مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۸/ دوره ۹/ شماره ۳/ صفحه ۲۱۷-۲۳۰

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2019.8439.2910

افزایش پایداری عددی در شبیه‌سازی جریان‌های ویسکوالاستیک در اعداد وایزنبرگ بالا

سجاد پاشازاده[1] و آزاده جعفری[2,*]

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی، دانشکده مکانیک دانشگاه تهران ، تهران

[2] استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک دانشگاه تهران، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۴/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۱۴

چکیده

این روزها یکی از بزرگ‌ترین چالش‌ها برای افرادی که درزمینه‌ی رئولوژی کار می‌کنند ارتقاء بازده و پایدار کردن روش‌های عددی به‌منظور دست یافتن به عدد وایزنبرگ (Weissenberg) دلخواه و موردنظر می‌باشند که با روش‌های عادی و بدون استفاده از هیچ پایدارکننده و فیلترینگ، نمی‌توان به عدد وایزنبرگ آزمایشگاهی به دلیل خطاهای عددی رسید. به دلیل وجود عبارت‌های غیرخطی در سیالات ویسکوالاستیک و داشتن حافظه شبیه‌سازی آن سخت است. در این تحقیق ایده اولیه از روش تبدیل لگاریتمی گرفته‌شده که در ابتدا توسط فتال وکوپفرمن مطرح گردیده است. در روش ما تبدیل، با فرمولاسیون تانژانت هایپربولیک صورت گرفته که ضمن حفظ خاصیت مثبت متقارن و معین تانسور سازگاری همچنین با محدود کردن مقادیر ویژه تانسور سازگاری از میل کردن به بینهایت و از ایجاد نقاط تکین جلوگیری و موجب پایداری مدل می‌شود . برای اعتبار سنجی، کار خود را روی کانال دوبعدی با مدل ویسکوالاستیک FENE-P و با روش‌های المان طیفی (Spectral Element Methods) که بر اساس توابع چندجمله‌ای با درجه بالا است، انجام داده‌ایم. تحت انجام این شبیه‌سازی، ماکزیمم عدد وایزنبرگ قابل‌دسترس، رشد ۱۰۰درصدی نسبت به روش کلاسیک FENE-P را داشته است.

کلمات کلیدی: ناپایداری عددی؛ سیال FENE-P؛ روش عددی المان طیفی؛ مسائل اعداد وایزنبرگ بالا.

Enhancing Numerical Stability in Simulation of Viscoelastic Fluid Flows at High Weissenberg Number Problem

S.Pashazadeh[1], A. Jafari[2,*]

[1] MSc. Student, Department Of Mechanical. Engineering., University Of Tehran, Tehran, Iran.

[2] Asst. Prof., Department Of Mechanical. Engineering., University Of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract

Nowadays, simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg numbers is one of the most obstacles and important issues for rheologists to observe the rheological properties at sufficiently high weissenberg number. It is well known that the conformation tensor should, in principle, remain symmetric positive definite (SPD) as it evolves in time. In fact, this property is crucial for the well-posedness of its evolution equation. In practice, this property is violated in many numerical simulations. Most likely, this is caused by the accumulation of spatial discretization errors that arise from numerical integration of the governing equations. In this research, we apply a mathematical transformation, the so-called hyperbolic tangent, on the conformation tensor to bound the eigenvalues and prevent the generation of negative spurious eigenvalues during simulations. The flow of FENE-P fluid through a 2D channel is selected as the test case. Discrete solutions are obtained by spectral/hp element methods which based on the high orders polynomials and have high accuracy for physical instability problems. This enhanced formulation, hyperbolic tangent, prevails the previous numerical failure by bounding the magnitude of eigenvalues in a manner that positive definite is always satisfied. Under this new transformation, the maximum accessible Weissenberg number increases 100% comparing the classical constitutive equation (FENE-P classic).

Keywords: Numerical Instability; FENE-P Model; Spectral Element Methods; High Weissenberg Number Problem.

* نویسنده مسئول؛ تلفن تماس: ۰۲۱۶۱۱۱۱۴۰۳۷

آدرس پست الکترونیکی: azadeh.jafari@ut.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه این مسئله که تانسور سازگاری[1] در راستای محورهای اصلی دارای خاصیت متقارن، مثبت و مقدار مشخص[2] (SPD) باشد، امری بدیهی گردیده است [۱] . در حقیقت این ویژگی برای معقول بودن معادله‌ی تکامل‌یافته بسیار مهم است [۲و۳] . اگرچه ثابت‌شده است که در بسیاری از معادلات اساسی باید پایداری هادامارد[3] برقرار باشد ، ولی در عمل این خاصیت در بسیاری از روش‌های عددی مورد تخطی قرار می‌گیرد. به‌احتمال‌زیاد دلیل آن تجمع خطاهای گسسته سازی نشات گرفته از روش انتگرال‌گیری عددی معادلات حاکم است. این موضوع باعث می‌شود تا مقادیر ویژه کاذب ایجاد گردد که موجب از بین رفتن خاصیت متقارن مثبت معین تانسور سازگاری شده و ناپایداری‌های هادامارد را افزایش می‌دهند و این، یک مانع در تلاش‌های اولیه در شبیه‌سازی عددی سیالات ویسکوالاستیک است [۴] .

اخیراً یک روش لگاریتمی برای تانسور سازگاری توسط فتال و کوپفرمن [۵ و۶] ارائه شد. ایده اصلی بر اساس این حدس زده شد که مشکل عدد وایزنبرگ بالا احتمالاً به دلیل تقریبات بر پایه‌ی چندجمله‌ای‌ها می‌باشند که نمی‌توانند پروفیل‌های نمایی ایجادشده توسط تانسور سازگاری در نواحی با نرخ کرنش بالا یا در جریانات با عدد وایزنبرگ بالا را نشان دهند و دچار شکست می‌شوند. این تبدیل پیشنهادشده توانایی حفظ شرط متقارن مثبت معین برای تانسور سازگاری حتی در عدد وایزنبرگ بالا و با هر روش عددی را دارد.

هولسن و همکاران [۷] اولین بار روش لگاریتمی را با المان محدود و با استفاده از روش[4] DEVSS/DG برای جریان اطراف استوانه با مدل الدرویدبی[5] و گزیکوس[6] اجرا کردند. تحت تبدیل لگاریتمی با این روش ماکزیمم عدد وایزنبرگ به مقدار ۱۰۰ رسید اما آن‌ها عدم وجود همگرایی در نزدیکی استوانه را برای مدل الدرویدبی گزارش دادند.

ون [۸] یک مدل جایگزین استخراج‌شده از تانسور لگاریتمی که از معادله دیفرانسیل اساسی به‌دست‌آمده بود، ارائه کرد و یک مثال عددی با مدل لئونوف[7] برای جریان دوبعدی انقباض ناگهانی[8] با نسبت ۴:۱ و با استفاده از روش‌های پایدارکننده‌ی SUPG و SU ارائه کرد. تحولات چشمگیری در عملکرد محاسبات لگاریتمی با همگرایی خوب و باثبات به دست آمد. مؤلف، همگرایی عددی را برای $De=132$[9] با مش درشت و همچنین $De=193$ را بامش بهبودیافته استخراج کرد. این فرمولاسیون جدید فقط برای معادلات اساسی دیفرانسیلی محدودی قابل‌استفاده است، که پایداری کلی آن‌ها ثابت‌شده است [۹] .

وایتیاناتان و همکاران [۱۰] اخیراً روش تجزیه دو ماتریس را ارائه کرده‌اند، به‌طوری‌که ساختن تانسور سازگاری با رفتار متقارن مثبت معین را تضمین می‌کند. به‌طور موازی همچنین پیشنهاد عوض کردن متغیرهای تانسور سازگاری را باهدف اعمال محدودیت برای اثر[10] ماتریس توسط مدل FENE-P داده شد. الگوریتم حل برای شبیه‌سازی جریان همگن و آشفته اجرا شد.

کورونادو و همکاران [۱۱] یک فرم ساده جایگزین برای فرمولاسیون سازگاری لگاریتمی ارائه کردند. جریان‌ها را با دو مدل الدرویدبی و لارسن[11] به‌عنوان مدل معیار برای جریان حول استوانه با متدهای DEVSSS-TG/SUPG مورد شبیه‌سازی قراردادند. ماکزیمم وایزنبرگ قابل‌دسترس به ترتیب ۱/۰۵ و ۱۲/۳ به دست آمد.

جعفری و همکاران [۱۲] نشان دادند که گرچه استفاده از تانسور سازگاری لگاریتمی می‌تواند در حفظ شرط مثبت متقارن معین، مؤثر باشد، به علاوه در مدل خانواده‌ی FENE شرط محدود کردن حد بالای تانسور سازگاری الزامی هست. آن‌ها به‌منظور از بین بردن ناپایداری‌های عددی فرمولاسیون ماتریس لگاریتمی را توسعه دادند.

تام و همکارانش [۱۳] فرمول لگاریتمی را برای دو آزمایش اکسترود متورم[12] شده و انقباض جت[13] با مدل ماکسول[14] و وابسته به زمان اجرا کردند. معادله مومنتوم با

[1] Conformation
[2] Symmetric Positive Definite
[3] Hadamard
[4] Discrete Elastic Viscous Split Stress/Discontinuous Galerkin
[5] OldRoyd-B
[6] Giesekus
[7] Leonov
[8] Contraction
[9] Deborah number
[10] Trace
[11] Larson
[12] Extrudate swell
[13] Get buckling
[14] UCM

روش اختلاف محدود و روش نشانگر- سلول [1] حل گردید. نتایج عددی آنان افزایش قابل‌توجه در ماکزیمم وایزنبرگ در دسترس را برای هر دو مسئله نشان می‌دهد.

سارامیتو [۱۴] یک فرمولاسیون سازگاری لگاریتمی جدید برای سیالات ویسکوالاستیک جانسون [2] و سگلمان [3] پیشنهاد داد . در تضاد با روش فرمولاسیون فتال و کوپفرمن [۴و۵] این تبدیل جدید هنگامی‌که وایزنبرگ به سمت صفر میل می‌کند غیر تکین می‌باشد. او این فرمولاسیون جدید را روی یک حفره [4] با درپوش متحرک به روش المان محدود و استفاده از روش تقریب سرعت-فشار و غیر پیوسته و بالادست گلرکین برای تنش استفاده کرد. نتایج عددی در کیفیت خوبی در قیاس با نتایج آزمایشگاهی بودند.

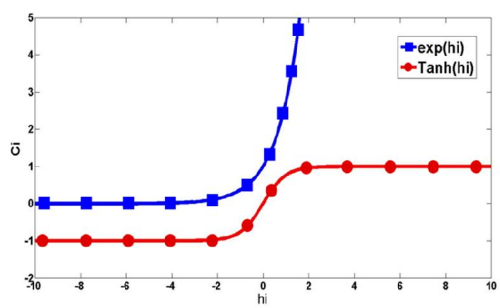
کامینال و همکاران [۱۵] فرمولاسیون، تابع جریان/ سازگاری لگاریتمی را برای سیالات الدرویدبی ارائه دادند. با توجه به فرمولاسیون بدون فشار، نتایج عددی به خطای جدا کردن سرعت و فشار بستگی ندارد، که موجب بهبود و تقویت کارایی الگوریتم می‌گردد. نتایج آنان در وایزنبرگ بالای ۵ ناپایداری‌های نیمه متناوب در گوشه‌های بالادست دیوار متحرک را نشان می‌دهد.

پارسایی و همکاران [۱۶] برای اولین بار شبیه‌سازی جریان دوفازی حلقه هسته را به روش المان طیفی با نرم‌افزار NEKTAR++ انجام دادند، در این مقاله نیز از این روش عددی و این نرم‌افزار به دلیل دقت بالا در شرایط ناپایدار عددی مورداستفاده قرار گردید.

جعفری و همکاران [۱۷] برای اولین بار مدل تانژانت هایپربولیک را برای هندسه دوبعدی و با مدل FENE-P با روش‌های مرتبه پایین المان محدود اعمال کردند که با محدود کردن مقادیر ویژه تانسور سازگاری ضمن حفظ خاصیت متقارن مثبت معین توانستند ماکزیمم وایزنبرگ قابل‌دسترس را ۲۱/۴ درصد نسبت به روش لگاریتمی بهبود بخشند ولی با توجه به اینکه یکی از عوامل کلیدی در ناپایداری عددی، انتخاب روش عددی است، لذا در این مطالعه قصد داریم توانمندی فرمولاسیون جدید را با استفاده از روش‌های مرتبه بالا، روش المان طیفی بررسی نماییم. با استفاده از این تبدیل بجای حل معادلات پیوستگی، مومنتوم و معادله ساختاری FENE-P معادلات پیوستگی، مومنتوم و معادله تبدیل‌شده ساختاری FENE-P حل می‌گردد. تبدیل به‌کاربرده شده به‌صورت رابطه (۱) است:

$$\boldsymbol{C} = M(Tanh(\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{I}) \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، $\boldsymbol{C}$ تانسور سازگاری، M ضریب ثابت که بسته به مدل ویسکوالاستیک انتخاب می‌شود، $\boldsymbol{H}$ تانسور تبدیل یافته و $\boldsymbol{I}$ ماتریس واحد است. این روش ضمن حفظ خصوصیت متقارن مثبت معین، همچنین مزیتی نسبت به روش فتال و کوپفرمن دارد و آن محدود کردن مقادیر ویژه تانسور سازگاری و جلوگیری از میل کردن آن‌ها مقادیر بحرانی و بی‌نهایت است که باعث افزایش پایداری مسئله در وایزنبرگ‌های بالا می‌گردد.



شکل ۱- مقایسه تفاوت مقادیر ویژه c_i در مقابل h_i برای فرمولاسیون لگاریتمی و تانژانت هایپربولیک

در ادامه در قسمت تئوری حاکم بر مسئله به‌تفصیل به روابط و معادلات بکار برده شده و همچنین روش عددی المان طیفی خواهیم پرداخت.

۲- تئوری حاکم بر مسئله

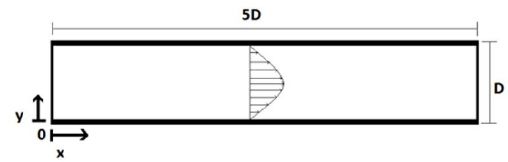
طرحواره مسئله حاضر در شکل ۲ نشان داده‌شده است. کانالی با نسبت طول به عرض ۵ را نشان می‌دهد:

۲-۱- معادلات حاکم

معادلات حاکم به‌کاررفته به‌طورکلی شامل معادلات پیوستگی، مومنتوم، معادله جریان ویسکوالاستیک و نهایتاً

[1] Marker and Cell
[2] Johnson
[3] Segelman
[4] Cavity

روابط تبدیل تانژانت هایپربولیک به‌منظور پایداری مسئله است.



شکل ۲- هندسه دوبعدی

۲-۱-۱- معادله پیوستگی

برای حالتی که چگالی سیال ثابت و سیال غیرقابل تراکم باشد رابطه (۲) را داریم:

$$\nabla . \boldsymbol{V} = 0 \tag{۲}$$

$\boldsymbol{V}$ نشان‌دهنده بردار سرعت در حالت دوبعدی است و برابر $\boldsymbol{V} = (u, v)$ که u و v مؤلفه‌های سرعت به ترتیب در جهات x و y می‌باشند.

۲-۱-۲- معادله مومنتوم در سیال ویسکوالاستیک

رابطه بعدی که در تمام دامنه برقرار است رابطه مومنتوم است. در حالت نیوتونی معادله مومنتوم حاکم بر سیال به‌صورت رابطه (۳) برقرار است :

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu_s}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{V} \tag{۳}$$

در رابطه (۳) پارامتر μ_s نشان‌دهنده‌ی ویسکوزیته‌ی سیال حلال[1] و P نشان‌دهنده‌ی فشار سیال است و رابطه $\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt}$ نشان‌دهنده مشتق مادی[2] روی بردار سرعت است که بر اساس روابط مشتق پاره‌ای به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}.\nabla \boldsymbol{V} \tag{۴}$$

گرادیان سرعت به فرم معادله (۵) اعمال‌شده است:

$$\nabla \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{۵}$$

[1] Solvent
[2] Material Derivative

ساخت سیالات پلیمری نسبتاً کار ساده‌ای است به‌طوری‌که با اضافه کردن یک پایه پلیمری در یک حلال می‌توان یک سیال ویسکوالاستیک ساخت. در مسئله موردبحث به خاطر سیال ویسکوالاستیک، اثرات تنش پلیمری به‌صورت عبارت چشمه در قالب دیورژانس تنش پلیمری به معادله مومنتوم(۳) اضافه می‌گردد و رابطه (۶) را خواهیم داشت:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu_s}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{V} + \frac{1}{\rho}\nabla . \boldsymbol{\tau_p} \tag{۶}$$

که $\boldsymbol{\tau_p}$ معرف تنش پلیمری است. شایان‌ذکر است به‌منظور کم کردن پارامترهای حاکم بر مسئله و کاهش فضای محاسباتی ضروری، با در نظر گرفتن پارامترهای تکراری نظیر سرعت مشخصه U و عرض کانال D و چگالی سیال ρ و ویسکوزیته حلال یعنیμ_s می‌توان معادلات را به‌صورت روابط (۷) بی‌بعد نمود :

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{D} \quad , t^* = t\frac{U}{D}$$
$$\boldsymbol{V}^* = \frac{\boldsymbol{V}}{U} \quad , P^* = \frac{P}{\rho U^2}$$
$$\boldsymbol{\tau_p^*} = \frac{\boldsymbol{\tau_p}}{\mu_t U/D} \quad , \boldsymbol{C}^* = \frac{\boldsymbol{C}}{\mu_t U/D} \tag{۷}$$

در رابطه (۷)، $\boldsymbol{C}$ نشان‌دهنده تانسور سازگاری مربوط به معادله FENE-P است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت. پارامترهای ستاره‌دار به‌صورت بی‌بعد می‌باشند.

با بی‌بعد کردن معادله با اعداد بی‌بعد رینولدز، نسبت ویسکوزیته و عدد وایزنبرگ، معادله به فرم معادله (۸) درمی‌آید:

$$\frac{D\boldsymbol{V}^*}{Dt} = -\frac{1}{Re}\nabla p^* + \frac{R_n}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{V}^* + \frac{1}{Re}\nabla . \boldsymbol{\tau_p^*} \tag{۸}$$

عبارت Re نشان‌دهنده‌ی عدد رینولدز که برابر حاصل تقسیم نیروی اینرسی به ویسکوز است، عبارت R_n معرف نسبت ویسکوزیته حلال به ویسکوزیته کل است یعنی$R_n = \frac{\mu_s}{\mu_t}$ که در این رابطه $\mu_t = \mu_s + \mu_p$ و عبارت μ_p نشان‌دهنده‌ی ویسکوزیته پلیمری می‌باشد.

۲-۱-۳- معادله ویسکوالاستیک مدل FENE-P

طبق رابطه (۶) برای به دست آوردن تانسور پلیمری یعنی $\boldsymbol{\tau_p}$ با مدل FENE-P باید در ابتدا تانسور سازگاری را از رابطه (۹) پیدا نماییم:

$$\lambda(\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \mathrm{t}}+(\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{C}-(\nabla \boldsymbol{V})^T.\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}.(\nabla \boldsymbol{V})) = -(\frac{\boldsymbol{C}}{1-\frac{tr\,(\boldsymbol{C})}{b^2}}-\boldsymbol{I}) \quad (۹)$$

در معادله (۹) λ نشانگر کاراکتر پلیمری سیال می‌باشد. در حالت بی بعد معادله (۹) به صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \boldsymbol{C}^*}{\partial \mathrm{t}}+(\boldsymbol{V}^*.\nabla)\boldsymbol{C}^*-(\nabla \boldsymbol{V}^*)^T.\boldsymbol{C}^*-\boldsymbol{C}^*.(\nabla \boldsymbol{V}^*) = -\frac{1}{Wi}(\frac{\boldsymbol{C}^*}{1-\frac{tr\,(\boldsymbol{C}^*)}{b^2}}-\boldsymbol{I}) \quad (۱۰)$$

عبارت Wi معرف عدد وایزنبرگ است که به‌صورت $Wi=\frac{\lambda U}{D}$ بیان می‌گردد. عدد وایزنبرگ درواقع حاصل تقسیم زمان آسایش[1] به زمان اینرسی جریان است. زمان آسایش مدت‌زمانی است که اگر سیال را تحت تنش برشی قرار دهیم و این تنش برشی را حذف کنیم سیال به حالت تعادلی برگردد. در رابطه وایزنبرگ D نشان‌دهنده‌ی قطر کانال، U نشانگر سرعت مشخصه سیال می‌باشد.

رابطه بین تنش پلیمری و تانسور سازگاری نیز به صورت معادله (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\tau_p^*}=\frac{(1-R_n)}{Wi}(\frac{\boldsymbol{C}^*}{1-\frac{tr\,(\boldsymbol{C}^*)}{b^2}}-\boldsymbol{I}) \quad (۱۱)$$

پارامترهای بی‌بعد در تمام روابط گفته‌شده از این به بعد نیز اعمال‌شده‌اند ولی به‌منظور سادگی برای بیان مسئله علامت "*" آن‌ها را حذف نموده‌ایم.

۲-۲- روابط پایدارکننده ریاضی به فرم Tanh

حال در این قسمت، به روابط روش تبدیل تانژانت هایپربولیک معادلات می‌پردازیم. در این بخش، ما معادلات را بر اساس روشی که ون [8] برای تبدیل معادلات سازگاری به فرم انتگرالی استفاده نموده، برای محاسبه معادله ویسکوالاستیک FENE-P یعنی رابطه (۱۰) استفاده می‌کنیم. تبدیل تانژانت هایپربولیک بنا به دلایل ذکرشده در مقدمه به‌صورت رابطه (۱۲) نوشته می‌گردد:

$$\boldsymbol{C}=M(Tanh(\boldsymbol{H})+\boldsymbol{I}) \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) پارامتر $\boldsymbol{H}$ متغیر وابسته و همچنین مقدار M برابر $b^2/2$ برای مدل FENE-P اتخاذ می‌گردد و همان‌طور که قبلاً هم اشاره‌شده بود b از روی مقدار فاصله متوسط دمبل‌ها[2] در پلیمر به دست می‌آید که ما در این مطالعه آن را برابر ۸ در نظر گرفته‌ایم رابطه بالا را می‌توان با بسط دادن تانژانت هایپربولیک به‌صورت معادله (۱۳) نوشت:

$$\boldsymbol{C}=2M\frac{e^{\boldsymbol{H}}}{e^{\boldsymbol{H}}+e^{-\boldsymbol{H}}} \quad (۱۳)$$

برای هندسه دوبعدی تانسور تبدیل $\boldsymbol{H}$ مشابه تانسور سازگاری $\boldsymbol{C}$ به‌صورت مربعی ۲*۲ و متقارن است که نمایش آن به‌صورت معادله (۱۴) می‌باشد:

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

به‌منظور استفاده از روش تبدیل تانژانت هایپربولیک ملزم به پیدا کردن بردارهای ویژه تانسور $\boldsymbol{H}$ هستیم. درنتیجه بایستی در ابتدا مقادیر ویژه با کمک روابط (۱۵) که از حل معادله مشخصه $\det(\boldsymbol{H}-h\boldsymbol{I})=0$ به دست می‌آیند، پیدا نمود که دسته معادلات (۱۵) را خواهیم داشت:

$$h_1=\frac{1}{2}[h_{11}+h_{22}+\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\ ]$$
$$h_2=\frac{1}{2}[h_{11}+h_{22}-\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{12}^2}\ ] \quad (۱۵)$$

حال برای محاسبه بردارهای ویژه رابطه (۱۶) را خواهیم داشت:

$$\mathbf{n_1}=\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{n_2}=\begin{bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

از روابط جبر خطی می‌دانیم که بردارهای ویژه هر ماتریس متقارن، بر هم عمودند. پس با در نظر n_1,n_2 (اسکالر) می‌توان بردارهای ویژه $\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}$ را با استفاده از روابط بالا به دست آورد. برای سادگی عبارات یکه بودن را روی بردارهای ویژه را اعمال می‌کنیم یعنی $n_1{}^2+n_2{}^2=1$. با این فرض جملات ساده‌تری خواهیم داشت. با حل معادله مشخصه $\boldsymbol{H}\mathbf{n_i}=h_i\mathbf{n_i}$ و با استفاده از روابط مقدارهای ویژه، معادله (۱۳) ، مقادیر درایه‌های بردار ویژه تانسور $\boldsymbol{H}$ را به‌صورت روابط (۱۷) محاسبه می‌نماییم:

---

[1] Relaxation Time

[2] Dummbell

$$n_1^2 = \frac{h_{12}^2}{(h_1-h_{11})^2+h_{12}^2}$$

$$n_2^2 = \frac{(h_1-h_{11})^2}{(h_1-h_{11})^2+h_{12}^2}$$

$$n_1 n_2 = \frac{(h_1-h_{11})h_{12}}{(h_1-h_{11})^2+h_{12}^2} \tag{۱۷}$$

از جبر خطی، برای تانسور $\boldsymbol{C}$ معادله مشخصه را به صورت رابطه (۱۸) می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{C}.\mathbf{n_i} = c_i\, \mathbf{n_i} \tag{۱۸}$$

که c_i مقادیر ویژه تانسور $\boldsymbol{C}$ است. با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله (۱۸) رابطه (۱۹) را داریم:

$$\boldsymbol{C}.\dot{n}i + \dot{\boldsymbol{C}}.ni = c_i\dot{n}i + \dot{c}ini \tag{۱۹}$$

با اعمال ضرب داخلی در مقدار ویژه دیگری، رابطه (۲۰) را خواهیم داشت :

$$nj.\dot{C}.ni = nj.(\dot{c}_i ni) + nj.(c_i\dot{n}i) - nj.(C.\dot{n}i)$$

$$= \dot{c}_i\delta_{ij} + (c_i - c_j)\,\dot{n}i.nj \tag{۲۰}$$

از معادله (۲۰) می‌توان رابطه (۲۱) را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} &i)\ \dot{c}i = ni.\dot{C}.ni && When\ i=j \\ &ii)\ \dot{n}i.nj = \frac{1}{c_i-c_j} nj.\dot{C}.ni && When\ i\neq j \end{aligned} \tag{۲۱}$$

به دلیل آیزوتروپیک بودن روابط، تانسورهای $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{H}$ بردار ویژه‌های یکسانی دارند. به دلیل اینکه برای به دست آوردن روابط تانسور $\boldsymbol{C}$ تنها از جبر خطی استفاده شد، با دانستن این‌که این دو تانسور بردار ویژه‌های برابری دارند. می‌توان روابط را برای تانسور $\boldsymbol{H}$ به‌صورت رابطه (۲۲) نوشت:

$$nj.\dot{H}.ni = \dot{h}i\delta_{ij} + (hi - hj)\dot{n}i.nj \tag{۲۲}$$

با معرفی مقادیر ویژه h_i به‌صورت زیر و ترکیب معادلات به‌دست‌آمده برای تانسور $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{H}$ رابطه (۲۳) را خواهیم داشت:

$$h_i = \frac{1}{2} ln\left(\frac{c_i}{2M-c_i}\right) \tag{۲۳}$$

و با مشتق‌گیری از رابطه (۲۳) رابطه (۲۴) را خواهیم داشت :

$$\dot{h}_i = M\frac{\dot{c}_i}{C_i(2M-C_i)} \tag{۲۴}$$

درنتیجه به رابطه (۲۵) خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} &i)\ ni.\dot{H}.ni = M\frac{\dot{c}_i}{C_i(2M-C_i)} = \frac{M}{C_i(2M-C_i)} ni.\dot{C}.ni && When\ i=j \\ &ii)\ ni.\dot{H}.nj = (h_j - h_i)\dot{n}j.ni && When\ i\neq j \end{aligned} \tag{۲۵}$$

با جایگذاری i و j در معادله (۲۵) ذکرشده، به سه معادله می‌رسیم که می‌توان آن‌ها را به‌طور ماتریسی به صورت رابطه (۲۶) بیان کرد:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\dot{H}_{11}\\ \dot{H}_{12}\\ \dot{H}_{22}\end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} n_1^2 & 2n_1n_2 & n_2^2 \\ n_2^2 & -2n_1n_2 & n_1^2 \\ -n_1n_2 & (n_1^2-n_2^2) & n_1n_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{M}{c_1(2M-c_1)}(n_1^2\dot{C}_{11} + 2n_1n_2\dot{C}_{12} + n_2^2\dot{C}_{22}) \\ \frac{M}{c_2(2M-c_2)}(n_2^2\dot{C}_{11} - 2n_1n_2\dot{C}_{12} + n_1^2\dot{C}_{22}) \\ \frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}(-n_1n_2\dot{C}_{11} + (n_1^2-n_2^2)\dot{C}_{12} + n_1n_2\dot{C}_{22}) \end{bmatrix} \tag{۲۶}$$

با محاسبه معکوس ماتریس $\boldsymbol{A}$ و ضرب آن در، $\boldsymbol{B}$ می‌توان به دسته معادلات تکامل (۲۷) تا (۲۹) برای درایه‌های $\boldsymbol{H}$ دست‌یافت:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{11} &= \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_1^4 + \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_2^4 + 2n_1^2n_2^2\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C}_{11} \\ &+ \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}2n_1^3n_2 - \frac{M}{c_2(2M-c_2)}2n_2^3n_1 - 2n_1n_2(n_1^2-n_2^2)\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C}_{12} \\ &+ \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_1^2n_2^2 + \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_1^2n_2^2 - 2n_1^2n_2^2\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C}_{22} \\ &= G_{11}\dot{C}_{11} + G_{12}\dot{C}_{12} + G_{22}\dot{C}_{22} \end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\dot{H_{12}} = \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_1^3 n_2 - \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_1 n_2^3 + n_1 n_2(n_1^2 - n_2^2)\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{11}} + \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}2n_1^2 n_2^2 + \frac{M}{c_2(2M-c_2)}2n_1^2 n_2^2 - 2(n_1^2-n_2^2)^2\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{12}} + \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_1 n_2^3 - \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_1^3 n_2 + n_1 n_2(n_1^2-n_2^2)\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{22}} = G_{21}\dot{C_{11}} + G_{22}\dot{C_{12}} + G_{23}\dot{C_{22}} \quad (۲۸)$$

$$\dot{H_{22}} = \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_1^2 n_2^2 + \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_1^2 n_2^2 - 2n_1^2 n_2^2\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{11}} + \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}2n_1 n_2^3 - \frac{M}{c_2(2M-c_2)}2n_1^3 n_2 + 2n_1 n_2(n_1^2-n_2^2)\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{12}} + \left(\frac{M}{c_1(2M-c_1)}n_2^4 + \frac{M}{c_2(2M-c_2)}n_1^4 + n_1 n_2(n_1^2-n_2^2)\frac{h_1-h_2}{c_1-c_2}\right)\dot{C_{22}} = G_{31}\dot{C_{11}} + G_{32}\dot{C_{12}} + G_{33}\dot{C_{22}} \quad (۲۹)$$

در روابط(۲۷ تا ۲۹) بالا ، $\dot{H}_{ij}, \dot{C}_{ij}$ مؤلفه‌های مشتق کامل تانسورهای متناظر می‌باشند. که طبق رابطه مشتق کامل تانسور می‌توان آن‌ها را مشابه رابطه (۴) نوشت:

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{H} \quad (۳۰)$$

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{C} \quad (۳۱)$$

با جمع‌بندی و ترکیب روابط (۲۷) تا (۲۹)، روابط (۳۲) و (۳۳) را خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \dot{H_{11}} \\ \dot{H_{12}} \\ \dot{H_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C_{11}} \\ \dot{C_{12}} \\ \dot{C_{22}} \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\nabla)\boldsymbol{C}\right) \quad (۳۳)$$

سمت راست معادله (۳۳) عبارت مشتق مادی تانسور سازگاری $\boldsymbol{C}$ را می‌توان از رابطه‌ی FENE-P معادله (۱۰) به صورت رابطه (۳۴) به دست آورد:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}.\nabla) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} ((\nabla \boldsymbol{V})^T.\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}.(\nabla \boldsymbol{V}) - \frac{1}{Wi}(\frac{\boldsymbol{C}}{1-\frac{tr(\boldsymbol{C})}{b^2}} - \boldsymbol{I})) \quad (۳۴)$$

در رابطه (۳۴) تانسور سازگاری $\boldsymbol{C}$ را می‌بایست از طریق رابطه بین مقادیر ویژه $\boldsymbol{C}$ و بردارهای ویژه یعنی ماتریس‌های متعامد مطابق رابطه (۳۵) پیدا نمود:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}_{eigenvector}\boldsymbol{Q}^T = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

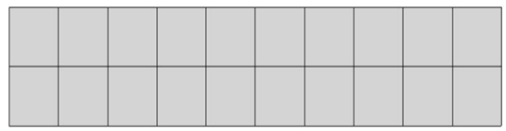
در رابطه (۳۵) پارامترهای n_1, n_2 درایه‌های بردار ویژه هستند که از رابطه (۱۷)، همچنین c_1, c_2 که مقادیر ویژه تانسور سازگاری هستند از رابطه (۲۳) به دست می‌آیند.

۲-۳- روش عددی المان طیفی

روش‌های طیفی[1] که بر مبنای تقریبات چندجمله‌ای مرتبه بالا (معمولاً چبیشف) تخمین زده می‌شود که معمولاً در هندسه‌های ساده استفاده می‌شود و استفاده از این روش در هندسه‌های پیچیده آسان نیست مگر با استفاده از روش تجزیه که درنهایت منجر به رسیدن به معادلات دشوار و پیچیده می‌گردد. روش المان طیفی ترکیبی از قابلیت روش مرتبه پایین المان محدود برای هندسه‌های پیچیده با دقت مرتبه بالای تقریبات چندجمله‌ای روش طیفی هست. برای مسائل مسطح همگرایی نمایی به جواب دقیق با بهبود مش

[1] Spectral Methods

ملاحظه می‌گردد. پیاده‌سازی نسبتاً سخت این روش باقابلیت جذاب این روش برای حل مناطق با گرادیان‌های بالا و پخش[1] و انتشار[2] عددی کمتر نسبت به دیگر روش‌ها متعادل می‌گردد. از این روش برای جریانات ویسکوالاستیک در [۱۸-۲۰] استفاده‌شده است. در این روش با دو روش پالایش که به ترتیب h و p هستند می‌توان با افزایش تعداد المان و ریزتر کردن شبکه و همچنین با افزایش درجه چند جمله‌ای افراز شده بر المان دقت حل را بهبود نمود. دامنه حل در این روش به ۲۰ المان هم‌اندازه مطابق شکل ۳ تقسیم شده است.



شکل ۳- المان بندی کانال دوبعدی

این المان‌ها به یک المان‌های استاندارد محاسباتی نگاشته می‌شوند و هر متغیر وابسته اولیه شامل فشار، تنش و سرعت روی المان استاندارد، از طریق بسط پایه تانسوری به‌صورت رابطه (۳۶) :

$$\psi(\xi,\eta) \approx \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \Phi_p(\xi)\Phi_p(\eta)\hat{\psi}_{pq} \qquad (۳۶)$$

درون‌یابی می‌شود که در آن ψ ، متغیر وابسته عمومی $\hat{\psi}_{pq}$، ضریب مجهول ، ξ و η نیز متغیرهای مکانی محلی استاندارد هستند که بین -۱و+۱ قرار دارند. N درجه بسط پایه گفته می‌شود و با افزایش آن دقت حل بیشتر می‌گردد. تابع درون یاب Φ_p پایه مدال گفته می‌شود و به‌صورت رابطه (۳۷) نمایش داده می‌شود که:

$$\Phi_p = \begin{cases} \dfrac{(1-\xi)}{2} & p=0 \\ \dfrac{(1-\xi)}{2}\dfrac{(1+\xi)}{2}\boldsymbol{P}_{p-1}^{1,1}(\xi) & for\ 0<p<N \\ \dfrac{(1+\xi)}{2} & p>N \end{cases} \qquad (۳۷)$$

که $\mathbf{P}_{p-1}^{1,1}$ تابع ژاکوبی را نشان می‌دهد [۲۱] . در غالب معادلات جریان سیال، ضمن گسسته سازی مکانی، می‌توان به یک معادله کلی از نوع هلمهولتز رسید. برای متغیر کلی ψ معادله (۳۸) را داریم:

$$\left[\left(D(\psi)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_j + \lambda\right]\psi = f \qquad (۳۸)$$

که در آن λ ضریب ثابت ، f عبارت چشمه و $D(\psi)$ ضریب نفوذ معادله هلمهولتز است [۲۲] . برای گسسته سازی مکانی ابتدا باید به فرم ضعیف معادلات رسید. برای این هدف طرفین معادله در تابع وزن گلرکین ω ضرب شده و روی دامنه المان Ω از آن انتگرال‌گیری می‌شود. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء می‌توان نوشت:

$$-\int \nabla\omega D(\psi)\nabla\psi d\Omega + \int \lambda\omega\psi d\Omega = \int \omega f d\Omega - [\omega D(\psi)\nabla\psi]_{\partial\Omega} \qquad (۳۹)$$

که در آن $\partial\Omega$ مبین مرز المان است و دامنه مرزی را پوشش می‌دهد. با انجام مشتق و انتگرال‌های معادله بالا معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان به تعداد درجه بسط پایه برای هر المان ایجاد می‌شود. بر اساس پیوستگی متغیرهای وابسته اولیه روی مرز المان‌های دارای سطح مشترک باید معادلات را تجمیع نمود. برای اطلاعات بیشتر به [۲۱] مراجعه شود. همچنین برای گسسته سازی زمانی از روش مرتبه بالای آدامز-بشفورث [۲۳] استفاده شده است.

شرایط مرزی حل دامنه هم به این صورت است که برای تنش مرز بالا و پایین دیواره و ورودی به‌صورت دیریکله که از حل تحلیلی معادله FENE-P با نرم‌افزار متلب به‌دست‌آمده اعمال‌شده و برای خروجی از شرایط نیومن استفاده‌شده است. برای سرعت نیز حل ورودی دیریکله و برای دیواره سرعت صفر و برای خروجی از شرط نیومن استفاده‌شده است و درنهایت فشار روی دیواره و ورودی با شرایط نیومن و در خروجی به‌صورت دیریکله و برابر صفر قرار گردیده است. همچنین لازم به ذکر است که به منظور به دست آوردن جواب دقیق (تحلیلی) با بسط دادن معادلات (۸)، (۱۰) و (۱۱) و همچنین در نظر گرفتن شرایط کاملا توسعه یافته و پایا می‌توان به دستگاه معادلات جبری غیرخطی رسید که با حل دستگاه، جواب‌های لازم و مورد نیاز را برای اعتبار سنجی

[1] Dissipation
[2] Dispersion

جدول ۱- شرایط مرزی حاکم بر مسئله

دیواره	خروجی	ورودی	
دیریکله (روش تحلیلی کروز و همکاران)	نیومن (کاملا توسعه یافته) $\frac{\partial \boldsymbol{\tau_p}}{\partial x}=0$	دیریکله (روش تحلیلی کروز و همکاران)	تنش های پلیمری
دیریکله (شرط عدم لغزش) $\boldsymbol{V}=0$	نیومن (کاملا توسعه یافته) $\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}=0$	دیریکله (روش تحلیلی کروز و همکاران)	سرعت
نیومن (گرادیان صفر روی دیواره) $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{s}}=0$ s بردار عمود بر سطح دیوار است	دیریکله (فشار صفر در خروجی) p=0	نیومن (گرادیان ثابت در ورودی) $\frac{\partial p}{\partial x}=-0.11$	فشار

مسئله و شرایط مرزی بدست آورد این روش در کار کروز و همکاران [۲۴] آمده است . شرایط مرزی در جدول ۱ آورده شده است.

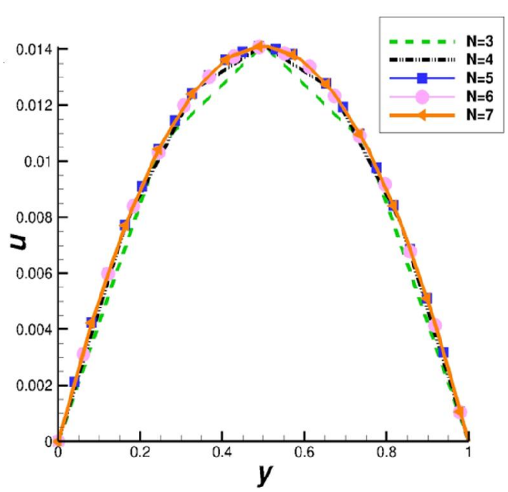
۳- نتایج

محاسبات عددی صورت پذیرفته در حالت کلی و برای هر دو حالت مدل کلاسیک FENE-P و مدل تانژانت هایپربولیک با شرایط زیر مورد آزمون قرار داده شد.

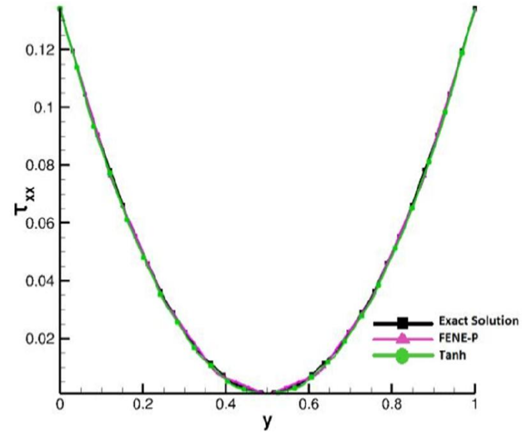
۳-۱- مطالعه استقلال نتایج از درجه بسط و گام زمانی

برای تضمین استقلال حل از درجه بسط پایه، N و گام زمانی Δt حل عددی به ازای مقادیر مختلفی از این دو پارامتر مورد ارزیابی قرار گرفت. برای گام زمانی مقادیر مختلف ۰/۰۱، ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۰۰۱ مورد تست و آزمایش قرار گرفت که مقادیر ۰/۰۱ و ۰/۰۰۱ به دلیل ناپایداری عددی در بحث عدد CFL جواب‌های قابل‌اطمینان و خوبی نمی‌دادند ولی ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۰۰۱ جواب‌های صحیح و مناسب می‌دادند که از بین آن‌ها ۰/۰۰۰۱ به دلیل زمان محاسبه کمتر انتخاب گردید. در مورد درجه بسط پایه هم این‌که برای مدل FENE-P کلاسیک درجه‌های بسط پایه مودال ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ برای وایزنبرگ ۵ امتحان گردید که نتایج آن به‌صورت شکل ۴ است.

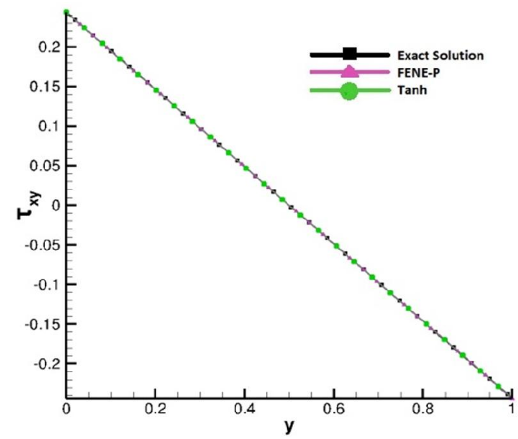
همان‌طور که مشخص است شکل ۴ پروفیل سرعت در جهت x برحسب عرض کانال y در خروجی برحسب درجه‌های بسط مختلف حساب گردیده است که مناسب‌ترین و معقول‌ترین گزینه برای ادامه کار $N=5$ انتخاب گردید.



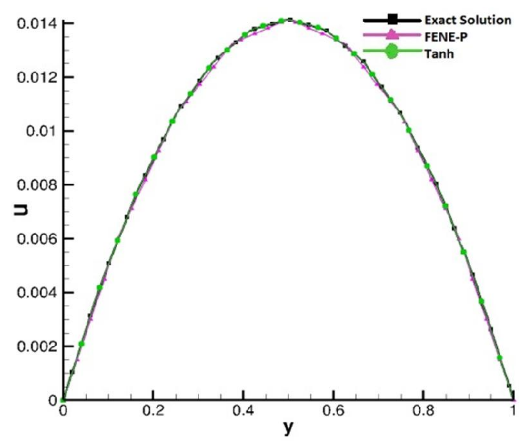
شکل ۴- نمودار استقلال حل از درجه بسط پایه مودال برای Wi=5 در مدل FENE-P



(الف)



(ب)



(ج)

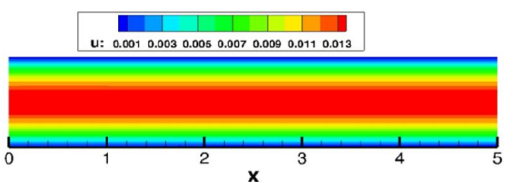
شکل ۵- اعتبارسنجی سه پارامتر برحسب عرض کانال؛ الف)تنش محوری، ب)تنش برشی و ج)سرعت محوری

۳-۲-اعتبار سنجی

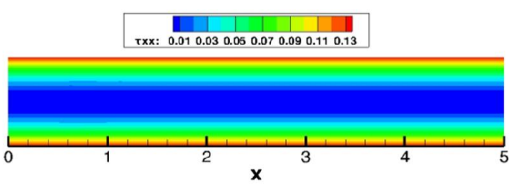
ایده اصلی سنجش مقایسه حل عددی FENE-P کلاسیک و تانژانت هایپربولیک با روش SEM و همچنین حل نیمه‌تحلیلی مدل FENE-P که از نرم‌افزار متلب به دست آمده و در خروجی کانال شکل ۵ استحصال گردیده است. این مقایسه برای عبارت‌های سرعت u، تنش‌های τ_{xx} و τ_{xy} انجام پذیرفته است.

پروفیل‌های سرعت تنش و فشار برای دو حالت کلاسیک و تانژانت هایپربولیک نیز در قسمت ذیل آورده شده است که مشاهده می‌کنیم جواب‌ها همپوشانی مناسبی با یکدیگر دارند.

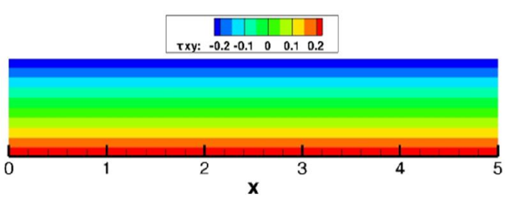
مدل کلاسیک FENE-P در Wi=5



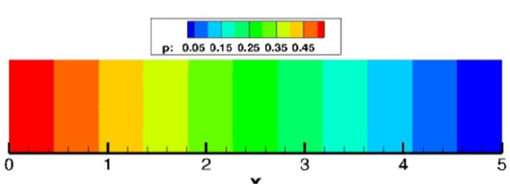
(الف) سرعت محوری (u)



(ب) تنش نرمال (τ_{xx})

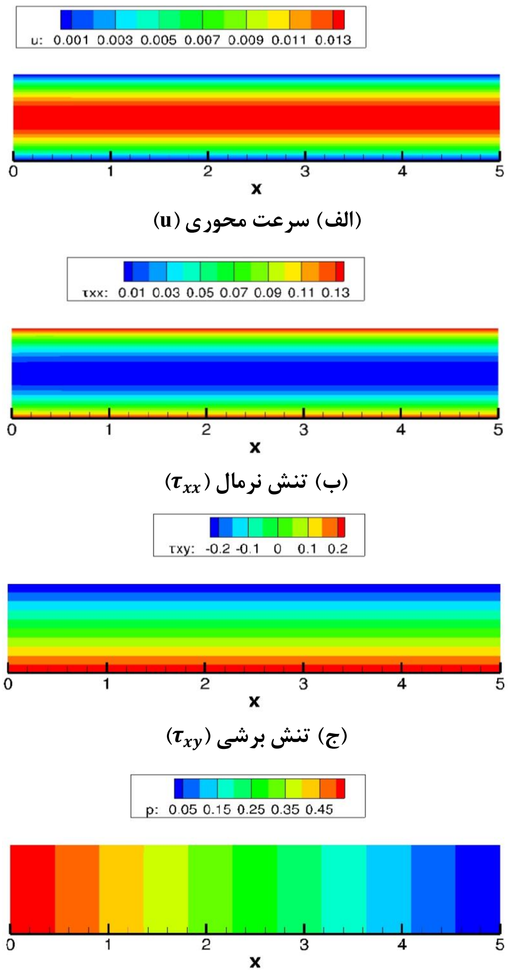


(ج) تنش برشی (τ_{xy})



(د) فشار(P)

شکل ۶- پروفیل‌های مدل FENE-P کلاسیک در Wi=5 مدل تانژانت هایپربولیک FENE-P برای Wi=5



(الف) سرعت محوری (u)

(ب) تنش نرمال (τ_{xx})

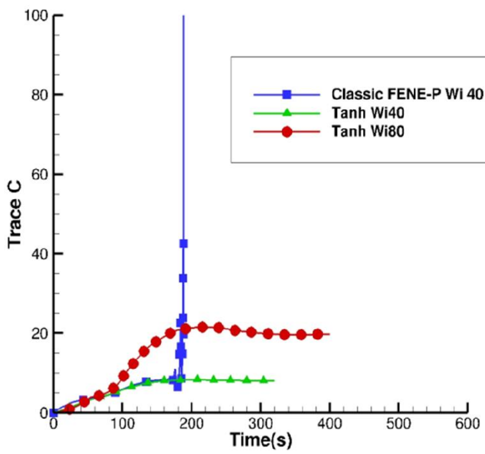
(ج) تنش برشی (τ_{xy})

(د) فشار (P)

شکل ۷- پروفیل‌های مدل تانژانت هایپربولیک در Wi=5

۳-۳- تأثیر رابطه تانژانت هایپربولیک بر پایداری

یکی از قیدهای فیزیکی حاکم بر مدل FENE-P این است که فاصله دمبل‌ها از دید میکروسکوپیک یک مقدار محدود عنوان یک شرط اضافی در شبیه‌سازی اعمال گردد. مشکل اساسی این است که در حل عددی زمانی که مقادیر ویژه تانسور سازگاری افزایش می‌یابد مقدار اثر[1] تانسور C نیز افزایش پیدا می‌کند و به مقدار b^2 نزدیک می‌شود. با توجه به معادله (۹) زمانی که tr ($\boldsymbol{C}$) ازنظر عددی به b^2 برسد مخرج کسر به صفر میل می‌کند و در این لحظه مقدار تنش و متعاقباً مقادیر سرعت به بی‌نهایت میل می‌کند و حل عددی شدیداً ناپایدار می‌شود و امکان حل عددی در اعداد وایزنبرگ بالاتر وجود دارد، بدین معنی این محدودیت در حل عددی نیز بایستی به نخواهد داشت. یکی از معیارهای پایداری، محدود بودن مقادیر ویژه و درایه‌های ماتریس سازگاری است که به‌منظور مشاهده تأثیر رابطه تانژانت هایپربولیک بر پایداری مسئله، ما از اثر ماتریس سازگاری (یعنی Trace $\boldsymbol{C}$=$\sum \boldsymbol{c_i}$) در یک نقطه تصادفی استفاده نموده‌ایم که روند آن برحسب زمان را در وایزنبرگ مختلف امتحان نمودیم که در وایزنبرگ‌های بحرانی نمودار اثر سازگاری برحسب زمان مطابق شکل ۸ است.

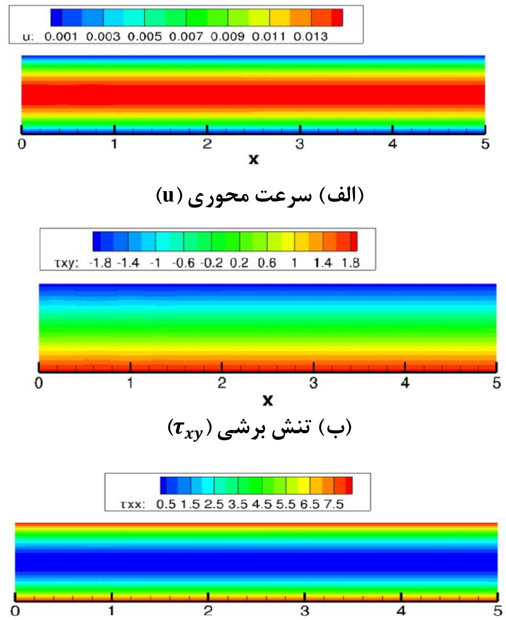


شکل ۸- نمودار اثر ماتریس سازگاری برحسب زمان

از شکل ۸ ملاحظه می‌شود که وایزنبرگ ۴۰ برای حالت کلاسیک حد بحرانی است و از وایزنبرگ ۴۰ در لحظه t=200 اثر ماتریس به مقدار ماکزیمم تئوری خودش می‌رسد و مسئله ناپایدار و حل عددی به سمت واگرایی میل می‌کند درحالی‌که با کمک روابط تانژانت هایپربولیک در وایزنبرگ ۴۰ دارای ثبات کامل است که پروفیل‌های آن در ادامه گنجانده شده است.

مشاهده می‌شود که در وایزنبرگ ۴۰ روش تانژانت هایپربولیک دارای پایداری مناسب در حل و جواب‌های مطلوبی است. در ادامه روند حل با افزایش تدریجی عدد ۸۰

[1] Trace

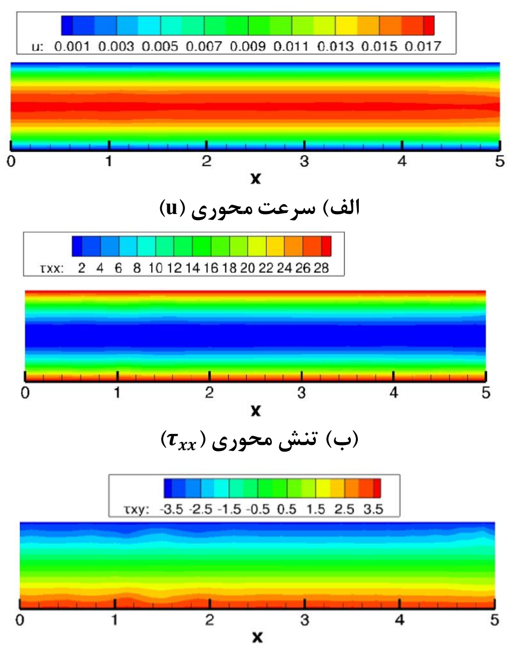


(الف) سرعت محوری (u)

(ب) تنش برشی (τ_{xy})

(ج) تنش نرمال (τ_{xx})

شکل ۹- پروفیل‌های مدل تانژانت هایپربولیک در Wi=40



(الف) سرعت محوری (u)

(ب) تنش محوری (τ_{xx})

(ج) تنش برشی (τ_{xy})

شکل ۱۰-پروفیل‌های مدل تانژانت هایپربولیک در Wi=80

با روش پایداری اثر ماتریس دارای ثبات است. در ادامه وایزنبرگ با روش تانژانت هایپربولیک به وایزنبرگ ۸۰ رسیدیم که تا این وایزنبرگ جواب‌های خوب و قابل اتکایی به ما می‌داد از شکل ۸ هم ملاحظه می‌شود که در وایزنبرگ پروفیل‌های سرعت و تنش را در وایزنبرگ ۸۰ با روش تانژانت هایپربولیک ملاحظه می‌فرمایید.

لازم به ذکر است که وایزنبرگ ۸۰ درحالی‌که به‌صورت بحرانی برای حالت تانژانت هایپربولیک انتخاب گردید که حتی در وایزنبرگ‌های بالاتر نیز اثر ماتریس سازگاری از حد ماکزیمم خود بالاتر نرفت و دلیل انتخاب ما به‌عنوان وایزنبرگ بحرانی این بود که از این وایزنبرگ به بعد دیگر پروفیل‌ها شکل اعوجاج و ناپایداری به علت گرادیان‌های شدید در وایزنبرگ بالا به خود می‌گرفت و مسئله ناپایدار می‌گردید.

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه از روش پایداری تانژانت هایپربولیک که مزیت حفظ خاصیت متقارن مثبت معین و همچنین محدود کردن مقادیر ویژه تانسور سازگاری را داشت با روش المان طیفی روی هندسه دوبعدی استفاده گردید. با استفاده از این روش پایداری در کنار بهره‌ی بالای بکار گیری المان طیفی به دلیل دقت بالا عددی موجب رشد حدود ۱۰۰ درصدی در عدد وایزنبرگ بحرانی گردید به طوری که ماکزیمم وایزنبرگ بحرانی برای حالت FENE-P کلاسیک مقدار ۴۰ و برای مدل تانژانت هایپربولیک مقدار ۸۰ را داشتیم.

لازم به ذکر است که روش پیشنهادی در این مقاله بر مبنای کنترل، متقارن مثبت معین بودن ماتریس سازگاری است، به عبارتی با این روش داشتن مقدار مثبت و معین و متقارن بودن تانسور تنش سازگاری تضمین می‌گردد و علاوه بر آن مقادیر ویژه تانسور سازگاری محدود و مطابق با محدودیت‌های فیزیکی مدل اعمال گردد. در عدد وایزنبرگ بحرانی برای مدل تانژانت هایپربولیک، $Wi=80$، با وجود آنکه اندازه tr (**C**) از مقدار ماکزیمم تئوری وضع‌شده، کمتر است، اما همچنان از این عدد وایزنبرگ به بعد نتایج قابل اعتمادی به دست نمی‌آید. نویسندگان بر این باورند که ناپایداری عددی در سیالات ویسکوالاستیک بخصوص با روش‌های

عددی مرتبه بالا به عوامل مختلفی ازجمله روش عددی انتخابی، تأثیر شرایط مرزی و حتی دقیق بودن مدل ریاضی برای فیزیک مسئله و یا ترکیبی از عوامل بستگی دارد لذا روش پیشنهادی ما ، تانژانت هایپربولیک به طرز قابل‌توجهی باعث به تعویق افتادن و شکل‌گیری ناپایداری عددی می‌شود ولی بدون شک باعث رفع کامل مشکل ناپایداری عددی نخواهد شد، لذا استفاده از روش‌های فیلترینگ و پایدارساز توصیه می‌شود.

۵- تقدیر و تشکر

تشکر ویژه و سپاس فراوان از آزمایشگاه عددی سیالات غیر نیوتنی (www.cnnfm.ut.ac.ir) دانشکده مکانیک دانشگاه تهران تحت سرپرستی و نظارت سرکار خانم دکتر آزاده جعفری که بستر و شرایط مناسبی را برای انجام تحقیقات عددی درزمینه محاسبات عددی سیالات غیر نیوتنی فراهم نمودند.

۶- مراجع

[1] Hulsen MA (1990) A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. J Non-Newton Fluid 38(1): 93-100.

[2] Kwon Y, Leonov AI (1995) Stability constraints in the formulation of vis coelastic constitutive equations. J Non-Newton Fluid 58(1): 25-46.

[3] Dupret F, Marchal JM () Loss of evolution in the flow of viscoelastic fluids. J Non-Newton Fluid 20(C): 143-171.

[4] Owens RG, Phillips TN (2002) Computational rheology. Imperial College Press, London.

[5] Fattal R, Kupferman R (2004) Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. J Non-Newton Fluid 123: 281-285.

[6] Fattal R, Kupferman R (2005) Time-dependent simulation of viscoelastic flow at high Weiss-enberg number using the log-conformation representation. J Non-Newton Fluid 126: 23-37.

[7] Hulsen MA, Fattal R, Kupferman R (2005) Flow of viscoelastic fluid past a cylinder at high Weissenberg number: stabilized simulation using matrixlogarithms. J Comput Phys 127: 27-39.

[8] Kwon Y (2004) Finite element analysis of planar 4:1 contraction flow with the tensor-logarithmic formulation of differential constitutive equations. Korea-Aust Rheol J 4: 183-191.

[9] Leonov AI (1995) Viscoelastic constitutive equations and Rheology for high speed polymer processing. Polym Int 36: 187-193.

[10] Vaithianathan T, Robert A, Brasseur JG, Collins LR (2006) An improved algorithm for simulating three-dimensional, viscoelastic turbulence. J Non-Newton Fluid 140(1-3): 3-22.

[11] Coronado OM, Arora D, Behr M, Pasquali M (2007) A simple method for simulating general viscoelastic fluid flow with an alternate log conformation formulation. J Non-Newton Fluid 147: 189-199.

[12] Jafari A, Fiétier N, Deville MO (2010) A new extended matrix logarithm formulation for the simulation of viscoelastic fluids by spectral elements. Comput Fluids 39(9): 1425-1438.

[13] Tome M, Castelo A, Afonso A, Alves M, Pinho F (2012) Application of the log-conformation tensor to three-dimensional time-dependent free surface flows. J Non-Newton Fluid 175176: 44-54.

[14] Saramito P (2014) On a modified non-singular log-conformation formulation for Johnson-segalman viscoelastic fluids. J Non-Newton Fluid 211: 16-30.

[15] Comminal R, Spangenberg J, Hattel JH (2015) Robust simulations of viscoelastic flows at high weissenberg numbers with the stream function/log-conformation formulation. J Non-Newton Fluid 223: 37-61.

[۱۶] پارسایی م، دهقان س، جعفری آ، ایزدپناه ا (۲۰۱۸) حل عددی جریان چندلایه هسته-حلقه دو سیال با لزجت‌های متفاوت به روش المان طیفی. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۸(۴): ۲۴۹-۲۶۰.

[17] Jafari A, Chitsaz A, Nouri R, Timothy NP (2018) Property preserving reformulation of constitutive laws for the conformation tensor. Theor Comp Fluid Dyn 32(6): 789-803.

[18] Cai W, Gottlieb D, Harten A (1990) Cell averaging Chebyshev methods for hyperbolic problems. Report No. 90-72, ICASE.

[19] McDonald BE (1989) Flux-corrected pseudo spectral method for scalar hyperbolic conservation laws. J Comput Phys 82(2): 413-428

[20] SJ Sherwin (1995) Triangular and tetrahedral spectral/hp element methods for fluid dynamics. PhD thesis, Princeton University.

[21] Bolis A (2013) fourier spectral/hp element method: Investigation of time-stepping and parallelisation strategies. PhD Thesis, Imperial College London.

[22] Karniadakis GE, Sherwin SJ (1999) Spectral/hp element methods for CFD, numerical mathematics and scientific computation. Oxford University Press, New York.

[23] Gear CW (1971) Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice Hall PTR.

[24] Cruz DOA, Pinho FT, Oliveira PJ (2005) Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution. J Non-Newton Fluid 132(1-3): 28-35.