



## تغییر شکل پلاستیک ورق‌های آلومینیومی با روکش پلیمری تحت بارگذاری انفجار مخلوط گازها: بخش دوم: مدل‌سازی تحلیلی و تجربی

توحید میرزابابایی<sup>۱</sup> مستوفی<sup>۱</sup> و هاشم بابایی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> مدرس، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۹/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۰۷

### چکیده

در این تحقیق، ابتدا یک سری آزمایش برای ارزیابی تغییر شکل پلاستیک ورق‌های مستطیلی آلومینیومی تقویت شده با پوشش پلیمری تحت بارگذاری انفجار مخلوط گاز انجام شد. برای بررسی اثر ضخامت لایه جلویی و عقبی بر مقاومت در برابر تغییر شکل ساختارهای دولایه فلز-پلیمری، چهار نوع لایه‌بندی مختلف انتخاب شدند. در مدل‌سازی تحلیلی، مدلی برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختار دو لایه فلز-پلیمری ارائه شد؛ همچنین، در مدل‌سازی تجربی، با بی‌بعد سازی معادلات حاکم بر ورق بر مبنای تحلیل ابعادی، تعدادی عدد بی‌بعد ارائه شد که هر عدد بی‌بعد بیان‌گر هندسه ساختار، نسبت بار دینامیکی اعمالی به مقاومت ماده و توانایی مقاومت دینامیکی ماده در برابر تغییر شکل پلاستیک است. با تبدیل داده‌های تجربی به فرم اعداد بی‌بعد و استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد، توابعی ریاضی برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختار ارائه شد. سپس، مدل‌های تجربی ارائه شده با نتایج تجربی صورت گرفته صحت‌گذاری شد. نتایج بدست آمده نشان‌دهنده توافق بسیار خوب نتایج آزمایش‌ها و پیش‌بینی مدل‌سازی از لحاظ بیشترین خیز دائمی است.

**کلمات کلیدی:** تغییر شکل پلاستیک؛ روکش پلیمری؛ شکل‌دهی با انفجار مخلوط گاز؛ مدل‌سازی تجربی؛ ورق آلومینیومی.

## Plastic Deformation of Polymeric-Coated Aluminum Plates Subjected to Gas Mixture Detonation Loading: Part II: Analytical and Empirical Modelling

T. Mirzababaei Mostofi<sup>1</sup>, H. Babaei<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Lecturer, Faculty of Mechanical Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran.

<sup>2</sup> Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran.

### Abstract

In this research, a series of experiments were first performed to evaluate the plastic deformation of rectangular aluminum plates reinforced by polymeric coating under gas mixture detonation loading. Four different types of thickness configurations were chosen to investigate the effect of front and back layer thicknesses on the deformation resistance of metal-elastomer bilayer structures. In the analytical modelling, a model for predicting the maximum permanent deflection of metal-elastomer bilayer structure was presented. Also, in the empirical modelling, a number of new dimensionless numbers were presented by nondimensionalizing the governing equations of plate based on dimensional analysis in which each dimensionless number represents the geometry of the structure, the ratio of applied dynamic loads to the resistance ability of material, and the dynamic resistance ability of material against plastic deformation. Mathematical functions were presented to predict the maximum permanent deflection of structures by converting the experimental data into the form of dimensionless numbers as well as using singular value decomposition method. Subsequently, the presented empirical models were verified by the conducted experimental results. The results indicated an encouraging agreement between the experimental results and empirical predictions in terms of the maximum permanent deflection.

**Keywords:** Plastic Deformation; Polymeric Coating; Gas Mixture Detonation Forming; Empirical Modelling; Aluminum Plate.

## ۱- مقدمه

یکی از موارد بسیار مهم در فرآیند شکل‌دهی فلزات، تأمین منابع انرژی با هزینه پایین است. به‌طور کلی روش‌های شکل‌دهی به دو دسته روش شکل‌دهی با نرخ انرژی بالا و پایین تقسیم می‌شوند [۱]. جدیدترین تحقیقات انجام شده در زمینه شکل‌دهی، سرعت پایین مربوط به استفاده از سامانه چکش پرتابه‌ای برای شکل‌دهی ورق‌های دایروی و مستطیلی تحت بارگذاری هیدرودینامیکی و شکل‌دهی پودرهای فلزی و سرامیکی تحت بارگذاری ضربه‌ای است [۲-۸]. روش‌های شکل‌دهی با سرعت بالا شامل، شکل‌دهی با خرج انفجاری [۹-۱۵]، انفجار مخلوط گازها [۱۶-۳۱]، الکترومغناطیسی [۳۲] و الکتروهیدرولیکی [۳۳] است.

در دهه اخیر، یکی از روش‌های نوین شکل‌دهی انفجاری، شکل‌دهی با استفاده از انفجار مخلوط گازها است که در تحقیق حاضر، از انفجار مخلوط گازهای اکسیژن و استیلن استفاده می‌شود. از مزیت‌های روش پیشنهادی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: (۱) به حداقل رساندن خطر انفجار (۲) قابلیت انجام در کارگاه (۳) قابل کنترل بودن پیش‌فشارهای قبل از انفجار، (۴) خودکار کردن مراحل آزمایش [۱۶-۱۸]. با توجه به نوین بودن این، تحقیقات بسیار اندکی در زمینه شکل‌دهی ورق با استفاده از این روش ارائه شده که در ادامه به چندین مرجع مهم در این مورد اشاره می‌شود که اساس کار تجربی این تحقیق است.

در سال ۱۹۹۹، هوندا و سوزوکی مقاله‌ای با عنوان شکل‌دهی فلزات با انفجار مخلوط گازهای اکسیژن و متان ارائه دادند. آن‌ها توانستند در نهایت ورق با قطر ۱ متر را شکل دهند [۱۶]. در طی سال‌های ۲۰۰۴ تا ۲۰۰۶، یاشار و همکارانش به بررسی تجربی، عددی و بهینه‌سازی پارامترهای موجود در شکل‌دهی ساختارهای فنجانی با استفاده از روش انفجار مخلوط گازهای اکسیژن و استیلن پرداختند [۱۷] و [۱۸]. در سال ۲۰۰۷، وبر و همکارانش از کاربرد مستقیم موج‌های حاصل از انفجار گازها، به‌عنوان منبع اصلی انرژی برای انبساط لوله‌ها استفاده کردند [۱۹]. در سال ۲۰۰۹ و ۲۰۱۳، خالقی میبیدی مقاله‌ای تحت عنوان فرآیند شکل‌دهی فلزات به کمک انفجار مخلوط گاز هیدروژن و اکسیژن ارائه کردند که در آن انرژی حاصل از انفجار ماده منفجره، عامل شکل‌دهی ورق‌های فلزی بود [۲۰ و ۲۱]. در طی سال‌های

۲۰۱۵ و ۲۰۱۶، بابایی و همکارانش مطالعات خود را روی شکل‌دهی ورق‌های دایره‌ای با استفاده از روش انفجار مخلوط گازها در آزمایشگاه ضربه و انفجار دانشگاه گیلان متمرکز کردند. در مطالعات انجام‌گرفته، از دو گاز اکسیژن و استیلن برای تولید بار دفعی و شکل‌دهی نمونه به دو طریق با قالب مخروطی و بدون قالب، به‌صورت تجربی پرداخته شد [۲۲-۲۴]. در سال ۲۰۱۷، آن‌ها در ادامه تحقیقات خود، به معرفی روش شکل‌دهی انفجار مخلوط گازها به‌عنوان یک فرآیند جدید برای تغییر شکل پودرهای فلزی پرداختند [۲۵]. در سال‌های ۲۰۱۶ و ۲۰۱۷، پاتیل و همکارانش به بررسی تجربی و عددی تغییر شکل پلاستیک ساختارهای فنجانی فولادی با استفاده از روش انفجار مخلوط گازهای اکسیژن و هیدروژن پرداختند. در بخش شبیه‌سازی عددی، شبیه‌سازی‌ها روی مدل‌های سه‌بعدی محاسباتی با استفاده از مدل ماده جانسون-کوک و تحلیل دینامیکی صریح انجام شد [۲۶-۲۸]. در طی سال‌های ۲۰۱۷ و ۲۰۱۹، میرزابابی مستوفی و همکارانش، مطالعات خود را روی شکل‌دهی ورق‌های مستطیلی تک‌لایه [۲۹ و ۳۰] و دولایه [۳۱] با استفاده از روش انفجار مخلوط گازها ادامه دادند.

در بخش مدل‌سازی تجربی بر مبنای اعداد بدون بعد، موثرترین تحقیقات انجام‌گرفته در ادبیات تحقیق در ادامه به تفصیل شرح داده می‌شود [۳۴-۴۲]. در سال ۲۰۰۰ لی و جونز، یک تحلیل بی‌بعد کلی برای پیش‌بینی رفتارهای دینامیکی و شکست ساختارهای مختلف ارائه کردند. تحلیل مذکور، اثرات نرخ کرنش، کار سختی، تغییرات دما، شکل پالس بارگذاری و جرم ضربه زننده را شامل می‌شد؛ همچنین درباره شکست برشی به‌عنوان یک عبارت بی‌بعد در تحلیل یاد شد [۳۴]. در سال ۲۰۰۶، پارک و چو یک عدد بی‌بعد مشابه عدد بی‌بعد نوریچ برای ورق‌های تک‌لایه تحت بار انفجاری یکنواخت ارائه کردند که در آن نسبت طول به عرض ورق نیز اضافه شده بود [۳۵]. در سال ۲۰۱۵، یائو و همکارانش با استفاده از تحلیل ابعادی و معادلات پایه‌ای حاکم بر ورق توانستند، معادله بی‌بعد حاکم بر ورق چهارگوش مربعی با شرایط مرزی کاملاً گیردار را استخراج کنند که شامل، سه پارامتر مهم هندسه ساختار، نسبت بار به مقاومت ماده و مقاومت ماده در برابر بار دینامیکی می‌شد. معادله ارائه شده جهت پیش‌بینی پاسخ دینامیکی ورق‌های

که در آن  $x$  و  $y$  راستاهای طولی و عرضی مختصات دکارتی هستند و مبدأ مختصات در مرکز ورق مستطیلی به طول  $2a$  و عرض  $2b$  قرار دارد. در این معادلات،  $w(x, y)$  تابع جابجایی یا گستره تغییر شکل ورق در راستای  $z$  و  $W_0$  مقدار جابجایی یا بیشترین خیز دائمی ورق هستند. برای مسائلی که در آن تغییر شکل پلاستیک غالب است، مقادیر جابجایی در راستاهای طولی و عرضی نسبت به راستای عمود بر ورق بسیار کوچک است و می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. مطابق با این معادله، مقادیر کرنش‌های خمشی و غشایی لایه‌های جلویی و عقبی با صرف‌نظر کردن از جابجایی‌های طولی، از معادلات ۲ تا ۷ به دست می‌آید [۳۱].

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx}^b)_b &= (\varepsilon_{xx}^b)_f = -Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{Z\omega^2 W_0}{a^2} J_0 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \cdot \left( J_0 \left( \frac{\omega x}{a} \right) - \frac{a}{\omega x} J_1 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{yy}^b)_b &= (\varepsilon_{yy}^b)_f = -Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{Z\omega^2 W_0}{b^2} J_0 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot \left( J_0 \left( \frac{\omega y}{b} \right) - \frac{b}{\omega y} J_1 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_{xy}^b)_b &= (\gamma_{xy}^b)_f = 2Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ &= \frac{2Z\omega^2 W_0}{ab} J_1 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot J_1 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx}^m)_b &= (\varepsilon_{xx}^m)_f = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{W_0 \omega}{a} \right) \cdot J_1 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot J_0 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{yy}^m)_b &= (\varepsilon_{yy}^m)_f = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{W_0 \omega}{b} \right) \cdot J_1 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \cdot J_0 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\gamma_{xy}^b)_b &= (\gamma_{xy}^b)_f = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\omega^2 W_0^2}{ab} J_1 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot J_1 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \cdot J_0 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot J_0 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

مربعی تحت بار انفجاری محلی با استفاده از خرج پلاستیکی بکار گرفته شد. از مهم‌ترین مشکلات عدد بی‌بعد ارائه شده، می‌توان به عدم وجود پارامترهای چگالی ماده، نرخ کرنش، ایمپالس و فاصله استقرار از خرج اشاره کرد [۳۶].

با توجه به ادبیات تحقیق، ارائه یک مدل تجربی و تحلیلی در کنار مطالعات آزمایشگاهی روی ساختارهای ساختارهای آلومینیومی تقویت‌شده با روکش پلیمری به‌منظور مطالعه پارامترهای مختلف و بررسی اثرگذاری آن‌ها می‌تواند از اهمیت بالایی برخوردار باشد. با توجه به توضیحات ارائه‌شده، مهم‌ترین نوآوری‌های تحقیق حاضر، به شرح زیر است: (۱) ارائه یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی لایه‌های جلویی و عقبی در ساختارهای دولایه مستطیلی تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها (۲) ارائه اعداد بی‌بعد جدید جهت تحلیل ابعادی پاسخ پلاستیک ورق‌های چهارگوش تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها و تعمیم آن‌ها برای ساختارهای دولایه.

## ۲- مدل سازی تحلیلی

در این بخش، به‌منظور ارائه یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی لایه‌های جلویی و عقبی در ساختارهای مستطیلی دولایه تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها، روند کلی ارائه شده برای مدل‌سازی تحلیلی تغییر شکل پلاستیک ورق‌های مستطیلی تک‌لایه تحت هر دو بارگذاری دفعی یکنواخت [۱۴] و دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها توسعه داده می‌شود [۲۹ و ۳۰].

با توجه به نتایج تجربی به‌دست‌آمده در ادبیات تحقیق این نتیجه حاصل می‌شود که بیشترین خیز دائمی و گستره تغییر شکل لایه‌های جلویی و عقبی برای حالتی که لایه‌ها از مواد غیر هم‌جنس ساخته شده و هیچ فاصله‌ای بین آن‌ها در نظر گرفته نشده، تقریباً یکسان است؛ لذا برای تشریح گستره تغییر شکل لایه‌های جلویی و عقبی ساختارهای دولایه فلز-پلیمری از تابع بسل نوع اول از درجه صفر برای بیان گستره تغییر شکل استفاده می‌شود که در معادله ۱ ارائه شده است و تمامی شرایط مرزی مربوط به مسئله را ارضا می‌کند. لازم به توضیح است که محدود استفاده از این تابع تا شروع پارگی در ورق است.

$$w(x, y) = W_0 \cdot J_0 \left( \frac{\omega x}{a} \right) \cdot J_0 \left( \frac{\omega y}{b} \right) \quad (1)$$

$$U^b = W_0 \eta (\sigma_{d,b} H_b^2 + \sigma_{d,f} H_f^2) \quad (12)$$

$$U^m = W_0^2 \kappa (\sigma_{d,b} H_b + \sigma_{d,f} H_f) \quad (13)$$

که در آن

$$\eta = \left( \frac{9\pi\omega J_1(\omega)}{24} \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right) \left( 2J_1\left(\frac{\omega}{2}\right) - J_1(\omega) \right) \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

$$\kappa = \frac{\omega^4}{30} \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (15)$$

برای یک ساختار دولایه مستطیلی تحت بار دینامیکی با توزیع یکنواخت، مقدار نرخ کرنش متوسط برای لایه‌های عقبی و جلویی به ترتیب از معادلات ۱۶ و ۱۷ استخراج می‌شود [۱۳].

$$\dot{\epsilon}_b = \frac{W_0}{3\sqrt{2}ab} \left( \frac{I}{m_b} \right) = \frac{W_0 I}{12\sqrt{2}\rho_b a^2 b^2 H_b} \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}_f = \frac{W_0}{3\sqrt{2}ab} \left( \frac{I}{m_f} \right) = \frac{W_0 I}{12\sqrt{2}\rho_f a^2 b^2 H_f} \quad (17)$$

در معادلات بالا،  $\rho$  و  $m$  به ترتیب چگالی ماده و جرم ورق هستند. با توجه به معادلات ارائه شده برای نرخ کرنش متوسط لایه‌های جلویی و عقبی، رابطه مربوط به انرژی کرنشی نهایی به صورت معادله ۱۸ ساده می‌شود. لازم به توضیح است که در معادله ۱۸، از رابطه ساختاری کوپر-سیموندز برای افزودن اثر حساسیت ماده به نرخ کرنش استفاده شده است.

$$U_T = W_0 H_b (H_b \eta + W_0 \kappa) \sigma_{0,b} \left( 1 + \xi_b \left( \frac{W_0}{H_b} \right)^{\frac{1}{q_b}} \right) + W_0 H_f (H_f \eta + W_0 \kappa) \sigma_{0,f} \left( 1 + \xi_f \left( \frac{W_0}{H_f} \right)^{\frac{1}{q_f}} \right) \quad (18)$$

که در آن

$$\xi_b = \left( \frac{I}{12\sqrt{2}\rho_b a^2 b^2 D_b} \right)^{\frac{1}{q_b}} \quad (19)$$

$$\xi_f = \left( \frac{I}{12\sqrt{2}\rho_f a^2 b^2 D_f} \right)^{\frac{1}{q_f}} \quad (20)$$

برای یک ساختار دولایه مستطیلی تحت بار دینامیکی با توزیع یکنواخت، انرژی جنبشی اولیه منتقل شده به سطح لایه جلویی به صورت رابطه ۲۱ قابل بیان است [۱۴ و ۱۵].

در این معادلات، زیرنویس‌های  $b$  و  $f$ ، بیانگر لایه‌های عقبی و جلویی و بالانویس‌های  $b$  و  $m$ ، نشان‌دهنده انرژی کرنشی خمشی و غشایی است. در معادلات زیر،  $\epsilon_{yy}^b$ ،  $\epsilon_{xx}^b$  و  $\gamma_{xy}^b$  توزیع کرنش‌های خمشی و  $\epsilon_{yy}^m$ ،  $\epsilon_{xx}^m$  و  $\gamma_{xy}^m$  توزیع کرنش‌های غشایی در راستاهای مختلف هستند.

لازم به توضیح است که در حین بارگذاری دفعی ورق، تغییر شکل‌های ناشی از تنش‌های عمودی نسبت به تنش برشی بسیار سریع‌تر رشد می‌کنند و تسلیم ناشی از تنش‌های عمودی و برشی در زمان‌های متفاوت اتفاق می‌افتد. با فرض ایزوتروپیک بودن رفتار مواد و استفاده از قانون سیلان، این نتیجه حاصل می‌شود که  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_d$ . از سویی دیگر، استفاده از معیار تسلیم ون مایرز منجر می‌شود به  $\tau_{xy} = \sigma_d / \sqrt{3}$  [۴۳، ۴۴]. با توجه به توضیحات ارائه شده، روابط مربوط به محاسبه انرژی‌های مذکور در هر لایه در معادلات ۸ تا ۱۱ ارائه شده است [۳۱].

$$U_b^b = 8\sigma_{d,b} \int_0^{\frac{H_b}{2}} \int_0^b \int_0^a \left( (\epsilon_{xx}^b)_b + (\epsilon_{yy}^b)_b + \frac{2}{\sqrt{3}} (\gamma_{xy}^b)_b \right) dx dy dz \quad (8)$$

$$U_f^b = 8\sigma_{d,f} \int_0^{\frac{H_f}{2}} \int_0^b \int_0^a \left( (\epsilon_{xx}^b)_f + (\epsilon_{yy}^b)_f + \frac{2}{\sqrt{3}} (\gamma_{xy}^b)_f \right) dx dy dz \quad (9)$$

$$U_b^m = 8\sigma_{d,b} \int_0^{\frac{H_b}{2}} \int_0^b \int_0^a \left( (\epsilon_{xx}^m)_b + (\epsilon_{yy}^m)_b + \frac{2}{\sqrt{3}} (\gamma_{xy}^m)_b \right) dx dy dz \quad (10)$$

$$U_f^m = 8\sigma_{d,f} \int_0^{\frac{H_f}{2}} \int_0^b \int_0^a \left( (\epsilon_{xx}^m)_f + (\epsilon_{yy}^m)_f + \frac{2}{\sqrt{3}} (\gamma_{xy}^m)_f \right) dx dy dz \quad (11)$$

با جایگذاری روابط مربوط به کرنش‌های خمشی و غشایی در معادلات انرژی کرنشی و انتگرال‌گیری سه‌گانه از انرژی‌های کرنشی خمشی و غشایی در چهار ناحیه مختلف با  $x=0$  تا  $x=a/2$ ،  $y=0$  تا  $y=b/2$  و  $x=a/2$  تا  $x=a$  و  $y=b/2$  تا  $y=b$  و  $x=a/2$  تا  $x=a$  و  $y=b/2$  تا  $y=b$ ، انرژی‌های کرنشی خمشی و غشایی به صورت معادلات ۱۲ و ۱۳ به دست می‌آیند [۳۱].

با حل معادله ۲۷، مقدار بیشترین خیز دائمی لایه عقبی به صورت معادله ۲۸ به دست می‌آید:

$$\frac{W_0}{H_b} = \frac{1}{2\kappa\omega} \left( -\eta\zeta + \sqrt{\eta^2\zeta^2 + \frac{2\lambda_b\beta\kappa\omega}{\left(1 + \frac{1}{\bar{\rho}\bar{H}}\right)(1 + \xi_b)}} \right) \quad (28)$$

که در آن

$$\omega = 1 + \frac{1}{\bar{H}\bar{\sigma}_0\bar{\xi}} \quad (29)$$

$$\zeta = 1 + \frac{1}{\bar{H}^2\bar{\sigma}_0\bar{\xi}} \quad (30)$$

لازم به توضیح است که معادلات ۲۴ و ۲۸ از تئوری تغییر شکل پلاستیک با رفتار صلب-پلاستیک ماده حاصل شده و در آن‌ها اثر سخت‌شوندگی کرنشی در نظر گرفته نشده است.

### ۳- ارائه اعداد بی‌بعد

با مرور مطالعات و تحقیقات انجام شده روی تحلیل ابعادی رفتار پلاستیک-دینامیکی و شکست سازه‌های متفاوت اعم از تیر، ورق و پوسته‌ها تحت بارگذاری دفعی [۳۴-۴۲] این نتیجه به دست آمد که روش تحلیل ابعادی و به تبع آن استخراج روابط تجربی بر اساس اعداد بی‌بعد پیشنهادی، دارای مزیت‌های مانند سازمان‌دهی کارهای تجربی و دوری از انجام آزمایش‌های غیرضروری است؛ لذا می‌توان از این روش به‌عنوان یک روش جایگزین مؤثر برای به دست آوردن یک رابطه بین پارامترهای ورودی و خروجی مسئله در هر فرآیندی نام برد.

با توجه به تحلیل نیرویی نشان داده شده در شکل ۱ و ۲ برای یک المان از ورق، معادلات حاکم بر ورق تحت بار دینامیکی به صورت رابطه ۳۱ ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \quad (31)$$

با تعریف پارامترهای بی‌بعد  $Y = y/L$ ،  $X = x/L$  بعد  $T = C_s t/H$ ،  $W = w/H$ ،  $m_x = M_x/M_0$ ،  $m_{xy} = M_{xy}/M_0$ ،  $m_y = M_y/M_0$ ،  $n_x = N_x/N_0$ ،  $n_{xy} = N_{xy}/N_0$ ،  $n_y = N_y/N_0$  معادله حاکم بر ورق مربعی به فرم بی‌بعد تبدیل می‌شود (معادله ۳۳).

$$E_k = \frac{I^2}{2(m_b + m_f)} = \frac{I^2}{8ab(\rho_b H_b + \rho_f H_f)} \quad (21)$$

حال با برابر قرار دادن انرژی جنبشی اولیه منتقل شده به سطح ورق با کار پلاستیک انجام شده در طول فرآیند و همچنین صرف‌نظر از نسبت  $1/q$  برای هر دولایه جلویی و عقبی نتیجه می‌شود:

$$\frac{I^2}{8ab(\rho_b H_b + \rho_f H_f)} = W_0 \sigma_{0,f} (1 + \xi_f) \cdot \left[ \eta \left( H_b^2 \frac{\sigma_{0,b}(1 + \xi_b)}{\sigma_{0,f}(1 + \xi_f)} + H_f^2 \right) + W_0 \kappa \left( H_b \frac{\sigma_{0,b}(1 + \xi_b)}{\sigma_{0,f}(1 + \xi_f)} + H_f \right) \right] \quad (22)$$

با تعریف پارامترهای بی‌بعد  $\bar{H} = \frac{H_b}{H_f}$ ،  $\bar{\rho} = \frac{\rho_b}{\rho_f}$

$$\lambda_f = \frac{I^2}{4b^2 \sigma_{0,f} \rho_f H_f^4} \quad \text{و} \quad \bar{\xi} = \frac{(1 + \xi_b)}{(1 + \xi_f)} \quad , \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_{0,b}}{\sigma_{0,f}}$$

معادله ۲۲ به صورت معادله ۲۳ بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\lambda_f \beta}{2(1 + \bar{\rho}\bar{H})(1 + \bar{\xi}_f)} = \kappa(1 + \bar{H}\bar{\sigma}_0\bar{\xi}) \frac{W_0^2}{H_f^2} + \eta(1 + \bar{H}^2\bar{\sigma}_0\bar{\xi}) \frac{W_0}{H_f} \quad (23)$$

با حل معادله ۲۳، مقدار بیشترین خیز دائمی لایه جلویی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{W_0}{H_f} = \frac{1}{2\kappa\omega} \left( -\eta\zeta + \sqrt{\eta^2\zeta^2 + \frac{2\lambda_f\beta\kappa\omega}{\left(1 + \bar{\rho}\bar{H}\right)(1 + \bar{\xi}_f)}} \right) \quad (24)$$

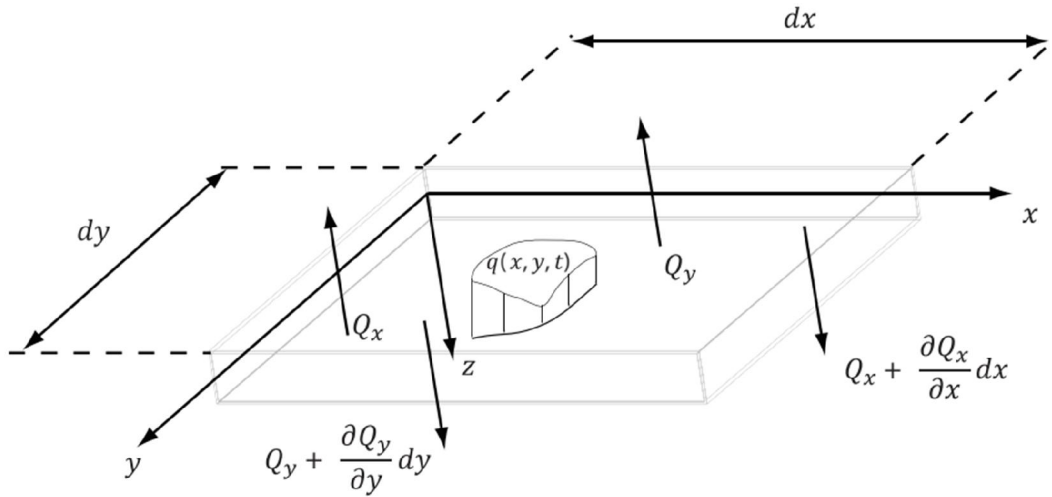
که در آن

$$\omega = 1 + \bar{H}\bar{\sigma}_0\bar{\xi} \quad (25)$$

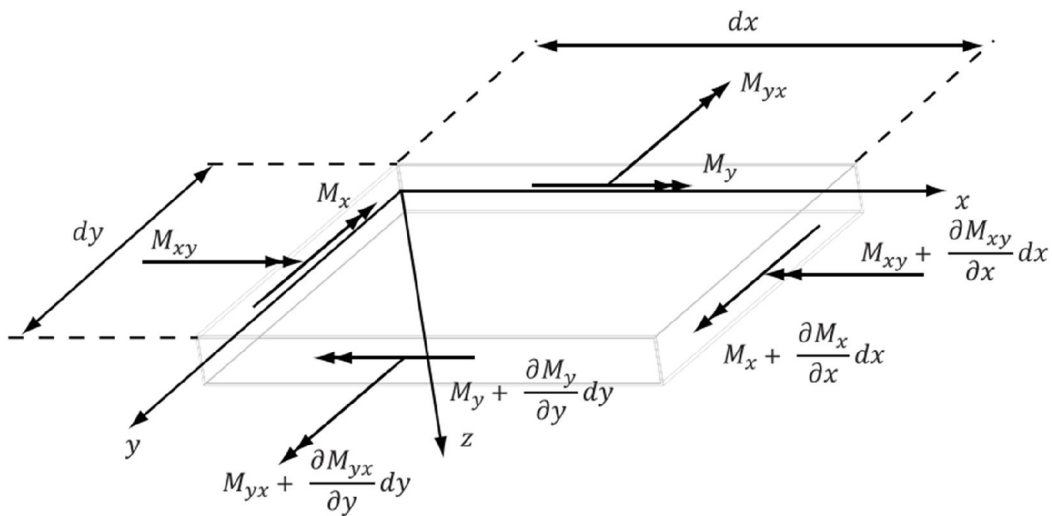
$$\zeta = 1 + \bar{H}^2\bar{\sigma}_0\bar{\xi} \quad (26)$$

به‌طور مشابه، برای لایه عقبی، معادله ۲۳ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\lambda_b \beta}{2\left(1 + \frac{1}{\bar{\rho}\bar{H}}\right)(1 + \xi_b)} = \kappa \left( 1 + \frac{1}{\bar{H}\bar{\sigma}_0\bar{\xi}} \right) \frac{W_0^2}{H_b^2} + \eta \left( 1 + \frac{1}{\bar{H}^2\bar{\sigma}_0\bar{\xi}} \right) \frac{W_0}{H_b} \quad (27)$$



(الف)

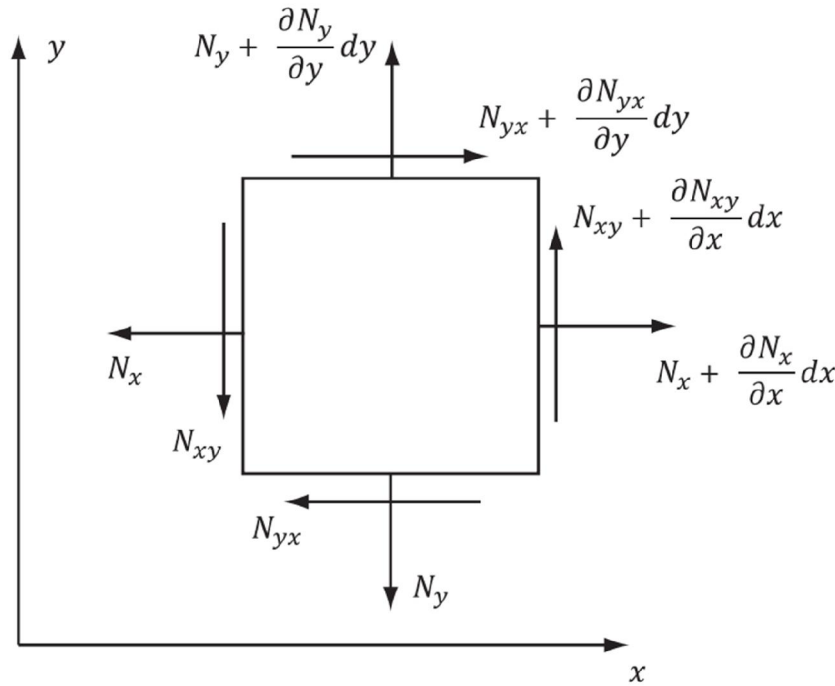


(ب)

شکل ۱- دیاگرام آزاد در یک المان از ورق (الف) نیروهای برشی و (ب) گشتاورهای خمشی

در تعاریف بالا،  $L$  نصف طول ورق مربعی،  $M_0$  گشتار خمشی کاملاً پلاستیک،  $N_0$  نیروی غشایی کاملاً پلاستیک،  $C_s$  سرعت صوت در محیط،  $X$  و  $Y$  مختصات بی‌بعد،  $T$  زمان بی‌بعد و  $W$  خیز بی‌بعد هستند؛ همچنین،  $m_x$ ،  $m_y$  و  $m_{xy}$ ، گشتاورهای خمشی بی‌بعد و  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_{xy}$ ، نیروهای غشایی بی‌بعد هستند. جهت افزودن اثر حساسیت ماده به نرخ کرنش، رابطه ۳۳ به صورت معادله ۳۴ تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial Y^2} \\ & + 4 \left( n_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + n_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\ & = 4 \left( \frac{L}{H} \right)^2 \left( \frac{\rho C_s^2}{\sigma_0} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - \frac{P}{\sigma_0} \right) \end{aligned} \quad (33)$$



شکل ۲- دیاگرام آزاد نیروهای غشایی در یک المان از ورق

$$\xi = \left( \frac{I}{12\sqrt{2}\rho L^2 B^2 D} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (36)$$

با جایگذاری معادلات ۳۵ و ۳۶ در معادله ۳۴، تحلیل ابعادی برای معادله بی‌بعد حاکم بر ورق منجر می‌شود به:

$$\frac{W_0}{H} = f \left( \frac{L}{H}, \frac{B}{H}, \frac{P}{\sigma_0}, \frac{1}{\xi} \right) \quad (37)$$

لازم به توضیح است که نسبت بی‌بعد  $B/H$  برای در نظر گرفتن ابعاد ورق در هر دو جهت طولی و عرضی به تحلیل اضافه شده است. در نهایت، رابطه بیشترین خیز دائمی ورق به ضخامت آن برای ورق‌های چهارگوش تحت بارگذاری دفعی یکنواخت برابر است با:

$$\left( \frac{W_0}{H} \right)_{\text{uniform}} = C_0 \cdot \psi_{q,\text{uniform}} \quad (38)$$

که در آن

$$\psi_{q,\text{uniform}} = \left( \frac{L}{H} \right)^{C_1} \cdot \left( \frac{B}{H} \right)^{C_2} \cdot \left( \frac{P}{\sigma_0} \right)^{C_3} \cdot \left( \frac{1}{\xi} \right)^{C_4} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial Y^2} \\ & + 4 \left( n_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + n_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\ & = 4 \left( \frac{L}{H} \right)^2 \left( \frac{\rho C_s^2}{\sigma_d} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - \frac{P}{\sigma_d} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

همان‌طور که از معادله ۳۴ برمی‌آید، سه عبارت در آن وجود دارد: هندسه ساختار  $L/H$ ، توانایی مقاومت دینامیکی ماده در برابر تغییر شکل پلاستیک  $1/\sigma_d$  و نسبت بار دینامیکی به مقاومت ماده  $P/\sigma_d$  که فشار دینامیکی متناسب است با  $\rho V_0^2$ . اکنون با به‌کارگیری معادله ساختاری کوپر-سیموندز ( $q$  و  $D$  ثابت‌های ماده هستند) و استفاده از تقریب جونز [۱۳]، برای محاسبه مقدار نرخ کرنش متوسط  $\dot{\epsilon}_m$ ، عدد بی‌بعد اثر نرخ کرنش  $\xi$  به صورت معادله ۳۶ تعریف می‌شود.

$$\sigma_d = \sigma_0 \left( 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}_m}{D} \right)^{\frac{1}{q}} \right) = \sigma_0 \left( 1 + \xi \left( \frac{W_0}{H} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \quad (35)$$

$$\psi_{q,GDF}^{double} = \left(\frac{L}{H_b}\right)^{c_1} \cdot \left(\frac{B}{H_f}\right)^{c_2} \cdot \left(\frac{P_{O_2} P_{C_2H_2}}{\sigma_{0,b} \sigma_{0,f}}\right)^{c_3} \cdot \left(\frac{1}{\xi_b}\right)^{c_4} \cdot \left(\frac{1}{\xi_f}\right)^{c_5} \quad (44)$$

در مطالعات تحلیلی و تجربی پیشین در مورد تغییر شکل پلاستیک یک سازه تحت بارگذاری دفعی، میزان بار اعمال شده  $I$  یا سرعت اولیه بار دفعی  $V_0$ ، معمولاً به‌عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شدند. از این‌رو، عدد بدون بعد ارائه شده در رابطه ۴۴ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{W_0}{H_f} = c_0 \cdot \psi_{q,D}^{double} \quad (45)$$

$$\psi_{q,GDF}^{double} = \left(\frac{L}{H_b}\right)^{c_1} \cdot \left(\frac{B}{H_f}\right)^{c_2} \cdot \left(\frac{\rho V_{0,b}^2}{\sigma_{0,b}}\right)^{c_3} \cdot \left(\frac{\rho V_{0,f}^2}{\sigma_{0,f}}\right)^{c_4} \cdot \left(\frac{1}{\xi_b}\right)^{c_5} \cdot \left(\frac{1}{\xi_f}\right)^{c_6} \quad (46)$$

در معادله،  $V_{0,b} = I/m_b$  و  $V_{0,f} = I/m_f$  هستند.

اکنون، هدف به دست آوردن ضرایب مجهول در معادلات ۴۳ تا ۴۶ برای ساختارهای ساختارهای آلومینیومی تقویت شده با روکش پلیمری تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها که این مقادیر به‌راحتی از روش تجزیه مقادیر منفرد بهینه شده قابل محاسبه هستند.

#### ۴- نحوه استخراج مدل‌های تجربی با استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد بهینه‌شده

به‌طور کلی هدف از مدل‌سازی، پیدا کردن یک تابع ریاضی  $\hat{f}$  است که به‌موجب آن می‌توان رفتار یک سیستم واقعی  $f$  را به‌صورت تقریبی پیش‌بینی و توصیف کرد. بدین منظور تلاش بر این است تا به ازای هر بردار ورودی معلوم  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$  مقدار خروجی  $\hat{f}$  به‌گونه‌ای تعیین شود که تا حد امکان به خروجی واقعی سیستم ناشناخته  $y$  نزدیک باشد ( $N$  تعداد ورودی‌های سیستم است)؛ بنابراین با داشتن  $M$  نمونه از این زوج داده‌های چند ورودی-تک خروجی می‌بایست رابطه ۴۷ به‌صورت زیر برقرار باشد [۳۷-۴۲]:

$$y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iN}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (47)$$

لازم به توضیح است که اعداد بی‌بعد  $\psi_{q,uniform}$  برای تحلیل ورق‌های چهارگوش تحت بارگذاری دفعی یکنواخت پیشنهاد شده که از معادله بی‌بعد حاکم بر ورق استخراج شده‌اند. به‌منظور افزودن اثرات فشار قبل از انفجار گازهای اکسیژن و استیلن در پاسخ دینامیکی ورق نازک چهارگوش تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها، می‌توان نسبت فشار دینامیکی اعمالی به مقاومت ماده را به‌صورت معادله ۴۰ بیان کرد تا اثر فشارهای قبل از انفجار در معادله ظاهر گردد.

$$\frac{P}{\sigma_0} \propto \frac{P_{O_2} \cdot P_{C_2H_2}}{\sigma_0^2} \quad (40)$$

با توجه به توضیحات ارائه شده رابطه بیشترین خیز دائمی ورق به ضخامت آن برای ورق‌های مستطیلی تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها برابر است با:

$$\left(\frac{W_0}{H}\right)_{uniform} = \bar{c}_0 \cdot \psi_{q,GDF} \quad (41)$$

که در آن

$$\psi_{q,GDF} = \left(\frac{L}{H}\right)^{\bar{c}_1} \cdot \left(\frac{B}{H}\right)^{\bar{c}_2} \cdot \left(\frac{P_{O_2} P_{C_2H_2}}{\sigma_0^2}\right)^{\bar{c}_3} \cdot \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\bar{c}_4} \quad (42)$$

لازم به توضیح است که عدد بی‌بعد  $\psi_{q,GDF}$  برای تحلیل ورق‌های مستطیلی تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها پیشنهاد شده که از معادله بی‌بعد حاکم بر ورق استخراج شده است.

شایان توجه است که در تحلیل ابعادی ساختارهای مستطیلی دولایه تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها نسبت به تحلیل ابعادی ورق‌های تک‌لایه، کمیت‌های فیزیکی بیشتری وارد می‌شود. این کمیت‌ها شامل خواص مکانیکی و حساسیت ماده به نرخ کرنش برای هر دولایه عقبی و جلویی است که باید در تحلیل رفتار پلاستیک ساختارهای دولایه در نظر گرفته شود. با توجه به نکات ذکر شده و مطابق با تحلیل ابعادی مسئله، رابطه بیشترین خیز دائمی هر کدام از لایه‌های جلویی و عقبی به ضخامت آن لایه برای ساختارهای مستطیلی دولایه تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{W_0}{H_f} = \bar{c}_0 \cdot \psi_{q,GDF}^{double} \quad (43)$$

که در آن



که در آن

$$\zeta_{ij} = \ln(\pi_{ij}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad j = 1, 2, 3 \quad (56)$$

$$\zeta_{i0} = \ln(\pi_{i0}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (57)$$

دستگاه معادله فوق را که در آن  $M \gg K$  را می توان به شکل ماتریسی زیر نمایش داد:

$$A = XY \quad (58)$$

که در آن  $X, Y$  و  $A$  از روابط ۵۹، ۶۰ و ۶۱ حاصل شده است:

$$X = [\ln(C_0) \ C_1 \ C_2 \ \dots \ C_N]^T \quad (59)$$

$$Y = [\zeta_{10} \ \zeta_{20} \ \dots \ \zeta_{M0}]^T \quad (60)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1N} \\ 1 & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \dots & \zeta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \zeta_{M1} & \zeta_{M2} & \dots & \zeta_{MN} \end{bmatrix} \quad (61)$$

حل معادله ۵۸ منوط به محاسبه معکوس ماتریس غیر مربعی  $A$  است. به همین جهت برای محاسبه شبه معکوس ماتریس  $A$ ، از روش تجزیه مقادیر منفرد استفاده می شود.

در این روش، ماتریس غیرعادی  $A$  به حاصل ضرب یک ماتریس متعامد ستونی  $U \in R^{M \times K}$ ، یک ماتریس قطری  $W \in R^{K \times K}$  با عناصر مثبت یا صفر (مقادیر تکیه) و ترانهاد یک ماتریس متعامد  $V \in R^{M \times K}$  تجزیه می شود، به طوری که معادله ۶۲ برقرار است:

$$A = U W V^T \quad (62)$$

( $K$  تعداد گروه های مستقل است). هدف، انتخاب بهینه بردار ضرایب در معادله ۵۸ است که این امر مستلزم یافتن معکوس اصلاح شده ماتریس قطری  $W$  است. بدین منظور، معکوس عناصر قطر با تکیه های صفر یا نزدیک به صفر ( $\frac{1}{w_j} = 0$ ) برابر صفر قرار داده می شوند، سپس بردار ضرایب بهینه شده مطابق رابطه ۶۳ به دست می آیند.

$$X = V \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{w_j} \right) \right] U^T Y \quad (63)$$

### ۵- مطالعات تجربی و نتایج

شکل دهی آزاد ساختارهای آلومینیومی تقویت شده با روکش پلیمری تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها در یک سامانه آزمایشی انجام گرفته است که شماتیک آن در شکل ۳ نشان داده شده است. این سامانه آزمایشی شامل

اکنون به ازای هر بردار ورودی معلوم رابطه ۴۷، مقادیر خروجی  $\hat{y}_i$  را با استفاده از تابع  $f$  پیش بینی کرد:

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iN}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (48)$$

$$\hat{y}_i = \hat{f}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iN}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (49)$$

شناسایی سیستم و تعیین تابع  $f$  باید به گونه ای انجام شود که مربع اختلاف میان خروجی واقعی و پیش بینی شده حداقل باشد که در رابطه ۵۰ ارائه شده است.

$$\sum_{i=1}^M [f(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iN}) - y_i]^2 \rightarrow \min \quad (50)$$

در مدل سازی با استفاده از روش تحلیل ابعادی، پارامترهای بی بعد  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$  با استفاده از متغیرهای فیزیکی و حقیقی سیستم  $\{Y, X\} = \{y, x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$  پارامترهای بی بعد به صورت معادله ۵۱، توسط تابع  $\hat{f}$  برقرار می شود.

$$\hat{\pi}_{0i} = \hat{f}(\pi_{1i}, \pi_{2i}, \pi_{3i}, \dots, \pi_{Ni}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (51)$$

به طوری که تابع  $\hat{f}$  بر اساس رابطه ۵۲ تعیین می شود.

$$\sum_{i=1}^M [f(\pi_{1i}, \pi_{2i}, \pi_{3i}, \dots, \pi_{Ni}) - \hat{\pi}_{0i}]^2 \rightarrow \min \quad (52)$$

برای استخراج مدل، تابع  $f$  به شکل زیر در نظر گرفته می شود.

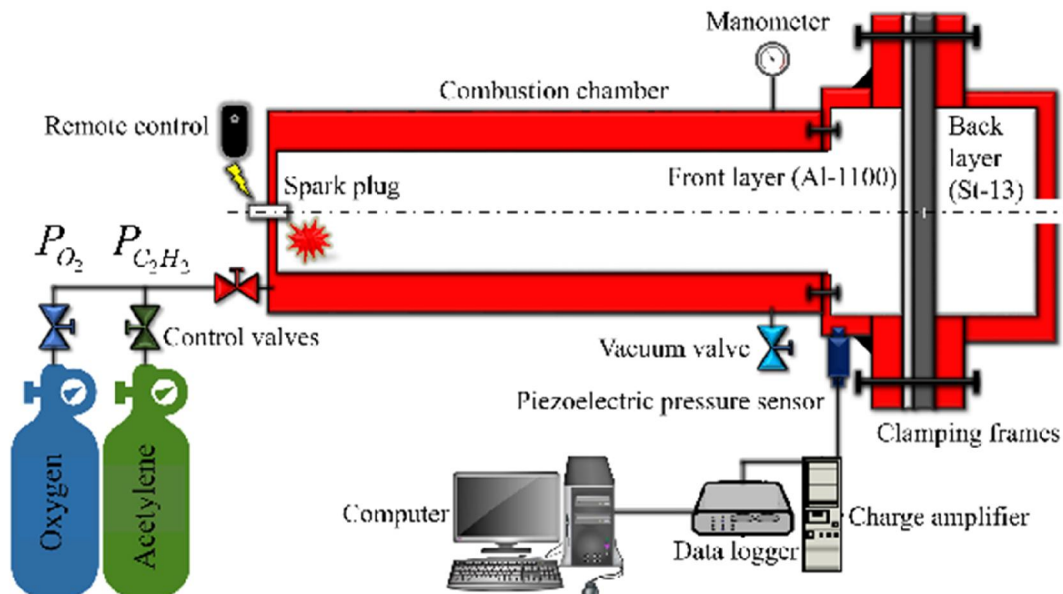
$$\pi_0 = C_0 \cdot (\pi_1)^{C_1} \cdot (\pi_2)^{C_2} \cdot (\pi_3)^{C_3} \dots \cdot (\pi_N)^{C_N} \quad (53)$$

ضرایب مجهول در معادله فوق به گونه ای تعیین می شود که قاعده کمترین مربعات خطا (معادله ۵۲) برقرار باشد. با گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین معادله ۵۳ نتیجه می شود:

$$\ln(\pi_0) = \ln(C_0) + C_1 \ln(\pi_1) + C_2 \ln(\pi_2) + \dots + C_N \ln(\pi_N) \quad (54)$$

در نتیجه لازم است که یک دستگاه معادله جبری خطی که شامل  $K = N + 1$  مجهول و  $M$  معادله است، حل شود. ( $M$  تعداد زوج داده های ورودی - خروجی است و یا به عبارتی تعداد آزمایش های تجربی است).

$$\begin{aligned} \ln(C_0) + C_1 \zeta_{11} + C_2 \zeta_{12} + \dots + C_N \zeta_{1N} &= \zeta_{10} \\ \ln(C_0) + C_1 \zeta_{21} + C_2 \zeta_{22} + \dots + C_N \zeta_{2N} &= \zeta_{20} \\ \dots & \dots \\ \ln(C_0) + C_1 \zeta_{M1} + C_2 \zeta_{M2} + \dots + C_N \zeta_{MN} &= \zeta_{M0} \end{aligned} \quad (55)$$



شکل ۳- تصویر سامانه انفجار مخلوط گازها جهت تحلیل تجربی

پلیمری ارائه شده است. شایان توجه است که تحلیل نتایج تجربی در مقاله‌ای جداگانه در همین مجله ارائه شده است.

#### ۶- صحت‌سنجی مدل تحلیلی و ارزیابی دقت آن

یکی از مزیت‌های مهم و قابل توجه روش انرژی، قابلیت تعمیم این روش برای پیش‌بینی رفتار و پاسخ ساختارهای تک و دولایه تحت بار استاتیکی یا دینامیکی است. همان‌طور که در مراجع قبلی توسط نویسندگان [۱۴، ۲۹، ۳۰] بررسی شد، در ابتدا روابط تحلیلی برای ورق نازک مستطیلی تحت بار دفعی یکنواخت و غیریکنواخت [۱۴] ارائه و در نهایت برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختارهای مستطیلی تک تحت بار دفعی یکنواخت حاصل از انفجار مخلوط گازها [۲۹] و [۳۰] تعمیم داده شد و مورد ارزیابی قرار گرفت. اکنون در این بخش، به ارزیابی دقت رابطه تحلیلی ارائه شده در معادله ۲۴ در پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختارهای دولایه فلز-پلیمری مستطیلی شکل تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها پرداخته می‌شود. شایان توجه است که از نتایج تجربی این تحقیق که پیش‌تر در بخش سوم ارائه شده بود، برای ارزیابی دقت مدل استفاده می‌شود. لازم به توضیح است که نتایج تجربی از آزمایش روی ورق‌های آلومینیومی با

چهار بخش اصلی است: (۱) واحد اشتعال (۲) شیر کنترل گاز (۳) واحد سیستم اندازه‌گیری فشار (۴) واحد شکل‌دهی (توضیحات تکمیلی در مورد هندسه و نحوه عملکرد سامانه در مراجع [۲۹-۳۱] ارائه شده است).

نمونه ورق‌های مورد آزمایش از جنس آلیاژ آلومینیوم با چگالی  $2700 \text{ kg/m}^3$  و تنش تسلیم استاتیکی  $119 \text{ MPa}$  در ضخامت‌های ۱ و ۲ میلی‌متر است [۲۹-۳۱]. در ابتدا نمونه ورق‌ها به صورت مستطیلی در ابعاد  $345 \times 290$  میلی‌متر مربع برش زده شدند. در این تحقیق همچنین از روکش پلیمری پلی‌اوره با چگالی  $950 \text{ kg/m}^3$  و تنش تسلیم استاتیکی  $16/2 \text{ MPa}$  جهت بهبود مقاومت و تقویت ورق‌های آلومینیومی در برابر بار انفجاری استفاده شده است.

با توجه به توضیحات ارائه شده، ۲۰ ساختار دولایه فلز-پلیمری در چهار گروه‌بندی E، F، G و H به منظور بررسی تغییر شکل پلاستیک ورق‌های آلومینیومی تقویت شده با روکش پلی‌اوره در برابر بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها ساخته شده‌اند. در این ساختارها، لایه جلویی و عقبی به ترتیب از جنس آلومینیوم و پلی‌اوره در نظر گرفته شده و هر گروه آزمایشی تحت پنج بارگذاری با فشارهای قبل از انفجار متفاوت، مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول ۱، نتایج آزمایش‌های انجام شده روی ساختارهای دولایه فلز-

جدول ۱- نتایج کارهای تجربی

شماره آزمایش	ایمپالس (N·s)	فشار اکسیژن (bar)	فشار استیلن (bar)	بیشترین خیز دائمی (mm)
E-1	۱۹/۱	۰/۲	۰/۱۵	۳۴/۲
E-2	۲۸/۱	۰/۳	۰/۲۵	۴۷/۴
E-3	۳۲/۳	۰/۳۵	۰/۲۵	پارگی
E-4	۴۱/۸	۰/۴	۰/۳	پارگی
E-5	۴۹/۴	۰/۶	۰/۴	پارگی
F-6	۱۹/۱	۰/۲	۰/۱۵	۳۰/۱
F-7	۲۸/۱	۰/۳	۰/۲۵	۴۲/۱
F-8	۳۲/۳	۰/۳۵	۰/۲۵	۴۸/۱
F-9	۴۱/۸	۰/۴	۰/۳	پارگی
F-10	۴۹/۴	۰/۶	۰/۴	پارگی
G-11	۱۹/۱	۰/۲	۰/۱۵	۲۱/۹
G-12	۲۸/۱	۰/۳	۰/۲۵	۳۰/۷
G-13	۳۲/۳	۰/۳۵	۰/۲۵	۳۵/۵
G-14	۴۱/۸	۰/۴	۰/۳	۴۶/۸
G-15	۴۹/۴	۰/۶	۰/۴	پارگی
H-16	۱۹/۱	۰/۲	۰/۱۵	۱۹/۸
H-17	۲۸/۱	۰/۳	۰/۲۵	۲۷/۳
H-18	۳۲/۳	۰/۳۵	۰/۲۵	۳۱/۸
H-19	۴۱/۸	۰/۴	۰/۳	۴۱/۸
H-20	۴۹/۴	۰/۶	۰/۴	۴۸/۳

کوپر-سیموندز ثابت ( $D = 6500s^{-1}$  و  $q = 4$ ) [۳۷-۳۹] در نظر گرفته شده‌اند. این در صورتی است که برای روکش پلیمری، حساسیت ماده به نرخ کرنش در نظر گرفته نمی‌شود. با توجه به توضیحات ارائه شده نتایج تحلیلی به‌دست آمده برای خیز نرمال شده برحسب نتایج تجربی متناظر با آن در شکل ۴ و ۵ رسم شده است. در این اشکال، خط‌چین آبی‌رنگ با شیب ۱، نشان‌دهنده تطابق کامل نتایج تحلیلی و تجربی ارائه شده در تحقیق حاضر است؛ همچنین، محدوده بین دو خط مشکی‌رنگ، محدوده‌ای است که در آن خطای پیش‌بینی کمتر از ۱۰٪ است و جهت سنجش میزان دقت مدل تحلیلی پیشنهادی رسم شده است. شایان توجه است که محدوده بین دو خط‌چین بلند مشکی‌رنگ بیانگر پیش‌بینی داده‌های تجربی با خطای کمتر از ۲۰٪ است. همچنین برای مقایسه بهتر نتایج در شکل‌های ارائه شده، مقادیر خطای جذر میانگین مربعات برای دو حالت پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی نمونه بدون و با در نظر گرفتن انرژی کرنشی خمشی در تحلیل محاسبه شده‌اند.

همان‌طور که مشخص است، نتایج ارائه شده در شکل ۴ و ۵، نشان‌دهنده تطابق خوب بین نتایج تجربی و تحلیلی ارائه شده برای ساختارهای دولایه فلز-پلیمری در این تحقیق است، به‌طوری‌که در شکل ۴؛ یعنی، هنگامی که اثر نیروهای خمشی از تحلیل حذف شده است، به ترتیب ۷۹٪ و ۱۰۰٪ از داده‌ها در محدوده خطای پیش‌بینی کمتر از ۱۰٪ و ۲۰٪ قرار می‌گیرند؛ همچنین، نتایج موجود در شکل ۵ نشان می‌دهد، به ترتیب ۴۳٪ و ۱۰۰٪ از داده‌های تجربی در محدوده خطای پیش‌بینی کمتر از ۱۰٪ و ۲۰٪ قرار می‌گیرند. یکی از نکات قابل‌تأمل در این شکل این است که برخلاف تحقیقات پیشین روی ساختارهای فلزی [۲۹-۳۱]، افزودن اثر انرژی کرنشی خمشی به تحلیل موجب بالا رفتن دقت پیش‌بینی نمی‌شود و در مقایسه با حالتی که تنها نیروهای غشایی در تحلیل در نظر گرفته شده‌اند، ۵ داده کمتر در محدوده بین دو خط مشکی‌رنگ (خطای کمتر از ۱۰٪) قرار می‌گیرند. یکی دیگر از نکات قابل‌توجه در این نمودار این است که در تمامی گروه‌های آزمایشی، مقادیر تجربی بیشترین خیز دائمی ساختار دولایه فلز-پلیمری از مقادیر پیش‌بینی شده بیشتر هستند. برای پاسخ به علت به وجود آمدن این دو نکته مهم در نمونه‌های دولایه فلز-پلیمری در

ضخامت ۱ و ۲ میلی‌متر حاصل شده که هنگام ساخت نمونه دولایه فلز-پلیمری، این ورق‌ها توسط لایه‌های پلیمری پلی‌اوره با ضخامت ۳ و ۴ میلی‌متر تقویت شده است. ذکر این نکته ضروری است که نتایج تحلیلی برای حالتی ارائه می‌گردد که در آن کمیت‌های ماده در معادله ساختاری

حاصل از انفجار مخلوط گازها استفاده می‌شود، با این تفاوت که اثر حساسیت ماده پلیمری به نرخ کرنش در تحلیل ابعادی در نظر گرفته نمی‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از روش ریاضی پیشنهادی برای ضرایب مجهول در معادلات ۴۴ و ۴۶، به‌صورت معادلات ۶۴ و ۶۵ است.

$$\frac{W_0}{H_f} = 4.91 \cdot \psi_{q,GDF}^{double} \quad (64)$$

$$\frac{W_0}{H_f} = 0.895 \cdot \psi_{q,D}^{double} \quad (65)$$

که در آن‌ها

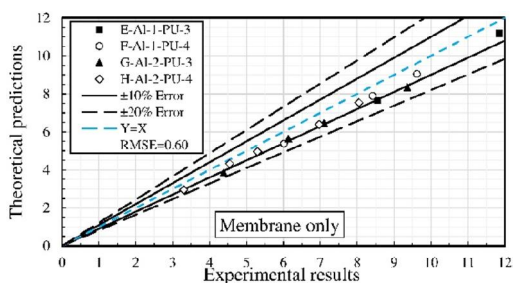
$$\psi_{q,GDF}^{double} = \left(\frac{L}{H_b}\right)^{0.286} \cdot \left(\frac{B}{H_f}\right)^{1.61} \cdot \left(\frac{P_{O_2} P_{C_2H_2}}{\sigma_{0,b} \sigma_{0,f}}\right)^{0.486} \cdot \left(\frac{1}{\xi_f}\right)^{0.37} \quad (66)$$

$$\psi_{q,GDF}^{double} = \left(\frac{L}{H_b}\right)^{0.202} \cdot \left(\frac{B}{H_f}\right)^{0.741} \cdot \left(\frac{\rho V_{0,b}^2}{\sigma_{0,b}}\right)^{0.001} \cdot \left(\frac{\rho V_{0,f}^2}{\sigma_{0,f}}\right)^{0.45} \cdot \left(\frac{1}{\xi_f}\right)^{-0.098} \quad (67)$$

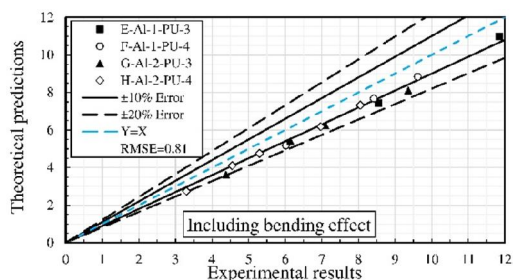
برای تمامی لایه‌بندی‌های ارائه شده در جدول ۱، خیز نرمال شده ساختارهای دولایه فلز-پلیمری به دست آمده از پیش‌بینی مدل‌های تجربی ارائه شده در معادلات ۶۴ و ۶۵ برحسب نتایج تجربی متناظر با آن‌ها به ترتیب در شکل ۶ و شکل ۷ نمایش داده شده و مقایسه گردیده‌اند.

با بررسی نتایج ارائه شده در نمودارهای مذکور آشکار است که به ترتیب ۸۶٪ و ۱۰۰٪ از داده‌های تجربی این تحقیق برای ساختارهای دولایه فلز-پلیمری در محدوده قابل اطمینان تعریف شده بین دو خط ممتد مشکی تجمع دارند و به‌تبع آن، این نتیجه حاصل می‌شود که معادلات ۳۴ و ۳۵، پیش‌بینی دقیقی از میزان بیشترین خیز دائمی ورق‌های آلومینیومی تقویت شده با روکش پلی‌اوره تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها دارد. شایان توجه است که ترتیب قرارگیری لایه‌ها در پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی این ساختارهای بسیار مؤثر بوده و رابطه‌های تجربی پیشنهادی برای حالتی است که از روکش پلیمری به‌عنوان لایه عقبی و تقویت‌کننده استفاده شده است.

مقایسه با ساختارهای دولایه، می‌توان به استفاده از روکش پلیمری پلی‌اوره با درصد ازدیاد طول زیاد نسبت به ورق فولادی به‌عنوان تقویت‌کننده اشاره کرد.



شکل ۴- مقایسه بین پیش‌بینی مدل تحلیلی و مقادیر اندازه‌گیری شده خیز نرمال شده با در نظر گرفتن تنها نیروهای غشایی



شکل ۵- مقایسه بین پیش‌بینی مدل تحلیلی و مقادیر اندازه‌گیری شده خیز نرمال شده با در نظر گرفتن نیروهای خمشی و غشایی

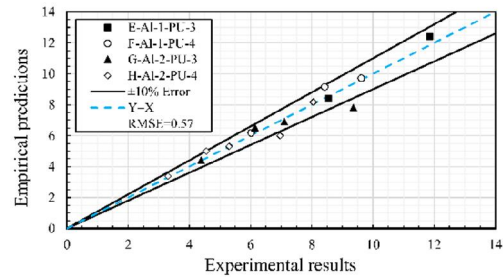
## ۷- ارائه مدل تجربی و بررسی نتایج

در بخش سوم، دو عدد بی‌بعد  $\psi_{q,GDF}^{double}$  و  $\psi_{qD}^{double}$  برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختارهای دولایه تحت بار دفعی ارائه شد. همان‌طور که بیان شد، عدد بی‌بعد اول بر اساس پیش فشارهای گازهای اکسیژن و استیلن قبل از انفجار بوده و عدد بی‌بعد دوم بر مبنای پارامتر مهم ایمپالس است. با توجه به هدف تحقیق حاضر که استفاده از روش‌های مشابه برای پیش‌بینی تحلیلی و تجربی پاسخ پلاستیک ساختارهای تک لایه [۲۹ و ۳۰]، دولایه [۳۱] و دولایه فلز-پلیمری تحت بار دفعی است، لذا از اعداد بی‌بعد پیشنهادی در بخش قبلی برای استخراج دو معادله تجربی برای پیش‌بینی خیز ساختارهای دولایه فلز-پلیمری تحت بار دفعی

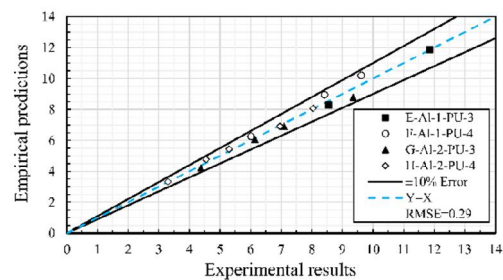
ساختار، گشتاورهای خمشی و نیروهای غشایی، معادلات حاکم بر ورق چهارگوش به فرم بی‌بعد تبدیل شد. در نهایت، معادله دیفرانسیل بی‌بعد شده بیانگر سه جنبه تأثیرگذار بر پاسخ دینامیکی سازه، یعنی؛ هندسه ساختار، نسبت بار دینامیکی اعمالی به مقاومت ماده و توانایی مقاومت دینامیکی ماده در برابر تغییر شکل پلاستیک بود که هرکدام از این جنبه‌ها به‌عنوان یک عدد بی‌بعد برای توصیف پاسخ غیر الاستیک بیان شد. شایان ذکر است که برای ساختارهای دولایه فلز-پلیمری تحت بار انفجار مخلوط گازها دو رابطه تجربی ارائه شد که رابطه اول برحسب پیش فشار گازها و رابطه دوم بر مبنای ایمپالس بود. مزیت اصلی رابطه اول این است که پیش‌بینی خوبی از خروجی مسئله قبل از آزمایش می‌دهد؛ اما مدل پیشنهادی دوم تنها مختص بار دفعی حاصل از انفجار گازها نبوده و توانایی پیش‌بینی داده‌های تجربی مرتبط با بار دفعی را نیز دارد.

## ۹- مراجع

- [1] Mynors D J, Zhang B (2002) Applications and capabilities of explosive forming. J Mater Process Tech 125: 1-25.
- [2] Babaei H, Darvizeh A, Alitavoli M, Mirzababaei Mostofi T (2015) Experimental and analytical investigation into plastic deformation of circular plates subjected to hydrodynamic loading. Modares Mechanical Engineering 15(2): 305-312. (In Persian)
- [3] Babaei H, Mirzababaei Mostofi T, Alitavoli M (2015) Experimental study and analytical modeling for inelastic response of rectangular plates under hydrodynamic loads. Modares Mechanical Engineering 15(4): 361-368. (In Persian)
- [4] Babaei H, Mirzababaei Mostofi T, Alitavoli M (2017) Experimental and theoretical study of large deformation of rectangular plates subjected to water hammer shock loading. Proc Inst Mech Eng-Part E: J Process Mech Eng 231(3):490-496.
- [5] Babaei H, Mirzababaei Mostofi T, Alitavoli M (2015) Study on the response of circular thin plate under low velocity impact. Geomech Eng 9(2): 207-218.
- [6] Jamali A, Babaei H, Nariman-Zadeh N, Ashraf Taleh SH, Mirzababaei Mostofi T (2016) Multi-objective optimum design of ANFIS for modelling and prediction of deformation of thin plates subjected to hydrodynamic impact loading. Proc Inst Mech Eng-Part L J Mater Des Appl 1464420716660332.



شکل ۶- مقایسه بین پیش‌بینی مدل تجربی ارائه شده در معادله ۶۴ و مقادیر اندازه‌گیری شده خیز نرمال شده



شکل ۷- مقایسه بین پیش‌بینی مدل تجربی ارائه شده در معادله ۶۵ و مقادیر اندازه‌گیری شده خیز نرمال شده

## ۸- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، تغییر شکل بزرگ پلاستیک ورق‌های نازک آلومینیومی تقویت شده با روکش پلیمری پلی‌اوره تحت بارگذاری دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها به‌صورت تجربی و مدل‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش مدل‌سازی تحلیلی با استفاده از روش انرژی بر مبنای تئوری حد بالا و با فرض گسترده‌ی تغییر شکل، رابطه‌ای برای پیش‌بینی بیشترین خیز دائمی ساختار دولایه فلز-پلیمری تحت بار دفعی حاصل از انفجار مخلوط گازها ارائه شد. در این رابطه، تأثیر نیروهای غشایی و گشتاورهای خمشی و همچنین تأثیر پارامترهایی مانند، ابعاد و هندسه ساختار، جنس ماده فلزی و روکش پلیمری، حساسیت ماده به نرخ کرنش و میزان انرژی وارده یا همان ایمپالس در تحلیل وارد شد. مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج تجربی نشان‌دهنده دقت بالای روش مدل ارائه شده است؛ به‌طوری‌که داده‌ها در محدوده‌ای با خطای قابل قبول قرار گرفته‌اند. در بخش مدل‌سازی تجربی بر مبنای اعداد بی‌بعد جدید، در اولین قدم، با تعریف پارامترهایی بی‌بعد برای بیشترین خیز دائمی، هندسه

- [19] Kleiner M, Hermes M, Weber M, Olivier H, Gershteyn G, Bach FW, Brosius A (2007) Tube expansion by gas detonation. *Product Eng* 1(1): 9-17.
- [20] Meybodi MK, Bisadi H (2009) Gas Detonation Forming by a Mixture of H<sub>2</sub>+ O<sub>2</sub> Detonation. *World Acad Sci Eng Tech* 33: 55-58.
- [21] Meybodi MK, Aghazadeh BS, Bisadi H (2013) Efficient oxyhydrogen mixture determination in gas Detonation forming. *Int J Mech Mechatron Eng* 7: 1748-1754.
- [22] Babaei H, Mostofi TM, Sadraei SH (2015) Effect of gas detonation on response of circular plate-experimental and theoretical. *Struct Eng Mech* 56(4): 535-548.
- [23] Babaei H, Mostofi TM, Alitavoli M (2015) Experimental investigation and analytical modelling for forming of circular-clamped plates by using gases mixture detonation. *Proc Inst Mech Eng-Part C J Mech Eng Sci* 0954406215614336.
- [24] Babaei H, Mostofi TM, Alitavoli M, Darvizeh A (2016) Empirical modelling for prediction of large deformation of clamped circular plates in gas detonation forming process. *Exp Tech* 40(6): 1485-1494.
- [25] Babaei H, Mostofi TM, Namdari-Khalilabad M, Alitavoli M, Mohammadi K (2017) Gas mixture detonation method, a novel processing technique for metal powder compaction: Experimental investigation and empirical modeling. *Powder Tech* 315: 171-81.
- [26] Patil SP, Popli M, Jenkoug V, Markert B (2016) Numerical modelling of the gas detonation process of sheet metal forming. *J Phys Conf Ser* 734(3): 032099.
- [27] V. Jenkoug, S. Patil, and B. Markert (2016) Joining of tubes by gas detonation forming. *J Phys Conf Ser* 734(3): 032101.
- [28] Patil SP, Prajapati KG, Jenkoug V, Olivier H, Markert B (2017) Experimental and numerical studies of sheet metal forming with damage using gas detonation process. *Metals* 7(12): 556-572.
- [29] Mostofi TM, Babaei H, Alitavoli M. The influence of gas mixture detonation loads on large plastic deformation of thin quadrangular plates: Experimental investigation and empirical modelling. *Thin Walled Struct* 118:1-11.
- [30] Mirzababaie Mostofi T, Babaei H, Alitavoli M (2017) Experimental and theoretical study on large ductile transverse deformations of rectangular plates subjected to shock load due to gas mixture detonation. *Strain* 53(4): e12235.
- [31] Mostofi TM, Babaei H, Alitavoli M, Lu G, Ruan D (2019) Large transverse deformation of double-
- [7] Babaei H, Mirzababaie Mostofi T, Alitavoli M, Namdari M (2015) Experimental investigation and a model presentation for predicting the behavior of metal and alumina powder compaction under impact loading. *Modares Mechanical Engineering* 15(5): 357-366. (In Persian)
- [8] Alitavoli M, Babaei H, Mahmoudi A, Golbaf A, Mirzababaie Mostofi T (2015) Experimental and analytical study of effective factors on compaction process of aluminium powder under the impact load by low speed. *Modares Mechanical Engineering* 15(7): 22-30. (In Persian).
- [9] Jones N (2010) Inelastic response of structures due to large impact and blast loadings. *J Strain Anal Eng Des* 45(6): 451-464.
- [10] Babaei H, Darvizeh A (2010) Experimental and analytical investigation of large deformation of thin circular plates subjected to localized and uniform impulsive loading. *Mech Based Des Struc* 38(2) : 171-189.
- [11] Babaei H, Darvizeh A (2011) Investigation into the Response of Fully Clamped Circular Steel, Copper, and Aluminum Plates Subjected to Shock Loading. *Mech Based Des Struc* 39(4): 507-526.
- [12] Micallef K, Fallah AS, Pope DJ, Louca LA (2013) Dynamic performance of simply supported rigid plastic circular thick steel plates subjected to localized blast loading. *J Eng Mech* 140(1): 159-171.
- [13] Jones N (2014) Dynamic inelastic response of strain rate sensitive ductile plates due to large impact, dynamic pressure and explosive loadings. *Int J Impact Eng* 74: 3-15.
- [14] Mostofi TM, Babaei H, Alitavoli M (2016) Theoretical analysis on the effect of uniform and localized impulsive loading on the dynamic plastic behavior of fully clamped thin quadrangular plates. *Thin-Walled Struct* 109: 367-376.
- [15] Mostofi TM, Golbaf A, Mahmoudi A, Alitavoli M, Babaei H (2018) Closed-form analytical analysis on the effect of coupled membrane and bending strains on the dynamic plastic behaviour of fully clamped thin quadrangular plates due to uniform and localized impulsive loading. *Thin-Walled Struct* 123: 48-56.
- [16] Honda A, Suzuki M (1999) Sheet metal forming by using gas imploding detonation. *J Mater Process Tech* 85(1-3): 198- 203.
- [17] Yaşar M (2004) Gas detonation forming process and modeling for efficient spring-back prediction. *J Mater Process Tech* 150(3): 270- 279.
- [18] Yaşar M, Demirci HI, Kadi I (2006) Detonation forming of aluminium cylindrical cups experimental and theoretical modelling. *Mater Des* 27(5): 397-404

- Mech Eng-Part L J Mater Des Appl 1464420716654195.
- [39] Mostofi TM, Babaei H, Alitavoli M, Hosseinzadeh S (2017) On dimensionless numbers for predicting large ductile transverse deformation of monolithic and multi-layered metallic square targets struck normally by rigid spherical projectile. *Thin Walled Struct* 112: 118-24.
- [40] Babaei H, Mostofi TM, Alitavoli M, Saeidinejad A (2017) Experimental investigation and dimensionless analysis of forming of rectangular plates subjected to hydrodynamic loading. *J Appl Mech Tech Phys* 58(1):139-47.
- [41] Babaei H, Mirzababaie Mostofi T (2016) Modeling and prediction of fatigue life in composite materials by using singular value decomposition method. *Proc Inst Mech Eng-Part L J Mater Des Appl* 1464420716660875.
- [42] Rezasafat M, Mirzababaie Mostofi T, Babaei H, Ziya-Shamami M, Alitavoli M (2018) Dynamic plastic response of double-layered circular metallic plates due to localized impulsive loading. *Proc Inst Mech Eng-Part L J Mater Des Appl* 1464420718760640.
- [43] Zhu F, Wang Z, Lu G, Zhao L (2010) Analytical investigation and optimal design of sandwich panels subjected to shock loading. *Mater Des* 30(1): 91-100.
- [44] Babaei H, Mostofi TM, Alitavoli M (2017) Experimental and analytical investigation into large ductile transverse deformation of monolithic and multi-layered metallic square targets struck normally by rigid spherical projectile. *Thin Walled Struct* 107: 257-265.
- layered rectangular plates subjected to gas mixture detonation load. *Int J Impact Eng* 125: 93-106.
- [32] Li F, Mo J, Zhou H, Fang Y (2013) 3D numerical simulation method of electromagnetic forming for low conductive metals with a driver. *Int J Adv Manuf Tech* 64(9-12): 1575-1585.
- [33] Gillard AJ, Golovashchenko SF, Mamutov AV (2013) Effect of quasi-static prestrain on the formability of dual phase steels in electrohydraulic forming. *J Manuf Process* 15(2): 201-218.
- [34] Li Q, Jones N (2000) On dimensionless numbers for dynamic plastic response of structural members. *Arch Appl Mech* 70(4): 245-254.
- [35] Park BW, Cho SR (2006) Simple design formulae for predicting the residual damage of unstiffened and stiffened plates under explosion loadings. *Int J Impact Eng* 32(10): 1721-1736.
- [36] Yao S, Zhang D, Lu F (2015) Dimensionless numbers for dynamic response analysis of clamped square plates subjected to blast loading. *Arch Appl Mech* 85(6): 735-744.
- [37] Babaei H, Mirzababaie Mostofi T, Armoudli E (2017) On dimensionless numbers for the dynamic plastic response of quadrangular mild steel plates subjected to localized and uniform impulsive loading. *Proc Inst Mech Eng-Part E J Process MechEng* 231(5): 939-950.
- [38] Babaei H, Mirzababaie Mostofi T (2016) New dimensionless numbers for deformation of circular mild steel plates with large strains as a result of localized and uniform impulsive loading. *Proc Inst*