: 228–234.
- [26] Zou QS, He XY (1997) On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phy Fluids* 9(6): 1591–1598.
- [27] Mei R, Luo LS, Shyy W (1999) An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method. *J Comp Phy* 155: 307–330.
- [28] Inamuro T, Yoshino M, Ogino F (1995) A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations. *Phy Fluids* 7(12): 2928–2930.
- [29] Mohamad AA (2007) *Applied lattice Boltzmann method for transport phenomena, momentum, heat and mass transfer*. Sure Print, Calgary, Canada.
- [30] Cengel YA (2006) *Heat and mass transfer third edition*. Mc Graw Hill, Singapore.
- [20] Bird RB, Warren E, Stewart, Edwin N Lightfoot (1960) *Transport phenomena*. 2ed Edition, John Wiley and Sons.
- [21] Peng Y, Shu C, Chew YT (2003) Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. *Phy Rev E* 68 026701.
- [22] Bhatnaggar PL, Groos EP, Krook M (1954) A model for collision processes in gases small amplitude processes in charged and neutral one component systems. *Phys Rev A* 94: 511–525.
- [23] He XY, Luo LS (1997) A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phy Rev E* 55: 6333–6336.
- [24] He XY, Chen SY, Doolen G D (1998) A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit. *J Comp Phy* 146: 282–300.