مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۸/ دوره ۹/ شماره ۲/ صفحه ۱۵۳-۱۶۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2019.8355.2894

تحلیل دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در معرض بار شوک ترمو-مکانیکی غیرمتقارن با خواص مادی وابسته به دما

احسان سلاحی[۱،*]، علیرضا ستوده[۲] و مسعود طهانی[۳]

[۱] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۰۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۳/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵

چکیده

در این مقاله یک روش عددی ترکیبی برای مدلسازی سه بعدی رفتار دینامیکی گذرای پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی در معرض فشار دینامیکی نامتقارن و شوک حرارتی توسعه داده شده است. خواص مادی پوسته، وابسته به دما در نظر گرفته شده و پوسته در جهت شعاعی مدرج تابعی است. روش ارائه شده ترکیبی از تئوری لایه‌ای، روش مربعات دیفرانسیلی و بسط سری فوریه است. جهت ارزیابی دقت روش معرفی شده، نتایج بدست آمده از این روش با نتایج ارائه شده در دیگر مقالات، مورد بررسی قرار گرفت؛ همچنین با انجام تحلیل همگرایی، سرعت همگرایی بالای این روش تایید گردید. این تحقیق در برگیرنده نتایج کاربردی مفیدی است که می‌تواند در طراحی پوسته‌های مدرج تابعی استفاده گردد که به طور همزمان در معرض فشار دینامیکی و شوک حرارتی قرار دارند.

کلمات کلیدی: مواد مدرج تابعی؛ استوانه جدار ضخیم؛ فشار دینامیکی نامتقارن؛ شوک حرارتی؛ روش مربعات دیفرانسیلی؛ تئوری لایه‌ای.

Transient Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to Asymmetric Thermo-mechanical Shock Loads with Temperature Dependent Material Properties

E. Selahi[1,*], A.R. Setoodeh[2], M. Tahani[3]

[1] Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran.

[2] Professor, Faculty of Mechanical & Aerospace Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran.

[2] Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

Abstract

In this paper, a hybrid numerical method for three-dimensional modeling of transient dynamic behavior of functionally graded thick-walled cylindrical shell subjected to asymmetrical dynamic pressure and thermal shock has been developed. The material properties of the shell are considered to be temperature dependent and the shell is graded continuously in the radial direction. The proposed method is compose of the layerwise theory, differential quadrature method, and Fourier series expansion. To verify the precision of this method, the developed results has been compared with results presented in the available literatures. Also convergence analysis confirmed the fast convergence rate of the presented solution. This research contains useful practical results that can be helpful for design of FG shells subjected to transient pressure and thermal shock simultaneously.

Keywords: Functionally Graded Materials; Thick Hollow Cylinder; Asymmetric Dynamic Pressure; Thermal Shock; Differential Quadrature Method; Layerwise Theory.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۴۳۱۱۲۲۰۱-۷۱-۹۸+؛ فکس: ۴۳۳۱۱۱۷۲-۷۱-۹۸+

آدرس پست الکترونیک: selahi@miau.ac.ir

۱- مقدمه

برخی از سازه‌ها، به علت شرایط کارکردشان باید دارای خواص مکانیکی و حرارتی متفاوتی در نقاط مختلف باشند. یک مثال متداول، بدنه فضاپیما هنگام عبور از جو است که در سطح خارجی در معرض گرادیان دمایی بالا و در سطح داخلی باید دارای چقرمگی بالا و قابلیت جوش‌کاری مناسب باشد [۱]. چند لایه‌های کامپوزیتی دارای خواص متفاوتی در نقاط مختلف می‌باشند؛ اما این سازه‌ها در اثر تنش‌های مکانیکی و حرارتی اغلب دچار جدایش بین لایه‌ای می‌شوند که ناشی از وجود ناپیوستگی در خواص در سطح مشترک بین دو لایه است. با جایگزینی مواد مدرج تابعی بجای چند لایه‌های کامپوزیتی، می‌توان این اثر نامطلوب را به حداقل ممکن رساند.

مواد مدرج تابعی[1] دسته‌ای مدرن از مواد کامپوزیتی لایه‌ای هستند که در آنها تغییر خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر به صورت پیوسته و به تدریج رخ می‌دهد؛ بنابراین این مواد با حفظ ویژگی عدم ایجاد جدایش بین لایه‌ای می‌توانند دارای مقاومت بالای مکانیکی و مقاومت در برابر تغییرات دمایی بالا نیز برخوردار باشند. گفتنی است که از این مواد اولین بار در طراحی سازه‌های هوافضایی، مورد استفاده قرار گرفت [۲]. این ویژگی شاخص مواد فوق باعث جذب محققان زیادی جهت بررسی رفتار گذرای ترمو-مکانیکی پوسته‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی شده است.

شاو و وانگ [۳]، با فرض خواص غیروابسته به دما، به مدلسازی سه بعدی استوانه مدرج تابعی با طول محدود در معرض بارهای مکانیکی و حرارتی پرداختند. بهتویی و اسلامی [۴]، با بهره‌گیری از تئوری مرتبه دوم تغییر فرم برشی پوسته‌ها، پاسخ ترموالاستیک استوانه مدرج تابعی در معرض شوک حرارتی را مطالعه نمودند. اوتاو و تانیگاوا [۵]، مدل دو بعدی جهت بیان دمای گذرا و تنش حرارتی در استوانه توخالی مدرج تابعی تحت اعمال حرارت نامتقارن از سطوح ارائه نمودند.

پنگ و لی [۶]، روشی ساده جهت تعیین تنش حرارتی و دمای گذرا در استوانه توخالی مدرج تابعی ارائه کردند. ملک‌زاده و همکارانش [۷]، با استفاده از روش‌های مربعات دیفرانسیلی[2] و انتگرال زمانی نیومارک رفتار گذرای پوسته استوانه‌ای چند لایه‌ای مدرج تابعی دوار تحت فشار دینامیکی را مطالعه نمودند. ژانگ و همکارانش [۸]، با بهره‌گیری از روش مربعات دیفرانسیلی، جابجایی دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار حرارتی متغیر با زمان را ارزیابی کردند.

انصاری و ترابی [۹] ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تحت بارگذاری حرارتی و محصور در بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. داک [۱۰ و ۱۱] بر اساس تئوری تغییر فرم برشی مرتبه سوم ردی، رفتار غیرخطی دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با و بدون استیفنر، قرار گرفته در بستر الاستیک و در معرض تغییرات حرارتی محیطی را مطالعه کرد. تحلیل پارامتری پدیده تشدید در استوانه جدار نازک مدرج تابعی با حرکت دورانی متناوب و قرار گرفته در محیط حرارتی نیز، توسط لی و همکارانش [۱۲] انجام گرفت.

اکبری و همکارانش [۱۳]، با بکارگیری روش بدون شبکه پترو-گلرکین پاسخ دینامیکی استوانه مدرج تابعی ویسکو-الاستیک در معرض بار مکانیکی-حرارتی را بررسی نمودند. هادی و و همکارانش [۱۴]، بر پایه تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کویتر، پایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بستر الاستیک و نیروی محوری را بررسی کردند. به تازگی حبیبی و همکارانش [۱۵]، میزان جابجایی، کرنش، تنش و پتانسیل الکتریکی در پوسته استوانه‌ای دارای لایه پیزوالکتریک را محاسبه کردند.

در یک سازه در معرض تغییرات شدید دمایی، خواص مواد متشکله سازه نیز تغییر می‌یابد؛ بنابراین، کمبود تحقیقات انجام گرفته در این زمینه، نویسندگان این مقاله را بر آن داشت که روشی موثر جهت مطالعه پاسخ گذرای استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی، با خواص وابسته به دما و

[1] Functional Grading Materials (FGMs)

[2] Differential Quadrature Method

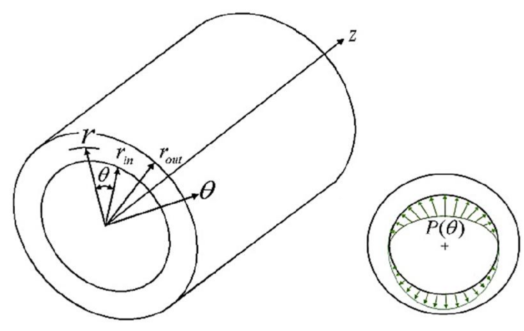
در معرض شوک حرارتی و فشار دینامیکی نامتقارن توسعه و ارائه نمایند.

به دلیل عدم وجود حل تحلیلی برای مساله معرفی شده، در این تحقیق یک روش عددی دقیق و با سرعت جواب‌دهی بالا ارائه می‌شود. این روش ترکیبی از تئوری لایه‌ای[1] ردی، روش مربعات دیفرانسیلی و بسط سری فوریه[2] است. تئوری لایه‌ای باعث افزایش دقت مدلسازی میدان جابجایی در مقایسه با تئوری‌های تغییر فرم برشی مرتبه اول و بالاتر می‌شود [۱۶]. روش مربعات دیفرانسیلی نیز، یک روش عددی شناخته شده با دقت بالا و سرعت همگرایی سریع است [۱۷].

۲- تئوری مدلسازی

۲-۱- تعریف مساله

در شکل ۱، تک جداره استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی در جهت شعاعی مورد بررسی در این تحقیق نشان داده شده است. پوسته در معرض فشار دینامیکی نامتقارن $\hat{p}(t,\theta)$ و شوک حرارتی محیطی متقارن $T_\infty(t)$ قرار گرفته است.



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت فشار دینامیکی نامتقارن محوری

شعاع داخلی، شعاع میانی، شعاع خارجی و طول استوانه به ترتیب با r_{in}، r_{mid}، r_{out} و l نمایش داده شده است. محاسبات بر اساس دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) است

[1] Layerwise Theory
[2] Fourier Series Expansion

و u، v و w مولفه‌های جابجایی به ترتیب در جهات شعاعی، مماسی و محوری می‌باشند. چگونگی توزیع خصوصیت حرارتی و یا مکانیکی P در جهت شعاعی پوسته مدرج تابعی، برحسب کسر حجمی مواد متشکله از رابطه (۱)، پیروی می‌نماید [۴].

$$P = P_f V_f + P_c V_c \tag{۱}$$

V_f درصد حجمی فلز و Vc درصد حجمی سرامیک است و با توجه به قانون توزیع توانی از رابطه (۲)، بدست می‌آیند.

$$V_f = \left(\frac{2(r-r_{mid})+h}{2h}\right)^n, \quad V_c = 1 - V_f \tag{۲}$$

n ضریب توانی است. با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱) داریم:

$$P(r) = P_c + \left(P_f - P_c\right)\left(\frac{2(r-r_{mid})+h}{2h}\right)^n \tag{۳}$$

۲-۲- مدل‌سازی انتقال حرارت

با فرض عدم تولید داخلی حرارت، معادله انتقال حرارت متقارن محوری در مختصات استوانه‌ای مطابق رابطه (۴) است [۱۸].

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r k_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{۴}$$

که T دما، C ظرفیت گرمایی ویژه و k_r و k_z ضریب هدایت گرمایی در جهات شعاعی و محوری می‌باشند. دمای اولیه و شرایط مرزی به‌ترتیب مطابق روابط (۵) و (۶) تعریف می‌گردند.

$$T(r,z,0) = T_0 \tag{۵}$$

$$k_r \frac{\partial T}{\partial r} + h_r\left(T - T_{\infty_{in}}\right) = 0 \quad at \quad r = r_{in}$$
$$-k_r \frac{\partial T}{\partial r} + h_r\left(T - T_{\infty_{out}}\right) = 0 \quad at \quad r = r_{out}$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad at \quad z = 0, L \tag{۶}$$

که h_r ضریب همرفت گرمایی در محیط مجاور است. برای مدلسازی تغییرات دما در جهت ضخامت، از تئوری لایه‌ای ردی استفاده شده است [۱۶]. بر اساس این تئوری، ضخامت پوسته به N-1 لایه محاسباتی تقسیم می‌شود و تغییرات دما بر اساس معادله (۷) بیان می‌شود:

$$T(r,z,t) = T_i(z,t)\varphi_i(r) \tag{۷}$$

که $T_i(z,t)$ میدان دما در پایین لایه iام است. $\varphi_i(r)$ نیز تابعی پیوسته از موقعیت شعاعی است که در اینجا با استفاده از تابع خطی آورده شده در رابطه (۸)، تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\varphi_i(r)=\begin{cases}0 & r\le r_{i-1}\\ \dfrac{r-r_{i-1}}{h_{i-1}} & r_{i-1}\le r\le r_i\\ \dfrac{r_{i+1}-r}{h_i} & r_i\le r\le r_{i+1}\\ 0 & r\ge r_{i+1}\end{cases}\quad ,i=1,2,\ldots,N \qquad (۸)$$

در رابطه بالا h_i ضخامت i-مین لایه و r_i، بیانگر مختصات شعاعی i-مین سطح می‌باشند. با جایگزینی معادله (۷) در معادله (۴)، معادله انتقال حرارات بر اساس تئوری لایه‌ای بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\rho C_v\frac{\partial T_i}{\partial t}\varphi_i-\frac{k_r}{r}T_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\\&-T_i\frac{\partial k_r}{\partial r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}-k_z\frac{\partial^2T_i}{\partial z^2}\varphi_i=0\end{aligned}\qquad (۹)$$

از آنجا که در ماده مدرج تابعی مورد نظر، تغییرات خواص در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است؛ بنابراین می‌توان فرض نمود که: $\partial k_z/\partial z=0$. برای حل معادله انتقال حرارت و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود. بدین منظور و بر اساس روش مربعات دیفرانسیلی و مطابق رابطه (۱۰)، مشتقات مرتبه اول و دوم دما نسبت به موقعیت محوری و مشتق مرتبه اول زمانی، برابر است با مجموع وزنی خطی تمام مقادیر تابع دما در کل دامنه زمانی یا مکانی مورد بررسی.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T_{im}(z_k,t_p)}{\partial z}=\sum_{l=1}^{N_z}a_{kl}T_{im}(z_l,t_p)=a_{kl}T_{imlp}\\&\frac{\partial^2T_{im}(z_k,t_p)}{\partial z^2}=\sum_{l=1}^{N_z}b_{kl}T_{im}(z_l,t_p)=b_{kl}T_{imlp}\\&\frac{\partial T_{im}(z_k,t_p)}{\partial t}=\sum_{q=1}^{N_t}A^t_{pq}T_{im}(z_k,t_q)=A^t_{pq}T_{imlp}\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

N_t و N_z بیانگر تعداد گره‌ها به ترتیب در دامنه زمانی و در جهت محوری هستند. با اعمال روش مربعات دیفرانسیلی در معادله انتقال حرارت (۹) داریم:

$$\begin{aligned}&\rho C_v C_{pq}T_{ikq}\varphi_i-\frac{k_r}{r}T_{ikp}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\\&-T_{ikp}\frac{\partial k_r}{\partial r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}-k_zb_{kl}T_{ilp}\varphi_i=0\end{aligned}\qquad (۱۱)$$

در نهایت با اعمال شرط اولیه (۵) و شرایط مرزی (۶) در معادله انتقال حرارت (۱۱) یک دستگاه معادلات جبری با $(N_t-1)(N_r-2)(N_z-2)$ معادله و مجهول بدست می‌آید که با حل دستگاه معادلات توزیع دما در هر نقطه تعیین می‌شود.

۲-۳- مدل‌سازی مکانیکی- حرارتی

در این مدلسازی خواص مواد تابعی از دما در نظر گرفته شده است. در اینجا برای مدلسازی تغییرات خاصیت مورد نظر P، بر حسب دما از رابطه متداول توانی (۱۲) استفاده شده است.

$$P=P_0\left(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3\right)\qquad (۱۲)$$

مقدار خاصیت ماده مدرج تابعی در هر نقطه با توجه به درصد حجمی فاز فلز و سرامیک از رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$P(r,T)=P_f(T)V_f(r)+P_c(T)V_c(r)\qquad (۱۳)$$

با اعمال بسط سری فوریه درجهت مماسی، مولفه‌های میدان جابجایی به‌صورت معادله (۱۴) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&u=\sum_{m=0}^{\infty}U_m(r,z,t)\cos(m\theta)=U_m(r,z,t)\cos(m\theta)\\&v=\sum_{m=0}^{\infty}V_m(r,z,t)\sin(m\theta)=V_m(r,z,t)\sin(m\theta)\\&w=\sum_{m=0}^{\infty}W_m(r,z,t)\cos(m\theta)=W_m(r,z,t)\cos(m\theta)\end{aligned}\qquad (۱۴)$$

که m شماره موج مماسی است. سپس با بکارگیری تئوری لایه‌ای مولفه‌های جابجایی بصورت معادله (۱۵) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&U_m(r,z,t)=\sum_{i=1}^{N_r}U_{im}(z,t)\varphi_i(r)=U_{im}(z,t)\varphi_i(r)\\&V_m(r,z,t)=\sum_{i=1}^{N_r}V_{im}(z,t)\varphi_i(r)=V_{im}(z,t)\varphi_i(r)\\&W_m(r,z,t)=\sum_{i=1}^{N_r}W_{im}(z,t)\varphi_i(r)=W_{im}(z,t)\varphi_i(r)\end{aligned}\qquad (۱۵)$$

در رابطه بالا $U_{im}(z,t)$، $V_{im}(z,t)$ و $W_{im}(z,t)$ مؤلفه‌های جابجایی در پایین i-امین لایه محاسباتی در جهت‌های r، θ و z می‌باشند. روابط کرنش- جابجایی در استوانه مدرج تابعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای بر اساس تئوری لایه‌ای به صورت روابط (۱۶) می‌باشند.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r &= U_{im}\frac{d\varphi_i}{dr}\cos(m\theta)\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left[U_{im}+mV_{im}\right]\varphi_i\cos(m\theta)\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial W_{im}}{\partial z}\varphi_i\cos(m\theta)\\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\left[rV_{im}\frac{d\varphi}{dr}-V_{im}\varphi_i-mU_{im}\varphi_i\right]\sin(m\theta)\\
\gamma_{zr} &= \left[\frac{\partial U_{im}}{\partial z}\varphi_i+W_{im}\frac{d\varphi_i}{dr}\right]\cos(m\theta)\\
\gamma_{\theta z} &= \left[\frac{\partial V_{im}}{\partial z}-\frac{m}{r}W_{im}\right]\varphi_i\sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

که $\varepsilon_i(i=r,\theta,z)$ کرنش عمودی و $\gamma_{ij}\,(i\neq j)$ مولفه‌های کرنش برشی می‌باشند. به علت اعمال بار مکانیکی- حرارتی و انتخاب شرایط مرزی دو سر درگیر، تنش حرارتی نیز همزمان با تنش مکانیکی ایجاد می‌شود؛ بنابراین از فرم کلی تنش-کرنش به صورت معادله (۱۷) استفاده می‌شود.

$$
\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{zr}\\ \tau_{\theta z}\end{Bmatrix}=
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\
C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\
C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{zr}\\ \gamma_{\theta z}\end{Bmatrix}
-\begin{Bmatrix}C_1\alpha_r\\ C_2\alpha_\theta\\ C_3\alpha_z\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}T
\tag{۱۷}
$$

که $\varepsilon_i(i=r,\theta,z)$ کرنش عمودی و $\gamma_{ij}\,(i\neq j)$ مولفه‌های کرنش برشی می‌باشند. C_{ij} ماتریس سفتی، T اختلاف دما با دمای اولیه و $\alpha_i(i=r,\theta,z)$ ضریب انبساط حرارتی است. با جایگزینی معادله (۱۶) در معادله (۱۷)، روابط تنش-جابجایی بر اساس تئوری لایه‌ای برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بدست می‌آید. در اینجا پوسته مورد تحلیل علاوه بر اعمال شوک حرارتی، در سطح‌های داخلی و یا خارجی می تواند به ترتیب تحت بارهای فشاری دینامیکی $\hat{p}_{in}(t,\theta)$ و $\hat{p}_{out}(t,\theta)$ نیز قرار گیرد که مطابق معادله (۱۸)، می‌توان آن‌ها را با استفاده از روش تبدیل فوریه در جهت مماسی بسط داد.

$$
\begin{aligned}
p_{in}(t,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{in_m}(t)\cos(m\theta) = p_{in_m}(t)\cos(m\theta)\\
p_{out}(t,\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{out_m}(t)\cos(m\theta) = p_{out_m}(t)\cos(m\theta)
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

با به کارگیری اصل همیلتون (۱۹) معادلات حرکت برای حالت تحلیل نامتقارن محوری در بازه زمانی t_1 تا t_2 بدست می‌آید [۲۰].

$$
\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\hat{T}-\delta\left(\hat{U}-\hat{W}\right)\right)dt=0 \tag{۱۹}
$$

در اینجا δ نماد تغییرات و $\hat{T}$ انرژی جنبشی، $\hat{U}$ انرژی کرنشی و $\hat{W}$ کار نیروی خارجی می‌باشند که به ترتیب از روابط (۲۰) تا (۲۲) بدست می‌آیند [۲۰].

$$
\delta\hat{T} = \int_V \rho\left(\dot{u}\,\delta\dot{u}+\dot{v}\,\delta\dot{v}+\dot{w}\,\delta\dot{w}\right)dV \tag{۲۰}
$$

$$
\delta\hat{U} = \int_V \begin{pmatrix}\sigma_r\delta\varepsilon_r+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\sigma_z\delta\varepsilon_z\\ +\sigma_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta}+\sigma_{zr}\delta\gamma_{zr}+\sigma_{\theta z}\delta\gamma_{z\theta}\end{pmatrix}dV \tag{۲۱}
$$

$$
\delta\hat{W} = \int_0^{2\pi}\int_0^{l}\begin{pmatrix}r_{in}P_{in_m}(t)\cos(m\theta)\delta_{j1}\\ +r_{out}P_{out_m}(t)\cos(m\theta)\delta_{jN_r}\end{pmatrix}\delta u\,dz\,d\theta \tag{۲۲}
$$

با بکارگیری معادلات (۲۰) تا (۲۲) در معادله (۱۹)، دستگاه معادلات حاکم به فرم تئوری لایه‌ای (معادله ۲۳) بدست می‌آیند. گفتنی است که جهت مختصرسازی و جلوگیری از طولانی شدن معادلات حاکم و شرایط مرزی، از پارامترهای معرفی شده در رابطه ۲۴ استفاده گردید.

$$
\begin{aligned}
&-K^{ij}U_{im}+mL^{ij}V_{im}+M^{ij}\frac{\partial W_{im}}{\partial z}+A_{55}^{ij}\frac{\partial^2 U_{im}}{\partial z^2}\\
&\quad -B_1^{ji}\alpha_r T_{im}-D_2^{ij}\alpha_\theta T_{im}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P\cos^2(m\theta)d\theta = I^{ij}\ddot{U}_{im}\\
&mL^{ij}U_{im}+O^{ij}V_{im}-mN^{ij}\frac{\partial W_{im}}{\partial z}\\
&\quad +A_{44}^{ij}\frac{\partial^2 V_{im}}{\partial z^2}-mD_2^{ij}\alpha_\theta T_{im}=I^{ij}\ddot{V}_{im}\\
&-Q^{ij}W_{im}+M^{ij}\frac{\partial U_{im}}{\partial z}+mN^{ij}\frac{\partial V_{im}}{\partial z}\\
&\quad +A_{33}^{ij}\frac{\partial^2 W_{im}}{\partial z^2}+A_3^{ij}\alpha_z\frac{\partial T_{im}}{\partial z}=I^{ij}\ddot{W}_{im}
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

$$A_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\varphi_i\varphi_j r\,dr,\quad B_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\varphi_j r\,dr$$
$$C_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial r} r\,dr,\ D_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\varphi_i\varphi_j\,dr$$
$$E_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\varphi_i\varphi_j}{r}dr,\quad F_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\varphi_j\,dr$$
$$G_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\varphi_j r\,dr,\ H_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} r\,dr$$
$$I_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} r\,dr,\ J_{ab}^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab}\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}dr$$
$$I^{ij}=\int_{r_{in}}^{r_{out}}\rho\varphi_i\varphi_j r dr$$
$$K^{ij}=C_{11}^{ij}+E_{22}^{ij}+F_{12}^{ij}+F_{21}^{ji}+m^2E_{44}^{ij}$$
$$L^{ij}=F_{44}^{ij}-F_{12}^{ji}-E_{22}^{ij}-E_{44}^{ij}$$
$$P=r_{in}p_{in_m}(t)\delta_{j1}-r_{out}p_{out_m}(t)\delta_{jNr}$$
$$M^{ij}=B_{55}^{ij}-B_{31}^{ji}-D_{32}^{ij},\quad N^{ij}=D_{23}^{ij}+D_{44}^{ij}$$
$$O^{ij}=F_{44}^{ij}+F_{44}^{ji}-C_{44}^{ij}-E_{44}^{ij}-m^2E_{22}^{ij}$$
$$Q^{ij}=C_{55}^{ij}+m^2E_{44}^{ij} \tag{۲۴}$$

علامت ($\ddot{}$) بیانگر مشتق دوم زمانی است. شرایط مرزی در موقعیت محوری (z=0, L) از معادله (۲۴) پیروی می‌نماید.

$$A_{55}^{ij}\frac{\partial U_{im}}{\partial z}+B_{55}^{ij}W_{im}=0 \text{ یا } U_{jm}=0$$
$$A_{44}^{ij}\frac{\partial V_{im}}{\partial z}-mD_{44}^{ij}W_{im}=0 \text{ یا } V_{jm}=0$$
$$B_{13}^{ij}U_{im}+D_{23}^{ij}U_{im}+mD_{12}^{ij}V_{im}+A_{33}^{ij}\frac{\partial W_{im}}{\partial z}=0 \text{ یا } W_{jm}=0 \tag{۲۵}$$

با بهره‌گیری از روش مربعات دیفرانسیلی، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی به دستگاه‌های معادلات جبری تبدیل می‌شوند که به‌ترتیب در روابط (۲۶) و (۲۷) ارائه شده‌اند. روش تبدیل معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری توسط روش مربعات دیفرانسیلی، به تفصیل در مراجع [۱۹ و ۲۰] معرفی شده است.

معادلات حاکم:

$$-K^{ij}U_{imkp}+mL^{ij}V_{imkp}+A_{55}^{ij}b_{kl}U_{imlp}+M^{ij}a_{kl}W_{imlp}$$
$$-B_1^{ji}\alpha_r T_{imkp}-D_2^{ij}\alpha_\theta T_{imkp}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P\cos(m\theta)d\theta$$
$$=I^{ij}\left(A_{p1}^t\dot{U}_{imk1}+B_{p1}^tU_{imk1}+B_{pq}^tU_{imkq}\right)$$
$$mL^{ij}U_{imkp}+O^{ij}V_{imkp}-mN^{ij}a_{kl}W_{imlp}+A_{44}^{ij}b_{kl}V_{imlp}$$
$$-m\,D_2^{ij}\alpha_\theta T_{imkp}=I^{ij}\left(A_{p1}^t\dot{V}_{imk1}+B_{p1}^tV_{imk1}+B_{pq}^tV_{imkq}\right)$$
$$-M^{ij}a_{kl}U_{imlp}+mN^{ij}a_{kl}V_{imlp}+A_{33}^{ij}b_{kl}W_{imlp}$$
$$+A_3^{ij}\alpha_z a_{kl}T_{imlp}-Q^{ij}W_{imkp}+$$
$$=I^{ij}\left(A_{p1}^t\dot{W}_{imk1}+B_{p1}^tW_{imk1}+B_{pq}^tW_{imkq}\right) \tag{۲۶}$$

شرایط مرزی:

$$A_{55}^{ij}a_{kl}U_{imlp}+B_{55}^{ij}W_{imkp}=0 \text{ یا } U_{jmkp}=0$$
$$A_{44}^{ij}a_{kl}V_{imlp}-mD_{44}^{ij}W_{imkp}=0 \text{ یا } V_{jmkp}=0$$
$$B_{13}^{ij}U_{imkp}+D_{23}^{ij}U_{imkp}+mD_{12}^{ij}V_{imkp}+A_{33}^{ij}a_{kl}W_{imlp}+A_3^{ij}\alpha_z T_{imkp}=0 \text{ یا } W_{jmkp}=0 \tag{۲۷}$$

با جایگزینی معادلات شرایط مرزی (۲۷) در معادلات حاکم (۲۶)، برای هر زیر دامنه زمانی و به ازای هر m، یک دستگاه معادلات جبری با $3N_r(N_z-2)(N_t-1)$ معادله و مجهول بدست می‌آید. با حل معادلات مقادیر مولفه‌های جابجایی در گره‌های مختلف زمانی و مکانی و در نهایت نیز به‌ترتیب مؤلفه‌های کرنش و تنش، قابل محاسبه خواهند بود.

۳- نتایج و بحث در نتایج

۳-۱- اعتبارسنجی روش مدلسازی

جهت بررسی دقت روش عددی ترکیبی ارائه شده، پاسخ حرارتی و مکانیکی لوله مدرج تابعی و بسیار طویل مدلسازی شده در مرجع [۲۱] با نتایج بدست آمده از روش عددی معرفی شده مقایسه گردید. استوانه مدرج تابعی مورد بررسی دارای ساختار ترکیبی از فولاد ضد زنگ SUS304 و سرامیک Si_3N_4 است. خواص وابسته به دمای این پوسته که بر اساس ضرایب معرفی شده در رابطه (۱۲) است، در جدول ۱ آورده شده است.

شعاع داخلی و خارجی پوسته به‌ترتیب برابر با: r_{in}=0.1 m و r_{out}=0.2 m، ضریب همرفت گرمایی در محیط مجاور سطوح داخلی و خارجی پوسته برابر با: $h_{\infty\text{-}in}=h_{\infty\text{-}out}$=1000 W/m^{2}K و دمای محیط مجاور سطوح داخلی و خارجی به ترتیب برابر با: $T_{\infty\text{-}in}$=600 K و $T_{\infty\text{-}out}$=300 K انتخاب شده است. دمای اولیه نیز برابر با 300 K در نظر گرفته شده است.

در شکل ۲، به ترتیب نمودارهای تغییرات دما (T^*) و جابجایی شعاعی بدون بعد (U^*) در سطوح داخلی و خارجی، محاسبه شده توسط روش ترکیبی معرفی شده ترسیم و با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱]، مورد مقایسه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که مقادیر دما و جابجایی شعاعی محاسبه شده هم خوانی خوبی با نتایج مرجع [۲۱] دارد.

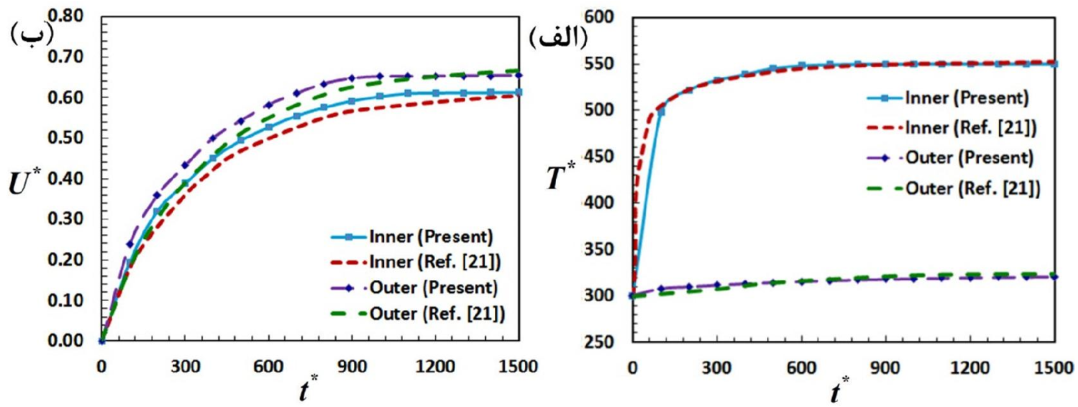
۳-۲- تعریف مساله

مواد متشکله پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی انتخابی ترکیبی از آلیاژ تیتانیوم و زیرکنیا است، به‌گونه‌ای که سطح داخلی تمام سرامیک و سطح خارجی استوانه تمام فلز است. تغییرات خواص در راستای شعاعی آن از رابطه (۳) پیروی می‌کند.

تغییرات خواص مواد تشکیل دهنده بر حسب دما از رابطه (۱۲) و با ضرایب آورده شده در جدول ۱ پیروی می‌نماید. سطح داخلی این استوانه، تحت فشار دینامیکی نامتقارن قرار گرفته است که از رابطه (۲۸) پیروی می‌کند. در جدول ۲، مشخصات هندسی و شرایط حرارتی استوانه مورد بررسی شرح داده شده است.

جدول ۱- خواص وابسته به دمای اجزای مادی تشکیل دهنده پوسته مدرج تابعی [۲۱]

Material	Property	P_0	P_1	P_2	P_3
Zirconia	E (Pa)	244.266×10^{9}	-1.371×10^{-3}	1.214×10^{-6}	-3.681×10^{-10}
	ν	0.2882	1.133×10^{-4}	0	0
	α(K^{-1})	12.766×10^{-6}	-1.49×10^{-3}	1×10^{-6}	-6.775×10^{-12}
	k (W/mK)	1.7	-1.276×10^{-4}	6.649×10^{-6}	0
	ρ(kg/m^3)	5700	0	0	0
	C_v (J/kgK)	487.34	3.049×10^{-4}	-6.037×10^{-8}	0
Ti-6Al-4V	E (Pa)	122.56×10^{9}	-4.586×10^{-4}	0	0
	ν	0.2884	1.121e-4	0	0
	α(K^{-1})	7.579×10^{-6}	6.5×10^{-4}	3.147×10^{-7}	0
	k (W/mK)	1.209	1.394×10^{-2}	0	0
	ρ(kg/m^3)	4429	0	0	0
	C_v (J/kgK)	625.297	-4.224×10^{-4}	7.179×10^{-7}	0
Silicon Nitride	E (Pa)	348.73×10^{9}	-3.70×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
	ν	0.24	0	0	0
	α(K^{-1})	5.872×10^{-6}	9.095×10^{-4}	0	0
	k (W/mK)	13.723	0	0	0
	ρ(kg/m^3)	2370	0	0	0
	C_v (J/kgK)	555.11	1.016×10^{-3}	2.92×10^{-7}	-1.67×10^{-10}
SUS 304	E (Pa)	201.04×10^{9}	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
	ν	0.3262	-2.002×10^{-4}	3.797×10^{-7}	0
	α(K^{-1})	12.330×10^{-6}	8.086×10^{-4}	0	0
	k (W/mK)	15.379	0	0	0
	ρ(kg/m^3)	8166	0	0	0
	C_v (J/kgK)	496.56	-1.151×10^{-3}	1.636×10^{-6}	-5.863×10^{-10}



شکل ۲- مقایسه تغییرات زمانی نمودارهای بدون بعد الف) دما و ب) جابجایی شعاعی در سطوح داخلی و خارجی، محاسبه شده توسط توسط روش ترکیبی معرفی شده، با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱]

جدول ۲- خواص هندسی و مادی استوانه مدرج تابعی در تحلیل مکانیکی حرارتی متقارن

T_0 (K)	$T_{\infty\text{-}in}$ (K)	$T_{\infty\text{-}out}$ (K)	h (W/m^{2}K)	h (m)	n	L (m)	r_{in} (m)	r_{out} (m)
300	1000-70t/3	300	1000	0.02	1	1	0.08	0.1

$$p_{in}(t)=\begin{cases}10\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)\cos(\theta/2) & t\le 4\,\text{sec}\\ 10\cos(\theta/2) & t>4\,\text{sec}\end{cases}\quad(\text{MPa}) \tag{۲۸}$$

همچنین پارامترهای بدون بعد زیر مطابق با رابطه (۲۹) تعریف می‌شوند که در آن p_0=10 MPa، t_e=30 sec و k^*=10 GPa انتخاب شده است.

$$t^*=\frac{t}{t_e},\quad z^*=\frac{z}{L},\quad r^*=\frac{r}{r_{in}},\ T^*=\frac{T}{T_0}$$
$$\left(U^*,V^*,W^*\right)=\frac{(u,v,w)}{P_o\,h/k^*},\quad \sigma_i^*=\frac{\sigma_i}{P_0}\ \ i=r,\theta,z$$
$$\sigma_{ij}^*=\frac{\sigma_{ij}}{p_0}\quad (i,j=r,\theta,z),(i\neq j) \tag{۲۹}$$

۳-۳- تحلیل همگرایی

بررسی رفتار همگرایی مدل ارائه شده، شامل دو بخش: بررسی رفتار همگرایی در بسط فوریه برای تابع هارمونیک تعریف شده و بررسی همگرایی جهت انتخاب بهینه تعداد گره‌ها در دامنه های مکانی و زمانی است.

اولین گام، بررسی همگرایی جهت انتخاب بهینه تعداد موج مماسی M، برای مدلسازی رفتار پوسته مدرج تابعی در معرض فشار دینامیکی نامتقارن با دقت مناسب است. بدین منظور فشار نامتقارن بدون بعد (رابطه ۲۸)، با به کارگیری بسط فوریه در جهت مماسی به‌صورت رابطه (۳۰) تقریب زده می‌شود که A_m و B_m ضرایب بسط فوریه می‌باشند.

$$p_{in}^*=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)\cos(\theta/2)=\sin\left(\dfrac{\pi t}{8}\right)\times\\ \left(\displaystyle\sum_{m=1}^{M}A_m(t)\cos(m\theta)+\sum_{m=1}^{M}B_m(t)\sin(m\theta)\right)\\ t\le 4\,\text{sec}\\ ,\\ \cos(\theta/2)=\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{M}A_m(t)\cos(m\theta)+\sum_{m=1}^{M}B_m(t)\sin(m\theta)\\ t>4\,\text{sec}\end{cases} \tag{۳۰}$$

در شکل ۳، تابع هارمونیک $\cos(\theta/2)$ و تقریب آن توسط بسط فوریه به ازای مقادیر مختلف M نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در M=20 بسط فوریه محاسبه شده بسیار نزدیک به تابع هارمونیک مورد بررسی است؛ بنابراین تعداد موج‌های مماسی برابر با ۲۰ انتخاب گردید.

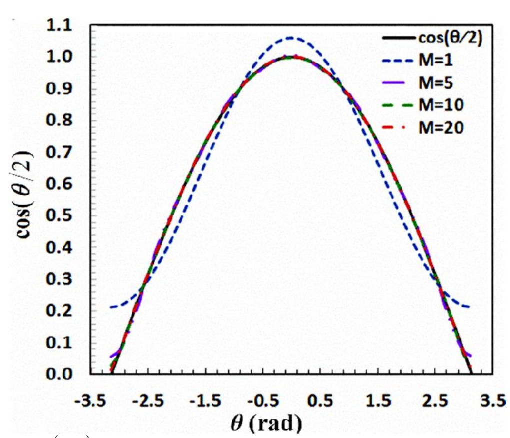
دومین گام تحلیل همگرایی جهت انتخاب بهینه تعداد گره‌ها در دامنه‌های مکانی و زمانی است. بدین منظور مقادیر بدون بعد دما، جابجایی شعاعی و تنش مماسی در

$r^*=1.0$ ، $z^*=0.5$ ، $t^*=1.0$ و $\theta=0^\circ$ برای تعداد گره‌های مختلف شعاعی (N_r)، محوری (N_z) و زمانی (N_t) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در اینجا تعداد گره‌های طولی از ۵ تا ۱۱ و تعداد گره‌های شعاعی برابر با ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۱ در نظر گرفته شد. در شکل ۴، تاثیر تعداد گره‌ها بر چگونگی رفتار همگرایی پوسته مورد بررسی نشان داده شده است.

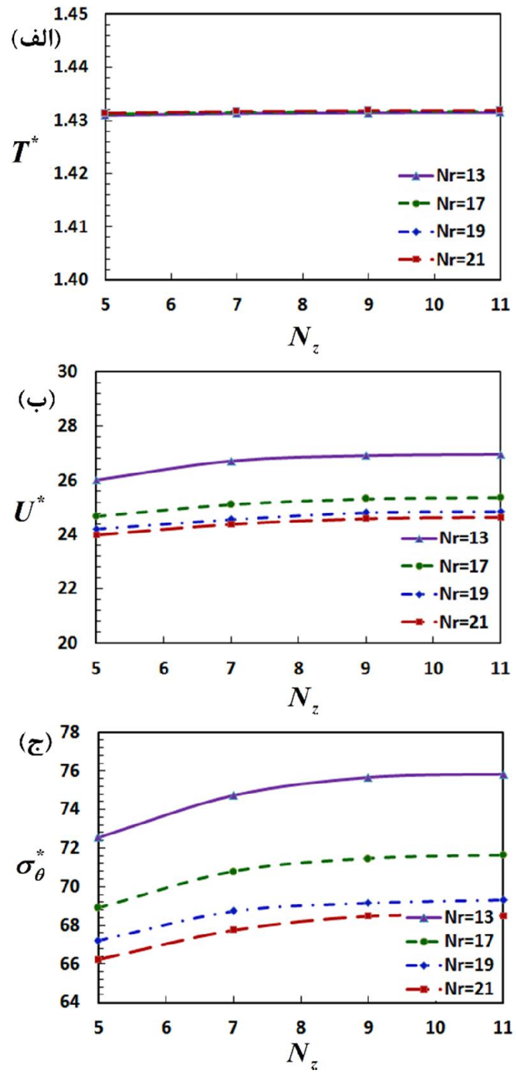
مشاهده می‌شود که به‌ازای $N_r=19$ و $N_z=7$ نمودارهای دما، جابجایی و تنش به همگرایی می‌رسند. با توجه به شرایط مرزی حرارتی $T_{\infty\text{-}in}$، در لحظات ابتدایی تغییرات شدید دمایی و به دنبال آن تغییرات شدید در جابجایی و تنش را خواهیم داشت؛ بنابراین برای افزایش دقت و جلوگیری از بسیار زیاد شدن تعداد گره‌های زمانی، به‌جای استفاده از بازه‌های زمانی مساوی، از تقسیم بندی غیر یکنواخت مطابق رابطه (۳۱) استفاده می‌شود:

$$t_i=\left(1-\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N_t-1}\right)\right)\times\frac{t_f}{2} \qquad (۳۱)$$

در این تحلیل کل دوره زمانی تحلیل به دو زیر دامنه تقسیم شده است و t_f دوره زمانی برای هر زیر دامنه است. در این مثال در دوره زمانی اول (t<4 sec) با تغییر تعداد گره‌های زمانی از ۱۱ به ۲۱ تغییرات بسیار ناچیزی در مقادیر بدون بعد دما، جابجایی و تنش مشاهده می‌شود؛ در نتیجه در این دوره $N_t=11$ انتخاب گردید که در اینجا جهت جلوگیری از حجیم‌تر شدن مقاله از آوردن جزییات آن خودداری شده است.



شکل ۳- بسط فوریه در مقادیر مختلف M در تابع $\cos(\theta/2)$



شکل ۴- رفتار همگرایی برای مقادیر بدون بعد (الف) دما، (ب) جابجایی شعاعی و (ج) تنش مماسی

۴-۳- نتایج تحلیل دینامیکی پوسته

در جدول ۳ تاریخچه زمانی دمای بدون بعد برای سطوح داخلی T_{in}^*، میانی T_{mid}^* و خارجی T_{out}^* و در وسط پوسته استوانه‌ای، مورد بررسی قرار گرفته است.

مشاهده می‌شود که با توجه به شوک حرارتی ایجاد شده در محیط مجاور سطح داخلی، دمای سطح داخلی در ابتدا افزایش و سپس با کاهش دمای محیط مجاور داخلی و کمتر شدن دمای آن از دمای سطح داخلی، مسیر انتقال حرارت

برعکس شده و دمای سطح داخلی شروع به کاهش می‌نماید. این در حالی است که تا انتهای زمان مورد بررسی، دمای سطح‌های میانی و خارجی به کندی در حال افزایش می‌باشند.

جدول ۳- تاریخچه زمانی دمای بدون بعد در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی وسط استوانه مدرج تابعی

t^*	T^*_{in}	T^*_{mid}	T^*_{out}
0.000	1.000	1.000	1.000
0.024	1.604	1.000	1.000
0.095	1.657	1.000	1.000
0.206	1.715	1.000	1.000
0.346	1.747	1.000	1.000
0.500	1.736	1.001	1.000
0.655	1.682	1.004	1.001
0.794	1.601	1.009	1.002
0.905	1.517	1.019	1.004
0.976	1.455	1.024	1.008
1.000	1.432	1.030	1.011

در شکل ۵، نمودارهای تغییرات زمانی مؤلفه‌های جابجایی بدون بعد شعاعی و مماسی و در شکل ۶، نمودارهای تغییرات زمانی مؤلفه‌های بدون بعد تنش‌های شعاعی، مماسی و محوری در موقعیت‌های زاویه‌ای مختلف θ واقع در سطح داخلی و در وسط طول لوله نشان داده شده است. با توجه به تغییرات زمانی دمای سطح داخلی پوسته، مشاهده می‌شود که مقادیر مؤلفه‌های بدون بعد جابجایی شعاعی، تنش مماسی و تنش محوری، در ابتدا دارای افزایش و سپس کاهش می‌یابند.

به دلیل تغییرات اندک مؤلفه‌های فوق بر حسب موقعیت زاویه‌ای می‌توان نتیجه گرفت که در مثال مورد بررسی حرارت اعمالی به سطح، عامل غالب در تعیین مقادیر جابجایی و تنش، در مقایسه با فشار مکانیکی است؛ همچنین ایجاد جابجایی مماسی، با توجه به متقارن محوری بودن توزیع دما، تنها ناشی از فشار نامتقارن داخلی است که همانگونه که مشاهده می‌گردد، مقدار آن بسیار کمتر از جابجایی شعاعی است.

در شکل ۷، نمودار تغییرات مؤلفه‌های بدون بعد جابجایی مماسی و محوری و تنش‌های مماسی و برشی ($\sigma^*_{r\theta}$) در سطح داخلی، برحسب موقعیت‌های طولی و مماسی در $t^*=1$ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در نقاط دور از تکیه‌گاه، مقادیر جابجایی و تنش تقریباً غیر وابسته به موقعیت مکانی است.

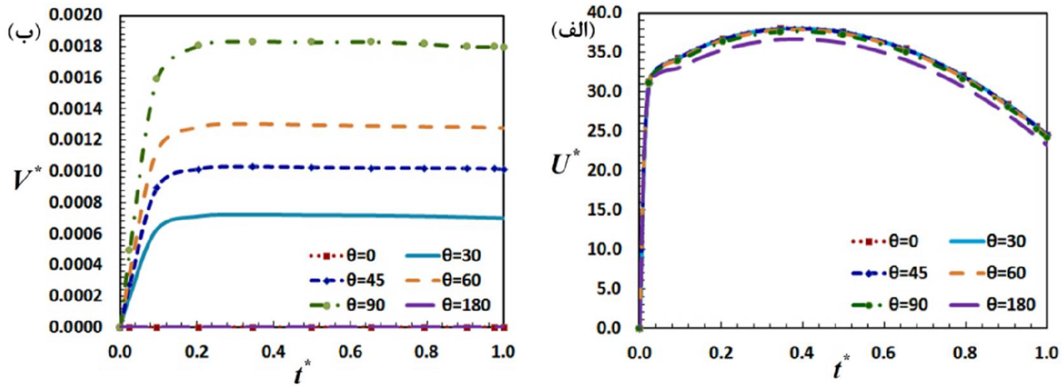
در شکل ۸، نمودار تغییرات تنش شعاعی بدون بعد در میانه استوانه، برحسب موقعیت شعاعی در $t^*=1$ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که تغییر دما تاثیر چندانی در مقدار تنش شعاعی ندارد.

در جدول ۴ به بررسی تاثیر ضریب توانی توزیع ماده مدرج تابعی بر مقادیر بدون بعد دما، جابجایی شعاعی و تنش مماسی در زمان $t^*=1$ در سطح داخلی، واقع در میانه استوانه پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که افزایش ضریب توانی توزیع ماده مدرج تابعی موجب می‌شود که میزان دما و به دنبال آن جابجایی و تنش، اندکی کاهش یابد.

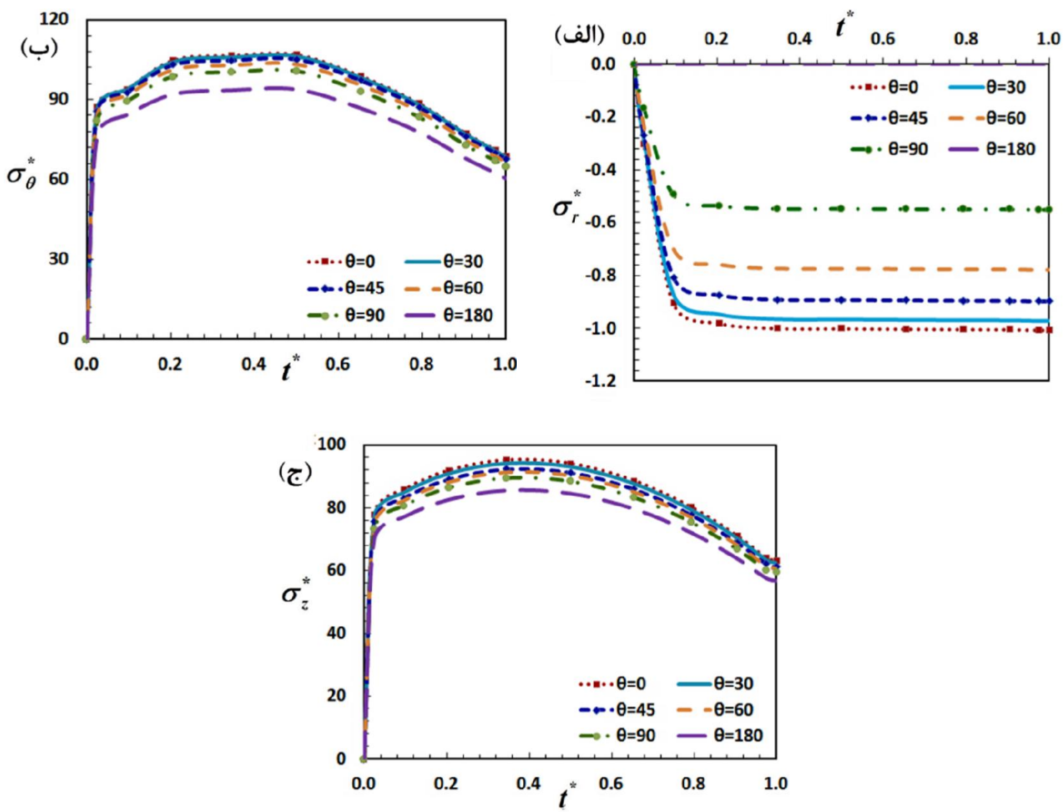
جدول ۴- تاثیر ضریب توانی توزیع ماده مدرج تابعی بر مؤلفه‌های بدون بعد دما، جابجایی شعاعی و تنش مماسی در زمان $t^*=1$ در سطح داخلی، واقع در میانه استوانه

n	T^*	U^*	σ^*_θ
0.2	1.463	26.000	73.370
0.5	1.443	25.084	72.306
1	1.432	24.561	68.740
2	1.428	24.407	67.512
5	1.428	24.398	66.723

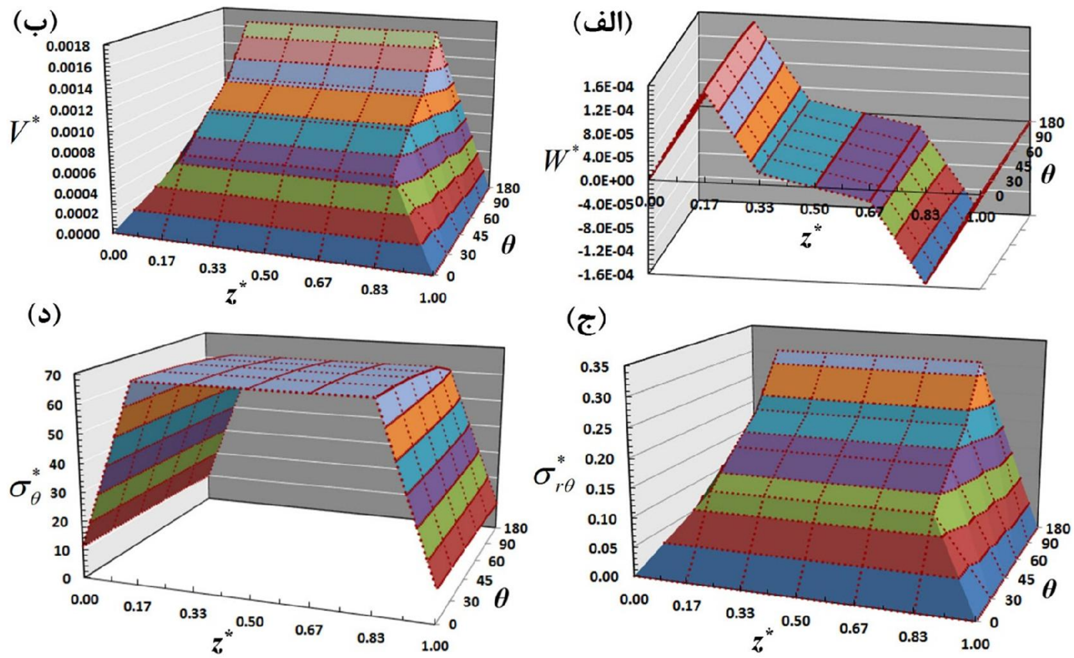
در انتها نیز به بررسی میزان تاثیرگذاری، اعمال خواص مادی وابسته به دما بر نتایج تحلیل پرداخته می‌شود؛ بدین منظور رفتار زمانمند میزان جابجایی شعاعی و تنش مماسی در مثال مورد بررسی و در دو حالت وابستگی خواص مادی به دما و عدم وابستگی خواص مادی به دما، مورد بررسی قرار گرفت. در جدول ۵، نتاج حاصل از این بررسی ارائه شده است.



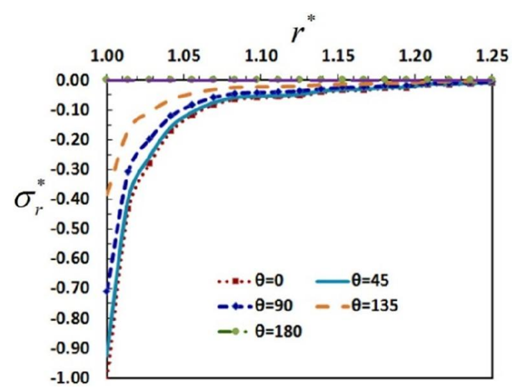
شکل ۵- نمودارهای تغییرات زمانی مؤلفه‌های جابجایی بدون بعد الف) شعاعی و ب) مماسی برای موقعیت‌های زاویه‌ای مختلف واقع در وسط طول لوله و در سطح داخلی



شکل ۶- نمودارهای تغییرات زمانی مؤلفه‌های تنش‌های بدون بعد الف) شعاعی، ب) مماسی و ج) محوری برای θهای مختلف واقع در وسط طول لوله و در سطح داخلی



شکل ۷- تغییرات مؤلفه‌های بدون بعد جابجایی‌های (الف) محوری (ب) مماسی و تنش‌های (ج) برشی ($\sigma^*_{r\theta}$) (د) مماسی در سطح داخلی برحسب موقعیت‌های طولی و مماسی در $t^*=1$



شکل ۸- تغییرات تنش شعاعی بدون بعد در میانه استوانه، برحسب موقعیت شعاعی در $t^*=1$

گفتنی است که در جدول ۵، اندیس *dep* بیانگر خصوصیت در تحلیل با وابستگی خواص مادی به دما و اندیس *in* بیانگر خصوصیت در تحلیل با عدم اعمال خواص وابسته به دما است. مشاهده می‌شود که در مثال مورد بررسی عدم در نظر گرفتن خواص مادی وابسته به دما باعث ایجاد خطای محاسباتی قابل توجه در نتایج می‌شود. بگونه‌ای که بیشینه میزان خطا در جابجایی شعاعی برابر با ۱۳.۳٪ و بیشینه میزان خطا در تنش مماسی در حدود ۳۷٪ است.

جدول ۵- تغییرات زمانی جابجایی شعاعی و تنش مماسی بدون بعد در سطح داخلی وسط استوانه مدرج تابعی با در نظر گرفتن خواص وابسته به دما و عدم وابستگی به دما

t^*	U^*_{dep}	U^*_{ind}	$\%_{U^*}$	$\sigma^*_{\theta-dep}$	$\sigma^*_{\theta-in}$	$\%_{\sigma^*_\theta}$
0.000	0	0	0	0	0	0
0.024	31.171	27.588	11.5	87.02	55.55	36.2
0.095	34.281	30.202	11.9	93.71	58.66	37.4
0.206	36.775	32.076	12.8	104.71	70.30	32.9
0.346	38.076	33.013	13.3	106.39	69.49	34.7
0.500	37.641	32.701	13.1	106.79	73.17	31.5
0.655	35.449	31.111	12.2	98.68	70.31	28.7
0.794	32.063	28.587	10.8	88.40	68.01	23.1
0.905	28.423	25.771	9.3	77.24	64.52	16.5
0.976	25.618	23.534	8.2	70.99	64.86	8.6
1.000	24.561	22.659	7.7	68.74	65.04	5.4

۴- جمع‌بندی

در این مقاله روشی ترکیبی موثر بر اساس تئوری لایه‌ای، روش مربعات دیفرانسیلی و بسط سری فوریه ارائه گردید. سپس با بکارگیری این روش پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی در معرض فشار دینامیکی نامتقارن و شوک حرارتی، مورد بررسی قرار گرفت. در مدلسازی‌های انجام گرفته، خواص مواد وابسته به دما در نظر گرفته شده است.

در ابتدا معادلات انتقال حرارت مطابق تئوری لایه‌ای و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، مدلسازی و حل گردید. سپس با به کارگیری اصل همیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی برای حالت تحلیل نامتقارن محوری بر اساس تئوری لایه‌ای در جهت شعاعی تعیین گردید. سپس با بکارگیری بسط سری فوریه، تغییرات فشار گذرای نامتقارن و مولفه‌های جابجایی در جهت مماسی مدلسازی شد. در نهایت نیز از روش مربعات دیفرانسیلی جهت مدلسازی مؤلفه‌های جابجایی در راستای محوری و همچنین در بازه زمانی استفاده گردید.

به منظور تایید دقت روش معرفی شده در مدلسازی رفتار گذرای پوسته در معرض بارهای مکانیکی حرارتی، نتایج بدست آمده از این روش با نتایج حاصل از تست‌های تجربی و مدلسازی‌های عددی ارائه شده در دیگر مقالات مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مقایسه تطابق نزدیکی بین نتایج شرح داده شده، نشان داد؛ همچنین با انجام تحلیل همگرایی، سرعت بالای ایجاد همگرایی و همچنین زمان اندک جواب دهی این روش مورد تایید قرار گرفت.

در ادامه با بکارگیری روش ارائه شده برای یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی انتخابی، رفتار دینامیکی وابسته به دمای آن در برابر شوک حرارتی و همچنین فشار دینامیکی نامتقارن محوری بررسی گردید. در انتها نیز تاثیر پارامترهای موثر بر این رفتار مورد مطالعه قرار گرفت. اهم نتایج حاصل از این تحقیق به شرح زیر می‌باشند:

الف) افزایش ضریب توانی توزیع ماده مدرج تابعی موجب می‌شود که میزان دما، جابجایی و تنش کاهش یابد.

ب) عدم در نظر گرفتن خواص مادی وابسته به دما در مثال انتخابی، باعث ایجاد خطای محاسباتی قابل توجه و بخصوص در نتایج تنشی می‌شود.

ج) در پوسته انتخابی با توجه به شوک حرارتی ایجاد شده در محیط مجاور سطح داخلی، دمای سطح داخلی در ابتدا افزایش و سپس با کاهش دمای محیط مجاور داخلی و کمتر شدن دمای آن از دمای سطح داخلی، مسیر انتقال حرارت برعکس شده و دمای سطح داخلی شروع به کاهش می‌نماید.

۵- مراجع

[1] Yang J, Shen HS (2003) Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. Compos Part B-Eng 34: 103-115.

[2] Shariati M, Mahdizadeh Rokhi M (2012) Study of dynamic fracture of functionally graded materials under thermo-mechanical shocks. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 1(3): 1-16. (in Persian)

[3] Shao ZS, Wang TJ (2006) Three-dimensional solutions for the stress fields in functionally graded cylindrical panel with finite length and subjected to thermal/mechanical loads. Int J Solids Struct 43: 3856-3874.

[4] Bahtui A, Eslami MR (2007) Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells. Mech Res Commun 34: 1-18.

[5] Ootao Y, Tanigawa Y, (2009) Transient thermoelastic problem of a functionally graded hollow cylinder due to asymmetrical surface heating. J Therm Stresses 32: 1217-1234.

[6] Peng X-L, Li X-F (2010) Transient response of temperature and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder. J Therm Stresses 33: 485-500.

[7] Malekzadeh P, Heydarpour Y, Golbahar Haghighi MR, Vaghefi M (2012) Transient response of rotating laminated functionally graded cylindrical shells in thermal environment. Int J Press Vessels 98: 43-56.

[8] Zhang J-H, Li G-Z, Li Sh-R (2015) Analysis of transient displacements for a ceramic–metal functionally graded cylindrical shell under dynamic thermal loading. Ceram Int 41(9): 12378-12385.

[9] Ansari R, Torabi J, (2015) Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading. Modares Mechanical Engineering 15(3): 271-282. (in Persian)

[10] Duc ND, Tuan ND, Tran P, Dao NT, Dat NT (2015) Nonlinear dynamic analysis of Sigmoid functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundations using the third order shear

deformation theory in thermal environments. Int J Mech Sci 101-102: 338-348.

[11] Duc ND (2016) Nonlinear thermal dynamic analysis of eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations using the Reddy's third-order shear deformation shell theory. Eur J Mech A Solids 58: 10-30.

[12] Li X, Du CC, Li YH (2018) Parametric resonance of a FG cylindrical thin shell with periodic rotating angular speeds in thermal environment. Appl Math Modell 59: 393-409.

[13] Akbari A, Bagri A, Natarajan S (2018) Dynamic response of viscoelastic functionally graded hollow cylinder subjected to thermo-mechanical loads. Compos Struct 201: 414-422.

[14] Hadi A, Shakhesi S, Ovesy HR, Fazilati J (2018) Thermal stability of FGM cylindrical shells on Pasternak elastic foundation under axial load. J Sci Technol Compos 5(2) 200-207. (in Persian)

[15] Habibi N, Samawati S, Ahmadi O (2019) Transient thermal stresses analysis in a FPGM cylinder. Mech Adv Compos Struct doi: 10.22075/macs.2019.14988.1147

[16] Reddy JN (1987) A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. Comm Appl Numer Methods 3: 173-180.

[17] Shu Ch (2000) Differential Quadrature and Its Application in Engineering. 1st edn. Springer, Verlag, London, UK.

[18] Sadowski T, Nakonieczny K (2008) Thermal shock response of FGM cylindrical plates with various grading patterns. Comput Mater Sci 43(1): 171-178.

[19] Setoodeh AR, Tahani M, Selahi E (2011) Hybrid layerwise-differential quadrature transient dynamic analysis of functionally graded axisymmetric cylindrical shells subjected to dynamic pressure. Compos Struct 93: 2663-2670.

[20] Tahani M, Setoodeh AR, Selahi E (2013) Three-dimensional transient analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to asymmetric dynamic pressure. Sci Eng Compos Mater 20(1): 75-85.

[21] Shariyat M, Lavasani SMH, Khaghani M (2010) Nonlinear transient thermal stress and elastic wave propagation analyses of thick temperature-dependent FGM cylinders, using a second-order point-collocation method. Appl Math Modell 34: 898-918.